LEONHARD EULER
CORRESPONDENCE

OPERA OMNIA

SERIES QUARTA A:
COMMERCIUM
EPISTOLICUM
VOL. IV

EDITORS
FRANZ LEMMERMEYER
MARTIN MATTMÜLLER

ONLINE EDITION
BERNOULLI-EULER-GESELLSCHAFT
BASEL 2016

PUBLIKATIONEN DES BERNOULLI-EULER-ZENTRUMS

BAND 1, 2016

Online-Schriftenreihe
herausgegeben vom Bernoulli-Euler-Zentrum
und von der Bernoulli-Euler-Gesellschaft

Basel

CORRESPONDENCE OF LEONHARD EULER

WITH

CHRISTIAN GOLDBACH

EDITED BY

FRANZ LEMMERMEYER AND MARTIN MATTMÜLLER

ONLINE EDITION
BERNOULLI-EULER-GESELLSCHAFT
BASEL 2016

Editors

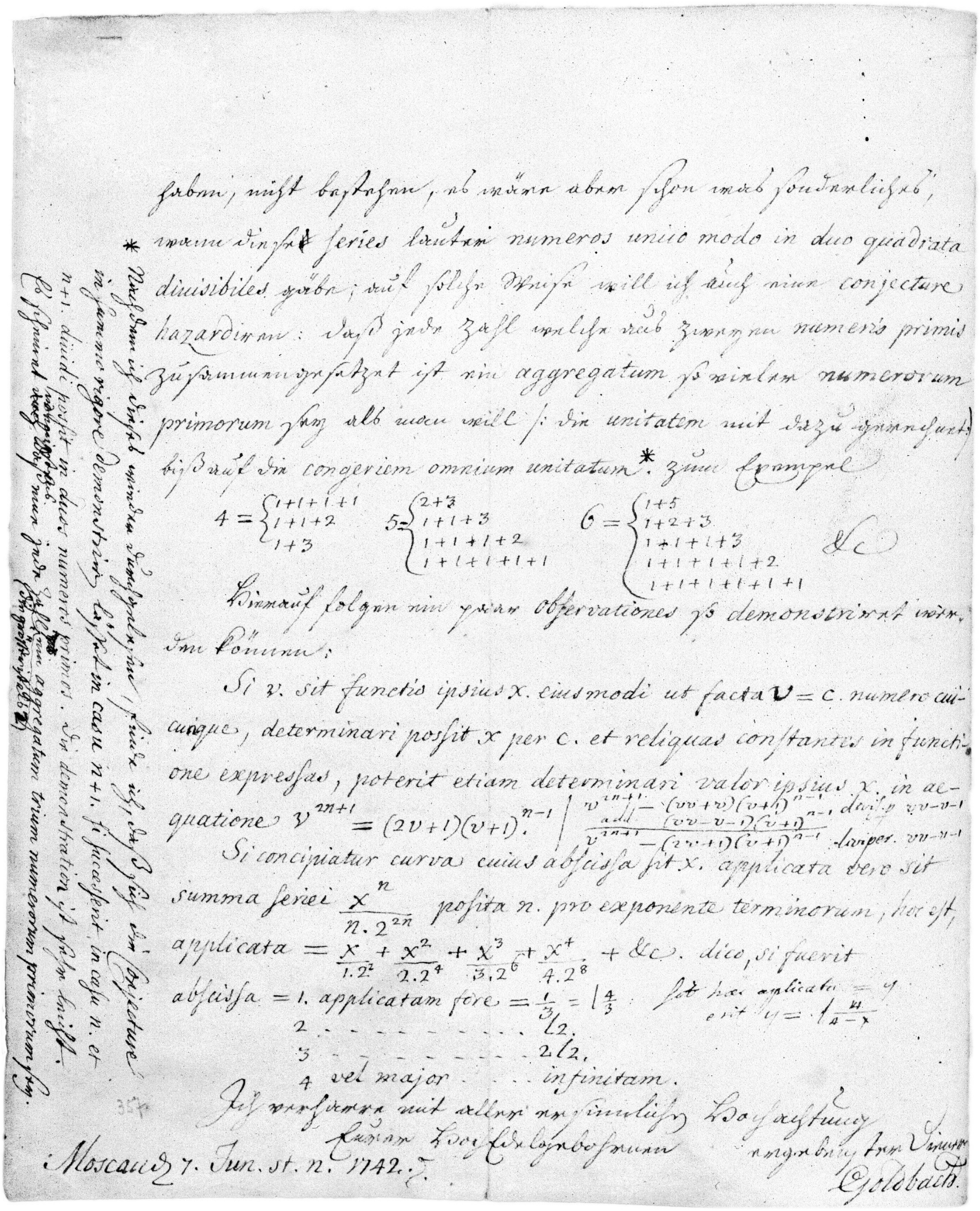
Franz Lemmermeyer
Jagstzell, Deutschland

Martin Mattmüller
Bernoulli-Euler-Zentrum
Universität Basel
Basel

PRELIMINARY VERSION!

The final and official version with DOI and ISBN will appear on «Publikationen des Bernoulli-Euler-Zentrums»

Online-Edition des Bandes IVA 4 der Opera Omnia Leonhardi Euleri,
erschienen 2015 bei Springer Basel
ISBN 978-3-0348-0879-8



haben, nicht bestehen, es wäre aber schon was sonderliches, wenn diese series lauter numeros unico modo in duo quadrata divisibiles gäbe; auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardiren: dass jede Zahl welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey als man will (die unitatem mit dazu gerechnet) bis auf die congeriem omnium unitatum.* zum Exempel

$$4 = \begin{cases}1+1+1+1\\1+1+2\\1+3\end{cases} \quad 5 = \begin{cases}2+3\\1+1+3\\1+1+1+2\\1+1+1+1+1\end{cases} \quad 6 = \begin{cases}1+5\\1+2+3\\1+1+1+3\\1+1+1+1+2\\1+1+1+1+1+1\end{cases} \&c$$

Hierauf folgen ein paar observationes so demonstrirt werden können:

Si v. sit functio ipsius x. eiusmodi ut facta $v = c$. numero cuicunque, determinari possit x per c. et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius x. in aequatione $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$.

Si concipiatur curva cuius abscissa sit x, applicata vero sit summa seriei $\frac{x^n}{n.2^{2n}}$ posita n. pro exponente terminorum, hoc est, applicata $= \frac{x}{1.2^2} + \frac{x^2}{2.2^4} + \frac{x^3}{3.2^6} + \frac{x^4}{4.2^8} + \&c.$ dico, si fuerit abscissa = 1. applicatam fore $= \frac{1}{3}$ $= l\frac{4}{3}$

2 . . . . $l2$

3 . . . . $2l2$

4 vel major . . . . infinitam.

Ich verharre mit aller ersinnlichen Hochachtung
Euer Hochedelgebohren
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau d. 7. Jun. st. n. 1742.

* Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, dass sich die conjecture in summo rigore demonstriren lässet in casu n+1, si successerit in casu n. et n+1. dividi possit in duos numeros primos. Die demonstration ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 2, ein aggregatum trium numerorum primorum sey.

fit haec applicata = y erit $y = l\frac{4}{4-x}$

Goldbach's letter n° 51 to Euler, (May 27th) June 7th, 1742: reproduction of the fourth page (PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 44v)

The paragraph written in the left margin contains the original form of the (ternary) Goldbach Conjecture – now the Goldbach-Helfgott Theorem (see Section 2.1.3. of the Introduction, *infra* p. 47, and letter n° 51, note 13).

Two remarks jotted down by Euler between the lines of Goldbach's original missive, which complement or correct other statements by Goldbach (cf. n° 51, notes 14–15), can also be seen.

Table of Contents

Preface

Habent sua fata editiones. Already in the first project for Leonhard Euler's *Opera Omnia*, drafted in 1910, it was mentioned that some parts at least of Euler's scientific correspondence should be included in the edition. However, priority was then given to the (re)publication of Euler's printed works in three series devoted to mathematics, to mechanics and astronomy, and to general physics; the issue of editing Euler's letters and the rest of his manuscript heritage was postponed indefinitely.

The first 20th-century initiatives for publishing part of Euler's correspondence were not related to the *Opera Omnia* edition, but originated with a group of historians of science based at the Soviet Academy of Sciences in Leningrad in the 1930s. Various inventories and collections were published in the following decades, presenting to the public for the first time Euler's correspondence with such eminent scientists as Poleni, Delisle, Lomonosov, Tobias Mayer and Bonnet. The most ambitious project of this school was planned in the context of Euler's 250th anniversary as a joint venture between the Leningrad Section of the Soviet Academy of Sciences and the Academy of Sciences of the German Democratic Republic. Between 1959 and 1976, four major volumes of Euler's letters, mostly exchanged during his Berlin period with his former colleagues at Petersburg, were published by a team led by Adol'f Pavlovich Yushkevich and Eduard Winter; this project included an edition of the Euler-Goldbach correspondence that appeared in Berlin in 1965.

Spurred by these activities, the Swiss Euler Committee finally decided in 1967 to start an additional series of the *Opera Omnia*, or rather two sub-series: IVA for the correspondence and IVB for the unpublished manuscripts (the latter was later converted into a web-based digital project that is currently being planned). Since most of the originals were preserved in the Leningrad Archive of the Soviet Academy of Sciences, and since a considerable number of Euler experts lived and worked in the Soviet Union, Series IV was conceived as a shared project of the Swiss and the Soviet Academies and led by a joint Editorial Committee.

The first volume of series IVA was published in 1975; it is an inventory of all letters from and to Euler known at that time (ca. 3100 items). For each letter (identified by a *Repertorium* number), the volume lists the date and place, version (as an original, copy, excerpt, ...), language, size, location(s) and extant publications; a short summary follows. Three volumes of correspondence were produced up to 1998: they comprise the letters exchanged with Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Maupertuis, Frederick II, Johann I and Nicolaus I Bernoulli.

The Goldbach correspondence had not been given a high priority, since it was already available in a modern edition. Only in 2001 was the task of editing volume IVA 4, planned as a basically new edition of the Euler-Goldbach correspondence, assigned to Günther Frei and Martin Mattmüller. The former, a number theorist and historian of mathematics from Switzerland, had held a chair at Laval University (Québec) for most of his career; he had published extensively on the history of number theory in the 19th and 20th centuries and been a member of the Euler Committee since 1995. The latter had graduated in mathematics in Basel in 1983, worked for the Bernoulli Edition from 1987 to 2000, and joined the Euler Edition in 2001 as a paid part-time collaborator. Later he acted as archivist of the Euler Archive in Basel and secretary of the Euler Committee.

Mattmüller started his work on the Goldbach correspondence by establishing a new transcription of the letters from (photographs of) the manuscripts. In 2002 it was decided to use English as the working language for the volume and to add an English translation of the source texts with their peculiar mixture of 18th-century German and Latin, in order to make them accessible to a wider range of non-specialist readers worldwide. Early in 2004, a provisional version of the transcriptions and translations in TEX was available. The next years were mainly spent in grouping the topics addressed in the correspondence and studying its scientific and social setting; this resulted in a draft volume submitted to the Editorial Committee, which specified the distribution of the notes and introductory sections among the two editors. However, in 2008, at the moment when he had planned to start on his part of the commentary, Günther Frei – by then retired and living near Zurich – fell seriously ill and had to abandon the project.

Fortunately, on the recommendation of its member Norbert Schappacher, the Euler Committee was able to find a highly qualified successor who was willing to take over at short notice in January 2009. Franz Lemmermeyer, who had taken his doctoral degree in algebraic number theory with Peter Roquette in Heidelberg, had returned to Germany after some years as a visiting Associate Professor at Bilkent University, Ankara, and now teaches mathematics at a girls' high school in Ellwangen (Württemberg). He has widely published on number theory and its history; his book on the development of reciprocity laws from Euler to Eisenstein has become the standard reference on the subject.

Since Lemmermeyer is working full-time in a place where access to historical sources and older secondary literature is more limited than at the Basel University Library, some tasks had to be redistributed. In the present volume, Sections 1, 2.5–2.8 and 3 of the Introduction and most notes on historical and biographical issues have been outlined by Mattmüller; Sections 2.1–2.4 of the Introduction – its central part with respect to its scientific interest – and almost all notes on the mathematical content of the correspondence are due to Lemmermeyer. The index part has mainly been compiled by Mattmüller except for the bibliography, to which both editors have contributed. In any case, after several cycles of mutual review and revision, both editors take full responsibility for the final version of the volume.

The publication schedule had to be revised several times – partly due to the circumstances just described, partly to other tasks which claimed much of Mattmüller's time: establishing a working environment and inventory at the Basel Euler Archive, organising the manifold public activities for the tercentenary of Euler's birth at Basel, planning and effecting the transfer of the Archive to its successor, the Bernoulli-Euler-Zentrum established at the Basel University Library in 2012. It is always hard to navigate between the opposite dangers of indefinite delay and premature, careless publication: the editors express the hope that an acceptable balance has by now been reached.

If this is indeed true, this is due – here as ever – to numerous colleagues and fellow researchers who have helped with the preparation of the present edition. Some of them should specially be pointed out, since their contribution has been crucial and the result would be significantly worse without them:

- Siegfried Bodenmann (Basel), who defined the TEX framework for the typographical design of this volume and for the setup of the multiple indices, patiently coping with the idiosyncratic specifications of the Euler Edition (and the maverick preferences of one of the editors),
- Gisela Kleinert (Halle/Saale), who inspected the transcriptions of the source texts several times with a hawk's eyes and unrelenting insistence on the consistent application of explicit rules for dealing with the many points that have to be decided one way or the other in such a long-range endeavour,
- Uta Monecke (Halle/Saale), who meticulously examined the various indices for consistency and uniformity and indefatigably helped with checking the many cross-references,
- Jordan Bell (Toronto), Fred Rickey (Cornwall, NY) and Johan Stén (Espoo, Finland), who read through the entire volume in order to help with improving the editors' sometimes stiffly accentuated English, incidentally detecting many other inaccuracies and deficiencies.

In addition to these volunteers who helped with the overall quality control of the project, the editors wish to thank the many colleagues and correspondents who have contributed individual references and corrections: Ronald S. Calinger, "engelbrekt" on MathOverflow, Lutz Felbick, Emil A. Fellmann (†), Walter Gautschi, Damaris Gehr, Sulamith Gehr, Peter Hoffmann, Vanja Hug, Gleb K. Mikhaĭlov, Antonio Moretto, Fritz Nagel, Hanns-Peter Neumann, Glenn Roe, Norbert Schappacher, Thomas Steiner, Rüdiger Thiele, Andreas Verdun and Benno Zimmermann. Thanks are also due to Stephan Ammann, Heinz-Dieter Ecker, Anna Mätzener, the staff of the publishing house, Birkhäuser / Springer AG Basel, and that of the Basel University Library.

On behalf of the Editorial Commitee of Series IVA of the Euler Edition, I take this opportunity to express my sincere appreciation and gratitude to Franz Lemmermeyer and Martin Mattmüller, the editors of the present volume, for their meticulous and painstaking work. Deciphering illegible words and passages, dating undated letters, and identifying unknown persons were not the only challenges that had to be mastered. With considerable dexterity and expertness, they penetrated into the subtleties of a formalism that is often inaccessible even to those modern readers who have a solid mathematical background, and in the introduction and in hundreds of footnotes, they open the path to an intellectual world of the past that is in many respects the foundation of present mathematics, science and technology. Thanks to their endurance and fruitful cooperation, this new edition of the Euler-Goldbach correspondence provides deep insights into the thought of two leading scholars of the Age of Enlightenment.

Andreas Kleinert
General Editor
Opera Omnia, *Series* IVA

Introduction

1. Historical and biographical setting

Leonhard Euler is generally known as the leading mathematician and theoretical physicist of his century and one of the most productive scientists of all time; papers about single aspects of his immense work, essays on its overall significance, and biographical studies abound. By contrast, the general public has never heard of Christian Goldbach, and mathematicians associate with his name only one single idea: the "Goldbach Conjecture", a statement in number theory which is very easy to understand – one version is: "every even integer greater than 2 is the sum of two prime numbers" – but still unproved more than 250 years after he first wrote it down in 1742. If Goldbach is awarded a few lines in works of general reference, he is variously described as a German, Prussian or even Russian mathematician, the last word often being qualified by "amateur" or expanded by the statement that his professional career was in law. The first editor of the Euler-Goldbach correspondence, Euler's great-grandson Paul Heinrich Fuß, stated that "if he [Goldbach] did not become famous in any specialty, the reason must be attributed to the great universality of his knowledge".[1]

1.1. Christian Goldbach: A short biography

Before we enter into Goldbach's sole claim to lasting fame, his role as one of Euler's closest friends and most important correspondence partners for a long time, let us have a look at his formative years, his role in the establishment of the Petersburg Academy, and his later career.[2]

1 "s'il ne s'est illustré dans aucune spécialité, la cause en doit être attribuée à la grande universalité de ses connaissances" (*Correspondance*, t. I, p. XXXIII).

2 A first sketch of Goldbach's life was written by Goldbach's and Euler's colleague Gerhard Friedrich Müller when he compiled a history of the Petersburg Academy up to 1743; this was printed in 1900 in the collection *Materialy dlya istorii Akademii Nauk*, t. VI, p. 30–37 (more biographical information can be found in several other places in the same volume). An extract had already been used in French translation for the preface of Paul Heinrich Fuß's edition of the Euler-Goldbach correspondence in 1843 (*Correspondance*, t. I, p. XXX–XXXIII).
The following account relies mainly on the detailed biography of Goldbach by A.P. Yushkevich (Juškevič) and Yu.Kh. Kopelevich (Kopelevič), which is based on the large collection of Goldbach's papers at the Russian State Archive, Moscow (RGADA). The Russian original was published in 1983 by Nauka, Moscow; a German translation by Annerose and Walter Purkert appeared in 1994 as vol. 8 of the series *Vita Mathematica* published by Birkhäuser Basel.
The most substantial biographical notes on Goldbach in English that we are aware of are in the *Dictionary of Scientific Biography*, vol. V, p. 448–451 (by Michael S. Mahoney), and in the internet-based *MacTutor History of Mathematics Archive*, by John J. O'Connor and Edmund F. Robertson.

1.1.1. Youth and travels

Christian Goldbach was born on March 18th, 1690, at Königsberg in Eastern Prussia, an important provincial town with a large garrison and a university (at the end of World War II, it became part of the Soviet Union and was renamed Kaliningrad). Goldbach came from one of the city's leading commoner families: his father, Bartholomäus Goldbach (1640–1708), was its principal Lutheran minister and taught history and eloquence at the local university. Not much is known about Christian's early years, but as his diaries show, his circumstances permitted some local travelling even when he was very young. In 1706 Goldbach matriculated at the Königsberg university, the *Albertina* founded in 1544, in order to study law; but his many interests also included history, engineering, music and literature.[3] Mathematics had a particular fascination for him, which already shows in his earliest diary entries and in letters to his brother's teacher Michael Gottlieb Hansch at Leipzig.

In the summer of 1710, Goldbach left his home town for a long time and went on the *grand tour* then customary for an ambitious young intellectual. He started by visiting some of the principal German university towns (Frankfurt on the Oder, Berlin, Leipzig, Halle, where he met Christian Wolff, later Wittenberg, Jena and Erfurt); in May 1711 he called at Leipzig on the doyen of German science, Gottfried Wilhelm Leibniz, and entered into correspondence with him.[4] In 1712, we find Goldbach in the Netherlands, studying law and obtaining a degree from Groningen University; then he travels to England, visits the Royal Society and briefly meets with Newton, Halley, Flamsteed and de Moivre. At the Bodleian Library in Oxford, he strikes up an acquaintance with a Continental scholar of his own generation, Nicolaus I Bernoulli from Basel, which will be significant for his career. By way of Brussels, Goldbach arrives at Paris on May 1st, 1713, for an extended stay. In the following year he completes this impressive circuit by travelling widely in Italy – visiting Turin, Florence, Rome, Naples (where he even climbs Mount Vesuvius), Bologna, Padua, Venice – and Austria. Everywhere he sees the public sights, visits museums, libraries and learned societies, introduces himself to all the well-known scientists, always looking for recommendations and scholarly discussions on an ever-widening range of subjects. By way of Prague, Leipzig and Berlin he returns to Königsberg after more than three years on December 14th, 1714.

Young Goldbach must have made a good impression on the scholars, artists and statesmen – often well-established or even famous people – whom he met on his travels; many of them granted him favours, recommended him warmly to their colleagues or continued their discussions with him in letters on a great variety of

3 In fact, among the Goldbach papers at the Russian State Archive there is an entire tragedy in Horatian verse by the 16-year-old student which has prince Absalom from the Old Testament for a subject.

4 Four letters Leibniz had written to Goldbach were published by Sebastian Kortholt in 1734/35; an additional one and six letters by Goldbach – partly from the Leibniz papers conserved at Hanover, partly from Goldbach's copybooks – were added in the edition of the Goldbach-Leibniz correspondence by Yushkevich and Kopelevich in 1988.

topics. On his return he was able to show for his pains not only a lot of collected knowledge, but also an impressive patronage network – and, besides his academic degree, the title of Court Councillor (*Hofrat*) conferred by the Prussian minister of foreign affairs, von Ilgen, a few days after their meeting at Berlin. For the three years that he now remains at Königsberg, his networking activities continue on another level: by a vast correspondence across much of academic Europe as well as by several publications both of a literary and scientific nature. There are no explicit statements on what kind of career Goldbach planned for himself at that time, but Leibniz – then an international leader in the "republic of letters", an influential member of various academies and advisor to several princes on scientific matters – may well have presented a role model.[5] It seems significant that two important journals – the *Neue Zeitungen von gelehrten Sachen* at Leipzig and the *Nouvelles litteraires* at the Hague – printed Goldbach's Latin funeral ode (Goldbach 1717b) on the great philosopher and mathematician.

Late in 1718, Goldbach set out on another long journey, embarking for Sweden at Rostock. This time his first visits were to leading statesmen, among them State Councillor (Riksråd) Lillienstedt, who headed the Swedish delegation in the peace negotiations with Russia then under way. The implication that Goldbach may have had some kind of semi-official diplomatic mission from Ilgen during his nine-month stay in Sweden is strengthened by his introduction to the Prince Consort, later King Frederick I. However, he also found the time for conversations with scientists and engineers.

In the following years, we find Goldbach again travelling at a frenetic pace: across Denmark and all of Germany to Venice, then – based on Vienna – to most of the Middle European countries then composing the German Empire: Bavaria, Bohemia, Saxony, Hungary, even Serbia. The purpose behind all those short stays and meetings is not obvious, and Goldbach's diaries are very reticent; even at the time his friends suspected there was more on his agenda than just the pleasure of seeing ever new places. After finally returning to Prussia in 1724, he reported to statesmen, diplomats and courtiers, at one time even to the king himself, but also resumed his intense frequentation of academic and literary circles.

During all this time and in spite of the difficulties implied by his constantly changing places, Goldbach continued his vast correspondence, providing his network of philologists, antiquaries, physicists, librarians, astronomers, musicians and naturalists with news from all over Europe on subjects ranging from nuances of literary style to an edition of Kepler's manuscripts, the spontaneous generation of lower animals, a music automaton by Kircher and Orffyreus' *perpetuum mobile*: some of these topics will resurface in the Euler correspondence. The letters Gold-

5 At least this is what Goldbach's countryman Th.S. Bayer – later also a member of the Petersburg Academy – suggests in a letter written shortly after Leibniz's death in 1716: "Pondering and comparing all the circumstances I believe that you will in the future transfer Leibniz's glory to your own name and to all our native country" (Bayer's letter, which is preserved with the Goldbach papers at Moscow, is quoted here from Yushkevich / Kopelevich 1983, p. 29).

bach exchanged with some mathematicians of the "Basel school" – the brothers Nicolaus II and Daniel Bernoulli and another former student of their father's, Jacob Hermann – are of special interest for us: they will be discussed in the context of his few research publications on mathematical topics (mainly in the theory of series) and his early correspondence with Euler.

1.1.2. At the Petersburg Academy

Meanwhile, Goldbach's eye, in looking for a professional position, was more and more attracted to the East, where Tsar Peter the Great was now finalising the plans for an academy of science at his new capital, St. Petersburg. In the early 1710s, Peter had discussed this project – one element in his grand design of opening his empire towards Europe – in several meetings with Leibniz, who was fascinated by the chance of helping with the design of a model academy for the new model state that was to come into being on the "blank slate" of vast, backward Russia. Now Peter sent his librarian and advisor Johann Daniel Schumacher to France, England and Germany on a mission to study those countries' scientific institutions, draw up blueprints for the new academy and sound out potential candidates for membership. Early in 1724 the project was approved by the Russian senate and circulated in the Western scientific community by personal communication and publication in scientific journals.

Among the scholars who were asked for help with planning the future academy's structure and – even more importantly – recruiting capable scientists for membership, we find several connections of Goldbach's. Goldbach probably first learned of the project from the astronomer and physicist Doppelmayr at Nuremberg, who had been invited but did not want to join; together they decided to propose Nicolaus II Bernoulli to the future President, Peter's personal physician Lorenz Blumentrost. In October 1724, Jacob Hermann, by then professor at Frankfurt on the Oder, wrote to Goldbach that he had been offered the chair of mathematics at Petersburg but was still uncertain whether to accept. Christian Wolff at Marburg also played an important role as an advisor, and he consulted Johann I Bernoulli, then the leading teacher of mathematics in all Europe. Bernoulli refused to leave Basel himself, but adroitly negotiated the appointment of his sons Nicolaus and Daniel; both brothers – the first from Berne, the second from Padua – tried to make use of Goldbach's connections in fixing the conditions of their engagement.

In May 1725, Hermann and the physicist Georg Bernhard Bilfinger, who came from Tübingen, passed through Berlin, on the way to take up their chairs in the new academy. Goldbach was invited by the Russian ambassador to Prussia, A.G. Golovkin, to participate in several meetings with the two scientists; and evidently these encounters and the prospects Golovkin presented impressed him so much that he decided on the spot to apply for a position in Russia himself.

At the age of 35, Goldbach gave his life a decisive turn and immediately left Prussia for Petersburg, never to return. Only on a stopover at Riga did he find the time to announce his imminent arrival to President Blumentrost, offering Doppelmayr's and Wolff's testimonials as to his qualifications, listing his previous publications and referring to his many acquaintances among Blumentrost's medical colleagues. The President, who was busy preparing the opening ceremony, at once replied that all positions in the Academy were by now filled; but Goldbach travelled on, arriving at Petersburg on July 28th (old style) / August 8th (new style), 1725, three days before Hermann and Bilfinger. They at once introduced him to Blumentrost, and Goldbach's cosmopolitan charm won the President over to such a degree that he decided on the spot to make him Secretary of the Academy. A few days later, along with the four other academicians who had already reached Petersburg, Goldbach was presented to Tsarina Catherine I, the widow of Peter I, who had died half a year earlier.

On September 4th (15th), a contract was signed, by which Goldbach engaged himself to "diligently serve the Academy's progress and glory", write its history and cultivate mathematics for a period of at least five years. His salary was fixed at 600 roubles per year, plus free lodging and candles – equal to the most junior professors' wages; the best-paid member, the French astronomer Delisle, received three times as much. The Imperial Academy of Sciences at St. Petersburg – to give it its full name – at once started working; on September 28th (new style), Goldbach recorded its first official meeting in the minutes.

In the months that followed, the Academy's crew was gradually completed: to quote just a few of the members who were to become most important, the Bernoulli brothers and the historian Gerhard Friedrich Müller arrived in Petersburg late in 1725, the philologist Bayer, who had been recruited by Goldbach, and the physiologist Duvernois in 1726, the physicist Georg Wolfgang Krafft and Euler in 1727.[6] Since Goldbach's interactions with his colleagues and his research on mathematical topics – mainly in the theory of series – will be analysed in subsequent sections of this introduction and in the notes to his early correspondence with Euler, we will limit ourselves here to a few words on working conditions at the Academy in those first years.[7]

There were eleven professorships in three "classes" (departments): mathematics (in the 18th-century sense, including astronomy, geography, mechanics and naval science), physical sciences (with chemistry, botany and anatomy) and humanities (rhetoric, history and law). Several chairs had posts for adjoint members, technical staff and laboratories attached. Those members who were young and single – a

6 For a long time, all the Academy's personnel consisted of "Westerners"; most came from German-speaking countries. Only in the 1740s did Peter's project of raising an elite of native scientists and engineers begin to bear fruit and the first Russians were called to fill academic positions. Among them we find several mathematicians and physicists who had been sent to Berlin to study with Euler (S.K. Kotel'nikov, M. Sofronov, S.Ya. Rumovskiĭ); the best-known scholar among this second generation, M.V. Lomonosov, had also been supported by Euler, who was among the first to appreciate his extraordinary gifts.

7 The Russian literature on this topic is extensive; an excellent overview with many additional references is given in Nagel / Verdun 2005.

majority – lived in furnished quarters in the building which the Empress had made available to the Academy and which also housed the library and Peter's important naturalist collection (the basis of today's "Kunstkamera"). Twice a week they held meetings where one of them presented a lecture, which was then discussed – often contentiously, since widely divergent philosophical and scientific views were represented. The choice of research topics was rather free, obligations in teaching and giving expert opinions not too heavy, and research publications in the Academy's journal *Commentarii* were welcome but by no means compulsory.

Goldbach worked at the Petersburg Academy for approximately two years, keeping its records (rather perfunctorily), establishing its position in an international network by official and personal correspondence, giving speeches in his perfect prose style at its ceremonies, devising designs for the Academy's seal and publications. For the first volume of the *Commentarii* he wrote a historical preface praising Peter's merit in creating such an important and useful institution, and also contributed an obituary for Nicolaus II Bernoulli, who had died at the age of 31.

1.1.3. Scholarly advisor to princes and statesmen

This quiet life, which seems to have perfectly suited Goldbach's talents and preferences, came to an end when the Tsarina appointed Peter the Great's grandson, eleven-year-old Peter Alekseevich, as her successor and asked Goldbach, on the advice of Blumentrost and Prince A.D. Menshikov, to supervise the education of the young heir to the throne and his sister Natal'ya. In May 1727, he moved into a house next to the Winter Palace so as to be permanently available at court, obtaining a much increased salary of 2000 roubles and the rank of "Legal Councillor" (*Justizrat*). However, his new task involved him in a political tug-of-war between the "Westerner" faction and conservative Russian nobles, and after Menshikov's removal from power in September his influence on his pupil, who had meanwhile succeeded to the throne as Tsar Peter II, waned. All the same, Goldbach was obliged to follow the court in its move to the old capital Moscow in January 1728, occasionally keeping the young Tsar company on rides.

On January 18th (old style), 1730, a year after his sister, Peter died from smallpox, and his aunt Anna Ioannovna ascended to the throne. Her reign was characterised by great political instability: her favourite, Ernst Johann von Bühren (in Russian: Biron), and the German-born statesmen Ostermann and Münnich vied for power with the old nobility; wars against Poland and the Ottoman Empire imposed immense burdens on an under-developed economy. Blumentrost – still the Imperial family's personal physician and the Academy's President – and Goldbach remained at court, but kept a low profile. They maintained a regular correspondence with several academicians at Petersburg, but refused to take sides in their disputes.

In the President's absence, the Academy's capable but autocratic administrator Schumacher reigned supreme, to the dismay of most members; some of the senior professors – divided into quarrelling camps – openly refused to accept his authority, stayed away from the meetings and submitted complaints. Bilfinger (in 1730) and Hermann (in 1731) left Russia, whereas Delisle and Daniel Bernoulli had to be won over by improved contracts. It says a lot about Goldbach's diplomatic skills that he – and Euler as well – managed to stay on good or at least correct terms with all participants in these intrigues.

Goldbach returned to Petersburg early in 1732, along with Anna's court, and Blumentrost devolved most of his tasks in the Academy upon him. For the next years, Goldbach presided at the meetings, communicated instructions and dealt with the academicians' requests, mostly to their satisfaction. It is probably during this time, the only extended period that he and Euler spent in the same place, that their professional connection matured into friendship. When Blumentrost fell from grace, Goldbach's role under his successors Keyserling (1733), Korff (1734–40) and Brevern (1740–41) remained more or less the same.[8] Living in a private house on Vasilevsky Island, he seems to have led a rather retiring life. His correspondence with Hermann, who died in 1733, and Daniel Bernoulli ceased, that with Doppelmayr, Hansch, Bilfinger, the Vienna astronomer Marinoni, and the Italian marquis Giovanni Poleni continued at a moderate pace.

Among the scientific subjects discussed at the Academy in those years, the question of the shape of the Earth – whether it is an oblate or prolate spheroid – is of particular interest. In 1735/36 the Paris Academy of Science had sent expeditions to Lapland (near the North Pole) and Peru (near the equator) to decide between the predictions of Cartesian and Newtonian theory. In February 1737, before the first results were available, Goldbach presented a lecture on this topic, which has unfortunately been lost. During the same period the Petersburg Academy supervised an extensive and costly expedition along the Northern coast of the Russian empire to Siberia and Kamchatka; both its instructions to the participants and their reports on the results were handled by Goldbach.

Goldbach's collaboration with President Korff, a Baltic nobleman who had studied in Germany and was very interested in books, worked particularly smoothly. Korff reorganised the Academy, entrusting the chancellery, the technical and artistic departments to Schumacher and the scientific activities, including the Academy's correspondence, its public relations and historiography, to Goldbach. In 1737 and 1738, Korff obtained cabinet orders promoting both his "assistants" to the rank of *Kollegienrat* and authorising them to sign official documents.

Whenever the Russian state administration needed to present its official statements in an especially elegant style (in Latin, French or German), their wording was entrusted to Goldbach: thus he checked the translations of an apologetic plea for Biron's nomination as Duke of Courland, proposed inscriptions for medals and

8 The records of the Academy show, however, that Goldbach attended none of its meetings between November 1732 and November 1734, when he resumed his visits on the day of Korff's inauguration. Since no letters of his from that period seem to exist either (there is a large gap in his copybooks), little is known about his activities during these two years.

drafted the Foreign Minister's speech for the celebration of a peace treaty with the Turks.[9]

As he told several friends in private letters, Goldbach felt he had found his place: he successfully filled professional tasks that suited him ideally, enjoyed the confidence of leading statesmen and was much more pleased with his stable living conditions than he would have thought possible in his restless youth.

1.1.4. At the Foreign Office

In 1740, Goldbach submitted to the recently nominated President Brevern a memorandum on the poor state of the Academy,[10] which he blamed on inadequate funding; he deplored the fact that its salaries no longer permitted the appointment of first-rate scientists and proposed a reduction of the administrative and technical staff and a more competitive wage structure. However, the times did not favour reform projects: indeed, after Anna Ioannovna's death in October 1740 and during the troubled "reign" of her infant great-nephew Ivan VI, the Academy's budget and its very survival seemed to be in jeopardy. Several members, fed up with the arbitrary power Schumacher exercised in the President's absence, thought about leaving, and Euler actually decided to accept the job in Berlin that he had been offered by the new ruler of Prussia.

When Elizaveta Petrovna, Peter I's daughter who had twice been kept away from power, finally seized the throne by a coup d'état in November 1741, several of the statesmen of German origin that her cousin had favoured were deposed and banished to Siberia. Brevern, however, rose to the rank of a Minister at the "College for Exterior Affairs" (i. e., the Russian Empire's Foreign Office), and as one of his first decisions appointed Goldbach as a State Councillor on his staff. In March 1742, at the age of 52, Goldbach left the Academy for good, receiving a honorary membership for his long service, and again made his way to Moscow. All in all he was to spend four years mainly in Moscow (1742, 1744, 1749 and 1753), but he returned to Petersburg each time and definitively settled there again in March 1754 for the ten years remaining to him.

At the Foreign Office Goldbach was in charge of the Code Department, established by Peter I when the importance of communicating in secret with Russia's representatives in other countries – and the usefulness of reading other nations' diplomatic mail – became apparent. However, the first Russian ciphers were very primitive, and the crafty diplomat Bestuzhev-Ryumin who was now appointed as Chancellor was aware that his coding service's competence must be improved. Although little is known about Goldbach's work in his new function (as is only to be expected, given the secret nature of his tasks), he seems to have been well

9 Goldbach's task as a master of ceremony even extended to designing an allegoric display of fireworks for the Academy's contribution to the wedding celebrations for Anna Leopol'dovna, the Tsarina's niece (see Werrett 2010a, p. 104).

10 Cf. *Materialy* (1885–1900), t. VI, p. 528–532.

suited for it, combining solid linguistic and mathematical abilities with a broad knowledge of international politics, excellent connections all across Europe and a naturally discreet, reserved personality. Some traces that his new professional activities may have left in his correspondence with Euler will be commented on in their place.[11] One remarkable feat accomplished by the Russian codebreakers, which influenced both internal and foreign politics, speaks for Goldbach's talents: In June 1744, a letter in which the French ambassador at Petersburg, the Marquis J.J. de La Chétardie, dropped some unflattering remarks about the Tsarina's abilities and personal habits, was intercepted and decoded, and La Chétardie had to leave Russia post-haste.[12]

Goldbach's accomplishments earned him a remarkable career in the higher echelons of the Russian civil administration. In 1744, soon after his contract at the Foreign College was finally settled with the King of Prussia's assent, he was promoted to the rank of Actual State Councillor. Some marks of the court's personal favour were also conferred upon him: the Tsarina gave him a golden snuff box, and in December 1745 King August III of Poland issued a diploma confirming his (non-hereditary) nobility. In the following year Elisabeth bestowed a country estate in Livonia on him; the leasehold rent of 1400 roubles for this nearly doubled his already considerable salary. Finally, in 1760 Goldbach rose to the rank of Privy Councillor (the third highest of fourteen civil levels, equivalent to a lieutenant general or vice-admiral), and his wages reached 3000 roubles per year.

The social circles in which Goldbach moved also changed: he now associated with the top flight of Russia's ruling class. Among the visitors and hosts he lists in a diary for 1753–57 we find – besides the officials of the Academy with whom he had kept in touch – various ministers, princes, chamberlains, senators and admirals. Several times he took part in the Tsarina's private receptions for other nations' ambassadors. Two among his new patrons must be specially mentioned since they also play a role in Goldbach's correspondence with Euler: K.G. Razumovskiĭ (a brother of Elisabeth's favourite at that time), who was named President of the Petersburg Academy in 1746, and the diplomat and statesman M.I. Vorontsov (Chancellor from 1758 to 1762), to whom he was linked by a close friendship.[13]

Meanwhile, many of Goldbach's old associates and correspondents abroad had died (Hansch in 1749, Doppelmayr in 1750, Marinoni in 1755, Kortholt in 1760). Euler seems to have been the most important of his very few remaining links to the West. In the late 1750s, Goldbach's personal circle in Russia also narrowed,

11 See Goldbach's questions about Wallis's work in cryptography (n° 53, note 5) and a treatise on steganography (i.e., the art of secret writing) by the little-known natural philosopher J.A. Kulmus in Danzig (cf. n° 71, note 15). Moreover, one could even wonder for what purpose he ordered from Berlin two or three copies each of several popular novels (cf. n° 122, 127).

12 The historian R.N. Bain, quoting a document from Vorontsov's archive, explicitly attributes the decoding to Goldbach, "who had a genius for finding the key to the most abstruse and complicated cipher-writing" (Bain 1899, p. 112). See also Anisimov 1995, p. 91–93.

13 This is again attested by Vorontsov's and his wife's solicitous enquiries about Goldbach's failing health when they visited Euler at Berlin in 1763 (see n° 189–194).

as it seems mainly due to the onset of old-age complaints:[14] among those who continued seeing him were the Academy's Secretary G.F. Müller (also a lifelong friend and correspondent of Euler's), the natural philosopher J.A. Braun, Goldbach's physician J.J. Lerche and the librarian Gottfried Bock; most of them were fellow countrymen.

Another visitor in this period, the polyhistor Anton Friedrich Büsching who lived at Petersburg from 1761 to 1765, describes Goldbach as "a learned, very well-read and experienced man of great intellect and an admirable memory", a devout Christian, reserved, modest and somewhat timid.[15] These last personal traits are supported by the fact that no portrait of Goldbach's exists; indeed none seems ever to have been painted, which is rather unusual for a person of his rank.[16] Goldbach kept an orderly but not sumptuous lifestyle and generously donated money to the needy. In the last two years of his life he suffered from a pronounced stoop and a violent tremor, possibly due to Parkinson's disease. After a long period of gradually increasing weakness, Christian Goldbach quietly died on November 20th (December 1st), 1764, in the presence of G.F. Müller, who sent a detailed description of his last days and his funeral in three letters to Euler.[17]

Goldbach had never married and had no close relatives left: after a few legacies he bequeathed his residual fortune, which must have been considerable, to a subordinate official, the librarian Bock at Oranienbaum. His body was buried at the (no longer extant) cemetery near St. Samson's Cathedral; the great amount of papers in his estate was at once sealed and transferred to the State Archive – now the Russian State Archive for Old Files – at Moscow, where it is still preserved. Goldbach's biographers have made some use of this collection; much of it remains, however, unexplored.

1.2. Goldbach and Euler

The relationship between the two protagonists of the present volume has its own history. Some of its characteristics were inherent in their curricula and mindsets before either of them even knew about the other. In the period from their first meeting in May 1727 to Euler's departure from Russia in 1741, the functionally defined roles they played for each other matured into what was apparently per-

14 There may have been additional reasons: In 1761 a self-styled nephew of Goldbach's arrived in Petersburg and lobbied for his protection, but Goldbach denied the kinship, annoying some of his noble acquaintances who were patronising the young man. Moreover, in these turbulent years – during the long wars with Prussia and the violent events between Elisabeth's death and Catherine II's accession to the throne in 1762 – several of Goldbach's patrons lost their prominent positions; so he may also have felt it prudent to keep a low profile.

15 Büsching 1783–87, Th. III, p. 10–19.

16 The pictures that can be found by an internet search are all spurious: some of them in fact show Leonhard Euler, Hermann Grassmann and a 19th-century Portuguese general, the Duke of Terceira (cf. Tent 2009, p. 151).

17 Cf. JW 1, p. 253–258.

ceived by both as a close, if still very formally expressed, friendship. In the 1740s and early 1750s, the nature of the contact changed: frequent letters substituted for personal meetings. In a final phase, communication between Berlin and Petersburg was obstructed by political and military confrontations, but also marked by Goldbach's failing health. The hope of meeting again, which both partners had occasionally expressed, was to be denied: when Euler finally returned to Russia in 1766, Goldbach had been dead for some time. The main testimony of their relationship that remained and remains even now is their correspondence – a very important one, as Euler himself, his heirs, and his early editors were keenly aware.

1.2.1. Prelude: The "Basel School" and Goldbach's early work in mathematics

As mentioned in the last section, Goldbach's interest in mathematics dates right back to his youth; some traces can be found in his correspondence as early as 1708. In the following years he read mathematical books and papers, among many other things and, it seems, not very systematically; what he did and did not recall in his later exchanges with the Bernoullis and Euler speaks of a vivid but non-professional interest in the subject. His personal acquaintance with many of the leading mathematicians of the age – Leibniz, Newton, de Moivre, Varignon, Poleni – does not seem to have led to a more focused attitude.

However, all the papers which Goldbach published in scientific journals deal with mathematical topics;[18] with one exception they belong to the period from 1717 to 1728. It is no coincidence that during the same period we find among his most active correspondents a group of mathematicians who had studied at Basel. A look at this "Basel School" of mathematicians and theoretical physicists is necessary to understand the educational background of its most gifted scion, Leonhard Euler, and Goldbach's expectations of the youngster when he arrived at Petersburg.

The "dynasty" of great mathematicians coming from the smallish Swiss university town originated with Jacob Bernoulli (1654–1705), who started in the mid-1680s to publish research papers on the latest advances in mathematics. Among his achievements we find several pioneering theorems in differential geometry, important results on the integration of algebraic functions and differential equations,

18 The list is given in Yushkevich / Kopelevich 1994, p. 187. It comprises two very short papers from 1717 (on the tuning of musical instruments and on an elementary problem in number theory), one from 1720 (on series) and one from 1724 (again about an elementary theorem on integers); these were all printed in the Leipzig *Acta Eruditorum*. After his arrival in Russia, Goldbach published six more papers in the *Commentarii* of the Petersburg Academy: two on differential equations in t. I for 1726 (printed in 1728), two on series and differential geometry in t. II, 1727 (1729), one on series – probably his most important mathematical work – in t. III, 1728 (1732), and a last one on a result in the theory of algebraic equations in t. VI, which concerns the years 1732/33 but was only printed in 1738. Everything Goldbach published after those first years in Russia is of a non-scientific character: surveys of academic history and institutions, occasional poems and a few popular articles.

the first systematic treatment of infinite series and ground-breaking insights in the mechanics of extended bodies; but his most significant contribution to mathematics was the posthumously published book *Ars Conjectandi* (1713), which promoted probability theory from a collection of rule-of-thumb computations for gamblers into a branch of rational science.

Jacob Bernoulli taught his younger brother Johann (1667–1748, conventionally called Johann I to distinguish him from his son and grandson), his nephew Nicolaus I (1687–1759) and another gifted student, Jacob Hermann (1678–1733). Johann's first academic position was at the University of Groningen in the Netherlands, but after Jacob's death he returned to Basel with his family and took up the chair of mathematics. Three of his sons were also to make their (very different) careers in science: Nicolaus II (1695–1726), Daniel (1700–1782) and Johann II (1710–1790). Two of Johann II's sons make up the numbers of the Bernoulli dynasty in mathematics and natural science: Johann III (1744–1807), who became an astronomer with the Berlin Academy and a travelling "science journalist", and Jacob II (1759–1789).

Of the nine scientists just mentioned, all have played some role in different periods of Euler's life;[19] all but Jacob I are linked in various ways to St. Petersburg, and for at least five of them there is a direct connection with Goldbach, which will be examined in the following paragraphs.

In September 1712, Nicolaus I Bernoulli passed through England on his educational *grand tour*;[20] at Oxford he met not only Abraham de Moivre, with whom he struck up a friendly and very productive collaboration, but also Christian Goldbach. Bernoulli at once communicated to Leibniz the good impression Goldbach had made on him, and recommended him to Varignon; it is likely that the young Prussian was then also favourably heard of in Basel for the first time. During his days in England, Goldbach made his first discovery in number theory that he

19 Jacob Bernoulli had been the author and supervisor of the master's thesis on series that Paul Euler, Leonhard's father, defended in 1688; the mathematical education he provided for Leonhard and his approval for the career his son chose certainly had to do with his own early interest in mathematics. On Euler's formational years in Basel in general and his connections with Johann I Bernoulli and his sons, see the introduction to O. IVA/2 by Fellmann and Mikhaĭlov, where Euler's correspondence with Johann I and Nicolaus I is edited. The same editors have been responsible for preparing Euler's correspondence with Daniel, Johann II and Johann III, which will appear in O. IVA/3. Finally, Jacob II (the only one who will not be cited any more in this volume) was called to the Petersburg Academy in 1786; in 1789 he married a granddaughter of Euler's, but died only two months later in a bathing accident.

20 Another objective of this journey was an important correction in Newton's *Principia*, which Johann Bernoulli had sent his nephew to communicate to the author. In fact, Newton received him several times, adopted the proposed change for the second edition (1713), presented Nicolaus with a – still extant – copy of his great book and initiated both Bernoullis' election to the Royal Society. An account of Nicolaus I Bernoulli's life and works can be found in O. IVA/2, p. 459–472.

thought worthy of publication, and discussed it with Bernoulli and de Moivre.[21] It is not known whether Goldbach and Nicolaus I ever exchanged letters; none has been preserved.[22]

When Goldbach passed through Padua in June 1714, Jacob Hermann had just vacated the chair of mathematics; Nicolaus I Bernoulli was to become his successor only in 1716,[23] so there were no further meetings with the *Basler* mathematicians then. However, Hermann's publications in mathematics and mechanics came to Goldbach's attention in the following years, and from January 1721 to November 1724 they exchanged a few letters.[24]

When Goldbach returned to Italy in May 1721, he probably met Nicolaus I Bernoulli again, and he certainly struck up an acquaintance with his cousin, Johann's eldest son Nicolaus II Bernoulli. Goldbach (writing from Padua, Vienna, Dresden, Leipzig, Osijek, Budapest, Bratislava, Kremnica and finally Petersburg) and Nicolaus II (from Venice, Basel and Berne) led, despite the difficulties caused by the frequent changes of address, an intense correspondence for four years, right up to Bernoulli's arrival at Petersburg in November 1725.[25]

In April 1723, Nicolaus II proposed to Goldbach to also enter into correspondence with his younger brother Daniel, who had just gone to Italy to continue his studies of practical medicine, but preferred physiology, hydrodynamics and mathematics.[26]

The agenda for this small correspondence network was mainly set by its patriarch Johann I Bernoulli at Basel, then past his prime in research but all the more actively disseminating mathematical ideas and pulling academic strings all across

21 Goldbach's first published paper on pure mathematics (1717b), an extract from a letter to Bayer, states and proves the elementary theorem that no square number leaves the remainder 2 when divided by 3 (i. e., $x^2 \equiv 2$ has no solutions mod 3), and shows that several other congruences for powers are impossible.

22 Some indirect communication between the two was, however, maintained by Daniel Bernoulli, his father Johann I and later Euler (see O. IVA/2, *Correspondance*, t. II, and the present volume).

23 Both appointments to the prestigious chair Galileo had once held were part of Leibniz's and Johann Bernoulli's strategy to extend their scientific "empire" to the south (at a time when the progress of their version of infinitesimal calculus in France and England was more or less blocked). Their and their students' outreach towards Russia should probably also be seen in this light.

24 This correspondence continued sporadically in Russia, and Hermann again replied to a letter of Goldbach's in 1732, after his return to Basel. The nine preserved letters (5 by Goldbach, 4 by Hermann) are printed in Yushkevich / Kopelevich 1994, p. 165–179.

25 Of this correspondence 14 letters by Goldbach and 13 by Nicolaus II have been preserved; they were edited in Fuß, *Correspondance*, t. II, p. 97–170.

26 Before they met in Petersburg, Goldbach and Daniel Bernoulli exchanged 19 letters; their correspondence continued – with Goldbach mostly in Moscow and Bernoulli in Petersburg – until 1731. After Bernoulli's return to Basel in 1733, no more letters were apparently exchanged. The entire correspondence (35 letters by Goldbach, 37 by Bernoulli) has been edited in *Correspondance*, t. II, p. 173–406; this volume also contains, as a hard-to-find annex (p. 229–230), the only letter that Johann I Bernoulli addressed (on January 20th, 1725) to Goldbach, in the context of his sons' appointment to the Petersburg Academy.

Europe. Among the scientific topics discussed, we find several that will recur in the Euler-Goldbach correspondence:[27]

- the Riccati equation, an important non-linear first-order differential equation. Around 1718, the Venetian amateur mathematician Count Jacopo Riccati proposed an equation that was soon generalised to the form $dy = ax^m dx + by^n x^p dx$ (a special case had already been treated by Jacob and Johann I Bernoulli in the 1690s). The main question discussed in the following years between Riccati's Italian colleagues and the Bernoulli circle was for which values of m, n and p it is possible to separate the variables or even integrate the equation explicitly. Riccati himself, Nicolaus I, Johann I and Daniel Bernoulli published answers of varying generality obtained by their different methods, and so did Goldbach in 1726.[28]
- series with a number of terms counted by different "orders of infinity" (Goldbach explicitly writes ∞, $\frac{\infty}{2}$, ∞^2). The problem – originally motivated by the comparison of coefficients in series raised to integer powers – turns on the question whether a sum can be determined even in those cases where some terms are reached (and can be added) only after infinitely many prior steps. Nicolaus II Bernoulli, taking hints from infinite and infinitesimal ratios in calculus, is skeptical whether this viewpoint makes sense, whereas Goldbach insists it only matters that the differences between partial sums ultimately become "inassignable".
- "general terms" for individual sequences, which are mainly intended to provide a means for interpolation and summation. The first examples concern powers with irrational exponents and the sequence of factorials, where it is immediately clear what the terms for integer index should be; later the same question is also posed for "Fibonacci type" series defined by linear (and algebraic) recursions, where the direct calculation of those terms is much less obvious. Since problems of this kind, where the 18th-century perspective significantly differs from ours, are a main topic in Euler's early correspondence with Goldbach, they will be discussed in detail in Section 2.1.2 below.
- "squareable lunes" and their parts, i. e., plane figures bounded by circular arcs (and possibly straight lines), whose area is measured by a rational – or an algebraic – number.[29]

27 There are also a few subjects Goldbach and Euler did not take up later: experiments in elasticity and magnetism, curves defined by geometrical conditions or mechanical tracing devices (orthogonal trajectories, tractrices, hypocycloids), expectations in games of chance and so on.

28 See the introduction to Daniel Bernoulli's *Werke*, vol. 1 (p. 142–165, 176–188), where the editor U. Bottazzini investigates in detail the early results obtained by the Italians and the "Basel school" (including Goldbach); see also Yushkevich / Kopelevich 1994, p. 119–125.
Euler later devised yet another solution method by continued fractions (see Cretney 2014). This was to yield a very interesting side effect: it became instrumental in Euler's irrationality proof for e (see Havil 2012, ch. 3).

– a few problems in elementary number theory which can be traced back to Fermat: his unproved theorem that no triangular number except 1 is a fourth power, congruences which powers of integers never satisfy, rational squares in arithmetic sequence, ... This is the only area of mathematics where Goldbach feels competent enough to propose his own topics for discussion instead of just taking up his correspondents' questions.

Finally, the professional activity of the younger members of the circle is also a frequent issue: they discuss their publications, their participation in prize competitions, disputes with colleagues and appointments to academic positions, and they ask for advice in decisions to be made and for mutual recommendation.

Goldbach's role in this exchange is janus-faced: As a researcher, he is more often than not outdone by his friends from Basel, who have had the advantage of the best professional training in mathematics available at the time. On the other hand, the first-rate network of connections in the "republic of letters" Goldbach has built up gives him legitimate status as a useful advisor and sponsor for his correspondents. Both roles – Goldbach as an active and interested participant in the discussion of scientific issues of whose recent development he is, however, often only vaguely aware, and as the well-placed patron of his correspondents who are still striving for preferment – will also characterise his early relationship with Euler.

1.2.2. Gaining a foothold at the Petersburg Academy

Leonhard Euler first met Goldbach three days after his arrival in St. Petersburg: On the evening of May 27th, 1727, the Petersburg Academy's first President, Lorenz von Blumentrost, gave a reception for the academicians on the very day when Tsarina Catherine I had been solemnly laid out for burial.[30] Goldbach, then 37 years old, had settled down two years earlier in a position which was not very prestigious but influential; Euler, who had just turned 20, had left his native town for the first time, making his way to Russia in order to take up his first job as an "élève" attached to the chair of physiology and anatomy. It is hard to imagine that the young Swiss research assistant was not impressed and a bit shy when, two weeks later, sophisticated, urbane Goldbach introduced him to the young Tsar

29 This topic again occurs in Daniel Bernoulli's first book *Exercitationes quaedam mathematicae*, published at Venice in 1724 (see U. Bottazzini's introduction in Daniel Bernoulli *Werke* 1, p. 188–194). See also *infra* n° 9, notes 10 and 13.

30 In his travel diary Euler notes: "On the 27th the funeral of the late Empress took place [...] we went into the [Peter and Paul] Fortress and the Church, looked on her again and kissed her hand; from there we went to see Mr. de l'Isle and Mr. Leutmann and towards evening visited the Court Physician [Blumentrost], where we met Justice Councillor Goldbach, Mr. Henninger and Mr. Schumacher". ("den 27. war die Leichbegengnuß der seligen Kaiserin [...] da giengen wir in die Festung und Kirche, beschaueten die Kayserin nochmahls und küsseten ihr die Hand, von dar giengen wir zu Mr. de l'Isle und H. Leutman und auf den abend zu H. Leibmedicus, da wir H. Justitien-Raht Goldbach, H. Henninger und H. Schumacher antraffen": Notebook II, quoted according to Mikhaĭlov 1959, p. 278).

and his bride, congratulating Peter on his betrothal with an elegant Latin speech and several poems on behalf of the Academy.

It is likely that they occasionally met again at the Academy in the following months; in fact, Euler presented his first lectures (on the outflow of water from a vessel and on a model of the Earth's atmosphere) in June and September 1727. However, the only encounter positively established by the lacunary records of the Academy is their joint presence at a public experiment involving the vertical firing of cannonballs in October.

There is no evidence that Euler made a great impression on Goldbach then; neither seems to be mentioned in the other's correspondence prior to 1729. However, this is not at all hard to understand since they both had more pressing tasks on their minds: Goldbach – opposed by conservative Russian nobles – struggled to hold on to his new position as supervisor of the young Tsar's education; and Euler was busy proving that his wide-ranging talent for research far exceeded the modest role as an assistant in physiology for which he had been engaged. Most of Euler's papers presented in 1728 and 1729, even those motivated by problems in mechanics or astronomy, were primarily theoretical in content and used mathematical methods: differential geometry, spherical trigonometry and differential equations. It seems plausible that he already had designs on the chair of mathematics then held by Hermann, who never settled down in Russia and left for Basel when his five-year contract expired in 1730; but finally Euler had to accept a provisional appointment as Bilfinger's successor in physics and won his favoured position only when Daniel Bernoulli also returned home in 1733.

In January 1728 Goldbach had followed his noble pupils and the court to Moscow, but he stayed in contact with the Academy, exchanging letters – both privately and on behalf of President Blumentrost – with several professors and with Schumacher, who was in charge of its administration. Meanwhile tensions between the mixed little group of academicians – caused in part by differences in scientific outlook, in part by vivid competition – broke out in open battle: while the most spiteful quarrel raged between Daniel Bernoulli and Bilfinger, who openly accused one another of incompetence and plagiarism, most of the Academy's members were implicated in one way or another, and Schumacher exploited the splits and Blumentrost's absence to establish an arbitrary, bureaucratic regime.[31] It proves Euler's diplomatic talent that he not only managed to keep out of the dispute but also to publish in the *Commentarii* for 1729 a concise, correct and entirely non-polemical solution of the astronomical problem that had triggered the conflict. Blumentrost and Goldbach, to whom all parties had appealed, kept their distance – to Bernoulli's great disappointment.

31 In the title of the file that the Academy's later historian G.F. Müller compiled, the entire affair is harshly but appropriately characterised by the word "Zänkereyen" ("squabbles"). An analysis of the scientific content of the controversy by the editor M. Howald-Haller can be found in Daniel Bernoulli *Werke* 1, p. 381–441. Mumenthaler 1996, p. 124–137, gives another detailed account of the conflict, focusing on its personal aspects.

But in the meantime Euler had entered into correspondence with Goldbach on his own. The occasion to do so arose in October 1729, when Bernoulli read a paper of Goldbach's on series and their interpolation to the Academy.[32] Euler, who was obviously aware of the topics discussed and developed in Goldbach's correspondence with Bernoulli during the previous months, had some new and deep results of his own on this subject, which he communicated to Goldbach a few days later in a long, deferential letter.[33]

During the following year Euler freely participated, along with Daniel Bernoulli, in the exchange of mathematical ideas with Goldbach in Moscow. Among the topics discussed in their letters we still find expressions for series, squareable lunes and the integration of algebraic differentials; in fact all three go on publishing papers on these subjects. On the other hand, the properties of numbers considered "in a Fermatian spirit" – primality and factorisation, representation of integers in various forms, transcendence and approximation – now become a central area of common interest of Euler's and Goldbach's which none of their other correspondents shares.[34] Their enthusiasm for this "outmoded" field is to remain an important base for their collaboration.

This regular flow of letters between Petersburg and Moscow – in 14 months Goldbach exchanges 25 letters with Bernoulli and 13 with Euler – was suddenly interrupted in November 1730. It is not known whether the silence, which lasted almost a year, while Bernoulli and Euler went on with their intense and productive

32 This paper, *De terminis generalibus serierum*, was printed in 1732; it is the most substantial of Goldbach's scientific publications.

33 In this first letter Euler indicates the values to be interpolated for fractional "indices" in several series. In particular the value for the index $\frac{1}{2}$ in the series of factorials 1, 2, 6, 24, ... is described both in the form $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{-1}\cdot\ell-1\right)}$, where $\ell-1$ is the "hyperbolic" (natural) logarithm of -1, and as "the side of a square equal to the circle whose diameter is 1". In modern notation these statements are equivalent to

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{i\,\log(-1)}=\sqrt{\frac{\pi}{4}};$$

thus Euler implicitly presents not just his result on interpolation, but also his determination of the values that must be given to the logarithms of negative numbers. Obviously this result, which he had cautiously suggested to his teacher Johann I Bernoulli at Basel a year earlier (see O. IVA/2, p. 88, 91), is closely related to his later theory of the multi-valued logarithm function for complex arguments and the famous "Euler's formula" (never explicitly written down by Euler)

$$\mathrm{e}^{i\pi}+1=0.$$

34 Daniel Bernoulli much later expressed the derogatory views on number theory typical of most of his contemporaries when Nicolaus Fuß sent him a paper of Euler's on a primality test for large numbers (probably E. 715): "Do you not think that it is almost too much honour for the prime numbers to spend such a wealth of ideas on them, and should one not pay some respect to the refined taste of our century?" ("Ne trouvez vous pas que c'est presque faire trop d'honneur aux nombres premiers que d'y répandre tant de richesses, et ne doit-on aucun égard au goût raffiné de notre siècle ?": D. Bernoulli to N. Fuß, March 18th, 1778, quoted according to P.H. Fuß, *Correspondance*, t. II, p. 676–677).

research and re-negotiated their contracts with the Academy, was due to personal, professional or political reasons. On November 29th, 1731, Goldbach just as abruptly resumed contact, writing on the same day to both his younger colleagues without any reference to the reasons for his silence; his correspondence with Daniel Bernoulli in fact terminates with this letter.[35] Bernoulli remained at the Academy as professor of mathematics until June 1733, but for unknown reasons his relations with Goldbach were now distant and even hostile, as several disparaging remarks in his later letters show.[36]

Euler on his part was evidently interested in re-establishing his communication with the influential Secretary; he at once replied to Goldbach, and in the next two months four more letters were exchanged. Even before Goldbach was installed in his new charge as the President's deputy at the Academy, Euler had taken over the disgruntled Bernoulli's role as his main contact within the professorship and his most important partner in discussing scientific matters.

1.2.3. The 1730s: patronage and collaboration

The decade from 1732 to 1741 was the only period of some length that Euler and Goldbach spent in the same place; it is for this very reason that the development of their rapport and the modes and subjects of their interaction are thinly documented. Since they both lived in the same district of St. Petersburg on Vasilevsky Island, a short stroll away from each other, and met regularly – sometimes twice a week – at the Academy's conferences, there was no need to communicate in writing. So, possibly pending a systematic study of Goldbach's diaries, our evaluation of their relationship must rely on official documents, such as the Academy's minutes, and on the few places in Euler's publications, notes and letters where he is mentioned.

35 Fuß's conjecture (*Correspondance*, t. II, p. 405) that Bernoulli broke the correspondence off because he was offended by Goldbach's tardy reply seems unwarranted: Goldbach's return to Petersburg in January 1732 re-established the opportunity for personal contact, obviating the necessity of communicating by letters. Indeed Goldbach's relationship with Euler, which grew close in the following years, is also documented by just six letters from the period up to 1738.

36 In spite of his awareness of their friendship, he complained to Euler: "Goldbach was the only one to arouse in me strong feelings of outrage and even contempt [...] There is truly nothing in Goldbach but a hidden, unfounded and incomprehensible pride and such peculiar principles as have never entered a human heart" ("Der eintzige Goldbach hat bej mir alle *sentimens* einer *indignation* und wahren verachtung erwecket: [...] Hinter dem Goldbach steckt wahrhafftig nichts als ein heimlicher ungegründeter und unbegreifflicher stoltz nebst so seltzsamen *maximes* die in keines menschen hertz gekommen sind": R 145, September 20th, 1741); "I do not want to belittle [Goldbach's] scholarly merit, particularly since you show so much respect for him, but I cannot think much of his moral values, since he treated me without any cause so rudely as is improper for honourable people" ("demselben will ich seine *merites in litteris* nicht benemmen sonderlich da Ew. HEdgb. so viel *estime* für ihn bezeügen, *in moribus* aber kan ich wenig auff ihn halten, indeme er ohn einigen anlaaß auff eine weiß gegen mir grob gewesen, die keinen *honnet*en leüten wohl anstehen kan": R 146, July 28th, 1741). Both letters will be edited in O. IVA/3.

Goldbach seems to have led a quiet life during that period, virtually abandoning his own research activities.[37] For Euler, on the other hand, these were extremely busy times: he presented on average five research papers a year to the Academy, published his first books on arithmetic, mechanics and music theory and, in addition, competed successfully for the Paris Academy's prize three times. During this decade he established his international fame by solving important, long-standing problems in almost all fields of contemporary mathematics: series, integration, number theory, differential equations, variational calculus and differential geometry.[38] Moreover, as we know from a report he wrote to President Korff in 1737, he also taught and examined students and naval cadets, submitted expert opinions on technical projects and on candidatures for the Academy, and exerted himself in the department of geography in preparing a first reliable map of the largely uncharted Russian empire.[39] As very few among the early chairholders of the Petersburg Academy did, Euler really settled down in Russia, acquiring a sound working knowledge of Russian and getting involved with all the educational and technical development projects that had been Peter I's main aim; this may well have been one reason for his particularly friendly bond with those two members who chose to remain in Russia for all their life, G.F. Müller and Goldbach.

Since he was now established in a solid position, Euler could also think about setting up his own household. On December 27th, 1733 (old style), he married Katharina Gsell, the daughter of the painter and craftsman Georg Gsell from St. Gallen in Switzerland, who was involved in the decoration of Russia's new capital and played a central role in its small, close-knit Swiss community.[40] On November 16th, 1734, their first son – one of only three among their thirteen children who were to survive their parents – was born; it seems significant of the good connections Euler had built up that the President of the Academy, Baron Johann Albrecht von Korff (from whom the child got his first names), and its Secretary Goldbach agreed to act as godfathers. Four more children followed in the six years the Eulers remained in Petersburg, but the three daughters all died

37 The records of the Petersburg Academy (published in *Protokoly* 1897–1911) mention just two scientific contributions of his for all that period: a lecture on algebraic equations that admit no rational solutions (September 26th, 1732; printed as his last paper in the *Commentarii* in 1738), and a project for measuring the shape of the Earth, which was not judged feasible (January 29th and February 4th, 1737). The many other references to Goldbach in t. I of the *Protokoly* all concern his administrative charges.

38 After his nomination to the chair of mathematics in 1733, Euler did not stop doing research in physics and astronomy, but he temporarily relegated those fields to the background, reserving his contributions for specific occasions such as requests for expertise and prize questions, while the main thrust of his systematic investigations was now in "pure" mathematics.

39 Cf. Kopelevich 1983.

40 Contrary to what is sometimes stated, Katharina was not directly related to the painter Maria Sibylla Merian: her mother had been Gsell's first wife Marie Gertrud von Loen. However, in Petersburg Gsell lived and worked together with his third wife Dorothea Maria Henrietta Graff, a daughter of the famous painter. Late in his life, after Katharina's death, Euler remarried in 1776, and his second wife Salome Abigail, a half-sister of Katharina's, was indeed a granddaughter of Maria Sibylla Merian.

early. Euler himself was seriously ill at least twice in this period; in January 1735 and in August 1738 he suffered from unspecified but life-threatening infectious diseases, and the second time an abscess cost him the sight in his right eye.[41]

Obviously it was good policy on Euler's part to secure Goldbach's enduring goodwill: the Secretary exerted not only considerable influence within the Academy, counteracting Schumacher's high-handed regime over scholars whose scientific merits he could not appreciate, but also had the ear of other, mostly Western-born, civil servants and moved adroitly in high political and diplomatic circles. This aspect of the relationship – Euler benefiting from Goldbach's patronage – shows again clearly in the last few communications that passed between them during the time they both spent at Petersburg: Goldbach's assurance that a satisfactory new contract for Euler has been arranged, Euler's well-known note asking Goldbach for help in getting excused from the task of examining maps, which harms his already impaired eyesight, and Goldbach's promise to take the matter up with the President.[42]

On the other hand, one should not overlook the fact that Goldbach, even if he did not actively participate in mathematical research any more, was one of the very few people in Euler's vicinity who could understand his work, appreciate its depth at least to some extent and suggest avenues to explore. In fact, after the deaths of Nicolaus II Bernoulli and Friedrich Christoph Mayer and the departures of Hermann, Daniel and Johann II Bernoulli, nobody else at the Petersburg Academy had ever done research in mathematics or was even qualified to follow Euler's advanced lectures. This state of affairs was quasi-officially recognised when, in August 1735, it was decreed, on Goldbach's recommendation, that Euler should henceforth present his papers just to a special "mathematics conference" consisting of Goldbach himself, Delisle, G.W. Krafft – now professor of physics and mainly busy with experiments – and C.N. von Winsheim who had recently been nominated professor of astronomy.[43] Whereas most papers presented to the Academy were circulated among all the members, several of Euler's were communicated only to Goldbach, Krafft and possibly Delisle.[44]

The Academy's records for 1735–38 (the first years of Korff's presidency are particularly well documented in the minutes) show that Euler and Goldbach regularly collaborated in additional tasks, mostly along with some other members:

41 René Bernoulli (1983) suspects scrofula, a tuberculosis-related infection now largely extinct. Euler himself and his first biographer Fuß (1786) mistakenly attributed the damage to excessive strain on the eye by overly assiduous work on maps (see his appeal to Goldbach for a dispensation, n° 34).

42 See n° 33–35 below.

43 *Protokoly*, t. I, p. 221. The fact that Euler now worked virtually alone also shows in the contributions for the "Classis Mathematica" of the *Commentarii*: in T. VIII for 1736, e. g., this section comprises twelve papers, one by Daniel Bernoulli at Basel and eleven by Euler (who thus produced 159 of the section's 188 pages).

44 Indeed, in some cases Goldbach got to see Euler's manuscripts *before* they were presented to the Academy; one meeting in 1735 had to be cancelled because Goldbach forgot to bring along the paper Euler had proposed to read (*Protokoly*, t. I, p. 227).

examining students and applicants for staff positions, giving expert advice on treatises and inventions submitted to the Academy, supervising the printing and distribution of its publications. When the new President Brevern needed to reform the Academy's budget in 1740, the committee he charged with giving their expertise consisted of Goldbach, Schumacher, Euler and Krafft; Goldbach's final report seems to give more weight to scientific than to purely financial considerations.[45]

In comparison with this wide-ranging activity in the Academy's administration and on its educational and technical sidelines, the record of strictly scientific collaboration between Euler and Goldbach is, as has already been stated, meager. The few surviving notes from 1732–37 (nº 20–24 below) bear on individual problems in elementary and differential geometry, but no systematic investigation emerges. In 1738–39, the summation of number-theoretically defined series again surfaces in a series of missives (nº 25–32) which are not easy to interpret out of their original context; some very interesting and far-reaching speculations about zeta-type series can, however, be tentatively identified and at least partially reconstructed in them. As established by A.A. Kiselëv in his notes to the 1965 edition, Goldbach triggered here a research project that was to lead Euler towards important results in analytic number theory.[46] At least one of Goldbach's results in this area impressed Euler so much that he included it – attributed in a very explicit way, which was unusual – as the starting point for one of his papers.[47] Euler particularly admired the fact that the peculiar type of series considered here for the first time admitted neither what could properly called a general term nor a "law of continuation" (i. e., a recursion formula), yet could be summed explicitly.

Even taking all of this into account, the extant evidence from the 1730s does not by itself show that a close, friendly relationship between Euler and Goldbach had evolved on both the professional and personal levels. This is, however, clearly proven by the fact that the correspondence continued and grew in intensity when Euler left the Petersburg Academy and there was no necessity – indeed no functionally defined point – in pursuing it.[48]

45 *Materialy*, t. VI, p. 504–505, 528–532. Goldbach's report is also reproduced as Appendix A2 in the Yushkevich / Kopelevich biography (1994), p. 180–182.

46 See the present editors' notes to letters nº 25, 26 and 28–30.

47 E. 72, *Variae observationes circa series infinitas* (presented in April 1737 but printed only in 1744) quotes as *Theorema* 1 Goldbach's summation of the series $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\frac{1}{35}+\ldots$, where the denominators are all the proper powers of natural numbers diminished by 1 (O. I/14, p. 217). Euler also brought this calculation, which Goldbach had communicated without any response to Daniel Bernoulli as early as 1729 (cf. *Correspondance*, t. II, p. 296), to his correspondents' attention in several letters, again emphasising Goldbach's original feat (R 594 to C.G. Ehler, R 202 to Johann I Bernoulli: O. IVA/2, p. 165).
Strangely, Goldbach later quoted to Euler an erroneous version of this old result, insisting even when Euler had tactfully pointed out the mistake (see below nº 73–75).

48 The official correspondence about publications, appointments, expert opinions, errands and so on that Euler exchanged with the Petersburg Academy as a (very active) foreign member during his entire stay at Berlin was addressed to its officers, mainly Schumacher and Müller.

1.2.4. A Russian-Prussian axis

Euler's move to Berlin was motivated – to use the terms of social science – both by "push" and "pull" factors. The political instability which threatened the Petersburg Academy's status has already been mentioned;[49] the risks that the extreme climate and constant overwork posed for Euler's health were compounded – as we know from a later letter to Müller[50] – by the ever-present danger of disastrous fires in a city built almost entirely of wood.

On the Prussian side, the re-establishment of the Berlin Academy sadly neglected by his father was among the first priorities Frederick II set himself when he succeeded to the throne in 1740: within a couple of weeks he had started negotiations to lure top-flight men of letters to Berlin. When Voltaire preferred to keep his independence and Wolff cautiously chose a traditional university post at Halle, it became all the more important to attract the rising stars among the scientists of the day: Maupertuis, who had just "flattened the Earth" by his spectacular expedition "to the Pole", and Euler, who was by then already considered the world's greatest research mathematician.[51] In February 1741, an improved salary offer by the Prussian ambassador Mardefeld induced Euler to ask for his discharge, which was granted only after some diplomatic tug-of-war: Goldbach's pleas to President Brevern and Vice-Chancellor Ostermann finally overcame Schumacher's procrastinating resistance.

Although Euler was warmly received by several of Prussia's intellectual leaders and even by Frederick himself, who personally welcomed him in a short letter written from an encampment in Silesia, the war severely hampered the establishment of the restored academy; in the end it could be officially opened only in January 1746, and its set-up and finances remained shaky for a long time.[52] Goldbach, who was familiar with the circumstances and acquainted with many of the protagonists of social life in Berlin, was the ideal correspondence partner to receive confidential first-hand reports and sometimes give advice.

Indeed, the frequent and often extensive letters Euler sends to Goldbach are a main source not only for learning about his professional activities, but also his personal and social life in the 1740s. Euler's growing family, his living conditions

49 Euler himself emphasised this aspect in the short autobiographical sketch he dictated to his eldest son in 1767: he decided to leave Russia "when things began to look rather awkward under the ensuing regency" ("nachdem [...] es bey der darauffolgenden Regentschafft ziemlich mißlich auszusehen anfieng": quoted according to Fellmann 1995, p. 13).

50 Cf. JW 1, p. 226.

51 "le plus grand Algébriste de l'Europe" is the term Frederick's envoy, Axel Freiherr von Mardefeld, uses in a letter to the king written on June 17th, 1741 (cf. Winter 1957, p. 18), in which he announces Euler's imminent departure for Berlin, telling him that the Russian court regrets the loss – and warning him at the same time that Euler's physical appearance does not give a favourable impression.

52 See below n° 40, 43, 54, 66, 72; cf. also Harnack 1900, vol. I, p. 245–331; Winter 1957, p. 12–48; O. IVA/6 (correspondence between Euler and Frederick, in particular Winter's introduction, p. 280–288).

and his financial success are mentioned as well as his encounters with high-ranking members of the nobility and the administrative élite, with scholarly and scientific colleagues, with artists and men of letters orbiting around the court. A detailed account of Euler's journey to Berlin on the Baltic (n° 38) is followed, nine years later, by the report on another of his rare trips (n° 146), when he meets his Basel relatives at Frankfurt on the Main in order to take his widowed mother back to Berlin to live with him. Goldbach shows his interest by enquiring after Euler's health, his domestic circumstances, common acquaintances, developments in Berlin society and the studies of his godson Johann Albrecht.

Even more space in the letters is given over to the exchange of academic and scientific news – mostly on Euler's side: as has already been remarked, Goldbach is very reticent about his own work.[53] Although Euler's duties and benefits from his ongoing membership in the Petersburg Academy are mainly dealt with in his official correspondence with Schumacher, later also with Teplov and Müller, he continues to ask Goldbach for his help with financial claims. And the Russian Academy's *arbiter elegantiarum* is still his main authority in matters of sophisticated style: whenever a poetic device for a prize paper or a commemorative medal is needed, he requests Goldbach's advice.

On Goldbach's side, the main incentive for continuing with the correspondence is the desire to keep in touch with developments in Western Europe: he asks for news of the prize contests at Paris and Berlin, enquires about the progress of Euler's and his colleagues' publications and enlists his help in obtaining scientific and literary items from German bookshops.[54]

But of course the central point of interest for most of those reading the Goldbach-Euler correspondence today is the copious information on research in mathematics (in particular number theory), on the questions often suggested by Goldbach and on their development in Euler's fertile mind. Since this will be systematically discussed in Section 2 of this Introduction, a terse list of the principal topics discussed in the period from 1741 to 1756 – in more or less chronological order – will have to suffice here:[55]

– representation of numbers by quadratic – and higher-order – forms (in particular, Fermat's Four Squares Theorem): this is the only field which remains constantly in view during all the 35-year exchange

– integration of rational and algebraic functions: via partial fraction decomposition, this leads to a discussion of complex zeros and the Fundamental Theorem of Algebra, which also involves Nicolaus I Bernoulli; later on there are traces of Euler's discovery of the addition theorem for elliptic integrals

53 Some exceptions are mentioned in note 11 above.

54 The systematically ordered Subject Index (*infra* p. 1201–1205) permits to locate the letters in which these issues are mentioned.

55 The places where some given topic appears in the correspondence can be identified by consulting the Subject Index (p. 1201–1205).

– the connection between complex powers and trigonometric functions, “Euler’s formula”, trigonometric (“Fourier”) series
– series of zeta and “multi-zeta” type, infinite products and continued fractions, conditional convergence, divergence (with some hints at what later came to be called summation methods), orders of infinity
– the determination of algebraic curves characterised by geometrical conditions (in particular, a tricky challenge problem in catoptrics publicly proposed by Euler in 1745).

Besides these ongoing research projects, there is also a wealth of incidental remarks from many areas of mathematics: here we find paragraphs on primes represented by polynomials or with a given difference, algebraic differential equations and their singular solutions, perfect numbers and the factoring of Fermat numbers, divisor sums and partitions (leading to the “Pentagonal Number Theorem”, one of Euler’s most surprising results), the additive representation of integers by primes (with the conjecture that is Goldbach’s one claim to lasting fame), the reordering of divergent series, transcendental numbers and their numerical approximation, an interpolation of the factorials connected with asymptotics for the harmonic series, general terms and sums for series defined by recursion, the number of dissections of a polygon into triangles (here “Catalan numbers” and their generating function make their first appearance), rational parametrisation of algebraic equations (and solvable cases of degree 5 and 6), an investigation of the general properties of solids enclosed by plane faces (which yields the earliest non-trivial discoveries in combinatorial topology), “multiply polygonal” numbers, Euler’s attack on “Fermat’s Last Theorem” (where he made the first step beyond Fermat himself by presenting a proof for the case $n = 3$, which however has an important gap), and so on … almost to infinity.

Among the topics in natural science raised in the correspondence we find Euler’s theories of gravity and magnetism, his attempt to produce achromatic lenses, planetary motion (with a curious digression that leads from the three-body problem towards a kind of epistemological “anthropic principle”), the discussion on the correct measure of “action” that is preserved in collisions (an important source of confusion and dissent in 18th-century mechanics), astronomical tables, comets and eclipses – not to mention such little gems by the wayside as an enquiry into the composition of erythrocytes (with an early foray into fractal geometry). However, Euler is aware that Goldbach does not take as much interest in these fields as in his research in pure mathematics, and mostly limits his remarks to short hints.

Goldbach’s role in the development of Euler’s scientific work – more specifically of his number-theoretical research – is often underrated. Of course the mathematical achievements in Goldbach’s few published works pale compared with the huge body of results that Euler obtained. But at the beginning of his career, Euler attacked problems that were “fashionable” at the time and had already been studied by his contemporaries, principally the Bernoullis – and Goldbach. In his first letter to Goldbach, Euler reported on his results on interpolation of sequences, an area of mathematics in which Goldbach was active. Later other topics to which Goldbach had contributed came up: Fermat's observation on triangular numbers that are fourth powers, the Riccati equation, the integration of binomial differentials. In the context of this last problem Euler attempted to compute the integral $\int \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$, but remarked in n° 11 that he could not do it "even by admitting logarithms". This certainly was one of the reasons why he was electrified when he saw Fagnano's account of "elliptic integrals", and started working out the addition formula in greater generality.

Even more important for defining Euler's mathematical interests was Goldbach's fascination with number-theoretic problems. Goldbach's innocent question whether Euler knew of Fermat's claim that all numbers of the form $2^{2^n}+1$ are prime eventually made Euler study everything by Fermat he could lay his hands on. Euler's contemporaries, first of all the Bernoullis, remained indifferent to this aspect of Euler's research, leaving Goldbach as virtually the only person with whom Euler could discuss such topics[56] until, towards the end of Euler's life and after Goldbach's death, Lagrange entered the stage.

1.2.5. The final years

In the decade from Euler's move to Berlin in June 1741 to the end of 1750, Goldbach and he wrote frequently to each other, on average every two months on each side; many of both correspondents' letters are long and substantial. However, towards the end of this period Goldbach's messages became rarer and shorter, and the scientific content dwindled: as he explained to Euler in 1751, "the attention required for such speculations is ever more fading away, by a progression that strongly converges to nothing". Goldbach was by now in his sixties and gradually retired from his professional activities; if he had earlier dreamed of a vigorous return, undistracted by other obligations, to his mathematical pastimes, his creativity and his concentration span now drained away fast. In spite of Euler's

56 Among the few exceptions we mention Euler's correspondents Ehler, Naudé, Krafft, Winsheim and Segner: Some of the topics in Euler's correspondence with Ehler were the "Chinese Remainder Theorem" (R 581: April 8th, 1735), Fermat's Little Theorem and the primality of Fermat numbers (R 584: June 1735), triangular numbers that are squares (R 592: August 27th, 1736), and the summation of the series $1+d+d^3+d^6+\ldots$ (R 594: February 11th, 1737). With Naudé, Euler discussed squares among the triangular numbers as well as partitions (R 1903–1904: August to September 1740). In the Krafft correspondence, two letters from 1744 (R 1282, 1283) deal with series involving figurate numbers, one from 1746 (R 1288) poses a problem on sums of divisors; in 1747 Krafft is looking for an analogue to perfect numbers among negative integers and marvels at Euler's recursion formula for sums of divisors (R 1293, 1294); a letter from 1750 (R 1303) mentions divisibility properties of the numbers 2^p-2 and 2^p-1, and another one (R 1304) asks Euler about his result that integers which are sums of two squares in a unique way are prime (the Krafft correspondence has been summarised in JW 3, p. 134–176, but many of Euler's letters are apparently lost). In the autumn and winter of 1748, Euler discussed Mersenne primes and factors of 2^p-1 with Winsheim (R 2813–2816). And in 1757, he pointed out errors in Segner's attempted proof of Fermat's Last Theorem (R 2494–2497).

encouragement, there are no new suggestions from his side, and his analysis of the questions Euler raises becomes ever more laborious and repetitive. Euler, who has always exhibited great patience with Goldbach's (relative) shortcomings, continues to assess his efforts kindly and explain at length what has not been correctly understood; but after a few years his part of the dialogue also trails off.

Moreover there are also weighty external reasons for this fade-out: after Maupertuis' flight from Berlin in 1753, in the aftermath of the König affair, Euler was burdened with official chores as acting president of the Berlin Academy (without receiving either the title or the salary raise that should have gone with the task). And in August 1756, after a decade of strained quiet, the struggle between Prussia and Austria for supremacy in Central Europe again erupted into a war that was to go on for seven years, and this time Russia joined the hostilities against Frederick. In October 1760, a Russian army even occupied Berlin for a short time, pillaging Euler's estate at nearby Charlottenburg.

Apparently Goldbach's position in the Tsarina's Foreign Department precluded the continuation of his correspondence with Prussia, although the postal service between Petersburg and Berlin went on more or less undisturbed (in fact Euler regularly exchanged letters, parcels and bills with Müller and several other colleagues in Russia all during the war). The only note Euler was able to send to Goldbach between June 1756 and June 1762 was a letter of recommendation delivered personally by F.U.Th. Aepinus, who had been called to the chair of physics at the Petersburg Academy.[57]

But even when normal means of communication were reopened after "this violent thunderstorm",[58] the tone of the correspondence was changed: the messages exchanged in the two years that remained of Goldbach's life – eight letters from Berlin, just four very short notes from Petersburg – are centered on personal news, touching on mathematics only in a desultory way. They contain reports on Euler's family, congratulations on Goldbach's career and – increasingly – expressions of concern, advice and good wishes for his declining health. Euler's last letter, written eight months before Goldbach's death, ended up not among the Goldbach papers, but in G.F. Müller's files at Petersburg; apparently by then the Academy's Secretary took charge of his terminally ill friend's correspondence. Müller also informed Euler of Goldbach's death and described to him in detail his last days, the funeral rites and the arrangements for the disposal of his financial and literary estate.[59]

Let us close this summary of our protagonists' relationship, which for most of the time of their acquaintance had been restricted to written expression, with a remark on form and content: The style of the letters – the only testimony of their

57 This note was accompanied by a letter in which Johann Albrecht Euler also recommended himself to his godfather's goodwill; see n° 184, 184[a].

58 Cf. n° 185. After Peter III succeeded to the Russian throne and made a separate peace with Prussia in May 1762, Euler immediately profited from the occasion to resume contact with his former patron after a five-year hiatus – incidentally mentioning that he was hoping for compensation of his losses during the Russian army's occupation of Berlin.

59 Cf. JW 1, p. 253–258.

dealings that remains – is easy to misinterpret as distanced, since conventions have changed so much since Goldbach's lifetime. The tone employed by both correspondents always remains very courtly: they address each other in not only respectful but seemingly stilted terms and close their letters by elaborate, almost uniformly phrased salutations. But although the expression of their mutual regard seems much more formal than is customary in recent times or, indeed, in contemporary letters from other countries, the personal warmth Goldbach and Euler felt for each other should not be overlooked. Both partners profit from every opportunity to congratulate each other on their professional, social and economic success; Goldbach seldom neglects to send his sincere regards to Euler's wife, his felicitations on his children's birth and his condolences when one of his relatives dies. When the bookseller Spener erroneously charges Goldbach for a book Euler has had sent to him as a gift, Euler is literally inconsolable in his fear that this misunderstanding might damage their relationship; when Euler learns about an illness affecting his elder friend, he is sincerely concerned and tries to counsel him. This tone of affectionate, on rare occasions even jocular, comradeship is hardly ever perceptible in Euler's other correspondence. There should be no doubt that Euler, the greatest mathematician of his time, and Goldbach, the worldly-wise "dilettante", regarded each other as tried and valued friends for a lifetime.

1.3. The Euler-Goldbach correspondence: chronology and statistics

The main remaining testimony of the relationship between Leonhard Euler and Christian Goldbach sketched in the last section is their correspondence. This consists of 196 extant letters, 102 written by Euler and 94 by Goldbach.[60] In the table on the next two pages, three periods of intense correspondence and two gaps when almost no letters were exchanged can be distinguished:

- October 1729 to January 1732, letters 1–19: Goldbach is living in Moscow with the court of his former pupil Tsar Peter II; Euler is launching his career at the Petersburg Academy. Taking up many of the topics Goldbach has already been discussing with their colleague Daniel Bernoulli – mainly in the theory of series, integral calculus and elementary number theory – Euler works at impressing Goldbach with the advances he has made in his research. Goldbach has found a partner who shares his interests in pure mathematics and can be expected to tackle the most difficult problems successfully.

60 In most cases, the autograph manuscript of the letter as it was actually sent is preserved among the documentary estate of the recipient. For most of Goldbach's letters from the periods 1730–31 and 1742–1749, we also have the (often partial) copies that he entered in his "correspondence book". A fuller description of the manuscripts is given in Section 3.1 below; see also the Synoptic Table of the correspondence, p. 1141–1146.

- February 1732 to June 1741, letters 20–37: Goldbach and Euler now both live in Petersburg and regularly meet at the Academy, where they collaborate in various roles as researchers, scientific experts, educators and administrators. Most of their communication takes place directly; only a few occasional messages document their interaction in this period. Euler still relies on Goldbach's patronage to support his career, but his outstanding talent makes him the rising star of Russia's small academic community, while Goldbach is withdrawing, in the same period, from public visibility as a scientist.
- July 1741 to July 1756, letters 38–183: Euler has moved to Berlin and is now supplying the lion's share of research for *two* academies; Goldbach – by now in his fifties – occupies a senior position in Russian civil service, commuting between Moscow and Petersburg.[61] The correspondence with Euler is now the only link to Western Europe he has left and his only hold on his passion for mathematics. Up to the late 1740s, both partners write frequently, alternating regularly; besides the scientific topics, they discuss many events in their academic and personal life and help each other with errands. Towards the end of this period, the correspondence thins out both in quantity and content; Goldbach is gradually retiring from his charges, and Euler is busy with many other tasks and new networks.
- August 1756 to May 1762, letter 184: Prussia has unleashed the third and most obstinate war for Silesia; this time Russia is seriously involved. Euler's correspondence with Petersburg is restricted to official business with the Academy, of which he is still an active foreign member. Only once is he able to entrust personal messages for Goldbach from himself and his son Johann Albrecht, Goldbach's godson, to a colleague who is travelling to Petersburg.
- June 1762 to November 1764, letters 185–196: Immediately after the conclusion of a peace treaty between Prussia and the new Tsar Peter III, Euler resumes the correspondence, but Goldbach is now in his seventies and his health is failing. Euler's effort to reawaken his interest in mathematical ideas is not very successful; the notes sent on both sides are now mainly limited to civilities and friendly advice. Apparently Goldbach, who was terminally ill by then, did not take note of Euler's last letter; later Müller reported to Euler on their old friend's death and funeral.

61 A word on the service provided by the Royal Prussian post may be in place here. According to a description with regard to a slightly earlier period (Matthias 1812, vol. 1, p. 325–328), the riding mail couriers for Russia left Berlin every Tuesday and Saturday evening at 6 p.m., going to Moscow by way of Königsberg, Riga and Petersburg; on the same weekdays, mail from Russia arrived at Berlin by noon.
Indeed most of Euler's letters from Berlin and of those Goldbach sent from Petersburg are dated from these two days of the week; when Goldbach was in Moscow, he often wrote on Monday or Thursday. The sequence of letters in our correspondence strongly suggests that letters between Berlin and Petersburg usually took two weeks to arrive (see, e. g., n° 39, note 1, and n° 107, note 1); so the time lapse until a reply arrived was expected to be approximately one month (at least in summer).

The table on the next double page shows the chronological progress of the Euler-Goldbach correspondence, month by month, and the number of letters written on both sides each year. On the right-hand page some important events for the two correspondents and their environment are listed in order to correlate the sequence of letters with the course of their personal and professional lives.

Year	Letters												E	G	n°	lg.
	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D				
1725																
1726																
1727																
1728																
1729										E		G	1	1	1–2	Latin
1730	E				G	EG	EG	E		GE	GE		6	5	3–13	
1731											GE	G	1	2	14–16	
1732	EGE						[E]						3	1	17–20	
1733																
1734																
1735			[E]							G			1	1	21–22	
1736		G												1	23	
1737							E						1		24	
1738										G				1	25	
1739											GEGE	EGE	4	3	26–32	
1740			G					EG					1	2	33–35	French
1741				E		G		EG	EE		G	E	5	3	36–43	German
1742		EGG	EE	G	E	GE	G	E		GE		GEG	8	8	44–59	
1743	EE	GGE	G	E	GE	G	EG	E	G	E		G	8	8	60–75	
1744	E		G	E		G	EG	G	E	G	E		5	5	76–85	
1745	G	E			G	E	G	E	G	E	GGE	G	5	7	86–97	
1746	E	EG	G	E	GGE	E	GE	G	E	G	E		8	7	98–112	
1747				EG	E	G	E	G	EG	E	G	E	6	5	113–123	
1748	G	E		G	E	GE	G	E	G	E			5	5	124–133	
1749		G	EG	GEE		G	E						4	4	134–141	
1750			G	E		E	G	EE		G	E		5	3	142–149	
1751						G	EG	G	E	G		E	3	4	150–156	
1752					GE	E	[G]	E		GE	G	E	5	4	157–165	
1753			G	E		G		E					2	2	166–169	
1754																
1755				G	E			GE				GG	2	4	170–175	
1756	EG	E	GG	E	G	E							4	4	176–183	
1757				E									1		184	
1758																
1759																
1760																
1761																
1762						E			E	G	E		3	1	158–188	
1763										EEGG	E	E	4	2	189–194	
1764	G		E										1	1	195–196	
1765																
1766																

Year	Goldbach	Euler	other relevant events
1725	arrives in Pb (July)		AcPb opens (Sep)
1726		negotiates with AcPb	
1727	supervisor of Peter II	arrives in Pb (May)	Peter II Tsar
1728	in Moscow with court		troubles at AcPb
1729			Start of *Commentarii*
1730			Anna Ioannovna Tsarina
1731		professor of physics	
1732	to Pb (Jan)		
1733		professor of mathematics	Keyserling AcPb President
1734		marries (Jan), * J.A. Euler	Korff AcPb President
1735		seriously ill (Jan)	
1736			
1737	AcPb "deputy President"		
1738		loses sight in right eye (Aug)	
1739			
1740		* Karl Euler	Frederick II King (May)
1741		moves to Berlin (June/July)	Elizabeth I Tsarina (Nov)
1742	to Foreign Office (Mar)		end of 1st Silesian war (June)
1743	to Pb (Jan)	* Christoph Euler	*Société Litteraire* Berlin
1744	to Moscow (Feb)	* Charlotte Euler	AcBe statute proclaimed (Jan)
1745	in Pb (Jan)	† Paul Euler (Mar)	end of 2nd Silesian war (Dec)
1746	receives estate in Livonia		Maupertuis AcBe President
1747		Fellow of Royal Society	
1748			† Johann I Bernoulli (Jan)
1749	to Moscow (Jan)	meets Frederick II	
1750	to Pb (Jan)	takes his mother to Berlin	
1751	buys house in Pb		
1752			Maupertuis-König affair
1753	to Moscow (Jan)	buys estate at Lietzow	
1754	to Pb (Mar)	*de facto* president of AcBe	
1755		member of AcSci Paris	
1756			3rd Silesian war (Aug)
1757			
1758			
1759			† Maupertuis (July)
1760	Privy Councillor	J.A. Euler marries	Berlin occupied by Russians
1761		travels to Halle with Karl	
1762			Catherine II Tsarina (July)
1763		negotiates return to AcPb	end of 3rd Silesian war (Feb)
1764	dies (Nov 20)		
1765			
1766		returns to Pb (July)	

2. Main subjects of the correspondence

This introduction is written for the benefit of a 21st-century reader who would like to get a first overview of the questions Euler and Goldbach discussed in their correspondence. For this reason we have used modern notions and modern notation throughout the present section. This change of notation with respect to the sources is, in our view, harmless when we write, e. g., x^2 instead of xx, or replace the ratio p between the circumference and the diameter of a circle by π, a notation that came into common use during Euler's lifetime.[1]

The use of our notations for factorials (Euler called them "Wallis's hypergeometric series") and binomial coefficients is slightly more problematic, because they are accompanied by a whole body of formulae and relations that were not as familiar to Euler's contemporaries as they are to us.[2]

The modern index notation (a_n) for sequences was also not available to 18th-century mathematicians; instead they used two-line "tables" linking index numbers and the corresponding terms. Thus, e. g., the array

[index:]	1	2	3	4	5
[term:]	1	2	6	24	120

refers to the sequence $a_n = n!$ of factorials.

In the 17th century, Wallis, Huygens and their contemporaries had solved "quadrature" problems without systematic notions of calculus or an established notation for integration. The general idea of an algorithm for solving problems of that kind and the $\int$ sign were devised by Leibniz, and in the 1690s Euler's teacher Johann Bernoulli coined the word "integral"; but since the notion of a *definite* integral $\int_a^b f(x)\,dx$ was lacking, 18th-century mathematicians still had to fix the range of integration by words. In Euler's later work, the gradual transition towards a formalised notation for the definite integral can be studied.

As will be discussed below, the understanding of the terms "irrational" and "transcendental" in the writings of Euler and Goldbach also differs greatly from their modern meaning.

In the following we will present the main topics that show up in the correspondence between Euler and Goldbach. Most of these topics belong to one of the

1 Euler's textbooks were actually instrumental in disseminating this sign and the concept of π as a number, which had been introduced in 1706 by the Welsh Newtonian William Jones (see Mattmüller 2008, p. 42).

2 In E. 421, Euler used the notation $[\frac{m}{n}]$ for his interpolation of the sequence of factorials at $x = \frac{m}{n}$; in E. 652 he introduced the symbol $\Delta : n = 1 \cdot 2 \cdots n$, and in E. 768 he employed the notation $\Phi : m$. The symbol $n!$ is due to Kramp (1808); Gauss used Πn (as did Riemann, by the way), and Legendre (1811) introduced the notation $\Gamma(s)$ still in use (with a shift of the argument: $\Gamma(n) = (n-1)!$). For the binomial coefficient that we denote by $\binom{\alpha}{\nu}$, Euler used, in E. 575 and E. 584, the symbol $[\frac{\alpha}{\nu}]$; in E. 663, E. 709, E. 722, E. 726, E. 747 and E. 768, he employed several other notations such as $(\frac{n}{q})$.

"three A's": algebra, analysis and arithmetic. The main difficulty in classifying Euler's work comes from the subsequent development: Euler probably did not consider his summation of the series $\sum \frac{1}{n^2}$ as being related to number theory, and neither did the Bernoullis;[3] modern readers, on the other hand, recognise this result as an example of the theory of special values of zeta functions and L-series, which today is considered a part of number theory.

Even the topics that we have listed under the title "analysis" have a number-theoretical touch: the technique of interpolation is used nowadays for defining p-adic analogs of classical functions such as the Gamma function and L-series (where, by the way, Bernoulli numbers play a central role); Euler used the Riccati equation for deriving continued fraction expansions of e, and elliptic integrals are today mainly studied in connection with elliptic curves.

Despite these problems we could not bring ourselves to throw out the classification into number theory on the one hand and analysis on the other; to accommodate some of the more problematic cases we have added a section on analytic tools in number theory.

2.1. Number theory

Number theory in Euler's times was an area of mathematics that dealt with properties of whole numbers and with problems that were more or less inherited from Pythagoras, Euclid and Diophantus: prime numbers, perfect[4] and amicable[5] numbers, square and polygonal[6] numbers, Diophantine equations, and similar topics. Fermat regularly tried to interest mathematicians such as Huygens, Pascal and Brouncker in number-theoretic problems, but his efforts – like those of Euler a century later – were largely in vain.

2.1.1. Fermat's legacy

Euler was brought into contact with Fermat's problems by Goldbach's first letter, when Goldbach asked him whether he knew of Fermat's claim that all numbers of the form $2^{2^n} + 1$ are prime. Subsequently Euler started reading Fermat (see

3 All the same, Jacob (I) Bernoulli gave to his 1689 paper on the problem of evaluating sums of the form $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k}$ the title "*Arithmetic* theses on infinite series and their finite sum".

4 A number n is called perfect if it equals the sum of its proper divisors; for example, $6 = 1 + 2 + 3$ is perfect.

5 Two numbers m and n are called amicable if $s(n) = m$ and $s(m) = n$, where $s(n)$ denotes the sum of the proper divisors of n; the classical example of a pair of amicable numbers is $m = 220$ and $n = 284$.

6 Polygonal numbers, sometimes also called figurate numbers, generalise the notion of square numbers; they count the dots that can be arranged in a pattern of nested regular polygons. The n-gonal numbers $p_k^{(n)}$ form a sequence with first term $p_1^{(n)} = 1$ and second difference equal to $n - 2$; explicitly, they are given by $p_k^{(n)} = \frac{1}{2}((n-2)k^2 - (n-4)k)$.

result	Fermat	Euler-Goldbach letters
$2^{2^n}+1$ is prime	Fermat 1679, p. 162	n° 2–4, 7, 8, 52
2^p-1 is only prime if p is prime	Fermat 1679, p. 177	n° 15
$q \mid 2^p-1$ implies $q=2kp+1$	Fermat 1679, p. 176	n° 165
$4n-1 \neq x^2+y^2$ for $x, y \in \mathbb{Q}$	Fermat 1891, t. II, p. 202–205	n° 11
$8n+7 \neq x^2+y^2+z^2$ for $x,\ y,\ z\ \in\ \mathbb{Q}$	Fermat 1891, t. II, p. 66	n° 11
Fermat's Little Theorem	Fermat 1679, p. 161	n° 15, 47
$p \nmid x^2+y^2$ for primes $p=4n-1$ and coprime integers x, y	Fermat 1679, p. 162	n° 15, 47, 73, 74
Two Squares Theorem	Fermat 1891, t. II, p. 203, 213, 221–222	n° 87, 115, 138
Four Squares Theorem	Wallis 1693, p. 857	n° 5, 74, 115, 127, 138, 140, 141, 147
$8m+3=x^2+y^2+z^2$ and the Triangular Number Theorem	Wallis 1693, p. 857	n° 74, 114, 125
Polygonal Number Theorem	Wallis 1658, p. 857	n° 11
There is no right-angled triangle in numbers whose area is a square	Frénicle 1676, p. 100	
The only triangular number that is a fourth power is 1	Wallis 1693, p. 858	n° 7
Solvability of "Pell's Equation"	Fermat 1679, p. 190	n° 9, 169, 173
Fermat's Last Theorem ($n=3$)	Fermat 1679, p. 193	n° 125, 169, 171
Multiply Polygonal Numbers	Fermat 1679, p. 168	n° 167

Table 2.1: Fermat's problems in the Euler-Goldbach correspondence

infra p. 39) and investigated almost all the problems that Fermat had left. Among his first five papers on number theory (E. 26, E. 29, E. 36, E. 54, E. 98), only E. 36 on amicable numbers does not refer to work done by Fermat (although Fermat, like many of his contemporaries such as Descartes and Frénicle, had also studied amicable numbers).

Euler rediscovered the power of Fermat's main technique, infinite descent, and found out how to use it for proving the following results that Fermat had obtained by the same method:

– Certain Diophantine equations, such as $x^4 \pm y^4 = z^2$, do not have any non-trivial solutions in integers: see, e. g., E. 98, in which Euler referred to Frénicle's *Traité des triangles rectangles en nombres* (1676): this contains a proof (believed to be akin to Fermat's) of his result that there is no right-angled triangle with integral sides whose area is a square. This problem is equivalent to solving $x^4 - y^4 = z^2$ in non-zero integers.[7] In E. 98, Euler presented his own version of Frénicle's proof and applied the same technique to equations such as $x^4 + y^4 = z^2$.

- The only fourth power among the triangular numbers $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ for $n \geq 1$ is $T_1 = 1$. The corresponding problem for squares in the sequence of triangular numbers led Euler to investigating "Pell's equation" (incidentally establishing this erroneous attribution).
- All odd prime divisors of integers of the form $x^2 + y^2$ have the form $4n + 1$; Euler gave several proofs of this fact, and with a little help from Euler, Goldbach found one, too (see n° 73). For the corresponding results on prime divisors of the forms $x^2 \pm 2y^2$, Euler used a proof by descent (see E. 256 for $x^2 + 2y^2$ and E. 449 for $x^2 - 2y^2$). Euler's idea became the basis of the first proof of the quadratic reciprocity law by Gauss,[8] who replaced descent by induction.
- Every prime $p = 4n + 1$ is the sum of two squares: see, e. g., E. 228. Euler later tried to prove the Four Squares Theorem along the same lines.

In fact, Euler worked out proofs for most of Fermat's claims – with some notable exceptions:

- the Four Squares Theorem, according to which every positive integer is the sum of at most four integral squares: Euler could reduce the claim to representing prime numbers as sum of four squares and was also able to prove that positive integers are sums of four squares of *rational* numbers, but it was Lagrange who first succeeded in fully proving the theorem.[9]
- the solvability of "Pell's Equation": for positive non-square integers A, the equation $Ay^2 + 1 = x^2$ has infinitely many solutions in integers. This was also first proved by Lagrange, after Euler had translated Brouncker's method into the language of continued fractions.
- the Triangular Numbers Theorem: every positive integer is the sum of at most three triangular numbers $\frac{1}{2}n(n+1)$. The observation that this is equivalent to representing numbers of the form $8m + 3$ as sums of three integral squares was known to Fermat and Euler. The "Three Squares Theorem" was proved by Gauss[10] and figures prominently in his diary.[11]

7 Catherine Goldstein (1995) has devoted an important monograph to this theorem, the history of its reception and various "reconstructions" of Fermat's ideas.

8 Cf. Gauss, *Disquisitiones* (1801), art. 107–114.

9 Euler came very close to a complete proof, however: see Lemmermeyer 2010.

10 For a later version of his proof, cf. Gauss, *Disquisitiones* (1801), art. 266–293.

11 In his early years, Gauss kept a diary in which he entered his main discoveries (see Gauss 2005). In entry n° 18 from July 10th, 1796, he encoded the result that every positive number is a sum of three triangular numbers as "EUREKA! num = $\Delta + \Delta + \Delta$".

- the general Polygonal Number Theorem, according to which every positive integer is the sum of at most three triangular numbers, four squares, five pentagonal numbers etc., was derived by Cauchy (1815) from Gauss's Three Squares Theorem just mentioned.
- "Fermat's Last Theorem", the unsolvability of $x^n + y^n = z^n$ in non-zero integers for exponents $n > 2$, was finally proved by Wiles and Taylor in the 1990s.

Although Euler's first reaction on learning of Fermat's statement concerning the primality of $2^{2^n} + 1$ was rather reserved, in his next letter to Goldbach (nº 5) he admitted that he had become interested and had started reading Fermat's works. At that time Euler had access to Fermat's *Varia Opera* edited in 1679, to Wallis's *Commercium Epistolicum*[12] first edited in 1658, which contains several letters by Fermat, and to Frénicle's 1676 *Traité*, which contains Fermat's proof by descent that there is no triangle in integers whose area is a square. André Weil suggests (Weil 1984, ch. III, § IV) that Euler read Fermat's *Observations on Diophantus*, which had been edited by his son Samuel in 1670, only in 1748; in fact, in his letter nº 125 to Goldbach, which was written in February 1748, Euler mentioned for the first time what later would be called Fermat's Last Theorem, a result that Fermat did not mention in his correspondence and which only appeared in the commentary to Diophantus.[13]

Fermat numbers and Mersenne numbers

Prime numbers of a special form have a tendency to show up in most investigations on amicable or perfect numbers. Euclid already proved (*Elements* IX.36) that if $2^p - 1$ is a prime number, then $2^{p-1}(2^p - 1)$ is perfect, i. e., this number equals the sum of its proper divisors. In two notes dating probably from the late 1740s but published only in 1849, Euler proved the converse and established the generality of Euclid's construction: all even perfect numbers are of the form $2^{p-1}(2^p - 1)$ where p and $2^p - 1$ are prime.[14]

One of the classical problems that Fermat mentioned several times in his correspondence was that of finding an explicit formula that would yield prime numbers greater than any given number. Fermat believed he had found a solution to this problem: he conjectured that all numbers of the form $F_n = 2^{2^n} + 1$ are prime. Goldbach asked Euler in nº 3 whether he knew Fermat's claim, and explained in nº 8 that all Fermat numbers are pairwise coprime. Euler, in nº 7, looked at the more general problem of the primality of numbers of the form $(2p)^{2^k} + 1$ and observed that these are not always prime. In nº 52, Euler indicated the divisor 641 of the fifth Fermat number.

12 Euler refers to this in E. 26.

13 In the spring of 1757, J.A. Segner discussed his attempt to prove Fermat's Last Theorem with Euler in several letters (R 2494–2497, to appear in O. IVA/8).

14 See E. 798, § 8, and E. 792, § 106–109.

Mersenne numbers first show up in nº 5, where Euler remarks that some believe all numbers of the form $M_p = 2^p - 1$ to be prime,[15] whereas $23 \mid M_{11}$, $47 \mid M_{23}$ and $223 \mid M_{37}$. In nº 15, he observed that $q \mid M_p$ for $p = 11, 23, 83$ and $q = 2p+1$. More generally, Euler claimed that $2^n - 1$ is divisible by $n+1$ whenever $n+1$ is a prime number; this is a special case of "Fermat's Little Theorem" that $p \mid a^{p-1} - 1$ for primes p and numbers a coprime to p, which Euler proved in nº 47. Euler later generalised this result to $m \mid a^{\varphi(m)} - 1$ for arbitrary coprime numbers a and m, where $\varphi(m)$ denotes the number of integers $1 \le k < m$ coprime to m.[16] The number of known perfect numbers, and in particular the primality of $2^{31} - 1$, is discussed in nº 162–165.

Sums of squares and polygonal numbers

The problem of representing numbers as sums of two squares has a long history. Apparently Diophantus already knew how the representations of 65 as a sum of two squares can be computed from the representations of its prime factors 5 and 13, and the idea underlying the "product formula" $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ was also known to Indian mathematicians such as Brahmagupta. Girard and Bachet studied the problem of writing numbers as sums of two squares, but it was Fermat who finally succeeded in proving the fundamental result that primes $p = 4n + 1$ can be written uniquely as a sum of two squares.[17]

In nº 6, Goldbach conjectured that the smallest nontrivial divisor of a number of the form $a^{2^x} + 1$ has the same form $n^{2^x} + 1$, and stated this could easily be proved for $x = 1$. In his reply, Euler politely remarked that the claim is true if one allows 1 as the smallest divisor, and then observed that "even when these smallest divisors do not exceed a square by 1, possibly all of them are sums of two squares". In nº 11, Euler observed that a number of the form $4x + 3$ is not the sum of two rational squares,[18] and that a number of the form $8x + 7$ is not the sum of three rational squares; both observations also occur in letters by Fermat to which Euler did not have access, and both claims can be proved by elementary congruence arguments. In nº 47, Euler stated that a sum of two coprime squares $a^2 + b^2$ is never divisible by any number of the form $4n - 1$ and acknowledged that this theorem was due to Fermat. Euler also sketched a plan of how to attack

15 He did not give a reference for this statement and admitted in nº 7 that he did not remember where he had seen it; but in fact the error is present in several textbooks that were widely diffused in Euler's time (cf. nº 5, note 4).

16 Cf. E. 271, *Theorema* 11 (O. I/2, p. 554–555).

17 Fermat gave a rough sketch of his proposed proof in a letter to Carcavi written in August 1659; this letter was published much later under the title *Relations des nouvelles decouvertes en la science des nombres* (see Fermat's *Œuvres*, t. II, p. 431–436).

18 Euler observed in the introduction to E. 556 that the equation $x^2 + y^2 = 3z^2$ is not solvable in rational integers, and then studied, more generally, the solvability of $fx^2 + gy^2 = hz^2$. This investigation was completed by Legendre, who showed that the necessary solvability conditions given by Euler are actually sufficient.

Fermat's Two Squares Theorem. This result showed up again in n° 52 and 87, and Euler finally proved the Two Squares Theorem in n° 115.

Like Bachet, Fermat believed that the content of the Four Squares Theorem, which claims that every positive integer is a sum of at most four integral squares, was known to Diophantus. Bachet first stated it explicitly and tested it empirically for small numbers. Fermat claimed to have found a proof of this result in the late 1650s.

Euler's and Goldbach's attempts at proving the Four Squares Theorem are documented in many letters of their correspondence. Already in n° 5, Euler mentioned this "elegant theorem" due to Fermat. Eighteen years later he gave, in n° 127, the product formula for sums of four squares, a result which is used in most proofs of the Four Squares Theorem.

In the same letter (see also n° 147), Euler suggested proving results like this using generating functions: write

$$(1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + \dots)^3 = \sum a_n x^n, \tag{2.1}$$

where the exponents on the left-hand side are the triangular numbers;[19] then a_n is the number of ways in which n can be written as a sum of at most three triangular numbers, and the desired theorem is equivalent to the claim that $a_n > 0$ for all $n \geq 1$. Euler presented this idea in E. 565, and in E. 586 he explained the same idea for sums of squares and general polygonal numbers.

Jacobi later gave a proof of the Four Squares Theorem,[20] adopting Euler's idea by observing that

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} \right)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} r_4(n) q^n,$$

where $r_4(n)$ is the number of representations of n as a sum of at most four squares; using analytic properties of the "theta function" $\sum q^{k^2}$ on the left-hand side,[21] he found the formula $r_4(n) = 8 \sum_{d|n, 4\nmid d} d$ for $n \geq 1$ (for odd numbers n, we have $r_4(n) = 8\sigma(n)$, where $\sigma(n)$ denotes the sum of the divisors of n). Legendre, by the way, found the analogous result that the number of representations of $n \geq 1$ as a sum of four triangular numbers is equal to $\sigma(2n+1)$. The corresponding numbers for sums of three triangular numbers and for sums of three squares are connected to class numbers of certain binary quadratic forms.

In n° 138 Euler wrote that he could *almost* prove the Four Squares Theorem: the only piece of the puzzle that was still missing was the lemma that if ab and a

19 Euler's efforts at finding a closed form of the series (2.1) are mentioned in his letter R 594 to Ehler from February 1737 (see Smirnov 1963, p. 381–382). Daniel Bernoulli, in his letter R 145 dated April 14th, 1742 (to be published in O. IVA/3), asked Euler whether his method of summation also applied to sums of the form $a + a^4 + a^9 + a^{16} + \dots$.

20 See Jacobi 1829 (*Gesammelte Werke*, Bd. I, p. 239).

21 In modern terms, this theta function is a modular form of weight $\frac{1}{2}$ with respect to $\Gamma_0(4)$.

are sums of four squares, then so is b. And in n° 141, he actually almost succeeded, coming very close to a proof of the missing lemma.[22]

Euler observed twice, in n° 74 and 125, that Fermat's claim that every number is the sum of at most three triangular numbers is equivalent to $8n + 3$ being a sum of three squares. In n° 144, Euler formulated a conjecture that happens to be equivalent to this result: every odd number $2n+1$ can be written as a sum of four squares in such a way that $2n + 1 = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ and $p + q + r + s = 1$.

Diophantine equations

One of the first Diophantine problems ever studied was that of finding Pythagorean triples, that is, positive integers x, y and z with $x^2 + y^2 = z^2$. Proclus credits the Pythagoreans with an infinite family of solutions,[23] and Euclid already knew all of them. Diophantus later studied much deeper problems, all of which asked for solutions in rational numbers. In the centuries that followed, mathematicians in the Islamic world solved Diophantine problems such as $x^4 + y^2 = z^2$ and $x^2 + y^2 = z^4$, and already claimed that $x^4 + y^4 = z^4$ is impossible in integers. Fermat studied nontrivial Diophantine equations (such as the "Pell equation" $Ax^2 + 1 = y^2$ or the Bachet-Mordell equation $y^2 + 2 = x^3$) over the integers.[24]

The correspondence between Euler and Goldbach regularly touched upon Diophantine equations of varying difficulty. The first such topic was brought up by Goldbach in n° 6, where he claimed that no triangular number increased by 4 is an eighth or tenth power. In his reply Euler mentioned Fermat's theorem that no triangular number > 1 is a fourth power. Goldbach answered in n° 8 he had even proved (in Goldbach 1724) that no triangular number > 1 could be a square, which Euler showed to be false in the next letter n° 9. There he also mentioned that he could not yet solve the analogous problem of making values of cubic polynomials squares; in fact, equations $y^2 = f(x)$ for cubic polynomials in general describe curves of genus 1 and have a much richer structure than conics, where f is quadratic.

After having studied triangular numbers that are squares Euler immediately asked the more general question how ax^2+bx+c can be made to be a square.[25] This led Euler to the problem of solving equations of the type $ax^2 + 1 = y^2$ in integers, "which had once been discussed between Wallis and Fermat". Euler referred to a method in Wallis's *Algebra*, which he credited to the English mathematician John Pell but which is actually due to Viscount William Brouncker, the first President

22 See Lemmermeyer 2010 for a detailed discussion of this episode.

23 Cf. Dickson (1919–1923), vol. 2, p. 165.

24 Bachet knew how to obtain additional rational solutions of an equation $y^2 = x^3 + k$ from a known solution; his method is equivalent to what we call the "tangent method". Fermat claimed that the only positive integral solution of $y^2 = x^3 - 2$ is $(x, y) = (3, 5)$, which Euler tried to prove in his *Algebra* (E. 388, § 188, 193: O. I/1, p. 429–432) by using algebraic numbers of the form $a + b\sqrt{-2}$.

25 Triangular numbers that are squares correspond to solutions of the equation $2x^2 + 2x = y^2$.

problem	Euler-Goldbach letters
$\frac{1}{2}n(n+1)+4 \neq a^8$	n° 6
$\frac{1}{2}n(n+1)+10 \neq a^8$	n° 6
$\frac{1}{2}n(n+1) = x^4$	n° 7, 8, 9
$a(a-1)(a-2) = 6b^2$	n° 9
$a(a-1)(a-2) = 3b(b+1)$	n° 9
$2z^4 \pm 2 = x^2$	n° 119, 121
$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$	n° 129
$xy(x+y) = a$	n° 139
$xyz(x+y+z) = a$	n° 139
"Pell's equation"	n° 9, 169, 173
"Fermat's Last Theorem"	n° 125, 169, 171
$p^2+eq^2 = a^2+b^2$	n° 168–173, 178–181, 187, 195

Table 2.2: Diophantine problems discussed in the Euler-Goldbach correspondence

of the Royal Society.[26] Brouncker's method consisted in what we call computing a cycle of reduced forms; Euler later realised that this algorithm is equivalent to computing the continued fraction expansion of $\sqrt{a}$, and in n° 169 he mentioned that he had found the solutions of $nx^2+1=y^2$ for $n=61$ and $n=109$ within a few minutes using his "new method" (see also n° 173).

One of Fermat's favourite problems was the investigation of "multiply polygonal" numbers. This problem first occurred in a book attributed to Diophantus,

26 Cf. n° 9, note 7.
The "Pell equation" has a long history: Archimedes used integral solutions of $x^2-3y^2=1$ and $x^2-3y^2=-2$ for approximating $\sqrt{3}$ in his calculation of π, and his famous cattle problem involves several similar equations. Indian mathematicians such as Brahmagupta and Bhaskara developed methods for solving the equation in integers.
In 1657, Fermat challenged mathematicians in Europe, and especially Wallis and Brouncker in England, to show that the equation $Ax^2+1=y^2$ has solutions in integers for all positive non-square integers A. Brouncker found a method for solving these equations similar to the Indian method, and Fermat claimed to have a proof that the equation always has a nontrivial solution.
In his proof that $x^2-Ay^2=1$ is always solvable for non-square positive numbers A, Lagrange mentioned Wallis, but not Brouncker. Legendre did not use the expression "Pell's equation", and Gauss remarked in his *Disquisitiones* (1801) that it was incorrect to credit Pell with this result. Dirichlet, who had studied the *Disquisitiones* inside out, must have known that naming the equation after Pell was incorrect. In fact, he always talked about "the indeterminate equation" $t^2-Du^2=1$; in Dirichlet 1842 he even called it "Fermat's equation"; only in 1846 did he use the phrase "the well-known Pell equation". The first textbooks on number theory and Diophantine equations which started appearing in the middle of the 19th century all used the term "Pell's equation", as did Kummer and Kronecker in their publications. Wilhelm Berkhan, for example, wrote that "the English mathematician J. Pell († 1685)" succeeded in solving the equation $ax^2+1=y^2$ (Berkhan 1856, p. 121).

large parts of which are lost.[27] In a report sent to Carcavi for Huygens,[28] Fermat mentioned the following two problems:

- Given a number, to find in how many ways it is polygonal.
- To find a number which is polygonal in a given number of ways, and to find the smallest such number.

Euler reported on his efforts in this direction in nº 167.

In nº 125, Euler remarked that he had found in Fermat's work the claim that for exponents $n > 2$ the equation $x^n + y^n = z^n$ is impossible in non-zero numbers, and lamented the fact that Fermat's proof was lost. In nº 169 he wrote that he had a proof for the exponents $n = 3$ and $n = 4$, and in nº 171 he mentioned, in connection with the case $n = 5$, the fact that primes dividing $a^5 + b^5$ must have the form $10n + 1$.

In nº 139, Euler remarked that he had studied the solvability of the Diophantine equation $xy(x + y) = a$ and observed that this equation has rational solutions whenever $a = pq(pm^3 \pm qn^3)$ for integers p, q, m, n. For the higher-dimensional equation $xyz(x+y+z) = a$ Euler wrote down a parametric solution which he had found "after taking a lot of trouble", and in fact even with the tools of algebraic geometry available today[29] it is a difficult problem to derive Euler's fantastic parametrisation of certain rational points on the surface defined by this equation.

2.1.2. Quadratic forms and quadratic residues

It seems that the investigation of binary quadratic forms has its origin in Diophantine problems coming from geometry: the form x^2+y^2 is related to the Pythagorean Theorem, and the question which numbers occur as the sum $a + b$ of the two smaller sides in a right-angled triangle with integral sides a, b and c leads to the form $x^2 - 2y^2$: in fact, by the "main theorem on right-angled triangles" we have $a = m^2 - n^2$ and $b = 2mn$, hence $a + b = (m + n)^2 - 2n^2$. It is therefore no surprise that Fermat studied the forms $x^2 + y^2$ and $x^2 - 2y^2$ and their possible prime divisors very early on.

Euler mentioned his first observation in this direction in nº 40: he claimed that odd prime divisors of $x^2 - 2y^2$ all have the form $8n \pm 1$, and presented analogous results for the forms $x^2 - my^2$ with $m = 3$ and $m = 5$. A year later, in nº 54, Euler had extended his calculations to many other values of m and stated that the prime divisors of $x^2 - my^2$ coprime to $2m$ all lie in certain residue classes modulo $4m$. This statement can be seen as the essential part of the quadratic reciprocity law: for if p is an odd prime coprime to m which divides $x^2 - my^2$ for coprime values of x and y, this means that $x^2 \equiv my^2 \bmod p$, so these are exactly the

27 See Heath 1885, p. 247–259.

28 *Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres*, August(?) 1659: published in Fermat, *Œuvres*, t. II, p. 431–436, and in Huygens, *Œuvres*, t. II, p. 458–462.

29 Cf. Elkies 2009.

primes for which the Legendre symbol[30] $\left(\frac{m}{p}\right) = +1$. Euler's observation means that $\left(\frac{m}{p}\right) = \left(\frac{m}{q}\right)$ for prime numbers $p \equiv q \bmod 4m$, which is one possible formulation of the quadratic reciprocity law.[31]

In n° 166, Goldbach claimed that for prime $p = 4n + 1$ and for every divisor $d \mid n$, the prime p can be written as $p = x^2 + dy^2$. Euler answered in n° 167 that he already knew this was true – at least if one allowed rational values for x and y – but was unable to prove it. For several years Goldbach and Euler continued to discuss whether primes $p = 4ef + 1$ can be rationally represented by forms $x^2 + ey^2$ (see n° 168–173, 179, 182). This question was answered in a satisfactory manner only by Gauss's theory of binary quadratic forms, and in particular his principal genus theorem.[32]

Goldbach's remark in n° 39 that numbers of the form $(3m + 2)n^2 + 3$ cannot be squares led Euler, in n° 40, to present a result he had known for a long time, namely that numbers of the form $4mn - m - n$ for positive values of m and n cannot be squares. Since the equation $a^2 = 4mn - m - n$ is equivalent to $4a^2 + 1 = (4m - 1)(4n - 1)$, this follows from the fact that sums of two coprime squares cannot be divisible by numbers of the form $4m - 1$, which Euler proved in n° 47.

Euler's result that $a^2 \neq 4mn - m - n$ for positive integers m, n is discussed and generalised in several more of the Goldbach letters, starting with n° 49. In December 1742 (n° 57), Goldbach attempted a proof, but Euler pointed out in his reply n° 60 that this was not valid. In the letters n° 65–72, each of Goldbach's attempts of closing the gap was proved to be incorrect by Euler, until Goldbach eventually found a full proof (via Fermat's descent) in n° 73. The discussion continued until February 1745 (n° 79–87).

2.1.3. Goldbach's conjectures

Goldbach was very fond of studying additive problems involving prime numbers. In n° 51 he put forward the conjecture that every number > 2 is the sum of three primes (where 1 is counted as a prime). Euler replied in n° 52 that this would

30 For odd primes p and a not a multiple of p, the Legendre symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ has the value ± 1 determined by the congruence $a^{(p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \bmod p$.

31 The standard formulation of the quadratic reciprocity law, $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{(p-1)(q-1)/4}$ for odd primes p and q, is due to Legendre. For a description of Euler's achievement, see Edwards 1983.

32 Cf., e. g., Lemmermeyer 2007.

follow from Goldbach's earlier (but not documented) conjecture that every even number is a sum of two primes.[33]

In n° 57 Goldbach asked for a characterisation of twin primes. In n° 73, he observed that the values attained by the polynomial $f(x) = x^2 + 19x - 19$ are very often prime, but at once added the remark that every non-constant polynomial with integral coefficients must also yield composite values (this result is again mentioned by Euler much later in n° 163). Goldbach's question whether $f(2^m)$ is always prime was answered negatively by Euler in n° 74. Euler's famous prime-producing polynomial $f(x) = x^2 - x + 41$ is not mentioned in the correspondence with Goldbach, but can be found in a published note addressed in 1772 to Johann III Bernoulli.[34]

Goldbach and Euler formulated several incidental questions about the representation of numbers which were more or less disregarded by subsequent research. Some of these conjectures that still remained open when the Euler-Goldbach correspondence was last published in 1965 have by now been settled:

33 Both forms of the Goldbach conjecture – the "ternary" and the stronger "binary" one – appeared in print for the first time in the Cambridge professor Edward Waring's *Meditationes Algebraicae* (1770). At the end of this work, which deals mainly with algebraic equations, Waring adds some paragraphs on number theory. In particular, he remarks: "It seemed appropriate to add here two or three properties of prime numbers", of which the first reads: "Every even number consists of two prime numbers, and every odd number is either prime or consists of three prime numbers, etc." ("Omnis par numerus constat e duobus primis numeris, & omnis impar numerus vel est primus numerus, vel constat e tribus primis numeris, &c.": *op. cit.*, p. 217). The third and last of the additions is, by the way, the observation that for prime p, $(p-1)!+1$ is divisible by p, also published here for the first time and attributed to Waring's student John Wilson.
Waring's discovery is generally assumed to have been independent of Goldbach; however, this is somewhat called into doubt by the fact that, a few pages earlier in the same work, Waring mentions two other results by "D^s. Goldbatch" (as he calls him). Indeed he could have learnt of these results from the short paper that Goldbach had published in the 1724 supplement of *Acta Eruditorum*; but it is also conceivable that a common colleague told Waring about them (probably not Goldbach himself: Waring graduated only in 1757 when Goldbach was no longer active), and in this case Waring might also have heard of Goldbach's conjecture from the same source.
A weaker variant of the ternary Goldbach conjecture had already been stated by Descartes: "But any even number also arises from one or two or three primes" ("Sed et omnis numerus par fit ex uno vel duobus vel tribus primis"). However the manuscript containing this sentence was only published in 1908 (cf. *Varia Mathematica*: Descartes, *Œuvres*, t. X, p. 298).
Lagrange, at the very end of his 1775 *Recherches d'Arithmétique*, observed that "by induction" (i. e., on an observational basis) he had formed another similar conjecture: every prime of the form $4n-1$ is the sum of a prime of the form $4n+1$ and the double of a prime of the same form (like Euler and Goldbach, Lagrange considered 1 to be a prime number in this connection).

34 See E. 461: O. I/3, p. 337.
Goldbach's and Euler's polynomials gained additional interest through a 1912 publication by Frobenius, who showed that they owe their existence to class number phenomena: the prime-producing property of Euler's polynomial $f(x) = x^2 - x + 41$, for example, is related to the fact that the class number of the binary quadratic forms (or, equivalently, the quadratic field) with discriminant -163 is equal to 1.

– Goldbach's claim that the Diophantine equations

$$n^2 + n + 8 = 2a^8 \qquad \text{and} \qquad n^2 + n + 8 = 2a^{10}$$

do not have solutions in positive integers (see n° 6) is correct.

– Goldbach's conjecture that every number $4n + 3$ can be represented as

$$2a^2 + 4b^2 + c^2 + 2 = 2(a + 1)^2 + 4B^2 + 2C^2$$

(see n° 130) is false.

– Goldbach's claim in n° 132 that if a is a positive integer not divisible by 4 with $a^2 < 8m + 7$, then the equation $8m + 7 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ has an integral solution, follows from the Three Squares Theorem.

Other problems are still open, the most famous being of course the one universally known as the Goldbach conjecture – at least in its binary form: Every even integer > 2 is the sum of two primes. A complete proof of the weaker "ternary" version, according to which every integer > 1 is the sum of at most three primes, has recently been announced.

Euler was right in refusing to rise to Goldbach's bait: neither the 18th nor the 19th century had any tools that permitted to tackle the question. Substantial progress became possible only much later, within the framework of analytic number theory. Among the important contributions to the Goldbach problem(s), we list the following:

1922 Hardy and Littlewood (1923) show that, assuming the Generalised Riemann Hypothesis, every sufficiently large odd integer is the sum of three primes.

1930 Shnirel'man (1930) proves the existence of a number S with the property that every integer > 1 is the sum of at most S primes.

1937 Vinogradov (for a presentation in English see Rexrode 1966) shows that every sufficiently large odd integer is the sum of three primes.

1966 Chen (see Chen 1973) proves that every sufficiently large even integer is the sum of a prime and a number with at most two prime factors.

1995 Ramaré (1995) proves that every integer > 1 is the sum of at most seven primes.

2012 Terence Tao (see Tao 2014) proves that every integer > 1 is a sum of at most five primes.

2013 Harald Helfgott announces that he has completed the proof of the ternary Goldbach conjecture by closing the remaining "size gap" (previously it was known that every odd natural number ≥ 7 smaller than $8 \cdot 10^{26}$ or larger than $2 \cdot 10^{1346}$ is the sum of three prime numbers). As a corollary, every integer > 1 is a sum of at most four primes.

A conjecture made in n° 164, according to which every odd number can be written in the form $2a^2 + p$ for primes p, has also received quite some attention, e. g., from Hardy and Littlewood.

Somewhat less known is a beautiful observation due to Goldbach in letter n° 55: let S be the set of all integers a such that $4a^2 + 1$ is prime; then for every $c \in S$ there are $a, b \in S$ such that $c = a + b$. This would imply in particular that there is always a prime of the form $4a^2 + 1$ between $4n^2 + 1$ and $4 \cdot (2n)^2 + 1$, a conjecture reminiscent of "Bertrand's postulate" stating that there is a prime number between n and $2n$ – a theorem which can be proved quite easily.

2.2. Analytic tools in number theory

Many analytic tools used by number theorists have their origin in Euler's work: zeta functions, L-series, theta functions, Lambert series, summation formulae, the dilogarithm and multi-zeta values can all be traced back to Euler.

2.2.1. Zeta functions

The problem of finding a finite expression for the sum $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$ of the inverse squares had received a lot of attention at the hands of Leibniz and the Bernoullis,[35] after Pietro Mengoli had first posed the question.[36] Jacob Bernoulli had already found in his 1692 *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis* (*Pars*

35 In a letter to Johann Bernoulli dated November 1696, Leibniz asked for the value of the sum $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} +$ etc.. Leibniz already suggested using calculus for the evaluation of this sum, and he and Jacob Bernoulli came up with the formula

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \pm \ldots = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx.$$

The same approach was later taken by Euler when he expressed $\zeta(2)$ with the help of the dilogarithm $\mathrm{Li}_2(x)$ in n° 54. We remark that the substitution $x = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ shows that

$$\zeta(2) = -\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{t\,dt}{\mathrm{e}^t - 1}.$$

Although this formula does not seem to have played a major role in Euler's summation of $\zeta(2)$, its generalisation

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,dx = \Gamma(s)\zeta(s),$$

which is an easy consequence of Euler's definition of the zeta function via integrals, occurs in an 1823 paper by Abel as well as in Riemann's famous memoir from 1859 (Riemann 1860) on prime numbers and the zeta function, where it is used to extend the zeta function to the whole complex plane.

36 See Mengoli 1650, *Praefatio*, p. [ix]. For an excellent account of the early history of the zeta function, see Schuppener 1994.

altera, Prop. XXIV) that

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)^m = (2^m-1)\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^m.$$

Euler was eventually able to show that the sum of the inverse squares equals $\pi^2/6$. The principal tool used for this result is the product representation of the sine function:

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{n^2}\Big). \tag{2.2}$$

Euler immediately observed that the same technique allowed him to compute sums of the form[37]

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

for any even integer s. In fact, he found the formula

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}, \tag{2.3}$$

where k denotes an integer > 1, and where the B_k are Bernoulli numbers.[38] Throughout his life, Euler tried without success to find a similar formula for odd integers $s > 1$. By working with the limits $1^n x - 2^n x^2 + 3^n x^3 \mp \ldots$ as $x \to 1$ he could "evaluate" the zeta function at negative integers,[39] and used his results for guessing the correct functional equation of $\zeta(s)$.[40] Euler also found the product decomposition of the zeta function in the form

$$\zeta(s) = \frac{2^s\cdot 3^s\cdot 5^s\cdot 7^s\cdot 11^s\cdots}{(2^s-1)(3^s-1)(5^s-1)(7^s-1)(11^s-1)\cdots},$$

and used it to deduce the fact that the sum $\sum\frac{1}{p}$ of the inverse primes diverges; actually he even found the correct asymptotic behaviour of $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$, which he

37 The notation $\zeta(s)$ was introduced by Riemann in 1859.

38 The convention for the Bernoulli numbers used here and everywhere in this volume is the one suggested by Jacob Bernoulli in *Ars Conjectandi* (1713). In a table for the sums of powers (p. 97–98) he implicitly defines B_m as the coefficient of n in the development of $\sum_{k=1}^{n}k^m$ as a polynomial (of degree $m+1$) in n. This yields the sequence $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, …, which Goldbach mentions in a letter from 1738 (see n° 25, note 2) and which Euler also used in many papers, starting with the recursion formula given in E. 25, § 2 (O. I/14, p. 42–44). See Faber's introduction in O. I/16.2, p. XVI–XXXIX.

39 The fact that Euler's limit coincides with the analytic continuation of the zeta function is not obvious at all.

40 A rigorous analysis of Euler's work on the functional equation that takes account of 19th-century developments can be found in Landau 1906.

formulated as the claim that the sum of the reciprocals of all primes is "so to speak the logarithm of the harmonic series" (i. e., asymptotic to $\log\log x$ as $x \to \infty$).[41]

In his correspondence with Goldbach, these results played only a minor role. In n° 52, Euler considered integrals of the form $\displaystyle\int \frac{x^{m-1} - x^{m-n-1}}{1-x^n}\,dx$ and their connection with the famous expansion[42]

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \ldots$$

of the cotangent function, which follows easily from (2.2) by taking the logarithmic derivative. These integrals later showed up in Dirichlet's explicit evaluation of his L-series in his proof of the class number formula. Euler derived Leibniz's series for $\frac{\pi}{4}$ as well as his own formula $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$ and a wealth of similar results from this source.

Euler introduced the function $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$, nowadays called the dilogarithm $\mathrm{Li}_2(x)$, in n° 54 in connection with finding a numerical approximation of $\zeta(2)$, and in E. 20 he proved the functional equation

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = -\log x \log(1-x) + \zeta(2)$$

of the dilogarithm.

Expressions that are nowadays called multi-zeta values first show up in Goldbach's letter n° 57; see also n° 59 and 61.

2.2.2. The Pentagonal Number Theorem

In a letter to Euler dated August 29th, 1740, Philippe Naudé (the Younger) asked Euler in how many ways a number n can be written as a sum of positive integers. In his answer written on September 12th (23rd),[43] Euler explained that if we denote this "partition number" by $p(n)$, then

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, x^n$$

with $p(0) = 1$. Euler mentioned the identity

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n(3n+1)}{2}} \tag{2.4}$$

over and over again in his correspondence.[44]

41 See the last theorem of E. 72 (O. I/14, p. 242–244); cf. *infra* n° 163, note 4.

42 Cf. Aigner / Ziegler 2010, p. 149–154.

43 See R 1903–1904: Euler's letter has been edited in Smirnov 1963, p. 179–206.

44 Equation (2.4) is called the Pentagonal Number Theorem since the exponents on the right-hand side are "pentagonal numbers".

Euler's identity (2.4) is closely related to the functional equations of Dedekind's eta function

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \qquad q = \mathrm{e}^{2\pi i z}$$

and Jacobi's theta function[45]

$$\theta_3(v, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} \mathrm{e}^{2n\pi i v}, \qquad x = \mathrm{e}^{\pi i \tau}.$$

In addition, (2.4) is a special case of Jacobi's triple product identity for θ_3: setting $x = q^{3/2}$ and $z = q^{1/2}$ in

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1} z)(1 + x^{2n-1} z^{-1}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^{n^2} z^n$$

yields Euler's identity (2.4).

Gauss observed[46] that Euler's series (2.1), whose exponents are the triangular numbers, admits a similar product expansion:

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + \ldots = \frac{1 - x^2}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^4}{1 - x^3} \cdot \frac{1 - x^6}{1 - x^5} \cdot \frac{1 - x^8}{1 - x^7} \cdots .$$

These remarks show that what must have been – at first, at least – little more than a curious identity for Euler became an important tool in modern analytic number theory. Euler did see, however, the connection with classical number theory: in n° 113 (see also n° 114 and 115), Euler finds the recursion

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \ldots$$

for the function $\sigma(n)$, which denotes the sum of all divisors of the number n. The connection with the Pentagonal Number Theorem is presented in n° 144, along with the remark that Euler had now found a proof; this proof was published in E. 244, another two in E. 541.[47]

See Euler's letters R 236, R 238 to Nicolaus I Bernoulli (September 1st, 1742; November 10th, 1742: O. IVA/2, p. 518–519, 555–560) and to Goldbach (n° 74, October 15th, 1743; see also n° 75, 76, 102), Daniel Bernoulli's reply R 140 (January 28th, 1741: to be published in O. IVA/3), as well as R 6 to Adami (February 14th, 1749) and R 23, R 25 to d'Alembert (December 30th, 1747; February 15th, 1748: O. IVA/5, p. 275, 281). Euler published these results in E. 101 and E. 158.

45 The eta and the theta functions are important tools in the theory of elliptic functions (see, e. g., Dedekind 1877).

46 This relation is a special case of a more general identity proved in Gauss 1811, the article in which Gauss determined the sign of quadratic Gauss sums and applied it to give his fourth proof of the quadratic reciprocity law. Gauss remarked that "the equality between two technical expressions [...] certainly is highly remarkable". For a modern proof of Gauss's identity and the derivation of the sign of quadratic Gauss sums see Shanks 1958.

47 For a thorough study of the Pentagonal Number Theorem, see Bell 2010.

2.2.3. Bernoulli numbers

The numbers that Euler named after Jacob Bernoulli first showed up in connection with explicit formulae for the power sums $\sum_{a=1}^{n} a^k$. They occur over and over again in Euler's work, for example in the explicit evaluation of $\zeta(2n)$ for integers $n \geq 1$ (see (2.3)), or in the summation formula named after Euler and MacLaurin.[48]

This summation formula is a precise version of rules for approximating integrals, such as the trapezoid rule, which says that

$$\int_0^n f(t)\ dt \approx \frac{1}{2}f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n),$$

or Simpson's rule. Euler wanted to turn this around and find a method for summing series using integrals:

$$f(0) + f(1) + \ldots + f(n) \approx \int_0^n f(t)\ dt + \frac{f(0)+f(n)}{2}.$$

By adding higher correction terms he found, neglecting remainder terms or convergence criteria, that[49]

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \int_0^n f(t)\ dt + \frac{f(0)+f(n)}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!}\Big(f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)\Big).$$

Since the higher derivatives vanish when f is a polynomial, Euler could derive the summation formulae for kth powers that had already been obtained by Jacob Bernoulli (see n° 54 as well as E. 352 and E. 746); it is this connection which made Euler call the numbers B_k Bernoulli numbers in the first place.

Euler presented his summation formula in E. 25, and showed how to derive it in E. 47.[50] He gave the generating function for Bernoulli numbers in E. 130.

Goldbach mentioned that he had found a formula for Bernoulli numbers in n° 25. Euler used his summation formula in n° 64 for giving a (divergent) expression for $\zeta(3)$ in terms of Bernoulli numbers, and for computing an approximation of π in n° 66; a related formula involving $\zeta(2)$ can be found in n° 68.

48 Schuppener (1994, p. 73–89) casts some doubt on the statement – found among others in Faber's introduction to O. I/16.2 (p. VIII, note 2) – that MacLaurin discovered the summation formula independently, and points out the possibility that he could have learned about Euler's result from his correspondence with Stirling, to whom Euler had sent the formula in June 1736, several years before the publication of MacLaurin's *Treatise on Fluxions* in 1742. Schuppener also remarks that the summation formula published in 1827 by Poisson is just a modification of the Euler-MacLaurin formula, and that what today is known as the Poisson summation formula first occurs in some writings of Gauss that were published only in 1900.

49 An excellent introduction to the Euler-MacLaurin summation formula can be found in Edwards 1974, ch. 6.

50 Schuppener 1994 analyses the contributions of Euler, MacLaurin, Poisson etc. concerning summation formulae in careful detail.
Paraphrases and commentaries on many of Euler's early papers on series can also be found in Hofmann 1959, Ferraro 1998, Varadarajan 2006, Sandifer 2007b and Ferraro 2008.

2.3. Algebra: roots of polynomials and transcendence

Algebra in Euler's times basically consisted of studying properties of roots of polynomials: their existence, their representation by radicals, and their approximation by real (or complex) numbers. The entire second part of Euler's *Introduction to Algebra* consists of "indeterminate analysis", that is, the theory of Diophantine equations.

2.3.1. Squaring the circle

The notions of irrationality and transcendence of numbers developed in a rather tortuous way; before we come to the contributions by Goldbach and Euler, we will therefore briefly sketch some relevant stages of their history.

Euclid distinguished carefully between numbers, which were proper multiples of the unit such as 2, 3, 4, ...,[51] and magnitudes, such as line segments or areas of simple figures. Ratios of line segments, for example the ratio between the diagonal and the side of a square, can be commensurable or not; in the first case, their ratio can be expressed as a ratio of (natural) numbers, and in the second case this is impossible. Euclid investigated different types of incommensurable ratios in his Book X; magnitudes whose ratio is equal to a ratio of numbers were called commensurable.[52] Among the incommensurable numbers, Euclid distinguished those whose square is rational: such ratios were called enunciable.[53]

Daniel Bernoulli, Goldbach and Euler often used the word *irrational* in Euclid's original sense: in his *Introductio*, for example, Euler remarked that logarithms of rational numbers to a rational base cannot be "irrational", since if $\log_a b = \sqrt{n}$, then $a^{\sqrt{n}} = b$, which he claimed was impossible for rational numbers a, b.[54] In the summary of a paper from 1758, Euler observed that all irrational quantities which arise from the extraction of (square) roots can be constructed geometrically.[55] By the time he wrote his *Algebra*, he also regarded cube roots of noncubes as irrational

51 The unit 1 was not considered as a number (let alone a prime number) by Euclid. In a letter to Wallis dated February 18th, 1657/8, Brouncker writes: "For that 1 is not a number in the opinion of some, every one knows; but they all doe know as well, that it is a number in the opinion of others." (see Wallis 1658, Letter XX).

52 The Greek word is σύμμετρος (*symmetros*) and means that the magnitudes in question have a common measure.

53 The Greek word is ῥητός (*rhetos*); its opposite was called ἄλογος (*alogos*), which was translated into Latin as *irrationalis* by the translator Gerard of Cremona (ca. 1114–1187) and as *surdus* by Leonardo da Pisa (Fibonacci). For more on the usage of the terms "surd" and "irrational number" see Tropfke 1930, vol. 2, p. 94–95.

54 *Introductio in analysin infinitorum*, T. I (E. 101), § 105 (O. I/8, p. 108).

55 "Incommensurabilitas autem in se spectata non obstaret, quominus ratio diametri ad peripheriam geometrice assignari posset, cum quadrati diagonalis ad latus quoque sit incommensurabilis atque in genere omnes quantitates irrationales, quae ab extractione radicum oriuntur, geometrice construi possint": E. 275, *Summarium* from *Novi Commentarii* VIII (O. I/15, p. 1).

numbers.[56] However, Euler was aware that the sort of irrationality exhibited by the rectification of the circle is of a qualitatively different kind:

> "However, the circumference of a circle must be considered to belong to a much higher class of irrationals, which can only be reached by repeating the extraction of roots an infinite number of times; thus it is also impossible to do more geometrically than to approximate the true ratio of circumference and diameter more and more closely."[57]

Numbers that are neither rational nor irrational were occasionally called transcendental,[58] but the definitions and terminology that we use today were only firmly established by Lambert in the 1760s.

Beyond the facts obtained by the Greeks (Theaetetus is credited by Plato with proving the irrationality of $\sqrt{n}$ for all non-square numbers n), definite results on irrationality were few and far between: let us just mention in passing the reflections of Leonardo da Pisa (Fibonacci) in the 13th, Stifel in the 16th, Stevin and Fermat[59] in the 17th century.

Thus Goldbach was one of the first who actually asked for *proofs* of irrationality:[60] In a letter to Goldbach dated April 28th, 1729, Daniel Bernoulli had claimed that the numbers $\log \frac{p+q}{p}$ $(0 < q < p)$ "not only cannot be expressed as rational numbers, but neither as radicals or irrational numbers." In his reply, Goldbach wondered about the reasons supporting this assertion, but Bernoulli could not deliver; he even admitted the possibility that future mathematicians might find such an expression, which would immediately lead to the quadrature of the hyperbola and perhaps that of the circle. A few letters later, Bernoulli went on to ask whether Goldbach could specify a number that could be proved not to be a root of any degree of a rational number. In his letter from October 20th, 1729, Goldbach

56 The title of Chapter 15 is "On cube roots and the irrational numbers arising from them" ("Von den Cubikwurzeln und den hiedurch entstehenden Irrationalzahlen").

57 "Verum peripheria circuli ad genus irrationalium longe sublimius referenda videtur, ad quod demum radicis extractione infinities repetita pertingere liceat, unde etiam geometrice plus praestari non potest, quam ut vera peripheriae ad diametrum ratio continue propius exprimatur." (In the *Summarium* of E. 275 this sentence immediately follows the one quoted above).

58 In 1685, Wallis had called for the invention of new numbers beyond rationals, surds, or roots of polynomial equations.
Euler used the term "transcendental" more often with respect to "quantities" (i. e., functions) than for individual numbers; he never seems to have given a precise definition. In the introduction to E. 71, Euler remarked that "irrational and transcendental quantities, among which are logarithms, circular arcs, and the lengths of other curves, are frequently expressed by infinite series".

59 See Fermat's letter to Roberval dated September 16th, 1636 (*Œuvres complètes*, t. II, p. 59–63).

60 Indeed Euler, just as most of his contemporaries, regularly asserted that numbers such as π, e, or certain logarithms are not rational, but never even attempted to prove these claims.

came up with the number $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-2^{k-1}} = 0.1101000100000001\ldots$; Bernoulli acknowledged that this has the desired property, since none of its powers can have a periodic decimal expansion.[61]

In 1720, Goldbach had proved the formula

$$H_f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f}{k(k+f)} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{f} \tag{2.5}$$

for positive integers f; this had, however, already been known to Pietro Mengoli (see Mengoli 1650) and to Jacob Bernoulli. In his letter to Daniel Bernoulli from August 18th, 1729, Goldbach mentioned this result and claimed that the sum $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f}{k(k+f)}$ is irrational for nonintegral rational values of f.[62]

In the early 18th century, many mathematicians were convinced that π is not rational, and perhaps not even irrational in the sense of belonging to the classes of irrational ratios studied by Euclid. In n° 2, his first letter to Euler, Goldbach wrote "that the quadrature of the circle cannot be effected by rational numbers". This claim was not novel: there is even an ambiguous statement in Aristotle's *Physics* (VII, part 4) which some interpret as a claim that the circumference and the diameter of a circle are not commensurable. The Hindu mathematician Nilakantha Somayaji (ca. AD 1500) is credited with the question of why we give rational approximations to π instead of its exact value, and also with the answer that this is because the ratio of the circumference and the diameter cannot be expressed as a ratio of two integers.[63] In 1656, Wallis claimed that π is neither a fraction nor a surd; Grégoire de Saint-Vincent (1647) made the first attempt at *proving* that π is not rational, but his proof contains errors that were criticised, among others, by Huygens.[64]

Lagny, whose paper Goldbach mentions in letter n° 8, conjectured (in geometric language) that $\tan \pi x$ is not rational for any rational number x with $0 < x < \frac{1}{2}$ except for $\frac{1}{4}$; Lambert later proved the much deeper fact that $\tan x$ is irrational for all rational values of x with $\tan x \neq 0$, a fact that implies the irrationality of π since $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ is rational.[65]

Goldbach had proved early on that square roots of numbers divisible by 3 but not by 9 cannot be rational (see n° 10, note 5), and in n° 39 he extended this to numbers of the form $(3m+2)n^2 + 3$. Similar results had been known for a long time, but Goldbach's ongoing investigation shows that he was trying hard to go beyond simply *asserting* irrationality.

From his work on the Riccati differential equation, which is mentioned for the first time in letter n° 15, Euler had deduced the simple continued fraction

61 Cf. Fuß, *Correspondance*, t. II, p. 301, 306, 310, 318–319, 326, 329.

62 *Correspondance*, t. II, p. 312–313.

63 See Brezinski 1991, p. 84, and Ramasubramanian 2011.

64 See Baron 1969, p. 230.

65 Lambert 1768; for a modern exposition of Lambert's proof see Petrie 2009.

expansions[66] of e and $(e^2 - 1)/2$. Since these expansions are neither finite nor periodic, it follows from results later proved by Lagrange that e and e^2 are irrational numbers.[67]

In nº 69, Goldbach alluded to his construction of irrational numbers in his discussion with Daniel Bernoulli. Euler answered in nº 70 that this idea was known to him, and explained why rational numbers have periodic decimal expansions. In E. 565, Euler observed that putting $x = \frac{1}{10}$ in the series (2.1), in which the exponents are triangular numbers, produces the number 1.101001000100001 . . ., which cannot be rational since the number of zeros placed between the units increases continually.

2.3.2. The Fundamental Theorem of Algebra

After the Italians had shown how to solve cubic and quartic equations, it was natural to look at equations of degree 5 and higher. In nº 18, Goldbach mentions a solution of the quintic $x^5 + \frac{5}{2}mx + D = 0$ under suitable conditions. Much later, in nº 165, Euler studies an idea of de Moivre's for investigating the roots of certain quintics. He proposes writing the roots of a polynomial of degree n as a linear combination of nth roots, but – as is now well known – this does not work for general polynomials of degree ≥ 5.

The fact that polynomial equations have as many roots as the highest occurring exponent indicates had already been asserted by Girard (1629) and in Descartes' *Géometrie* (1637). One version of the Fundamental Theorem of Algebra claims that every polynomial with real coefficients can be written as a product of real linear and quadratic factors. In this form, the theorem is used for integrating rational functions via their partial fraction decomposition. In nº 58, Euler mentions his correspondence with Nicolaus I Bernoulli on this topic and explains, as an example, how to factor the polynomial $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$. In nº 64 Euler reports that he can prove the Fundamental Theorem for polynomials of degree < 6.[68]

66 Actually, a continued fraction expansion for $e - 1$ had already been obtained by Roger Cotes (1714); cf. Gowing 1983, p. 24–26, 147–148, and Fowler 1992, p. 361–363.

67 Euler never claimed to have proved the irrationality of e. In E. 71, he remarked that rational numbers can be transformed into a *finite* simple continued fraction (all numerators equal to 1), and that "irrational and transcendental" numbers have infinite simple continued fractions. This implies that infinite simple continued fractions must be irrational in the modern sense if it can be shown that *every* simple continued fraction expansion of a rational number is finite. This in turn would follow from the fact that the simple continued fraction expansion of a number is essentially unique – but Euler neither states nor proves this. On the other hand he seems to have been convinced that e cannot be expressed as a rational number when he wrote in E. 71 (translation taken from Wyman 1985): "These continued fractions converge so fast that it is an easy matter to find the values of e and $\sqrt{e}$ as closely as you please."

68 An attempt to deal with the general case was presented by d'Alembert in 1746 (printed in 1748), but neither this nor Euler's argument in E. 170 are nowadays regarded as complete; the first proofs now accepted as rigorous are due to Gauss and Argand. For a thorough discussion of the origins of the Fundamental Theorem of Algebra and its early proofs, see Gilain 1991.

Approximations of roots of algebraic equations come up in Euler's letters n° 19 and n° 80, and in his last letter n° 196 he mentions Lambert's series for the largest root of a special trinomial.

2.4. Analysis

For properly understanding the breadth of Euler's contribution to analysis one has to recall that calculus had just two generations before been invented by Newton and Leibniz and extended immensely at the hands of Jacob and Johann Bernoulli. After Euler's "algebraic analysis", the *Sturm und Drang* period continued at the hands of Lagrange (calculus of variations), Legendre (elliptic integrals), Fourier (trigonometric series) and others, and ended only when Cauchy's work shifted the focus of mathematicians' interest to the new area of complex analysis.

2.4.1. Interpolation

The term "interpolation" is nowadays attached to the process of finding the value of a function at some point lying between two tabulated (or otherwise known) values. Wallis used the word interpolation for describing a different problem: Given a sequence a_1, a_2, a_3, ..., find "the value between the first and the second term". In other words, he was looking for a (preferably simple) formula for a_n that would make sense even for non-integral values of n, in particular for $n = \frac{3}{2}$.

In 1651, Wallis began looking into the problem of "squaring the circle". He wanted to compute what we would write as[69] $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, and looked at the more general quantities

$$\frac{1}{A_{p,n}} = \int_0^1 (1 - x^{1/p})^n \, dx$$

where the case he was interested in was $A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$. By evaluating special cases, Wallis was led to conjecture

$$A_{p,n} = \binom{n+p}{n}.$$

Manipulating series and guessing patterns, he eventually reached the conclusion that

$$A_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 5}{4\cdot 6}\cdot\frac{7\cdot 7}{6\cdot 8}\cdots = \frac{4}{\pi}. \tag{2.6}$$

Substituting this result into the formula $A_{p,n} = \binom{n+p}{n} = \dfrac{(n+p)!}{n!\,p!}$ yields

$$\binom{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\frac{1}{2})!\,(\frac{1}{2})!} = \frac{4}{\pi},$$

69 Wallis did not use integral signs, indices as we know them or a particular notation for our binomial coefficients.

that is,

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Fermat did not think highly of Wallis's *Arithmetica Infinitorum* (1656), mainly because he did not accept Wallis's use of induction (in the early-modern sense of "empirical mathematics") as a method of proof. Fermat could not do a lot with Wallis's interpolation problem, just as Wallis had little respect for Fermat's number-theoretical problems.[70]

Other mathematicians, however, found Wallis's work on interpolation highly inspiring. Newton, in his famous "second letter" to Oldenburg dated October 24th, 1676, explained how Wallis's method led him to the binomial theorem. Stirling, a student of Newton's, attacked the problem of interpolating Wallis's "hypergeometric sequence" 1, 2, 6, 24, 120, ...: actually he interpolated the sequence $\log n!$ numerically – in the modern sense of the word – and from $(\frac{1}{2})! \approx 0.8862269\ldots$ guessed correctly[71] that $(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

The problem of interpolating sequences was taken up by Goldbach in 1722.[72] He claimed that he could give the value of the intermediate terms of *any* sequence, at least as an infinite series;[73] given a sequence (a_n), it is easily proved by induction[74] that

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-1}{k} \Delta^k a_1$$

for all $n \in \mathbb{N}$; here $\Delta^0 a_1 = a_1$, $\Delta^1 a_1 = a_2 - a_1$, $\Delta^2 a_1 = (a_3 - a_2) - (a_2 - a_1) = a_3 - 2a_2 + a_1$ etc. But, once the binomials have been interpolated, the expression on the right-hand side is defined for all real numbers $n \geq 1$. Goldbach mentioned this result in a letter to Daniel Bernoulli, who replied that the intermediate terms should be given by a "finite expression" rather than by infinite series.[75]

Euler's contemporaries who were working on the problem of interpolating sequences were all convinced that certain "natural" sequences such as $n!$ could be assigned values for non-integral values of n as well, and apparently most of them were also convinced that any natural method of assigning values to such expressions would give the same result.[76] In fact, in his letter n° 91 Euler writes:

70 See in particular Wallis's letter to Kenelm Digby: Fermat, *Œuvres*, t. III, p. 427–457.

71 For Stirling's well-known approximation of $\log n!$, see Stirling 1730, Prop. XXVIII.

72 See his letter to Nicolaus II Bernoulli dated January 2nd, 1722 (*Correspondance*, t. II, p. 128).

73 His results were printed in 1732, in a paper which he had sent to Nicolaus II Bernoulli in January 1728 and to Daniel Bernoulli in November 1728.

74 Goldbach's formula is mentioned in Perron's book on continued fractions as being "well-known" (Perron 1913, § 32). A similar technique was used by Hasse for extending the zeta function analytically to the entire complex plane (see Hasse 1930, in particular the remark at the end).

75 Letter to Goldbach dated Jan. 30th, 1729: *Correspondance*, t. II, p. 247–248.

76 For the general context of their methods, cf. Hofmann 1959, Ferraro 2008.

> "I am confident that one and the same series can never arise by developing two finite expressions that are really different."

Euler thought that any interesting series arises by developing some finite "analytic expression", and conjectured that this cannot be done in two essentially different ways, thus allowing the solution of the interpolation problem by finding this finite expression. On the other hand, Euler realised that there are infinitely many ways of interpolating sequences: in a paper from 1749, he writes:

> "even if all the terms of a series that correspond to integral indices are determined, one can define the intermediate ones, which have fractional indices, in an infinite variety of ways so that the interpolation of this series continues to be indeterminate."[77]

In fact, if (a_n) is a given sequence and $a_n = f(n)$ for some finite expression f, then we also have $a_n = f(n) + h(n)$ for any function h that vanishes at the integers, e. g., $a_n = f(n) + \sin \pi n$ for all $n \in \mathbb{N}$.

An even more serious problem arose when Euler, in E. 190, investigated the series

$$s_a(x) = \frac{1-x}{1-a} + \frac{(1-x)(a-x)}{a-a^3} + \frac{(1-x)(a-x)(a^2-x)}{a^3-a^6} + \ldots,$$

which has the property $s_a(a^n) = n$; in other words, it takes the same values at $x = a^n$ as the function $\log_a(x)$. On the other hand, we have

$$s_a(0) = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-a^2} + \frac{1}{1-a^3} + \frac{1}{1-a^4} + \ldots, \tag{2.7}$$

and this clearly implies that $s_a(x) \neq \log_a(x)$. Thus $s_a(x)$ interpolates the same sequence as $\log_a(x)$, yet the two functions are different![78]

Euler observed that for numbers $a > 1$, the series (2.7) yields a finite value; however, this

> "cannot be expressed either in rational or in irrational numbers. It appears therefore especially worth the effort that mathematicians investigate the nature of that transcendental quantity by which its sum is expressed."[79]

77 "etsi omnes seriei termini, qui indicibus integris respondent, sunt determinati, intermedios tamen, qui indices habent fractos, infinitis variis modis definire licet, ita ut interpolatio istius seriei maneat indeterminata": E. 189, § 3 (O. I/14, p. 466).

78 Cf. Gautschi 2008; Bell 2010, p. 323–326.

79 "tamen neque numeris rationalibus neque irrationalibus exprimi potest. Quocirca ea imprimis digna videtur, ut Geometrae naturam illius quantitatis transcendentis investigent, qua eius summa exprimatur": E. 190, § 28 (O. I/14, p. 538).

The function $-s_a(x)$, with $a = \frac{1}{q}$, can be interpreted as a q-analog of the logarithm; the values $s_a(0)$ for integers $a > 1$ are known to be irrational, but their transcendence still seems to be open.[80]

As another side remark, Euler stated the result

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{a^3-1} + \frac{1}{a^4-1} + \ldots = \sum_{n\geq 1} \tau(n) a^{-n},$$

where $\tau(n)$ denotes the number of divisors of a number n. Lambert observed the same fact,[81] which is why series of the form $\sum b_n \dfrac{x^n}{1-x^n}$ are called Lambert series. Dirichlet[82] used Lambert series to derive the average behaviour of the function $\tau(n)$. We note in passing that the identity

$$-\log \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{x^n}{1-x^n}$$

(the series involved converge for $|x| < 1$) relates the product in the Pentagonal Number Theorem to a Lambert series.[83]

Euler's reason for starting a correspondence with Goldbach was his desire to communicate his own results to someone who had already worked on the interpolation problem for a long time; it was Daniel Bernoulli who suggested Goldbach's name to Euler. In n° 1, Euler presented his interpolation of the sequence of factorials, and in particular showed how to express $(\frac{1}{2})!$ using the quadrature of the circle. He also gave an interpolation of the harmonic series: using the substitution $\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\,dx$, he found

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_0^1 (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})\,dx = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx$$

for all integers $n \geq 1$; observe that the right-hand side has a well-defined meaning for all real exponents $n \geq 0$.[84] By writing $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ as a geometric series, the integral can be transformed into the power series

$$\begin{aligned} H_n &= \int_0^1 (1-x^n) \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (x^{k-1} - x^{k-1+n})\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k(k+n)}, \end{aligned}$$

80 Cf. Erdős 1948 for $a = 2$, Borwein 1991 and Koelink / van Assche 2009 for all integers $a > 1$.

81 See Lambert 1771.

82 Cf. Dirichlet 1838.

83 Cf. again Bell 2010.

84 Dirichlet later used the same trick to compute the values of his L-series at $s = 1$.

thus giving (2.5), a formula that Goldbach had already found directly and which Euler later published in E. 613. Although Goldbach's and Euler's formulae are equivalent from a modern point of view, their contemporaries much preferred Euler's formulation since definite integrals (quadratures of bounded areas) were seen as "finite" objects, whereas power series or infinite products were regarded as expressions that could not be determined exactly, since an infinite number of arithmetical operations was involved.

In the long run, Euler's method of interpolating sequences using integrals turned out to be more powerful than Goldbach's idea of using power series. Euler's interpolation of the sequence of factorials presented in n° 1 is equivalent with the modern definition of the Gamma function as an integral; although Euler at first only regarded "finite analytic expressions" as functions, he later accepted the interpolated sequence of factorials as a genuine function, and in n° 80 Euler already discussed the derivative of the Gamma function.

Some less well-known mathematicians also studied interpolation problems: in letter n° 112, Euler mentions a question by the lawyer and amateur mathematician Jacob Adami[85] concerning the interpolation of the terms of the power series expansion of $\tan x$.

2.4.2. Riccati's differential equation

Wallis's product formula (2.6) for π is related (although not in an obvious way) to a continued fraction expansion for $\frac{4}{\pi}$ found by Brouncker at about the same time. Brouncker claimed that

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \ldots}}} \tag{2.8}$$

but did not supply a proof. In E. 123, Euler compared the continued fraction expansion of $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2$ to Brouncker's formula (2.8) for $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$, and then more generally studied the continued fraction expansions of the integrals $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^k}$.

When Euler computed the continued fraction expansion of e, he observed a pattern that led him into investigating continued fractions

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} \tag{2.9}$$

in which $a_1, a_2, \ldots$ form an arithmetic sequence (see E. 71). He managed to find an expression for the nth convergent of such a continued fraction, and wrote the limit

85 Cf. Adami's letter R 2 to Euler dated August 16th, 1746.

for $n \to \infty$ as a quotient of power series.[86] These power series satisfy a certain differential equation, which, after a few simple transformations, takes a form that was by then already well known and had been much investigated: that of Riccati's equation. This allowed Euler to compute the values of such continued fractions from solutions of the Riccati differential equation

$$q' = nr^{n-2} - q^2, \tag{2.10}$$

where q is a function of r. Solving this equation in the case $n = 2$ gave Euler a continued fraction expansion of

$$\frac{\mathrm{e}^{2/a}+1}{\mathrm{e}^{2/a}-1} = \frac{\mathrm{e}^{1/a}+\mathrm{e}^{-1/a}}{\mathrm{e}^{1/a}-\mathrm{e}^{-1/a}}$$

which today is usually written in the form

$$\tanh z = \cfrac{z}{1+\cfrac{z^2}{3+\cfrac{z^2}{5+\cfrac{z^2}{7+\cdots}}}}.$$

Substituting $z \to iz$ in this equation shows that[87]

$$\tan z = \cfrac{z}{1-\cfrac{z^2}{3-\cfrac{z^2}{5-\cfrac{z^2}{7-\cdots}}}}.$$

These expansions were the basis of Lambert's proof that e^z and $\tan z$ are irrational for all nonzero rational values of z; since $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, this implies the irrationality of π.[88]

86 From a modern point of view, Euler's proof in E. 71 is not rigorous (for a beautiful survey see Havil 2012, ch. 3). Euler later gave other derivations of the continued fraction expansion: for a discussion of Euler's results see, e. g., Khrushchev 2006. The continued fraction expansion of e can also be determined from Hermite's proof that e is transcendental (see Cohn 2006).

87 Euler derived the continued fraction expansions of $\tan x$ and $\cot x$ from that of $\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$ in E. 594, E. 595, and E. 750. The first extensive investigation of the hyperbolic functions and their analogy with trigonometric functions was published by Lambert in 1768.

88 Legendre observed that Lambert's proof even shows that π^2 is irrational, as follows easily by assuming that $\pi = \sqrt{m}$ for some rational m and substituting $z = \sqrt{m}$ into the continued fraction expansion of $z\tan z$. Siegel (1929, p. 231) was able to show that all continued fractions of the form (2.9), in which the a_i form an arithmetic sequence, are transcendental. In his proof, Siegel used the fact that the logarithmic derivative of a solution of the Bessel differential equation satisfies a Riccati equation.

Differential equations of the type

$$y' = p + qy + ry^2,$$

where p, q and r are functions of the independent variable x, are called Riccati equations. Jacopo Riccati had started studying special cases of this equation around 1714, motivated by the example

$$nx^2 - ny^2 + x^2y' = xy$$

mentioned in Gabriele Manfredi's 1707 treatise. Riccati was able to solve certain equations of this type using the method of separation of variables (Johann I Bernoulli immediately claimed this method as his own, which led to a priority dispute).[89]

The differential equation

$$y' = ax^m + by^2x^p, \tag{2.11}$$

which is slightly more general than (2.10), was studied by Nicolaus II Bernoulli: in a letter to Goldbach dated December 6th, 1721, he claimed that the variables in (2.11) can be separated when $m = -\dfrac{(2n \pm 1)p + 4n}{2n \pm 1}$ for some positive integers m, n, p.[90] Some months earlier, Daniel Bernoulli had informed his brother in a letter sent from Basel to Venice that he had found a similar, if slightly less general result: for the equation

$$y' = ax^m + by^2, \tag{2.12}$$

separation of variables works and an explicit solution depending on "the quadrature of the circle and the hyperbola" can be given when $m = -\dfrac{4n}{2n \pm 1}$.[91]

Daniel Bernoulli's claim was proved by Liouville in 1841, in the more precise form that (2.12) has a solution in elementary functions (algebraic expressions of x, trigonometric functions, exponential functions and logarithms) if and only if $m = -\dfrac{4n}{2n \pm 1}$.

Bernoulli had solved (2.12) by repeatedly applying certain transformations[92] for reducing the exponent m; the individual steps look a lot like applying some kind of Euclidean algorithm, which may have given Euler the idea of writing

89 For a detailed history of the Riccati equation, see Bottazzini's account in his introduction to vol. 1 of Daniel Bernoulli's works (Bottazzini 1996), p. 176–188.

90 Cf. *Correspondance*, t. II, p. 119–124.

91 Daniel's solution was published in 1724 in his *Exercitationes quaedam mathematicae* and reprinted in the 1725 *Acta Eruditorum*; the original letter to his brother seems to be lost, but an extract was included in the posthumous publication of Nicolaus' results in t. I of the Petersburg *Commentarii* (1728), the same volume in which Goldbach published his own results on the Riccati equation.

92 These transformations still show up in 20th-century accounts: see, e. g., Kamke 1956, § 4.20.

down a single substitution in the form of a continued fraction which transformed (2.12) into the simpler equation $y' = a + by^2$ in a single step. Euler communicated this observation to Goldbach in his letter n° 15. The integrability of differential equations, in particular of the Riccati equation, was discussed in n° 16 and 17 (see Euler's articles E. 11 and E. 12), as well as in n° 173.

2.4.3. Integrability of binomial differentials and elliptic integrals

The problem of classifying those triples of rational numbers m, n and p for which the differential $x^m(a + bx^n)^p dx$ can be integrated by elementary functions goes back to Newton and Jacob Bernoulli. After having heard from Daniel Bernoulli that Goldbach had found new results in this direction, Euler reported in n° 11 that he believed that the integral $\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ cannot be expressed in terms of what we call "elementary functions". Euler knew that this integral shows up in the rectification of ellipses and in connection with the lemniscate and the *elastica* (the curve that a thin beam describes when it is bent). In n° 13 Euler stated the conjecture that the differential $\frac{dz}{\sqrt[m]{z^p + z^q}}$ can be integrated algebraically only if either $\frac{p-m}{m(p-q)}$ or $\frac{q-m}{m(q-p)}$ is an integer;[93] this was later proved by Chebyshëv. For more attempts at integrating these differentials see Goldbach's reply in n° 14; in n° 15, Euler already studied the related problem for Riccati's equation, which we have already discussed above. See also n° 43 and 66.

An elliptic integral had already shown up in Euler's letter n° 11, where Euler remarked that he could not compute the integral $\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ related to the rectification of the lemniscate; in n° 40, Euler dealt with what Legendre later called an "Eulerian integral of the first kind" (now known by the name Beta function). Euler reported on his work on elliptic integrals, which was sparked by Fagnano's results, in n° 158 and 159.[94]

2.4.4. Divergent series

Divergent series were a controversial tool even in Euler's times. Goldbach defended their use in his correspondence with Nicolaus I and Daniel Bernoulli in the early 1720s. Both Goldbach and Euler were convinced that one could assign values to divergent series, and Euler knew how to obtain breathtaking results with this tool, in particular in number theory.[95]

93 Actually, he wrote "*est numerus rationalis*", but the context shows that in 1730 he already understood the problem in the same way it was much later presented in the *Institutiones calculi integralis* (E. 342, § 104).

94 The history of elliptic integrals and elliptic functions has often been described; for a recent account based on Abel's contributions, see Houzel 2004.

95 Hecke later observed that "the precise knowledge of the behaviour of an analytic function in the vicinity of its singular places is a source of arithmetic theorems" (Hecke 1923, § 55, p. 225),

Euler had various methods for assigning values to divergent series. Take, for example, $S = 1 - 2 + 3 - 4 \pm \ldots$; formally, this series is the value of the power series $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$ at $x = -1$; since $f(x) = g'(x)$ for $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ we find $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, and evaluating this power series at $s = -1$ (which lies on the boundary of the domain of convergence of f and g) Euler deduced that $S = \frac{1}{4}$. Using this method Euler was able to evaluate $\zeta(s)$ at the negative integers and to make a correct guess at the functional equation of the zeta function.

Some paradoxes that arise from manipulating divergent series were pointed out by Lambert, who observed[96] that by subtracting the infinite number $-\log 0 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty$ from itself one finds

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +\frac{1}{6} & +\ldots \\ & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +\ldots \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{30} & -\ldots \end{array}$$

that is, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots = 1$. This is a correct equation since it equals $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots$, which telescopes to 1. On the other hand, if one subtracts the same infinite series in a slightly shifted way,[97] then one obtains

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +\frac{1}{6} & +\ldots \\ & -1 & & -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{3} & +\ldots \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\ldots, \end{array}$$

that is, the difference is now $\log 2$. Lambert explained this by observing that the first series is the limit of $-\log(1-a)$, the second one that of $-\log(1-a^2)$, so the difference should have limit

$$\lim_{a \to 1} \log \frac{1-a^2}{1-a} = \lim_{a \to 1} \log(1+a) = \log 2.$$

A related phenomenon concerning integrals such as $\int_0^1 \frac{dx}{\log x} - \int_0^1 \frac{dy}{\log y}$ was discussed in the correspondence between Lagrange and Euler,[98] where they agreed that expressions of the form $\infty - \infty$ are indeterminate. In a similar vein, Goldbach

which at least partially explains why Euler's results obtained with the help of divergent series, while not proved rigorously, often had lasting importance. Famous examples of results that Euler obtained using divergent series include his product formula for the zeta function and the asymptotic behaviour of the sum $\sum \frac{1}{p}$ of inverse primes.

96 Lambert 1771, vol. II, p. 518.

97 Lambert used the expression "sprungsweise".

98 See the letters R 1387, 1388 dated February 10th and March 23rd, 1775: O. IVA/5, p. 502–509.

mentions in n° 63 that if A, B, C are divergent series for which $\frac{C}{A} = \frac{B}{2A}$ is finite, then it does not follow that $B = 2C$.

Euler manipulated divergent series in n° 66, and in n° 91 he reported about his "little dispute" with Nicolaus I Bernoulli, who held the opinion that an expression such as $\sum(-1)^{n+1}n! = 1 - 2 + 6 - 24 + \ldots$ does not have a determinate sum.[99] Euler then explained how to assign a value to this series, and showed that it can be transformed into a continued fraction.[100] In his reply, Goldbach took Euler's side and gave more examples. Euler answered with the remark that he had already been aware of Goldbach's "most ingenious method" of transforming divergent series into convergent ones, and remarked that "no series can be so divergent that its sum could not always be expressed by a convergent series".

2.5. Geometry, topology, combinatorics

In the fields that have been discussed in Sections 2.1–2.4 of this Introduction something akin to a research programme can be discerned in the Euler-Goldbach correspondence: Questions are pursued at some length, diverse formulations and methods of proof are tested, individual problems are put into a more general perspective, some of them resurface after a long time to be viewed from other angles. Moreover there is often a true dialogue: Goldbach raises points of his own, tries his own approaches or prompts Euler by his queries to elaborate and clarify his ideas. It is no exaggeration to state that the exchange of ideas with Goldbach played a substantial role in shaping Euler's achievements in "Fermatian" number theory.

This is not the case for those other areas of mathematics and natural science that will be presented in the next two sections. Here most items are only incidentally mentioned in one or two letters: Goldbach brings up questions he has read about or heard of in conversation, or Euler says in an aside what he is currently working on, without necessarily expecting Goldbach to enter into a discussion. Many of the questions touched on in this way are intriguing or even important by themselves, but – with one exception – no in-depth discussion follows.[101]

Consequently, the topics in geometry and some neighbouring areas that Euler and Goldbach mention in their correspondence will here only be briefly summarised in a bare list:

99 This topic had evolved from the correspondence on Euler's evaluation of $\zeta(2)$; see Baltus 2008 for details from Euler's correspondence with Bernoulli on this topic.

100 One of the earliest entries in Gauss's mathematical diary (Gauss 2005) was noted down on July 10th, 1796: entry no. 7 records a (divergent) continued fraction expression for the divergent series $1 - 2 + 8 - 64 + \ldots$; in no. 58, Gauss generalised this to the series $1 - a + a^3 - a^6 + a^{10} \mp \ldots$, where the exponents are triangular numbers.

101 The exception concerns the challenge problem in differential geometry that Euler posed in his short note E. 79 – see below.

- Goldbach's work on squareable lunes is mentioned in nº 9 from 1730, where Euler also presents his own analytic solution.[102] In nº 53, written in 1742, we find Goldbach's (re)discovery of the fact that the Pythagorean theorem can be generalised to similar areas bounded by arbitrary curves, which leads to the quadrature of some other moon-shaped figures.[103] Euler's own work on circular lunes is contained in E. 73 and E. 423; ultimately the problem boils down to finding all solutions of the equation $\sqrt{m}\sin\alpha = \sin(m\alpha)$ for which $\sin\alpha$ can be constructed with ruler and compass.[104]
- In nº 10, Goldbach tries his hand at a variant of a problem about the rational division of a circle that had been posed by Kepler in *Astronomia Nova* (1609) and solved by Christopher Wren, Newton and, more recently, Jacob Hermann. In this case, Euler did not pursue Goldbach's remarkably up-to-date solution.
- There are three notes of Euler's from the 1730s (nº 20, 21 and 24) in which he raises questions in the geometry of plane curves, using elementary and differential methods to translate geometrical conditions into algebraic equations for the solution curves. The individual problems can be placed in the context of Euler's research on trajectories, pursuit curves and algebraic rectification.[105]
- In nº 22 from 1735, Goldbach presents his proof of a theorem about normally intersecting circles which Euler had proposed the day before; in nº 23, he indicates an equation that links the sides and diagonals of a general quadrilateral. Apparently both these (elementary) problems in plane geometry did not leave a trace in the Petersburg Academy's records or in either correspondent's publications.[106]
- In the 1743 *Nova Acta Eruditorum*, an anonymous mathematician, who seems never to have been identified, published a challenge problem in dif-

102 The problem of squareable "lunes" goes back to Hippocrates' quadrature of the lunes over an isosceles right-angled triangle. The question of which lunes can be squared came up again in a book by the Scottish Newtonian John Craig published in 1718 and was immediately taken up by the Bernoullis and L'Hôpital. The problem was discussed in the correspondence between Goldbach, Nicolaus II and Daniel Bernoulli from 1722 to 1723 (cf. Bottazzini 1996, p. 188–194).

103 When Euler did not comment on this in his reply, Goldbach asked somewhat petulantly whether his statement had been too obvious, and Euler promptly apologised for his oversight (see nº 55, note 10, and nº 56, note 9).

104 The proof that the list of five squareable lunes first indicated by the Swedish mathematician Martin Johan Wallenius in a thesis presented at Åbo in 1766 and confirmed by Euler is indeed complete was only achieved in the first half of the 20th century by the combined efforts of Landau, Chakalov, Chebotarëv and Dorodnov (cf. Scriba 1987, 1988).

105 Cf. nº 20, note 2, nº 21, notes 1–2, and nº 24, note 1.

106 As has been emphasised above in Section 1.3, the few notes from 1732–1738 that have been preserved with the correspondence may actually represent only an undetermined fraction of the communication between Euler and Goldbach during that period. Pending a thorough study of other parts of their manuscript heritage, many questions remain open.

ferential geometry, following in the footsteps of Euler's quarrelsome teacher Johann Bernoulli: Euler (see n° 76–78) drew Goldbach's attention to this, approved Goldbach's attempt at a solution and sketched his own, general one (E. 75). Two years later, Euler issued another, similar (but much harder) challenge: In a short note (E. 79) he asked for the determination of a "continuous" curve (i. e., one described by a single, preferably algebraic expression) that would send a light beam back to its source after two reflections – just as a circle does after a single reflection. This problem – which may also have been posed in order to identify mathematical talent worthy of promotion and patronage and show up those mathematical grandees who could do nothing to solve it – set off a four-year exchange with Goldbach pursued through more than thirty letters (n° 87–109, 129–139). Euler sent hints at his own approaches, a complete draft of one of his papers and several figures, discussed the only solution that was received by the journal, and criticised Goldbach's – in this case mostly futile – attempts to analyse the question.[107]

– In n° 125, Euler sketches a result on quadrilaterals that can be viewed as a generalisation of Pythagoras' theorem or as a polished version of the formula Goldbach had indicated in n° 23: Assume that the diagonals AC and BD of a quadrilateral $ABCD$ are bisected by P and Q; then

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + 4\,\overline{PQ}^2.$$

With his reply Goldbach sent a proof that now seems to be lost; Euler (in n° 129, published in E. 135) and G.W. Krafft (1750) gave their own proofs.[108]

– As is well known, Euler's correspondence with Goldbach also contains the first appearance of one of his most celebrated insights – one that was to grow into what is now called combinatorial topology. In n° 149 Euler carries over some near-trivial observations on polygons to the three-dimensional case and arrives at the justly famous polyhedron formula $H + S = A + 2$, nowadays written as $V - E + F = 2$, where V (Euler's S), E (A) and F (H) denote the number of vertices (*anguli solidi*), edges (*acies*) and faces (*hedrae*) of a (convex) polyhedron.[109] Alongside this discovery, two other important

107 Except for a short hint in White 2007, p. 308–311, the intriguing questions posed by these challenge problems and their solutions have apparently not been comprehensively studied up to now either from a mathematical or a sociological point of view.

108 See Sandifer 2007c, ch. 6.
The special case where the quadrilateral is a parallelogram and $\overline{PQ} = 0$ had been published by Lagny in 1707. However, all these 18th-century authors were unaware that the general theorem had actually been discovered much earlier by a Spanish Jesuit, José Zaragoza (see n° 125, note 6).

109 See n° 149, notes 5–9.
Among the copious literature on Euler's polyhedron formula, we mention Lakatos' *Proofs and Refutations* (1963/1976), where the formula is used to exemplify the heuristics of mathematics in general, Sandifer 2007c, ch. 2–3, and Richeson's monograph *Euler's Gem* from 2008, which studies many additional aspects of the problem.

results communicated in the same letter have been almost universally disregarded: the theorem that the "angular defects", i. e., the amounts by which the face angles at each vertex fall short of 2π, sum to 4π (a polyhedral analog of the "Gauss-Bonnet theorem"), and the volume formula for the (irregular) tetrahedron – implying one for more general polyhedra – that is commonly attributed to the 19th-century geometers von Staudt, Cayley or Sylvester.

– In n° 154, Euler counts the number of ways of dissecting a polygon into triangles using diagonals. He finds that for an n-gon, this number is given by $C_n = \dfrac{1}{n-1}\dbinom{2n-4}{n-2}$, and writes down the generating function for this sequence.[110]
– The problem of finding a closed knight's tour that visits every square on a chessboard is discussed in n° 184. The paper that Euler later published on the subject, E. 309, also presents solutions for other square, rectangular and cross-shaped chessboards; these had been investigated and sketched in his notebook.[111]

The only major area of 18th-century mathematics that is entirely absent from the Euler-Goldbach correspondence is probability theory (which then included the theory of errors, statistics and actuarial science). Euler's work in these fields is almost always motivated by external requests, and most of it belongs to his last years at Berlin and the period after his return to Petersburg.

2.6. Natural science

Of the great bulk of Euler's work, more than half belongs to the physical sciences: theoretical mechanics and positional astronomy take up many volumes of his *Opera*. Fluid dynamics, the theory of machinery (including ships), optics and other parts of what had traditionally been called natural philosophy and was gradually becoming a separate science of physics also played a substantial role in his research – and in his teaching, as the *Letters to a German Princess* eloquently attest.

However, only very few aspects of this side of Euler's professional identity seem to have been of interest to Christian Goldbach, who remained at heart a humanist scholar, not a scientist. Thus topics of physical science come up in the correspondence only when ultimate principles of natural philosophy and cosmology are under debate or when a specific occasion is supplied either by nature (in the case of comet sightings) or by the academic community (e. g., by prize competitions).

110 For Segner's and Kotel'nikov's contributions and the later history of the "Catalan numbers", as these coefficients are called today, cf. *infra* n° 154, note 2.

111 See Sesiano 2012, 2014.
A knight's tour can be interpreted as a Hamiltonian path in a certain graph: see Sandifer 2007c, ch. 16.

2.6.1. Fundamental physics

Characteristically, the first set of questions from natural science that Goldbach raises in the correspondence with Euler comes from a popular book which he had read during his student days: In nº 42 – the first letter he sent to Berlin after Euler's move – he inquires about some "paradoxes" proposed almost a century earlier by the Heidelberg naturalist Leuneschloß: on the (im)possibility of vacuum in nature, on the generation of sound by strings and bells of various mass, on measuring the density of air by comparing sound with water waves, and so on. Euler courteously replies that some of Leuneschloß's notes – although they have been known for a long time – "show real insight into nature".

However, physics has since then moved on from the nominalist debates between the various schools of the 17th century to a quantitative theory based on sophisticated mathematics. Therefore – as Euler tells Goldbach in nº 78, replying to an inquiry about a recent treatise on gravity – it is not to be expected that anybody outside the narrow circle of experts, with whom he is personally acquainted, could have discovered anything noteworthy about this subject, for

> "this requires such a deep insight into the most sublime mechanics as is not likely to be found in a person yet unknown; and without this understanding one commonly falls back upon mere illusions and contradictory hypotheses, which can neither consist with the true principles of Physics nor satisfy the phenomena."

Ironically, Euler's own attempt – published anonymously around the same time – to explain Newton's inverse-square law of gravitation by an aether-based "mechanism" (Euler 1743) and his theory of magnetism (E. 109) are nowadays considered failures for very similar reasons.

2.6.2. Natural philosophy: The disputes on monads and the principle of least action

Twice in his career Euler became involved in public controversies that impaired his record as an uncommonly peaceable and mild-mannered scientist; even today the part he played in these disputes and the motives behind his conduct are a subject of intense debate. In both cases, when Goldbach asks about his assessment of these *causes célèbres*, which troubled all the European republic of letters, Euler's replies are uncharacteristically reticent.

From early on, Euler had been a declared opponent of Leibniz's theory of monads as taught by Christian Wolff and his followers – then the prevailing school of thought in German philosophy.[112] In the Euler-Goldbach correspondence, the

112 He later explained his critique of Leibniz's theory of "pre-established harmony", which deals with the relation between mind and matter, in several sections of his *Letters to a German Princess* (E. 343/344): see in particular letters nº 82–85, 93 and 125–132 from 1760/61 (O. III/11, p. 185–193, 209–212, 294–312).

topic appears – after oblique references in n° 43 and n° 80 – in n° 106 from June 1746, when Euler mentions in a short postscript that the Berlin Academy has just set "the problem of bodies' elements or monads" as the subject for next year's prize competition. What he does not tell Goldbach is that he has intensively laboured behind the scenes in order to secure the Academy's official approval for his anti-monadist views: the very wording of the question already suggests that the doctrine of monads is to be shown up as unfounded. Moreover Euler must by then have been working on his tract *Gedancken von den Elementen der Cörper* (E. 81), which appeared anonymously in September 1746. Thus, while the deadline for the competition was still open, it became semi-officially known that leading exponents of the Academy planned to "finish the monads off": as Euler said,

> "it is not to be expected that among the remaining champions of the Leibnizian doctrine any will be found who would continue to grant it a place in philosophy, after the impossibility of the imaginary acting forces allegedly present in the elements of bodies has been established."[113]

A year later, after the entry by Justi that he favoured had been awarded the prize and a compromise had been reached on which papers should be printed by the Academy, Euler explained his views on the nature of extended bodies and the "mind-matter problem" to Goldbach in more detail, but still refrained from owning up to his authorship of *Gedancken von den Elementen der Cörper* or to his activity as a member of the jury (see n° 117). He may well have been aware that Goldbach, who had kept in contact with some exponents of the Leibnizian school, could not be expected to share his disparaging views.

In summer 1752, Goldbach received an even more reticent answer when he asked Euler in n° 160 – feigning ignorance of an affair that by then violently agitated and divided the academic community – about Maupertuis' laws of motion. In his reply (n° 161), Euler tersely outlines Maupertuis' principle of least action, admits that he has worked out a similar result "a long time ago", but emphasises that its universal applicability has only now been recognised by his superior at the Academy. Here again, almost all that he could have told Goldbach about the debate set off by Maupertuis' publication from 1748 remains unmentioned: Samuel König's critique in a paper written in 1749 but published only after consultation with Maupertuis, in 1751; the frantic search for the original of a letter by Leibniz from which König had quoted a paragraph voicing similar ideas; the meeting

113 "Es ist auch nicht zu vermuthen, daß sich unter den übrigen Verfechtern des Leibnitzischen Lehr-Gebäudes jemand finden werde, welcher, nachdem die Unmöglichkeit der eingebildeten würckenden Kräffte, womit die Elementen der Cörper begabet sein sollen, dargethan worden, demselben noch ferner einen Platz in der Weltweißheit einräumen sollte": E. 81, Pt. II, § 46 (cf. O. III/2, p. 360).
The martial simile "finishing the monads off" ("den Monaden das Garaus machen"), which appeared in an adverse review of Euler's tract, has given Hanns-Peter Neumann the title of his knowledgeable study (2010). On the entire complex of questions, see n° 117, notes 1, 4 and 5.

of the Berlin Academy on April 13th, 1752, where Euler orchestrated the official denunciation of this letter as a fake;[114] König's resignation from the Academy under protest in June; and the first public remonstrations against this misuse of institutional power to suppress free expression of opinion.

More was to come: in September, König published his *Appeal to the Public* against the Academy's judgment; Euler, Maupertuis and their colleague J.B. Merian countered; and in December, Voltaire had his violent and very effective satire *Diatribe du Docteur Akakia* against them printed in the Netherlands.[115] Despite King Frederick's endeavours to protect his Academy's President, Maupertuis suffered badly from the general scorn and fled from Berlin, returning only sporadically until his final departure in 1755.

Of all these events, which substantially affected Euler's work and life in the years that followed, almost no trace can be found in his correspondence with Christian Goldbach. One wonders whether Euler was aware that the role he had played in them was anything but glorious and wanted to avoid disagreement with his valued former patron and colleague.

2.6.3. Celestial mechanics: comets, lunar tables and the three-body problem

A substantial part of Euler's work, which comprises three separately published books (E. 66, E. 187, E. 418) and fills nine volumes of his *Opera Omnia* (O. II/22–30), is dedicated to problems in celestial mechanics.[116]

The first domain of astronomy that is mentioned in the Euler-Goldbach correspondence is the determination of comet orbits. Indeed during the years 1742/44 at least four comets were observed – one of them among the most spectacular ever sighted – and vividly debated. Euler describes the first of these on March 13th, 1742, shortly after its appearance in the sky of the Northern hemisphere, in a PS to nº 48; he also corresponded about it with Delisle and Heinsius in Petersburg and published his orbit calculation in E. 58. Another comet, which approached the Earth very closely, was discovered by Grischow at the Berlin observatory on February 10th, 1743 (cf. nº 64, note 11).[117] Euler's letters nº 76 and 78 mention the great comet of 1743/44, which is usually called after Loys de Chéseaux; its appearance not only gave Euler the data for another orbit calculation, which was

114 Even an author as sympathetic to Euler as his biographer Fellmann (1995, p. 83) speaks of an "academic judicial murder".

115 See also nº 161, note 8, and the literature cited there.

116 A comprehensive analysis of Euler's work in this field by Andreas Verdun is currently being published (2014).

117 Since no sources or data are indicated, it is not clear whether Euler's surmise in E. 67 that comets exist which describe elliptical orbits relatively close to the Sun – inside Jupiter's orbit – and that one with a period of only 4 years may even have been sighted, refers to this comet (for which it may actually be true!) or to an earlier one. Anyway, by the time of his reply to Goldbach's enquiry in 1748 Euler had taken his distance from these speculations (cf. nº 130, esp. note 12, and nº 131).

published in E. 66, but also motivated the writing of a tract addressed to the general public (E. 67/68), in which he included the observational journal of the Berlin astronomer Margarethe Kirch. Moreover, Euler wonders whether the comet's close approach to Mercury could have disturbed the planet, later reassuring Goldbach in nº 131 that this has not been the case; and he harshly criticises the claim by the Königsberg philosopher Martin Knutzen to have forecast the comet's advent on the basis of an identification which Euler judges to be quite absurd (cf. nº 80, notes 15–17). Finally, in nº 101–102 there is a short discussion of the physical nature of comets' tails.

Euler's theories of the motion of the Moon and the corresponding tables were motivated at least in part by one of the 18th century's greatest technological challenges: the determination of the position of a ship at sea – particularly of its geographical longitude. At a period when clocks could not yet be relied on to keep time at sea with an adequate degree of precision, this crucial information had to be computed from astronomical observations. In 1765, Euler received (together with the astronomer Tobias Mayer's heirs) part of a prize from the British parliament for his results on the motion of the Moon; however, by that time the astronomical methods for solving the longitude problem were already largely superseded by the first reliable marine chronometers that the English clockmaker John Harrison had developed.

The theory of the Moon's motion and the resulting ephemerides were, for the whole period from 1744 to 1751, the object of an animated debate between Euler, Clairaut and d'Alembert, which also involved Tobias Mayer, Maupertuis, Gabriel Cramer, Daniel Bernoulli and Le Monnier.[118] Some traces of this can be found in the Goldbach correspondence, where Euler mentions his assiduous work on lunar tables several times: see nº 93, 112 (in particular the passage with notes 7–9), 117, 132 and 133 (notes 2–3).

In nº 128 from June 1748, Goldbach asks for two copies of a detailed prediction of the upcoming solar eclipse, which has been calculated by Mayer according to Euler's theory and published by Lowitz at Nuremberg. Despite problems with a Prussian trade embargo, Euler finally manages to have the brochures delivered to Goldbach in time for the eclipse, as Goldbach gratefully acknowledges in nº 132. In the meantime, Euler has already reported his satisfaction that his own observations showed a very good agreement with his predictions.

For 1748 the Paris Académie des Sciences proposed as its prize problem the investigation of the orbit of Saturn or, more specifically, the "great inequality" linking the orbital motions of Jupiter and Saturn. Euler's work on this problem, which earned him a substantial amount of prize money in 1750 and 1752, is men-

118 Cf. Euler's correspondence with Clairaut and d'Alembert and the pertinent commentaries in O. IVA/5, p. 6–9, 21–25, 156–217 and 260–311.
For a first overview of the competing theories and their development, see Waff 1995. A thorough study of Euler's early lunar theories can be found in Verdun 2013; the complex publication history of the astronomical tables he computed is analysed in Verdun 2011.

tioned (but not discussed in detail) in letters nº 108, 110, 112, 117, 140, 141, 151 and 158.

In one instance, these comments prompt Euler to a remarkable digression into epistemology (see nº 110, note 6): After observing that the two systems he has studied – Saturn's motion around the Sun, which is disturbed by Jupiter, and the Moon's motion around the Earth, influenced by the Sun – can be analysed in two steps by applying perturbation theory to a two-body solution, he states that

> "there might possibly be cases where one could not determine the motion of a planet in any way [...]; if the Moon were just so far distant from the Earth that the two forces of the Sun and of the Earth were almost equal, so that the Moon could neither be a primary planet nor a satellite of the Earth, its motion would be so irregular that it could not be determined in any manner whatsoever. Thus it is very fortunate for Astronomy that no such case occurs in our planetary system."

The three-body problem posed by lunar motion would be quite intractable if the Moon were about five times farther from the Earth, if its orbit were more eccentric or substantially inclined with respect to the ecliptic. Characteristically Euler pursues the argument one step further, attributing the "innocuous" geometry of the solar system as it actually is to the benevolence of its creator:

> "it really appears as if this system has been established according to the bounds of our understanding and that such [unsolvable] cases perhaps are to be found only in other systems, where the inhabitants possess a greater intellect and a deeper insight into analysis."

This passage strangely combines Euler's insight into the difficulties with which the general three-body problem – now known to be chaotic – is fraught, and one of those peculiar speculations on providence that are a hallmark of his worldview – a kind of epistemological "anthropic principle".

2.6.4. Miscellanea

There are a few remarks in the letters on scientific and technological issues that cannot easily be grouped into a thematic cluster, but are worth mentioning here:

- In 1742, Goldbach brings up a topic he has heard about in conversation: Leeuwenhoek's microscopic observations of the red blood corpuscles (erythrocytes). The effort to understand the geometry of what was being seen – actually a disk with a thickened rim – suggested to some a composite structure that much later would have been called a fractal. Goldbach and Euler discuss the possibility of such a pattern for physical objects at some length in nº 55, 56, and 60.
- In nº 115 and 117, Euler mentions the invention of "a new kind of burning glass" – actually a compound of plane mirrors – by Buffon in Paris.

– In n° 116 from 1747, Goldbach asks for news about the alleged *perpetuum mobile* that the Saxon inventor Bessler (Orffyreus) has shown around between 1712 and 1721. Euler has heard nothing new and is forced to admit that the puzzle will now probably never be cleared up, since the "Orffyrean wheel" has been destroyed.

– In n° 133 from 1749, Euler tells Goldbach about one of his ideas that has proved very successful in the long run: the construction of compound lenses to eliminate chromatic dispersion in optical instruments.

> "If one could manufacture objective lenses which should throw all the rays together into a common focus, one could expect of these the same advantages as of mirrors. However, this cannot be effected by mere glass. The idea therefore occurred to me if it should not be possible to produce such objective lenses from glass and water or from two other different transparent materials."[119]

Thus, whereas the Euler-Goldbach correspondence does not develop any theories in natural science in a systematic way, there is a plethora of incidental comments telling us a lot about public interest in their progress and about Euler's permanently active thought processes.

2.7. Professional life: Academies, prizes, publications

Undeniably the relationship between Goldbach and Euler during the initial period of their acquaintance was one of patronage: the twenty-year-old newcomer to the Petersburg Academy, who had stirred from his provincial hometown for the first time, relied on the advice and support of the influential Secretary, who was his senior by seventeen years and an excellently connected, if somewhat reserved man of the world.

However, the letters from this first period do not explicitly address this aspect: to begin with, Euler aimed – very successfully – at proving by his communications to Goldbach that the Academy had indeed acquired a junior member of outstanding talent, who deserved to be protected and encouraged. Goldbach's letters, on the other hand, show that he soon realised his counterpart's exceptional gifts and came to rely more and more on Euler's guidance in the scientific investigations that were by now more of a favourite pastime than a professional obligation for him.

119 The same idea had already been considered by Hooke and Newton around 1670, but neither they nor Euler had the technology to make it work. The first viable achromatic lenses, combining crown and flint glass, were made in the 1730s; however, they became a commercial success only at the hands of John Dollond, after he had read Euler's memoir (E. 118) presented to the Berlin Academy in 1748 (but originally rejected the theory because Newton had declared it not feasible).

The outward consequences of the privileged relationship that developed within those first few years are not reflected in the correspondence, but rather in the facts of Euler's career: There does not seem to have been any indecision on the Academy's part in appointing him to the chair of physics (at the age of 23), then to Daniel Bernoulli's chair of mathematics, or in extending his contract on improved conditions. This was certainly due to the commitment Euler brought to all his tasks and his exceptional productivity, but the "continuing goodwill" that he so often solicited at the end of his letters to the Academy's Secretary and its other office holders must also have helped.

In the 1730s, Euler's appeals for Goldbach's support – if they were indeed needed – were apparently submitted in person; only at the very end of Euler's first period in Petersburg we find some traces in the correspondence. Thus Goldbach's note n° 33 is a message of congratulations on Euler's improved contract (implying that Goldbach had had a hand in securing this); and in n° 34 from 1740, it is by way of Goldbach that Euler prefers to address to the Academy's President his urgent appeal to be relieved from the task of revising maps that is threatening – as he fears – his eyesight.

Requests of this kind become more frequent during Euler's first year at Berlin, when the clerical office holders of the Petersburg Academy have less of an interest in securing his contentment. The payment of a gratuity that he has been promised, the correct settlement for the sale of his house on Vasilevsky Island, his nomination as a foreign member of the Academy with the corresponding pension: all these concerns are entrusted to Goldbach in 1741/42 (letters n° 38–52).

Even after Goldbach has left the Petersburg Academy in March 1742, Euler occasionally relies, at least in an implicit way, on his intercession with patrons in high positions: when the foreign members' pensions are temporarily suspended during Schumacher's fall from grace in 1742/43 (see n° 58, 72, 80), when an unfounded and potentially damaging rumour circulates about his possible return to Petersburg (n° 110), even when, during the Seven Year's War, Russian troops have pillaged his country estate (n° 185).

Another domain where Euler occasionally asked for Goldbach's help is his mastery of elegant style: When the Prussian civil administration wanted to coin some medals in remembrance of King Frederick's martial exploits, Goldbach furnished designs and mottoes (see n° 41, 48), refusing however to do so for a second time after the first set had not been realised (n° 99–100). On his own behalf, Euler asked him in n° 108 for a device for his prize paper E. 120 on Saturn (submissions for those academic competitions had to be entered anonymously and identified by a motto, with the author's name disclosed in a sealed envelope that was opened only for the winning paper after the judging of the contest) and received a stylish verse on the might that guides the stars (see n° 110).

The letters n° 157–161 contain a peculiar discussion on subtleties of French prose style: Goldbach asks about a turn of phrase that contains a debatable subjunctive form, and Euler consults no less than four experts – all native speakers of

French who live at Berlin – to judge whether this is an infringement of the rules of grammar or a legitimate nuance.

On the other hand, having an obliging correspondent in Prussia obviously also suited Goldbach well: even before his departure from Petersburg, Euler got the first commission to check whether some letters Goldbach had sent to Berlin had arrived. There were to be many such errands: letters to be forwarded, lists of books to be ordered from local and other booksellers in Western Europe, enquiries about recent publications, common acquaintances, appointments, prize competitions.[120]

In these departments the main burden of the mutual errands falls clearly on Euler's shoulders; when Euler has similar requests for information or help from Russia, he mostly addresses them to Schumacher.[121] All the same, Euler not only always obliges his friend most readily, but also regularly offers his good offices.

On events at Berlin and in the Academy Euler chiefly reports when he thinks they may tickle Goldbach's sense of social prestige: thus he proudly copies letters from King Frederick (see n° 40, 48, 169) and the French minister d'Argenson (n° 173), tells of a visit with the Queen Mother (n° 40) and the private lessons he gives to the Hereditary Prince of Württemberg (n° 47–48). The opening ceremony of the new Berlin Society of Sciences in 1743 (n° 72) is reported in some detail, whereas the Academy's statutes, its inaugural meeting and the changing designs for the building it finally moved into in 1752 are only briefly mentioned (see n° 54, note 5, n° 78, note 10, and n° 98, note 9).[122]

The prize competitions held by diverse academies are also a constant topic in the correspondence: from Euler's difficulties with an entry lost in the mail in 1740, through his list (in n° 167) of the prizes he has received at Paris, to Goldbach's congratulations for the two prizes Johann Albrecht Euler has won from the Petersburg Academy in 1755 and 1762.[123]

Euler often mentions his own books, his popular tracts and scientific papers, both those that are currently being printed (he often has these sent to Goldbach as a gift) and those still at the planning stage. Thus the correspondence provides valuable insights into Euler's workshop – some of his books are announced as

120 The list of such tasks Euler undertook for Goldbach is long: individual items can be retrieved by consulting the relevant entries in the Subject Index (*infra* p. 1201–1205).

121 See the edition of Euler's correspondence with the Petersburg Academy's officials by Yushkevich and Winter, in particular JW 2.

122 It is all too easy to forget to what an extent these intellectual and academic developments stand against a dark backdrop: during almost all the time Euler spent in Berlin, Prussia was either at war or made use of short ceasefires to prepare for the next campaign. For most of the time, the insecurity of the general conditions is just mirrored by the continual delays in building up the institutions imagined by Frederick; but some few comments in Euler's correspondence show all the same how much he hoped for calmer times and identified with Prussia's fate, which would inevitably affect his own career for better or worse (see, e. g., his joy at Frederick's victories in n° 52 and 83, his sense of imminent threat in n° 91 and 96, and his relief in n° 185 from 1762 when the "violent thunderstorm" is – almost – over).

123 Again readers specifically interested in this thread of the correspondence should consult the Subject Index (*infra* p. 1201–1205).

completed many years before they will finally appear – and into the difficult negotiations he conducts in order to have the works with their complex formulae adequately printed. Goldbach is grateful and suitably impressed even if he cannot reciprocate with fruits of his own labours.[124]

The work of other scientists is also frequently brought up: Often Goldbach asks for Euler's opinion about scholarly publications (many of these are older and outdated). Euler, on the other hand, keeps Goldbach informed about those books currently being published that he thinks of interest: thus Johann I and Jacob Bernoulli's *Opera*, Johann's correspondence with Leibniz, Clairaut's *Theorie de la Figure de la Terre*, the Geneva edition of Newton's *Principia*, his *Opuscula*, Mme du Châtelet's *Institutions Physiques*, Bouguer's *Traité du Navire*, Le Monnier's *Institutions astronomiques* are mentioned with approval (and so is a rhymed translation of the psalms by Euler's fellow citizen J.J. Spreng).

2.8. Personal life: family, travel, health

Long-term correspondences are often a valuable source of information about the "*Lebenswelt*" – the personal living circumstances – of their authors: this is particularly important in dealing with persons who did not leave copious autobiographic memoirs, personal diaries or chronicles. In Goldbach's case, a substantial number of documents of this nature apparently exist in his manuscript heritage, but these could not be accessed and evaluated by the present editors.[125] On Euler's part, personal records of his life outside his scientific activities are rather scarce: the autobiographical sketch of barely two pages which he dictated to his eldest son in 1767 only covers the time up to 1740 (ending with the laconic sentence: "what has happened to me since then is known"), and Nicolaus Fuß's obituary, while comprehensive and written in proximity to those who had known Euler best, is mainly based on recollections from his last years.[126]

During his long life Euler wrote somewhat more than 1200 letters; but the overwhelming majority of these are strictly about professional matters. Remarks of a "private" nature occur only in very few of his major correspondences, mainly those with Daniel Bernoulli, Schumacher, Johann Caspar Wettstein (a fellow citizen from Basel who lived in England) – and Goldbach. Even here they are thin on the ground and soberly stated; intimate confessions – anyway very rare with 18th-century scientists – do not occur.

All the same, the Goldbach correspondence provides us with a great deal of information on Euler's personal life during almost all the period he spent in Berlin.

124 For Goldbach's almost absolute reticence with respect to his activities at the Foreign Office and the few putative exceptions, see *supra* 1.1.4, note 11.

125 The biography by Yushkevich and Kopelevich (1994) mentions, p. XI, several files of notes, diaries and records relating to Goldbach that are preserved at the Russian State Archive, Moscow (RGADA).

126 See, respectively, Fellmann 1995, p. 11–13, and O. I/1, p. XLIII–XCV.

Let us mention a few points:

- Travel: In his first letter sent from Berlin (n^o 38) Euler gave a detailed report of his journey on the Baltic, his meetings in transit at Stettin and the first visits after his arrival. The only longer trip he took during the next decades also left its traces in a letter to Goldbach (n^o 146): in 1750 he traveled to Frankfurt on the Main, where he and his wife met part of his family from Basel and took his widowed mother to live with them in Berlin.
- Residential property: Euler told Goldbach in some detail both about the first apartment he rented in Berlin (n^o 38) and about the house he bought in 1742 and moved into a year later (n^o 56, 58, 72, 74). Euler's vague plans to return to Basel if ever he could accumulate enough of a fortune to support his family without depending on a miserably paid university position had been abandoned by 1746, as he told Goldbach in n^o 80. And in 1756, Euler was able to acquire a country estate at Lietzow near Charlottenburg where he could accommodate his family for part of the year, obtain healthy food and get some exercise by walking over (n^o 179, 181).
- Family: When the Eulers left Petersburg in summer 1741, two sons accompanied them; during the Berlin period, eight more children were born, but only three of these – two daughters and another son – survived into adulthood. Most of these children's births and deaths are reported in Euler's letters to Goldbach; so is Katharina Euler's illness following her ninth delivery (n^o 143). Euler's maternal grandmother, with whom he had lived during his school days at Basel, died in 1744 (see n^o 78), his father in 1745 (n^o 89). Towards the end of the Eulers' days in Berlin, the young generation's engagements, weddings and the first grandchildren come up (see, in particular, n^o 185 and 193).
- Johann Albrecht: Euler's eldest son occupies a special place in the correspondence because Goldbach, who was his godfather, continued to feel responsible and enquired after him. His health, which remained for a long time precarious, his progress in school, his father's private instruction, then his first professional successes (membership in the Berlin Academy in 1754, at the age of 21, prize contests won from the Petersburg and the Munich Academies), finally his marriage and children are a frequent topic that seems to have really pleased the childless bachelor Goldbach.[127]
- One of Euler's rare distractions from his professional activities also figures in the correspondence: in n^o 80, he tells Goldbach that he has profited from an unnamed Jew's lessons to improve his chess; and after the unofficial world

127 This volume presents – for the first time, as far as we are aware – two letters (n^o 184^a, 188^a) that Johann Albrecht enclosed with his father's missives to Goldbach in 1757 and 1762, when he was in his twenties. They are both very deferential, but a progression from an extremely diffident to a somewhat more self-assured mode of address is all the same noticeable.

champion Philidor has given an exhibition at Potsdam in 1750, he regrets that he has not got the opportunity for a match (see n° 150–151).

Goldbach, in turn, is much more reticent: his private life as a well-to-do elderly bachelor may really have been rather uneventful. Once (n° 44–46) an illness and recovery are mentioned; in 1746 (n° 111), he has received, as a personal gift from the Tsarina, an estate in Livonia that will almost double his income; once (n° 136) he reports on his trip from Moscow to Petersburg by sledge in mid-winter; in 1751 (n° 151), Euler congratulates Goldbach on the new house he has bought. Finally, after the resumption of the correspondence in 1763 (n° 189), the increasing afflictions of old age become a constant issue: Goldbach is ever more confined to his apartment, then to his bed, and his appetite for mental activity is dwindling. In n° 189 Euler had mentioned the possibility of his return to the Petersburg Academy and a reunion with Goldbach; however his departure from Berlin took three more years, and by the time he came back to Russia, Goldbach had been dead for some time.

As we have tried to show, the Euler-Goldbach correspondence can be read at various levels:

- as a record of the friendship between a sophisticated but ultimately unambitious man of the world and an immensely talented and focused researcher who sometimes naively blocked out the framework in which he operated,
- as a panorama of scientific life in two young and rapidly developing metropolises, with new research institutions that were on the rise but still rested on shaky foundations,
- as evidence for the wide range of subjects to which open-minded intellectuals could then – in this transitional phase between an age of universalist scholarship and one of much more specialised research – still contribute an informed opinion,
- as the chronicle of a number of long-term research projects in which each partner used the other as a sounding-board for his approaches,
- as a testimonial of the investigations that made Leonhard Euler the 18th century's greatest number theorist and of the stimulus that a gifted enthusiast like Christian Goldbach contributed by taking an active interest.

It is this multiplicity of aspects that makes editing (and, we hope, reading) an extended correspondence of this kind such a fascinating experience.

3. Editing the Euler-Goldbach correspondence

3.1. Description of the manuscript sources

The Euler-Goldbach correspondence presents one of those fortunate cases where the original letters on both sides are more or less completely preserved. Both Christian Goldbach and Leonhard Euler kept most of the letters they received, or at least those addressed to them in a professional context; their papers were filed away at the time of their death by the institutions who had employed them; and none of the archives to which this documentary heritage – very substantial in both cases – was entrusted has been raided, dispersed or destroyed in the 200-odd years since then. So for a large majority of Euler's and Goldbach's letters to each other the original document just at it was sent in the 18th century has been conserved – in some cases complete with envelope, traces of the seal and postmarks.

Goldbach's papers were seized by the Collegium for Foreign Affairs – presumably for reasons of state secrecy – on the very day he died.[1] Euler was aware that this estate comprised "a great lot" of his letters but did not know whether Goldbach had kept copies of his own missives. He also recalled that he had left "all his learned correspondence, which made up a sizeable package", with the Petersburg Academy when he left for Berlin. He wondered whether this still existed and asked Secretary Müller to have it sent back to him "in case the Academy thinks it useless". If, on the other hand, "somebody would take the trouble to sort it out", many important points could be found in it, and their publication "would please the public better than the most subtle treatises".[2]

Finally all the Goldbach papers – sorted and probably supplemented from the Academy's files – ended up at what is now the Russian State Archive for Old Files (*Rossiĭskiĭ gosudarstvennyĭ arkhiv drevnikh aktov* – RGADA) in Moscow. The relevant collection (*fond* 181, *opis'* 16, nr. 1413) contains, chronologically arranged along with many other letters to Goldbach, 100 original, autograph letters from Euler dating from October 1729 to December 1763. In the same file, two letters Johann Albrecht Euler wrote to his godfather Goldbach and sent along with his father's have been found; these are published here for the first time.

Moreover, the Moscow collection of Goldbach papers also contains a series of notebooks in which Goldbach copied down his own letters or at least those parts that he wanted to keep available for future reference. In two of these books, partial copies of 51 letters Goldbach wrote to Euler were entered.[3] The main interest of the copies of extant letters, which have been systematically evaluated for the first

1 This is explicitly mentioned in the account of Goldbach's last days that G.F. Müller gave to Euler two days after his death (JW 1, p. 254).

2 Euler to G.F. Müller, January 8th, 1765 (JW 1, p. 259).

3 This practice changed with time: Goldbach took copies of all his first 9 letters from the period 1729–1732 and of 40 (from a total of 47 sent in that period) from 1742–1749; no copies seem to have been preserved of his letters to Euler written after 1750.

time for the present edition, does not lie in the – mostly slight – variants in the wording but in Goldbach's selection of the passages to be excerpted and in the marginal notes in which he occasionally recorded Euler's reactions and his own second thoughts about the mathematical suggestions he had made. These references to later developments and corrections are cited in our endnotes.

Four cases must be specially mentioned for which no counterpart exists in Euler's files and consequently Goldbach's copybook is our only source: nº 4 is the copy of a letter sent from Moscow that was apparently lost (Euler never answered it); nº 23 is a geometrical problem that was proposed to Goldbach and possibly communicated to Euler in person in 1736; nº 49 reproduces the mathematical part of another missing letter from April 1742; and in the case of nº 116, the first sheet of the original letter was lost from the collection of Euler's papers – earlier than 1843 since P.H. Fuß already mentions the gap – but can be complemented from Goldbach's copy.

Euler's scientific papers had in part already been deposited with the Archive of the Petersburg Academy in the 1730s; more material arrived there after his return in 1766, at his death and – by way of several of his descendants who held offices in the Academy – in the following decades up to the mid-19th century. Along with this vast estate of notebooks, drafts and fair copies of his papers, official documents and comments on other people's work (estimated at 25 000 pages), nearly 2 300 letters addressed to Euler are still kept at the St. Petersburg Branch of the Russian Academy of Science's Archive (*Sankt-Peterburgskiĭ filial Arkhiva Rossiĭskoĭ Akademii Nauk* – PFARAN).[4] Many of these letters are ordered chronologically or alphabetically, but some of Euler's larger correspondences have been collected in separate files. In particular, one volume (shelfmark *fond* 136, *opis'* 2, nr. 8) comprises the original manuscripts of 91 letters from Christian Goldbach, dating from December 1729 to January 1764.

Here also some exceptional cases should be mentioned: nº 3$^{\mathrm{d}}$ (contained in the same file as Goldbach's letters) is the draft of an extant letter Euler wrote to Goldbach, which we reproduce separately here since the development between the two versions is interesting; nº 21 (filed in another part of the Euler collection) is a note on a problem of differential geometry that Euler apparently discussed with Goldbach in the mid-1730s; and nº 196 – the original of Euler's last letter to Goldbach, written in March 1764 – ended up in a collection of Euler's letters to G.F. Müller.

There is remarkably little change in the physical appearance of the letters sent by Euler over a period of 35 years: most often a single sheet is folded to yield four pages with a size of about 17 × 22 cm, dispatched either in a separate envelope or (less frequently) folded down, addressed and sealed on the outside. Except for a few letters damaged by moisture or by ink seeping through from the reverse

4 An inventory of those documents, *Rukopisnye materialy L. Eĭlera v Arkhive Akademii Nauk SSSR*, t. I, was published by Yu.Kh. Kopelevich and others in 1962; the letters are described in more detail in O. IVA/1.

side, they are easy to read: Euler's writing is clear and regular, with generous margins and spacing; there are very few corrections or afterthoughts. Formulae are mostly displayed in neat arrays. Euler's script style changes a lot over the years, developing from a young man's meticulous but rather cramped forms to the fluid, cursive hand of a practised writer in the late 1740s and 1750s. No traces of Euler's deteriorating eyesight are in evidence.

The exterior appearance of Goldbach's letters is more varied: besides letters of a regular size similar to Euler's, there are some small *billets* containing just a few lines. The writing is mostly regular and easily legible; salutations, signatures and addresses are often decorated with a flourish. In the mathematical parts of his later letters Goldbach sometimes has second thoughts, striking out passages or adding amendments between the lines and in the margins. On the other hand, Euler also occasionally notes short observations on Goldbach's proposals directly on the original letters; we reproduce these remarks in the notes at the end of the letter.

A striking and peculiar, if not unique, feature of the Euler-Goldbach correspondence is its multilingual character. For the first ten years, while Euler and Goldbach both lived in Russia, they wrote to each other in Latin, in spite of sharing a (more or less) common native tongue.[5] In 1740 and early 1741, Euler and Goldbach exchanged only a few short notes of a non-scientific nature (nº 34–37);[6] and after his move to Prussia in summer 1741, Euler sent a detailed report of his journey and his reception at Berlin to Goldbach. It seems rather natural that these private communications were written in German; but even when Euler resumed the discussion of scientific matters at the end of nº 40, he did not revert to Latin – at least initially. However, the last paragraphs of this letter already exhibit the peculiar linguistic mixture that is to characterise all the rest of the correspondence: whenever mathematical topics are discussed, the wording "slides over" into Latin. Let us look at a – fairly typical – sample, where we have tried to imitate

5 This is actually not as surprising as it may seem to us: In marked contrast to the situation in France, England or Italy, many academics from the German-speaking countries of the 18th century still used the scholarly community's *lingua franca* even among themselves. Such is, for example, the case of Euler's teacher Johann I Bernoulli, whose scientific correspondence with German colleagues such as Leibniz, Wolff or Bilfinger and even with his fellow citizen Hermann is nearly all in Latin. Johann I and Nicolaus I Bernoulli also corresponded with Euler almost exclusively in Latin, whereas Daniel Bernoulli and Hermann wrote in German. Euler, too, later still conducted some Latin correspondences with German scholars whom he did not know personally, e. g., Ehler and Knutzen; on the other hand, a great majority of his scientific and non-scientific letters from the Berlin and the second Petersburg period are in German or in French (which he mastered much less smoothly than Latin). Goldbach, for his part, corresponded in Latin with Nicolaus II and, initially, with Daniel Bernoulli, just as he had with Leibniz, Wolff, Hermann and with his old friends Bayer and Hansch. His correspondence with Daniel Bernoulli gradually switched over to French for unstated reasons during the later 1720s.

6 Goldbach's four-line *billet* nº 33, in which he informs Euler that his new contract has finally been settled, presents another anomaly: it is the only communication between them that is written in French. Possibly Goldbach intended the letter to be read by some third party.

in English the strangely hybrid German sentences laced with grammatically correct Latin and the "chimeric" words borrowed from Latin or French but inflected according to German grammar (these are often written partly in *antiqua* script, partly in German *Kurrentschrift*):

> "A long time ago, I discovered some similar *theoremata* such as: $4mn - m - 1$ can *nullo modo* be a *Quadrat*.
> *Item*: $4mn - m - n$ cannot either be a *Quadrat*, *positis* m *et* n *numeris integris affirmativis*. I also discovered *curieuse proprietates* of the *divisores quantitatis* $aa \pm mbb$ *si* a *et* b *sint numeri inter se primi*, that seem to have something *in recessu*, as for example:
> *Theor. 1. Omnes divisores formulae* $aa - 2bb$ *continentur in forma* $8n \pm 1$ [...]".[7]

What is going on here? After reporting on his day-to-day experiences to a friend in the common mother language they presumably also used in their conversations at Petersburg, Euler tries to share his current research ideas – and at once notices that it is more natural for him to do so in Latin. Indeed he has always written, spoken (and presumably thought) about mathematics, science or philosophy in the "scholarly" language that he has been taught for that purpose when still very young and has consistently used right from his start on this sort of mental activity.[8] Moreover, he also lacks a standardised German vocabulary of technical terms: neither "positive ganze Zahlen" for *numeri integri affirmativi* nor "teilerfremde Zahlen" for *numeri inter se primi* (i. e., coprime numbers) are yet part of an established mathematical terminology.[9] So a new linguistic pattern of communication develops between Euler and Goldbach, who responds in much the same way: the basic language of their letters, in which everyday news is exchanged, mutual favours are asked for and acknowledged, and events in their academic environment are discussed, is now German. But whenever questions of mathematics (and, to a lesser degree, natural science) are being addressed, Latin words and phrases are interspersed in the German sentences, to the point where entire pages elaborating a mathematical argument in a more formalised way – close to the style in which it will later be published – are in Latin (and consequently in *antiqua* script). All in all, the bilingual character of the correspondence seems to be the result not so

7 See n° 40, p. 172 for the original text and p. 679 for a version fully translated into English.

8 The teaching schedule of the Basel *Gymnasium* (as high schools were then called throughout the German-speaking part of Europe) in the early 18th century shows that an active mastery of Latin (and some Greek) was thought to be by far the most important qualification for embarking on an academic career, and the basic courses in the faculty of philosophy where every student – at the age of about 14 – had to prove his ability for formalised exposition and discussion drove this point home even more emphatically.

9 The first German-language textbooks of mathematics going beyond elementary geometry and arithmetics were being devised just at that time: Christian Wolff, for example, published his *Vollständiges Mathematisches Lexicon* in 1734 – but characteristically his compendium *Anfangsgründe der mathematischen Wissenschafften* (first published in 1710) was much more widely spread in its Latin version *Elementa Matheseos Universae*.

much of a conscious decision than of the convenience in using the vocabulary that was most readily available for a given topic.

The mixture of 18th-century German and Latin used in the letters presents some obstacles even for people familiar with one or the other; moreover, the difficulties involved in understanding the subject matter of mathematical theories that are still developing, not yet fully understood and formalised, should not be underrated. For both these reasons it has been thought useful to append an English translation in the present edition.[10]

3.2. Prior editions

3.2.1. 19th century: Paul Heinrich Fuß

Shortly before his death, Euler had predicted that the Petersburg Academy would take at least twenty years to print all the papers he was leaving behind, but actually the stock of unpublished manuscripts was not yet exhausted in 1826, when Euler's great-grandson Paul Heinrich Fuß succeeded his father as Permanent Secretary to the Petersburg Academy of Sciences.[11] In the following decades Paul Heinrich and his younger brother Nicolaus, a teacher at the Petersburg high school, edited several parts of Euler's manuscript heritage: a special number of the Academy's *Mémoires* that presented 14 more of Euler's papers dating from 1780–82, two volumes of *Correspondance mathématique et physique*, two volumes of *Commentationes arithmeticae collectae* (a collection of 99 papers, of which 9 had not been published before) and two volumes of *Opera postuma mathematica et physica* (this principally consisted of 51 papers, drafts and fragments that Fuß had recovered from several manuscript collections).

The two volumes of the *Correspondance*, published in 1843, are of particular interest here since they constitute the first attempt to make a substantial part of Euler's correspondence accessible to the public. In fact Fuß regretted deeply that for what he thought the scientifically most interesting part, the exchange with three members of the Bernoulli family, he had not been able to recover Euler's half of the dialogue:[12] thus, tome II of the *Correspondance* comprises only Johann I,

10 For the reader's convenience the original text and the translation have been printed in separate parts so they can be read alongside each other. The principles adopted in translating are discussed in more detail in Section 3.3.2.

11 Nicolaus Fuß had come to Russia from Basel in 1773, at the age of 18, to assist the aging and sight-impaired Euler with his research and publications. In 1784 he married Johann Albrecht Euler's daughter Albertine; their children all stayed in Russia, several of them building careers in the academic and governmental sphere.

12 "The pleasure the study of these letters gave me was tarnished only by the regret [...] of not being able also to read Euler's replies. These would certainly have increased the value of this precious collection tenfold. Unfortunately all my efforts to obtain them have been fruitless." ("La jouissance que m'a procurée l'étude de ces lettres n'a été troublée que par le regret [...] de ne pas pouvoir lire en même temps les réponses d'Euler. A coup sûr, celles-ci eussent décuplé la valeur de cette précieuse collection. Malheureusement tous mes efforts pour me les procurer ont été infructueux."): *Correspondance* I, p. XXI.

Daniel and Nicolaus I Bernoulli's letters *to* Euler preserved at the Petersburg archive. Fuß admits that Goldbach's letters would not have rated an edition by themselves; but when he learned that in this case Euler's side of the long-lasting dialogue had also been preserved, he asked for and obtained permission from the Moscow State Archive's Director, Prince Mikhail Andreevich Obolenskiĭ, to publish the entire correspondence (and those Goldbach had led with Nicolaus II and Daniel Bernoulli as well).

Fuß is acutely aware of the correspondence's value for the history of science, for understanding the development of the authors' research "with regard to the methods and observations, the reasoning and the calculating devices, which no mathematician will see without admiration or without learning some lessons"[13]; but he also thinks in terms of giving his readers a scale with which to gauge the authors' characters, their personal and professional lives and their mutual interactions: "It will be seen that the material I provide bears both on science and on the authors' persons, and finally as well on the learned corporations to which they belonged"[14].

The 177 letters from the Euler-Goldbach correspondence (94 of Euler's, 83 of Goldbach's) that make up Fuß's first volume are carefully and almost always correctly transcribed in the original languages, with rather cautious adaptations to 19th-century spelling and grammar. The most substantial items missing in the 1843 edition, besides a few short purely personal communications and covering notes, are Euler's report on his journey to Berlin (n° 38) and his last letter from March 1764, which may not have reached Goldbach at all. In the letters that were published, most (but not all) address and salutation formulae were deleted; dates and signatures were reproduced in a standardised format. Many passages on family matters, meetings with common acquaintances, book orders and other errands were also left out, presumably because Fuß was after all more interested in his great-grandfather's lasting contributions to science than in his day-to-day life. The suppression of everything to do with Euler's call to the Berlin Academy, his differences with the Petersburg Academy's officials and his – very muted – criticism of Russian policy may, however, also be due to an exaggerated consideration for institutional sensitivities surviving into the 19th century.

The *Correspondance* volumes were at once widely noted: the bibliographical and mathematical journals announced and reviewed them, and both professional mathematicians – let us just mention Jacobi, Dirichlet and Schläfli – and historians of science such as Rudolf Wolf, Boncompagni and Moritz Cantor made use of them in their research.

In the following decades, several of Euler's smaller scientific correspondences were published rather haphazardly: in the journals of regional learned societies,

13 "[...] sous le rapport des méthodes et des aperçus, du raisonnement et des artifices de calcul que nul géomètre ne verra sans admiration, ni sans y puiser quelque instruction": *ibid.*

14 "On verra que ce que je livre se rapporte soit à la science, soit à la personne des auteurs, soit enfin aux corps savants dont ils faisaient partie": *ibid.*, p. XXXVI.

in the collected works of notable correspondents such as Frederick II, Wolff and Lagrange, in the Fuß brothers' *Opera Postuma* volumes, in institutional histories of the Petersburg Academy and other scientific corporations across Europe.

A resurgence of interest was triggered early in the 20th century by Euler's imminent 200-year anniversary: this also led to the definitive inventory of his works, established by Eneström, and to the founding of the Euler Committee that was charged with supervising the edition of the *Opera Omnia*, which it has continued to do up to the present. In this context, expanded editions of the Euler-Bernoulli correspondences became available, and the following decades saw the first publication of the important correspondences with Lambert and Delisle.

3.2.2. 20th century: The Yushkevich-Winter team

In the 1930s, a group of historians of science based at the Soviet Academy of Science in Leningrad embarked upon a more systematic study of the treasure of letters and other manuscripts preserved in its archives. Various inventories and collections were published in the following decades by S.Ya. Lur'e, I.I. Lyubimenko, S.I. Vavilov, I.G. Bashmakova, A.P. Yushkevich, V.I. Smirnov, T.N. Klado, Yu.Kh. Kopelevich and several others, presenting to the public for the first time Euler's correspondence with such eminent scientists as Lomonosov, Tobias Mayer, Charles Bonnet and Poleni (or at least parts of it).

Their most ambitious project was planned in the context of Euler's 250th anniversary as a joint venture of the Academies at Leningrad and Berlin (i. e., its Eastern part, then the capital of the German Democratic Republic). A binational team led by Adol'f Pavlovich Yushkevich (Juškevič) and Eduard Winter established a collection documenting the cultural ties that had linked their countries and their academies in the 18th century. Besides several smaller publications, they edited three volumes of Euler's letters, mostly exchanged during his Berlin period with his former colleagues at Petersburg.[15] In all this collection, the selection of the material and the emphasis of the commentaries reflect the vivid exchange between German and Russian scholars, rather than the scientific content of their discussions.

At the same time, the Yushkevich-Winter team also undertook a scientifically much more challenging project, the reedition of the Euler-Goldbach correspondence. In accordance with the collective spirit of their milieu, the editorial tasks were distributed among a largish group of collaborators. The transcription of the letters was entrusted to the historian Peter Hoffmann in Berlin and checked by

15 Yushkevich / Winter 1959 / 1961 / 1976: *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers*. Part 1 contains 207 letters to and from the Petersburg historian G.F. Müller, part 2 348 letters to officials of the Petersburg Academy, chiefly its librarian and Secretary J.D. Schumacher (here the replies are only summarised), part 3 deals with another 313 letters exchanged with 30 correspondents – scientists, patrons and dignitaries.

T.N. Klado and Yu.Kh. Kopelevich in Leningrad; the latter mainly dealt with the parts written in Latin. Several other researchers at the Russian and the Berlin Academy contributed their expertise; in particular, many notes on questions of number theory – particularly its later developments – were contributed by A.A. Kiselëv and I.G. Mel'nikov, who explicitly signed them by their initials. The translation of the Russian commentaries was checked by a Berlin team. The two principal editors Winter – a Bohemian-born theologian and cultural historian – and Yushkevich – a trained mathematician and leading expert in medieval mathematics – contributed a 16-page introduction. The final text was again edited by Hoffmann under Winter's and Yushkevich's supervision.[16]

The 1965 edition presents almost flawless transcriptions of all 196 preserved letters of the Euler-Goldbach correspondence (102 written by Euler, 94 by Goldbach); 13 letters (7 of Euler's, 6 of Goldbach's) were published for the first time.[17] Many passages on the correspondents' personal and professional activities were also recovered, whereas the address and salutation formulae are for the most part still missing. The introduction, editorial notes and indices try to deal both with the mathematical content and the historical context of the correspondence; however, this second direction of research was treated rather superficially, persons or works being identified only vaguely, erroneously or not at all. In this respect, the present editors have been able to gather many more mosaic tiles for the picture of Euler's and Goldbach's *Lebenswelt*.

A synoptic table (*infra* p. 1141–1146) indicates for each letter (identified by its running number within the correspondence and its date) its inventory number in vol. IVA/1, the location of the original manuscript(s) in the archives and its place in the two former editions.

3.3. Editorial principles

3.3.1. Source text

In transcribing the autograph source documents described in Section 3.1 above, two sometimes conflicting goals have guided the editors: they wanted to stay as close to the original as possible and to produce a text that can be read and understood by a modern reader without unnecessary difficulties. Deviations from the original were only introduced when this was deemed necessary to facilitate a correct comprehension of the author's intended meaning; even idiosyncratic and non-uniform spelling, grammar, syntax and punctuation were retained whenever

16 Personal communications to the editors from Dr. Peter Hoffmann, Nassenheide (Brandenburg), 2010/2014.

17 In five cases Fuß had incorporated postscripts by Goldbach into the preceding letter; nº 196, Euler's last letter to Goldbach, had already been included by the Yushkevich-Winter team into the second volume of *Briefwechsel* published in 1961.

judged to be comprehensible without specialised linguistic competence. In particular the following norms of transcription have been applied:

- In Latin the letters u and v are distinguished in accordance with modern practice, whereas i and j are transcribed faithfully. In German, i and j – in practice often hard to differentiate anyway – are adapted to modern usage. Accents in Latin words have been cancelled; in French they are reproduced as in the original (except for ambiguous accents, which are treated in modern fashion, and those on "à", "là" "où" that have been added for clarification). Ligatures for "ae" and "oe" have been dissolved (except for "œ" in French words); umlauts and diaereses are reproduced faithfully and even added in some cases where they are needed for disambiguation (e. g., "aëre" vs. "aere"). Obsolete diacritical signs – such as the overline calling for the duplication of a letter (mostly m or n), double dots on y and the crotchet distinguishing u from n in German script – have been canceled; "ß" and "ss" are distinguished according to the original. Greek letters have been reproduced in a modern font.

- As explained above, the mix of several languages – mostly Latin and German – is a peculiar characteristic of the Euler-Goldbach letters written after 1740. The corresponding use of two distinctive forms of handwriting – an "antiqua" script for words in Latin and Romance languages (and sometimes for emphasis) and a "current" script for German passages – has been reproduced by using italics for everything written in antiqua, even when this entailed a change of font style within a word. However, the earlier letters (n° 1–33) and those enclosures, postscripts and paragraphs (mostly formally phrased mathematical passages) that are entirely written in Latin – and thus in antiqua – have been reproduced in a straight font to facilitate reading.

- Capital letters – often inconsistently used in the original – were retained; moreover, all proper names of persons and places are capitalised, and every sentence starts with a capital. Intermediate forms have been rendered by lower-case letters. The occurrence of upper-case letters and narrow half-spaces instead of hyphens within composite words such as "HochEdel Gebohrnen" or "Geheim Rath" has been respected.

- Conventional crotchets and loops for common endings – very frequent in 18th-century texts both in Latin and German – have been resolved; "&" for "et" (or "und") – often also used in "&c." for "et cetera" – remains. Abbreviations with and without final dots, colons or raised final letters are reproduced as they appear in the original; in those cases where the meaning is not obvious, the missing letters are added in brackets. Some abbreviations that occur frequently – such as "Ew. HEdgb." for the formal address "Euer HochEdelgebohrnen" – have been left as they stood; they are explained in the List of abbreviations, p. 1247–1248.

- Punctuation generally follows the original; however, it sometimes seemed necessary to add commas or semicolons to structure overlong sentences and facilitate correct parsing. Paragraph breaks have been added sparingly in order to help clarify the overall structure. Quotations from earlier letters or other texts are sometimes emphasised in the originals by underlining; this has been respected for single words and short phrases, but replaced by quotation marks for passages longer than one or two lines. In a few cases, Euler copied entire paragraphs or letters which he had received into his letters to Goldbach: these have been set off by line breaks and indentation on both sides. The graphical layout of the introductory and closing formulae has been respected as far as possible.
- Obvious writing errors in the original ("slips of the pen") are tacitly corrected; it seemed, however, appropriate to preserve the writers' idiosyncratic spellings, dialectal forms, imperfectly phrased arguments or incomplete sentences in many cases where former editors had intervened with emendations and supplements: should such passages seem obscure, the present editors' understanding can be ascertained in their translation. Letters or words that are unreadable or lost in the original (e. g., by torn margins or seals) are supplemented in brackets [ ]. Words and passages crossed out are tacitly dropped, except when there seems to be a particular interest in mentioning them in an endnote. Passages added in the margin by the original writer of the letter are inserted between braces { } in the appropriate place. Euler sometimes added his comments in the margins or between the lines of Goldbach's letters; these remarks, which often lead to follow-up investigations, are reproduced in the endnotes.

3.3.2. Translation

The present edition of Euler's correspondence aims at facilitating the modern reader's access to this important part of the biographical and scientific record. Since the languages used (18th-century German and Latin) are no longer universally familiar to scholars and students of either mathematics or history, it seemed advisable to complement the source text by an English translation.[18]

The sometimes conflicting goals that the translator (the second-named editor) tried to achieve are:

- fidelity in rendering correctly the meaning of the original – obviously the first requirement in any translation. Actually Euler and Goldbach express themselves clearly and most of the time simply, so there has only rarely been any doubt in the editors' minds what the original text intends to say.

18 This has been printed in the second part, bound as a separate volume, so both versions can be consulted alongside each other.

– some degree of closeness to the authors' modes of expression, to the "sound" of Euler's or Goldbach's voice. Thus we tried to avoid factual and linguistic anachronisms, slang and jargon – even scientific jargon.[19]

– a fluently readable text respecting modern English grammar and style. In order not to make the authors appear stilted when in fact their phrasing was conventional and hardly noticeable for their contemporaries, we tried to replace complex syntactical constructions and elaborate wording by simpler turns of phrase.[20]

– easy identification of persons, places and works mentioned (literally or by paraphrase) in the letters. Thus proper names and titles – which are reproduced faithfully in the original text – have been standardised in the translation in order to facilitate reference to the indexes.

Since English is not the translator's first language, he had to rely on the generous help of two native speakers well-versed in Euler's style of thinking and writing about mathematics. As far as the translation can indeed be read with ease and some enjoyment, this is due to Jordan Bell (Toronto) and Fred Rickey (Cornwall, NY).

19 In this respect, the technical terms of present-day mathematics sometimes pose a problem: their use in the translation might obscure the fact that the correspondents often did not have a standardised terminology and had to use everyday words in an *ad hoc* manner. Thus, for example, when Euler and Goldbach refer to an additive decomposition of an integer n, they variously say that n is "resolubilis" or "divisibilis" (into squares or primes), that there is a "modus distribuendi", that it can be "zerteilet" or "resolvieret" or even "discerpi potest" (literally: can be plucked apart). Translating this concept by "dividing" might mislead the reader into thinking of factorisation, "resolving" or "distributing" also could suggest other directions of thought; so, since we wanted a uniform, obviously non-technical term, we opted for "splitting". On the other hand, the meaning and usage of many technical terms occurring in the letters – e. g., "transcendent", "imaginary", "series", "quadrature" etc. – has changed since the 18th century (see Section 2 of this Introduction, in particular 2.3.1 and 2.4.1). Here the original wording was reproduced in the translation, but in some cases a cautioning note had to be added.

20 The form of address in the text of the letters presents a particular problem in this respect: Both correspondents open their German-language letters with two- or three-line headings giving each other full rank and title. As a typical example of these resounding formulae we quote "Hochwohlgebohrner Herr, Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath" (n° 151); literally this would have to be translated as "Highly well-born Sir, Most Highly Honoured Mr. State Councillor". In the body of the letters, the correspondent is often addressed as "Ew. HEdgb." (abbreviated from "Euer Hochedelgebohrnen", literally "Your Very Nobly Born [Person]"). In our translation, these phrases have uniformly been replaced by the place-holder "Sir"; readers interested in their exact wording, which indeed changed subtly with time and the correspondents' relationship, must refer to the original text. On the other hand, we have retained the greeting formulae at the end of the letters since they are more variable, differ in significant nuances, and are often needed to complete a final sentence.

3.3.3. Mathematical notation

Here again, the editors – complying with the Euler Edition's overall policy – stayed as close to the symbols used in the original documents as seemed consistent with presenting the scientific content in a form that is comprehensible to a non-specialist modern reader. Even obsolete signs and notational conventions are retained whenever there seems to be no danger of misinterpretation. In particular the following norms have been applied in rendering mathematical formulae:

- Letters denoting quantities or geometrical points – mostly in an "antiqua" script in the originals – have been printed in italics, except when the author used another "character set" for distinguishing several (series of) items: in those cases bold letters or a script alphabet were used. Another exception was made for the modern standard designations of constants such as π or e: these are rendered in straight (Roman) characters. Numbers are reproduced in straight characters, without dots, except for those used for ordinal numbering together with a Latin noun (*Cor. 2.*, *Lemma III.*). As a decimal (or binary) mark, most Continental authors of the 18th century used a comma; this has been retained in the originals but replaced by a decimal point in the translations. In sequences, commas instead of dots have been used as delimiters. Notations for functions – both modern (sin, log) and ancient (Sin. A., L.) – are transcribed faithfully in straight characters; instead of l, which could be misread as the digit 1, ℓ has been used for the logarithm. In the translations and, of course, in the commentaries, modern notation – in particular, log for the (natural) logarithm – has been used.
- The use – or, more often, the lack – of parentheses has been respected whenever the intended interpretation was judged to be the most "natural" one, even when the original authors disregarded our formal rules: thus, e. g., when Euler or Goldbach writes a factorial as $n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, no parentheses have been introduced in the transcription (however, they were added in the translation). Similarly the use of *vincula* (overlines with a bracketing function, often occurring in conjunction with radical signs) has been faithfully reproduced in the original text, but replaced by parentheses in the translation. Other obsolete notations retained in the original and "modernised" only in the translation include xx for x^2, $a \,.\, b :: c \,.\, d$ for the proportion $a : b = c : d$, and the use of an asterisk $*$ to draw attention to a "gap" – a power of the variable that does not occur – in a polynomial.[21]

21 There is one unusual sign that occurs in the present correspondence and commands some interest in so far as it seems to be a personal trait of Goldbach's mathematical notation. In his original letters, a + sign surrounded by four dots at the corners appears in several places. Since in all the places where Goldbach uses it, replacing it by a minus sign yields mathematically correct results, it seems a reasonable surmise that the dots were added to an erroneous + sign as an afterthought in order to "convert" it into the appropriate $-$; just cancelling the vertical bar would presumably not have given a clear picture. However, we have not found any instances of this practice in other authors or references in the literature on

– Short terms, equations and other formulae that form part of sentences have often been left in the continuous text. However, many formulae have been displayed in separate lines for better visibility. The alignment of the original has been respected as far as possible.

3.3.4. Figures

The Euler-Goldbach letters contain some fifty geometrical figures of widely differing quality, from rough little sketches (n° 23, 87) to elaborately constructed drawings on separate sheets (n° 98, 139). They have been rendered in two versions:

– With the original text, a reproduction of the figure appears that has been cut free from the surrounding text, cleaned up from ink and mould stains, but not otherwise edited.

– With the translation, a version appears that has been redrawn professionally, straightened and smoothened, using uniform line width and typeset lettering.

Additionally some reproductions of entire manuscript pages are comprised in the volume, showing samples of Euler's and Goldbach's writing from the earliest to the latest phase of the correspondence. Some of the best-known passages of the letters have been chosen for this:

– an early form of "Euler's formula" for the logarithm of -1 from n° 1 (p. 100),

– his complaint about the work on maps that affects his eyesight from n° 34 (p. 164),

– the original Goldbach Conjecture from n° 51 (see the frontispiece of the present volume, p. VI),

– a revised number-theoretic proof of Goldbach's from n° 73 (p. 282) that Euler called magnificent in his reply,

– the first appearance of Euler's Polyhedron Formula from n° 149 (see the frontispiece of Part II, p. 581),

– and a New Year's wish for Euler and his family from n° 195 (p. 577), which may well be one of the last items Goldbach wrote, ten months before his death.

mathematical notation (cf., e. g., Cajori 1928). The present editors have decided to reproduce this "*pentimento* minus sign" by $\dot{}\!\!\!\!:\!+\!:$ in Goldbach's original letters; in the translations the usual minus sign has been substituted.

3.3.5. Formal descriptions

The original text of each letter is followed by a formal description which indicates:

- the number given to the letter in the inventory volume O. IVA/1, where the Euler-Goldbach correspondence has the numbers R 715 to R 910,
- the running number in the context of the present correspondence,
- a reference to the previous letter(s) of the other correspondent to which it replies,
- the date in the standardised form described below,
- description as an original, draft, copy or extract (since all letters presented in this volume are autographs, this is not mentioned explicitly), number of sheets or pages,
- the location of the original documents (archive and shelfmark),
- information connected to the mailing process (when available): envelope, seal, address, notes on mailing, postage, delivery and reception,
- information on previous publications (see Section 3.2 above).

The heading and column title for each letter give the date according to the Gregorian calendar ("new style"); for letters written in Russia, where the Julian calendar ("old style") was in use until 1918, this date is also indicated, the form that does not actually appear on the original letter being set in parentheses.[22]

3.3.6. Notes

Both in the original text of the letters and in the translations, references to the editors' endnotes are given by raised numbers set in brackets (to avoid confusion with exponents). The notes follow the translated text of each letter in the second part of the volume.

22 Only in a few of Goldbach's letters the calendar used for the date is explicitly indicated, either by adding "*st*[*yli*] *n*[*ovi*]" or by noting both dates. Collateral evidence – such as evaluation of the intervals between letters and their replies, cross-reference with external events, the Academy's minutes or other correspondences, the identification of the (more or less consistent) weekdays when letters were dispatched from Petersburg, Moscow or Berlin – supports the hypothesis that Goldbach always used the Gregorian style; indeed, G.F. Müller, in his biographical sketch (cf. *supra* Section 1.1, note 2), remarks with approval that Goldbach in all his lifetime never used the old calendar ("Man erlaube mir hier beifällig anzumerken, dass er die ganze Zeit seines Lebens niemals den alten kalender gebraucht hat": *Materialy*, t. VI, p. 30).
Euler, on the other hand, seems to have indicated Julian dates while in Russia (in a few cases, such as the pairs n° 6–7 and 12–13, this is indisputable); for his later letters, written from Berlin, the use of the "Western" style can safely be assumed. Thus our dating is based on the assumption that Euler's Petersburg dates (up to June 1741) are Julian, whereas all of Goldbach's dates and those of Euler's letters after August 1741 are Gregorian. In some cases, this leads to deviations from the 1965 edition (and in one case, n° 57–58, to a transposition).

Many of these notes contain cross-references to previous or subsequent letters in the present correspondence where the same topic is mentioned. These are in the standard form "cf. n° xx, note y" and are meant to lead the reader to a specific paragraph of letter n° xx – even when the note referred to does not, by itself, give additional information.

The editors have tried to give complete references to the persons, texts and events mentioned in the Euler-Goldbach letters. As far as possible, biographical information is indicated in the name index. Books and papers – except for those by Leonhard Euler – are identified in the editors' commentaries by indicating the author's name and the year of publication; complete bibliographical data can then be found in the corresponding entry of the bibliography. In the case of Euler's works, the reference is in the form of a number "E. xxx" referring to Eneström's index published in 1910/13; they are listed by that number in a separate index by the (sometimes shortened) title, the original publication data and the place where they can be found in the *Opera Omnia*. References to Euler's correspondence with third persons are in the form "R xxxx", referring to the *Repertorium* given in vol. IVA/1 of the *Opera Omnia*; whenever possible, we add the place where a letter has been or will be published.

The names of persons, places and organisations and the titles of works have been reproduced unchanged in the original text of the letters but standardised according to modern English custom in the translations, the notes and the index part.[23]

3.3.7. Indices

The second part of the volume contains an extensive index section. This comprises:

- a synoptic table cross-referencing the present volume, the index volume O. IVA/1, the archive locations of the original documents and the two previous editions of the Euler-Goldbach correspondence.

23 The place name of the Russian city where Goldbach and Euler spent a substantial part of their lives presents a special case, the official name form being "Sankt Pieter Burch" at its foundation in 1703, "Sanktpeterburg" or "Sankt-Peterburg" from 1724 to 1914, "Petrograd" in 1914–24, "Leningrad" in 1924–91 and again "Sankt-Peterburg" (often shortened to "Piter") since September 1991. In other languages, the Latin-Greek "Petropolis", the German and English "St. Petersburg" (with an "s" that has never been part of the Russian name) or the French "St-Pétersbourg" were mostly used – by Euler and Goldbach among many others. In the text of the letters (and as a place of publication in the bibliography), these forms have been retained; however, for the commentaries we have opted in the interest of easy readability for using "Petersburg" (even if this is a somewhat ahistorical form). In the same spirit, the various name forms of the "Imperial Petropolitan Academy of Sciences" have been abbreviated to "Petersburg Academy" and those of the "Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin" (as it was officially called – in French – in Euler's time) to "Berlin Academy".

– a list which contains all those of Leonhard Euler's works that are mentioned by title or by implicit reference in the Euler-Goldbach letters, in the introduction or in the editorial notes of this volume.
– a full bibliography of all works – both sources and secondary literature – cited by title or by implicit reference in the Euler-Goldbach letters, in the introduction or in the editorial notes of this volume.
– a subject index ordered systematically by scientific and biographical topics, which indicates the sections of the introduction and the numbers of the letters where some topic is mentioned.
– a name index that lists all persons appearing by name or by implicit reference in the Euler-Goldbach letters, in the preface, introduction and notes of this volume.
– a list of abbreviations which comprises both the abbreviations frequently employed in the original text of the letters and those used in the editorial commentary.

Correspondence with Christian Goldbach

Original Texts

1

Euler to Goldbach

Petersburg, October 13th (24th), 1729

Vir Celeberrime

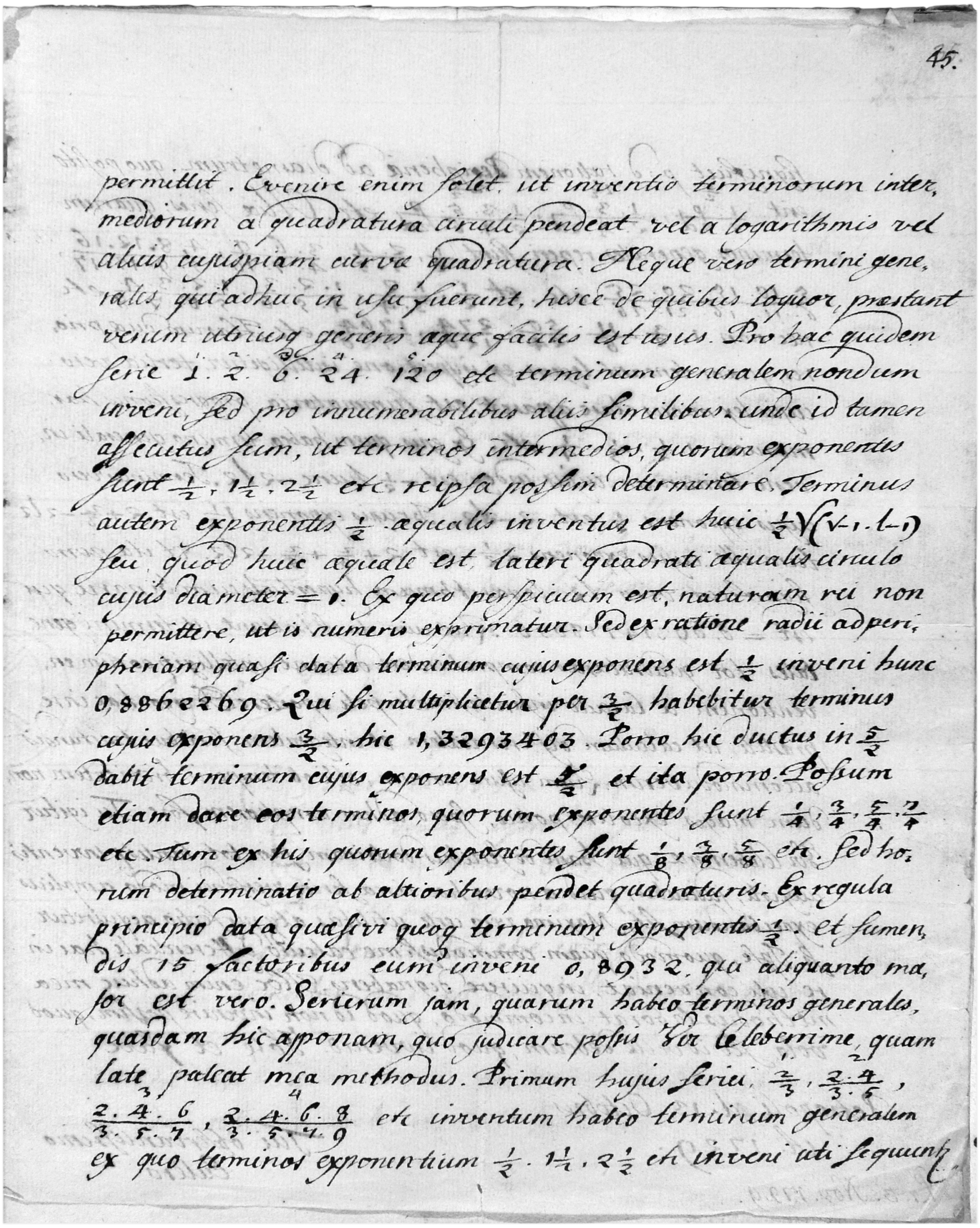
Cum nuper in nonnulla incidissem, quae ad interpolandas series legem, uti appellare soles,[1] variabilem habentes facere visa sunt, ea accuratius contemplatus sum, et multa quae huc attinent, detexi. Quae, quia Tibi Vir Celeberrime placitura esse mihi significavit Clarissimus Bernoulli, Tibi scribere, Tuoque submittere judicio statui. Hujus seriei,[2] 1, 2, 6, 24, 120, etc. quam a Te multum tractatam esse vidi,[3] hunc inveni terminum generalem

$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\text{ etc.}$$

ex infinito factorum numero constantem, qui terminum ordine m^{mum} exprimit. Is quidem in nullo casu abrumpitur, et aeque si $\underline{m}$ est numerus integer tantum ad verum magis magisque accedit, ac si $\underline{m}$ fuerit fractus: sed tamen per eum admodum prope quemque terminum invenire licet, idque eo facilius, quo minus assumatur $\underline{m}$. Si autem aliquot solum uti visum sit factoribus, termino generali commodior induci potest forma: ut si duobus prioribus factoribus contenti esse velimus, habebitur $\dfrac{1\cdot 2}{(1+m)\,(2+m)}3^m$ pro termino ordine $\underline{m}$, sin autem generaliter $\underline{n}$ factores capiantur sequentibus reliquis neglectis, erit terminus generalis

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(1+m)\,(2+m)\,(3+m)\,\cdots\,(n+m)}\,(n+1)^m\,,$$

qui, quo major accipitur numerus n, eo propius ad verum accedet.[4] Communicavi haec cum Clar. Bernoulli, qui peculiari modo eundem fere postremum eruit terminum, in hoc a meo diversum, quod aliam potestatem loco $(n+1)^m$ adhibeat, in qua determinanda fortasse factorum neglectorum rationem habuit. Credo Ipsum Tibi nuper inde deductum numerum termino seriei, cujus index est $1\frac{1}{2}$, proximum misisse.[5] Potest hic terminus generalis praeterea alium habere usum, in inveniendis factis ex infinito factorum numero constantibus, quae sint aequalia numero finito: ut posito $m=2$ habebitur factum $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{36}{35}\cdot$ etc. quod aequale est 2. Similiter posito $m=3$ erit $\frac{8}{4}\cdot\frac{27}{20}\cdot\frac{64}{54}\cdot\frac{125}{112}\cdot\text{etc.}=6$. Terminum hunc generalem ex eo inveni fundamento, quod haec series 1, 2, 6, 24, etc. in infinitum continuata tandem evadit geometrica.[6] Et hujusmodi terminos generales etiam pro aliis seriebus, quae in infinitum cum geometricis confunduntur, exhibere in promptu est. Sed cum hoc modo termini intermedii nonnisi veris proximi inveniantur, omissa hac serierum tractandarum ratione, aliter in hac re versari coepi, in id intentus, ut terminos intermedios non tantum veris proximos, sed ipsos veros, si fieri posset, invenirem. Ad id vero inveniendum, cum seriei terminum generalem haberi oportere visum sit, quem vero peculiarem et ab adhuc usitatis longe diversam habiturum formam praevidi. Obtulit se igitur nova quaedam terminorum



45.

permittit. Evenire enim solet, ut inventio terminorum inter-
mediorum a quadratura circuli pendeat vel a logarithmis vel
aliis cujuspiam curvae quadratura. Neque vero termini gene-
rales, qui adhuc in usu fuerunt, hisce de quibus loquor, praestant
verum utriusq generis aeque facilis est usus. Pro hac quidem
serie 1. 2. 6. 24. 120 etc terminum generalem nondum
inveni, sed pro innumerabilibus aliis similibus, unde id tamen
assecutus sum, ut terminos intermedios, quorum exponentes
sunt $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc reipsa possim determinare. Terminus
autem exponentis $\frac{1}{2}$ aequalis inventus est huic $\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{-1}.\,l-1)}$
seu, quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo
cujus diameter $= 1$. Ex quo perspicuum est, naturam rei non
permittere, ut is numeris exprimatur. Sed ex ratione radii ad peri-
pheriam quasi data terminum cujus exponens est $\frac{1}{2}$ inveni hunc
0,8862269. Qui si multiplicetur per $\frac{3}{2}$ habebitur terminus
cujus exponens $\frac{3}{2}$ hic 1,3293403. Porro hic ductus in $\frac{5}{2}$
dabit terminum cujus exponens est $\frac{5}{2}$, et ita porro. Possum
etiam dare eos terminos, quorum exponentes sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$
etc. Tum ex his quorum exponentes sunt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ etc. sed ho-
rum determinatio ab altioribus pendet quadraturis. Ex regula
principio data quaesivi quoq terminum exponentis $\frac{1}{2}$: et sumen-
dis 15 factoribus eum inveni 0,8932, qui aliquanto ma-
jor est vero. Serierum jam, quarum habeo terminos generales,
quasdam hic apponam, quo judicare possis Vir Celeberrime, quam
late pateat mea methodus. Primum hujus seriei $\frac{2}{3}$, $\frac{2\cdot4}{3\cdot5}$,
$\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}$, $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}$ etc inventum habeo terminum generalem
ex quo terminos exponentium $\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc inveni uti sequun-

Euler's FIRST LETTER to Goldbach, October 13th (24th), 1729: reproduction of the third page (RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 45r)

Euler's determination of the value $\frac{1}{2}!$ and an early form of "Euler's formula" for the logarithm of -1 (cf. nº 1, note 7) can be seen on lines 9–12.

generalium forma, quae quidem ad omnes prorsus series potest accommodari jam cognitas, sed longe ea latius patet, quippe infinitarum serierum legem variabilem habentium, quarumque adhuc methodis consuetis nulli termini generales inveniri potuerunt, determinare possum terminos generales. Hi autem sunt ejusmodi, ut termini quivis, sive eorum exponentes sint numeri integri sive fracti, inde exacte inveniri queant, quatenus scilicet rei natura permittit. Evenire enim solet, ut inventio terminorum intermediorum a quadratura circuli pendeat vel a logarithmis vel alius cujuspiam curvae quadratura. Neque vero termini generales, qui adhuc in usu fuerunt, hisce de quibus loquor, praestant, verum utriusque generis aeque facilis est usus. Pro hac quidem serie $\overset{1.}{1}, \overset{2.}{2}, \overset{3.}{6}, \overset{4.}{24}, \overset{5.}{120}$ etc. terminum generalem nondum inveni, sed pro innumerabilibus aliis similibus, unde id tamen assecutus sum, ut terminos intermedios, quorum exponentes sunt $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. reipsa possim determinare. Terminus autem exponentis $\frac{1}{2}$ aequalis inventus est huic $\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{-1}\cdot \ell - 1\right)}$, seu, quod huic aequale est, lateri quadrati aequalis circulo cujus diameter $= 1$.[7] Ex quo perspicuum est, naturam rei non permittere, ut is numeris exprimatur.[8] Sed ex ratione radii ad peripheriam quasi data terminum cujus exponens est $\frac{1}{2}$ inveni hunc $0{,}8862269$. Qui si multiplicetur per $\frac{3}{2}$ habebitur terminus cujus exponens $\frac{3}{2}$, hic $1{,}3293403$. Porro hic ductus in $\frac{5}{2}$ dabit terminum cujus exponens est $\frac{5}{2}$, et ita porro. Possum etiam dare eos terminos, quorum exponentes sunt $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$ etc. Tum ex his quorum exponentes sunt $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ etc.; sed horum determinatio ab altioribus pendet quadraturis.[9] Ex regula principio data quaesivi quoque terminum exponentis $\frac{1}{2}$, et sumendis 15 factoribus eum inveni $0{,}8932$, qui aliquanto major est vero. Serierum jam, quarum habeo terminos generales, quasdam hic apponam, quo judicare possis Vir Celeberrime, quam late pateat mea methodus. Primum hujus seriei, $\overset{1}{\frac{2}{3}}, \overset{2}{\frac{2\cdot4}{3\cdot5}}, \overset{3}{\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}}, \overset{4}{\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}}$ etc. inventum habeo terminum generalem ex quo terminos exponentium $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ etc. inveni uti sequuntur: significet $p : d$ rationem Peripheriae ad diametrum,[10] quo posito erit $\overset{\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot p}{2\cdot 2d}}, \overset{1\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot3\cdot p}{2\cdot4\cdot2d}}, \overset{2\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot p}{2\cdot4\cdot6\cdot2d}}$ etc. Aliae series, quarum terminos generales reperi, sunt $\frac{1}{2}, \frac{2\cdot4}{3\cdot5}, \frac{3\cdot6\cdot9}{4\cdot7\cdot10}, \frac{4\cdot8\cdot12\cdot16}{5\cdot9\cdot13\cdot17}, \frac{5\cdot10\cdot15\cdot20\cdot25}{6\cdot11\cdot16\cdot21\cdot26}$, etc. et $\frac{1}{2}, \frac{1\cdot2}{3\cdot4}, \frac{1\cdot2\cdot3}{4\cdot5\cdot6}, \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{5\cdot6\cdot7\cdot8}$ etc. nec non $1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{50}{24}, \frac{274}{120}, \frac{1764}{720}$ etc. Harum duae priores, quam teneant legem ex inspectione intellegetur, tertia vero cujus lex minus clare apparet, est summatoria progressionis harmonicae $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc.[11] Ex ejus quem habeo termino generali inveni terminum cujus index est $-\frac{1}{2}$ hunc $-2\,\ell\,2$. Terminus vero cujus exponens $\frac{1}{2}$ est $2 - 2\,\ell\,2$. Is cujus exponens $1\frac{1}{2}$ est $2 + \frac{2}{3} - 2\,\ell\,2$, tum ille cujus exponens $2\frac{1}{2}$, est $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - 2\,\ell\,2$, et ita porro; significat vero $\ell\,2$ logarithmum hyperbolicum binarii qui est $= 0{,}693\,147\,180\,56$. Quae cum ita se habeant, ut termini generales tot quadraturas comprehendere debeant, intelligitur eorum inventionem a Calculo infinitesimali peti oportere. Id ergo hac in re praestiti, ut calculum differentialem et integralem seriebus tractandis accommodaverim. Quem usum novum, etsi ob temporis brevitatem nondum magis excolere potui, spero adhuc ampliorem fore. Tu igitur Vir Celeberrime, qui hanc de seriebus doctrinam jam tot tantisque inventis auxisti, judicabis, quid a novo hoc circa series versandi modo amplius expectandum sit. Maxima vero certe utilitas atque perfectio acquiretur si Ipse, quomodo quam commodissime calculo differentiali hac in re uti conveniat, inquirere dignaberis. Hoc enim adhuc mea methodus laborat incommodo, quod id non invenire possim, quod volo, sed id velle debeam, quod invenio. Vale et fave

Tui observantissimo
Eulero.

Petropoli d. 13 Octobris A. 1729.[12]

R 715 Start of Euler's correspondence with Goldbach
Petersburg, October 13th (24th), 1729
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 44r–45v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 3–7; *Euler-Goldbach* (1965), p. 19–21

2
Goldbach to Euler
Moscow, (November 20th) December 1st, 1729

Vir Clarissime

Ad epistolam tuam, quae mihi gratissima fuit, generatim respondeo me in terminis mediis serierum inveniendis satis habuisse, si quos in numeros rationales cogere non possem eosdem per series infinitas numerorum rationalium utcunque exprimerem,[1] quodsi deinde ostendi possit seriem huiusmodi qua valor termini medii quaesiti continetur vel ad numeros irrationales vel ad logarithmos vel denique ad curvarum quadraturas nondum inventas pertinere, id minime contemnendum puto, nam si alii operam dederunt ut incognitam rationem diametri ad circulum per seriem infinitam determinarent, e contrario summam seriei nondum cognitam per quadraturam circuli explicare licebit, hac tamen notabili differentia quod numeros irrationales ad rationales redigi non posse facile demonstretur,[2] quadraturam vero circuli numeris rationalibus definiri non posse nemo quod sciam evicerit.[3]

Terminum generalem seriei $1+2+6+24+$ &c. quem pro exponente quocunque m facis
$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\cdot\&\text{c.}$$
sic demonstro: Sit x exponens factoris cuiuscunque, erit formula generalis factorum
$$\frac{x^{1-m}\,(x+1)^m}{x+m},$$
et productum omnium factorum a primo usque ad ultimum cuius exponens est x inclusive
$$(x+1)^m : \left(\frac{(x+1)}{1}\frac{(x+2)}{2}\frac{(x+3)}{3}\cdots\frac{(x+m)}{m}\right);$$

exempli gratia si $m = 2$, fiet productum factorum ad datum quemcunque factorem (cuius exponens est x)

$$\frac{2\,(x+1)^2}{(x+1)\,(x+2)} = \frac{2\,(x+1)}{x+2},$$

adeoque productum omnium in infinitum $= 2$. Si $m = 3$, erit simile productum ad datum quemcunque factorem

$$6\,(x+1)^3 : \frac{(x+1)}{1}\frac{(x+2)}{2}\frac{(x+3)}{3}$$

adeoque productum omnium in infinitum $= 6$, et sic porro. Sed observasti sine dubio series Algebraicas omnes quarum termini consueto more per signum $+$ coniungi solent etiam in huiusmodi factores converti posse; erunt enim hic producta factorum quae illic sunt aggregata terminorum.

Fateor me non satis perspectam habere naturam logarithmorum hyperbolicorum; quin et Cl[arissimus] Wolffius ubi de Logarithmis agit, hyperbolicorum mentionem nullam facit.[4]

In reliquarum serierum quas commemoras terminis generalibus tuo more per factores exprimendis non magnam video difficultatem, nam seriei

$$\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10} + \frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 17} + \&c.$$

terminus generalis est

$$\frac{x}{x+1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdot\frac{3x}{3x+1}\cdots\frac{mx}{mx+1}$$

donec m fiat $= x$; quod si nusquam contingat erunt factores numero infiniti; sic terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ fit

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{6}\cdot\&c.$$ [5]

Seriei

$$\frac{2}{3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \&c.$$

terminus generalis est

$$\frac{2\,(2n+3)}{3\,(2n+2)}\cdot\frac{4\,(2n+5)}{5\,(2n+4)}\cdot\frac{6\,(2n+7)}{7\,(2n+6)}\cdot\frac{8\,(2n+9)}{9\,(2n+8)}\cdot\&c.$$

Seriei

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \&c.$$

terminus generalis est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\,(4n+2)}{6\,(n+1)}\cdot\frac{3\,(4n+6)}{10\,(n+2)}\cdot\frac{4\,(4n+10)}{14\,(n+3)}\cdot\frac{5\,(4n+14)}{18\,(n+4)}\cdot\&c.\right)$$

neque adeo difficile est assumere numeros quadraturam circuli exprimentes aliunde iam cognitos et pro iisdem series concinnare quarum terminos medios hi numeri constituant, cuius artificii mihi probe gnarus videris. Ceterum egregias plane iudico methodos quarum specimina mecum communicasti, neque dubito quin iisdem vestigiis progrediens multa nova et praeclara in hoc genere reperturus sis; misi ego quoque nuper ad Cl[arissimum] Bernoullium nostrum theorema quo methodum summandi series ad calculum quem vocant integralem accommodavi.[6]

Vale. 1. Dec. 1729. Moscua.

Tui observantissimus
Christianus Goldbach.

P.S. Notane Tibi est Fermatii observatio omnes numeros huius formulae $2^{2^{x-1}}+1$, nempe 3, 5, 17, &c. esse primos, quam tamen ipse fatebatur se demonstrare non posse et post eum nemo, quod sciam, demonstravit.[7]

R 716 Reply to n° 1
Moscow, (November 20th) December 1st, 1729
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 2–3r
Copy, 4 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 8v–10r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 8–10; *Euler-Goldbach* (1965), p. 23–24

3d
Euler to Goldbach
Petersburg, January 6th (17th), 1730

Ad D. Goldbach den 6ten Jan. 1730.[1]

Vir Celeberrime

Quae nuper de methodo mea progressionum terminos medios ex quadraturis inveniendi scripsi, ea non ope serierum infinitarum terminos illos exprimentium perficio. Maxime enim arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam pertineat quadraturam, pronunciare; quanquam non negem, me primo ex serie terminum generalem progressionis $1+2+6+24+$ etc. exhibente, quam Tibi V[ir] C[eleberrime] perscripsi, conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. Deinde autem id meditatus sum, quomodo alia via eodem pervenire possim, quae non seri[ebus] dignoscendis contineatur. In aliam igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis generalibus denotandarum. Recipio autem formulas integrales in terminos generales, quae, quoties integrari possunt, dant terminum algebraicum, quoties vero integrationem non admittunt termini algebraice determinari nequeunt, simul autem inde cognoscitur a quanam pendeant quadratura.

Formulis autem integralibus sequenti modo utor: Est mihi $\int p\,dx$ terminus generalis seriei cujusdam, quam ex eo construere licet. Designat autem p functionem quandam ipsius x, et constantium, praetereaque literae $\underline{n}$ quae indicat, quotus sit in ordine terminus inveniendus. Jam si $\underline{n}$ in exponentes ingrediatur, perspicuum est fieri posse, ut modo $p\,dx$ integrari possit, modo minus, prout $\underline{n}$ alium atque alium designet numerum. Ex quo alii termini algebraice exprimi poterunt, alii vero a quadraturis pendebunt. Ad terminum vero quempiam ipsum inveniendum, pono in p loco $\underline{n}$ indicem ejus termini et tum quaero integrale ipsius $p\,dx$, quod tanta augeo constante ut facto $x = 0$ totum evanescat. Deinde loco x pono quantitatem quandam constantem, ut formula determinatum habeat valorem, atque hic mihi exprimit terminum quaesitum. Totum hoc negotium exemplo facilius percipietur. Dico hujus progressionis $\frac{2}{3} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5} + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7} +$ etc. terminum generalem esse $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$. Hac enim formula integrata atque loco x scripto 1, invenietur quilibet terminus progressionis. Sit v[erbi] g[ratia] $n = 1$, ut terminus primus inveniatur, habebitur

$$\tfrac{5}{2}\int dx\ (1-x)\sqrt{x} = \tfrac{5}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx - \tfrac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx = \tfrac{5}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}};$$

ponatur $x = 1$, invenietur terminus primus $\frac{2}{3}$; sit $n = 2$, abibit ea formula in

$$\tfrac{7}{2}\int dx\ (1-x)^2\sqrt{x} = \tfrac{7}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx - 7\int x^{\frac{3}{2}}dx + \tfrac{7}{2}\int x^{\frac{5}{2}}dx = \tfrac{7}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}}.$$

Fiat $x = 1$, obtinebitur terminus secundus $\frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$. Simili modo omnes termini, quorum indices sunt numeri integri, inveniuntur iidem, qui in ipsa serie comprehenduntur, atque idcirco hujus progressionis $\frac{2}{3} + \frac{2\cdot4}{3\cdot5} + \frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}$ etc. merito $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$ terminum generalem appellare licet. Atque hoc eo magis, quod etiam omnes termini medii ex eo inveniri, et per quadraturas curvarum construi possint. Unde eorum saltem determinatus valor cognoscitur. Si requiratur terminus ordine $\frac{1}{2}$, ponatur $n = \frac{1}{2}$ et habetur $2\int dx\sqrt{x-xx}$. Hoc exprimit segmentum circuli diametri 1, cujus sagitta est x; si fiat $x = 1$, abibit segmentum in totum circulum, et propterea terminus quaesitus aequatur areae circuli cujus diameter est 1. Hujusmodi terminos generales omnium earum progressionum, quarum mentionem feci, aliarumque infinitarum similium dare possum. Quousque autem haec methodus pateat ut possis cognoscere, generaliora hic adjungo. Fundamenti loco mihi fuit haec progressio $1 + 1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 +$ etc. cujus terminus generalis est $\int dx\ (-\ell\,x)^n$. Hoc nimirum integrale, facto $x = 1$, dat terminum ordine $\underline{n}$simum. Denotat autem $\ell\,x$ logarithmum hyperbolicum ipsius x. Antequam vero ostendam, quomodo haec expressio progressioni satisfaciat, explicabo quod Te non satis perspicere innuis, quo differant logarithmi hyperbolici ab ordinariis. Si constituatur progressio geometrica

$$A.\quad 1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4,\quad a^5\quad \text{etc.}$$

eique subscribatur arithmetica

$B.\quad b,\quad b+c,\quad b+2c,\quad b+3c,\quad b+4c,\quad b+5c,$

habebit quilibet terminus progressionis A sive eorum ipsorum qui adsunt, sive interpolatorum, respondentem in progressione B. Qui termini eorum vocantur logarithmi. Jam cum infinitae progressiones arithmeticae subscribi possint, perspicuum est infinita dari systemata logarithmorum. In logarithmorum vulgarium systemate, quorum tabulae a Briggio et Vlacquio computatae[2] habentur, loco seriei A hanc posuerunt 1, 10, 100, 1000, etc. et loco arithmeticae B sumserunt hanc, 0, 1, 2, 3 etc., ita ut logarithmus unitatis sit 0, denarii 1, etc. Ex hoc intelligitur, ad systema quoddam logarithmorum condendum, duorum quorundam numerorum logarithmos pro lubitu assumi posse, e quibus deinde omnium numerorum logarithmi inveniantur. Ita in systemate logarithmorum hyperbolicorum etiam pro logarithmo unitatis assumitur 0 et pro numero qui unitatem quantitate infinite parva excedit $1 + dz$ assumitur logarithmus ipsum dz, sive series A haec accipitur

$1,\quad 1+dz,\quad (1+dz)^2\qquad \text{etc.},$

pro serie vero B haec

$0,\qquad dz,\qquad 2\,dz,\qquad 3\,dz\qquad \text{etc.}$

Logarithmi hinc deducti sunt ii qui vocantur hyperbolici, eo quod iidem sint atque illi qui ex quadratura hyperbolae eruuntur; vocantur quoque Neperiani quia Neperus hujusmodi tabulas supputavit.[3] Quae nunc in Analyticis de logarithmorum differentiatione et integratione differentialium logarithmicalium traduntur ea nonnisi ad logarithmos hyperbolicos pertinent. Et hanc ob rem in termino generali $\int dx\ (-\ell\, x)^n$, $\ell\, x$ designat logarithmum hyperbolicum ipsius x. Ut autem appareat, quomodo haec expressio quemvis terminum praebeat, sit $n = 3$, erit

$$\int dx\ (-\ell\, x)^n = -\ x\ (\ell\, x)^3 + 3x\ (\ell\, x)^2 - 6x\,\ell\, x + 6x;$$

ponatur $x = 1$, evanescent omnes termini ob $\ell\, 1 = 0$ praeter ultimum, qui dat 6, terminum tertium seriei. Similiter omnes termini indices integros habentes ex eo eruuntur; sed qui valor sit eorum, quorum indices sunt numeri fracti, minus clare apparet.

R 717 Draft for nº 3
Petersburg, January 6th (17th), 1730
Autograph draft, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 6–7v

3

Euler to Goldbach

Petersburg, January 8th (19th), 1730

Vir Ce[le]berrime

Quae nuper de methodo mea progressionum terminos medios ex quadraturis inveniendi scripsi,[1] ea non ope serierum infinitarum terminos illos exprimentium perficio; maxime enim arduum esse arbitror de quaque serie infinita, ad quam pertineat quadraturam, pronunciare; quanquam non negem, me primo ex serie terminum generalem progressionis $1+2+6+24+$ etc. exhibente, quam Tibi Vir Celeberrime perscripsi, conclusisse terminum ordine $\frac{1}{2}$ a quadratura circuli pendere. Deinde autem eodem modo circa alias progressiones versari diffidens id meditatus sum, quomodo alia via eodem pervenire possem, quae non seriis[!] dignoscendis contineatur. In aliam igitur atque novam incidi rationem progressionum terminis generalibus denotandarum. Ea in hoc consistit, ut formulas integrales in terminos generales recipiam. Ad hoc autem adductus sum considerans ad ea, quae a communi algebra perfici non possent, analysin infinitorum plerunque facilem praebere aditum. Sed termini hujusmodi generales toties consuetam induunt formam, quoties formulae illae integrales algebraice exprimi possunt, quibus in casibus progressionis omnes termini sive exponentes sint numeri fracti sive integri algebraice exhibentur. Quando vero illae formulae integrationem universaliter non admittunt, omnes termini algebraice exponi nequeunt, sed quidam a quadraturis curvarum pendebunt, quae inde cognoscuntur. Cum igitur in nonnullis seriebus observassem terminos quosdam medios a quadratura circuli pendere, in earum terminis generalibus necessario formulae integrales inesse debere visae sunt. Sequenti autem modo hujusmod[i] formulis integralibus utor. Quando dico seriei cujuspiam terminum generalem esse $\int P\,dx$, intelligi oportet ex eo terminum quemcunque indicis $\underline{n}$ inveniri posse. Indicat vero hic P functionem quandam ex $\underline{x}$ et constantibus quantitatibus una cum $\underline{n}$ indice compositam; refero scilicet $\underline{n}$ ad constantes, ut unica variabilis x adsit. Jam $\int P\,dx$ hoc modo dat terminum $\underline{n}$simum. Integretur $\int P\,dx$ vel reipsa, si fieri potest, vel ad quadraturam curvae convenientis referatur; tanta autem constans adjiciatur ut totum evanescat posito $x=0$. Deinde ponatur $x=$ constanti cuidam quantitati (in sequentibus semper pono $x=1$); habebitur functio quaedam quantitatum constantium et indicis $\underline{n}$, quae erit ipse terminus n^{mus}.[2] Fieri nunc potest, praecipue si $\underline{n}$ in exponentes ingrediatur, ut positis loco $\underline{n}$ certis numeris, formula integrari possit, secus vero si alii substituantur. Quo fit ut alii termini algebraice seu in numeris exprimi queant, alii a quadraturis pendeant. Ut terminum generalem reperi hunc[3] $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\,(1-x)^n\sqrt{x}$ progressionis istius $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}+$etc.: Qui quomodo congruat, ut appareat sit $n=2$, habebitur

$$\tfrac{7}{2}\int dx\,(1-x)^2\sqrt{x}=\tfrac{7}{3}x^{\frac{3}{2}}-\tfrac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{7}{2}};$$

ponatur $x=1$, orietur terminus secundus $=\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1=\frac{8}{15}$. Idem hic terminus generalis omnes terminos medios suppeditat, ut sit $n=\frac{1}{2}$, erit $2\int dx\sqrt{x-xx}$ terminus quaesitus, sed $2\int dx\sqrt{x-xx}$ exhibet segmentum circuli, cujus sagitta[4] est x, radio existente $\frac{1}{2}$ seu diametro 1. Ponatur $x=1$, erit terminus ordine $\frac{1}{2}$ aequalis areae circuli, cujus diameter $=1$. Similiter alii termini medii determinantur. Hujusmodi terminos generales omnium earum progressionum quarum mentionem feci, aliarumque infinitarum similium dare possum. Quousque autem haec methodus pateat ut possis cognoscere Vir Celeberrime, generaliora hic adjungo. Fundamenti loco mihi fere fuit haec progressio, $1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+$etc., cujus terminus generalis mihi inventus est[5] $\int dx\ (-\ell\, x)^n$. Nimirum sumto integrali positoque $x=1$, prodit terminus cujus index est $\frac{1}{2}$. Denotat autem $\ell\, x$ logarithmum hyperbolicum ipsius x. Antequam vero ostendam, quomodo haec formula progressioni satisfaciat, explicabo quod Te non satis perspicere innuis, quo differant logarithmi hyperbolici ab ordinariis. Si constituatur progressio geometrica

$$A. \quad 1, \quad a, \quad a^2, \quad a^3, \quad a^4, \quad a^5 \quad \text{etc.}$$

eique subscribatur arithmetica

$$B. \quad b, \quad b+c, \quad b+2c, \quad b+3c, \quad b+4c, \quad b+5c \quad \text{etc.}$$

habebit quilibet terminus progressionis A sive eorum qui adsunt, sive interpolatorum respondentem in progressione B. Hi termini progressionis B respondentium terminorum in progressione A vocantur logarithmi. Jam cum innumerabiles progressiones Arithmeticae subscribi possint, perspicuum est innumerabilia dari systemata logarithmorum. In vulgari systemate, quorum tabulae a Briggio et Vlacquio computatae habentur,[6] loco seriei geometricae A posuerunt 1, 10, 100, 1000, etc. et loco arithmeticae sumserunt hanc 0, 1, 2, 3, 4 etc., ita ut logarithmus unitatis sit 0, denarii 1 etc. Ex hoc intelligitur, ad systema quodpiam logarithmorum condendum duorum quorundam numerorum logarithmos pro lubitu accipi posse; e quibus deinde omnium numerorum logarithmi determinantur. Ita in systemate logarithmorum hyperbolicorum etiam pro logarithmo unitatis ponitur 0, et pro numero, qui unitatem quantitate infinite parva superat ut $1+dz$, assumitur logarithmus hoc ipsum dz. Vel series A est

$$1, \quad (1+dz), \quad (1+dz)^2, \quad (1+dz)^3,$$

et series B logarithmos contine[n]s est

$$0, \quad dz, \quad 2\,dz, \quad 3\,dz \quad \text{etc.}$$

Logarithmi ex hac positione deducti sunt ii, qui vocantur hyperbolici, eo quod iidem sint, ac illi qui ex quadratura hyperbolae[7] eruuntur. In hoc systemate est logarithmus binarii $0,693\,147\,180\,559\,945$ et logarithmus denarii est $2,302\,585\,092\,994\,045$ ut ipse calculo aliquoties repetito inveni. Sin autem acciderit, ut logarithmis hyperbolicis uti oporteat, non quidem necesse est tabulam eorum ad manus habere, sed Vlacquiani in usum vocari possunt dummodo singuli per $2,302\,585$ etc. multiplicentur. Semper autem, quando in calculo infinitesimali de logarithmis sermo est, hyperbolici intelliguntur. Et hanc ob rem in termino generali $\int dx\ (-\ell\, x)^n \quad \ell$ designat logarithmum hyperbolicum. Ut nunc appareat, quomodo haec formula quemvis terminum praebeat, sit $n = 3$, habebitur

$$\int dx\ (-\ell\, x)^3 = -\ x\,(\ell\, x)^3 + 3x\,(\ell\, x)^2 - 6x\,\ell\, x + 6x,$$

constantis additione opus non est; ponatur ergo $x = 1$, proveniet terminus tertius $= 6$. Omnes enim termini in quibus est $\ell\, x$ evanescent, quia $\ell\, 1 = 0$. Simili modo omnes termini numeros integros habentes eruuntur. Sed qui valor sit eorum, quorum indices sunt numeri fracti, id difficilius eruitur.[8] Deducit enim ad quadraturas curvarum transcendentium, ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ determinatur a quadratura curvae ad quam est $yy+\ell\, x = 0$, cum tamen eundem ante a quadratura circuli pendere deprehenderim. Verumtamen alia mihi insuper est methodus eosdem terminos ad curvarum algebraicarum quadraturas reducendi, quae hoc theoremate continetur: terminus cujus index est $p : q$, aequalis est[9]

$$\sqrt[q]{(1 \cdot 2 \cdot 3\ \cdots\ p)\left(\left[\tfrac{2p}{q}+1\right]\left[\tfrac{3p}{q}+1\right]\left[\tfrac{4p}{q}+1\right]\cdots\left[\tfrac{qp}{q}+1\right]\right)} \cdot$$
$$\cdot\left(\left[\int dx\ (x-xx)^{\frac{p}{q}}\right]\left[\int dx\ \left(x^2-x^3\right)^{\frac{p}{q}}\right]\cdots\left[\int dx\ \left(x^{q-1}-x^q\right)^{\frac{p}{q}}\right]\right)$$

quae expressio aequivalet huic $\int dx\ (-\ell\, x)^{\frac{p}{q}}$. Ponatur exempli gratia $p = 1$ et $q = 2$ ut terminus ordine $\frac{1}{2}$ inveniatur, abibit forma generalis in $\sqrt[2]{1 \cdot 2 \int dx\sqrt{x-xx}}$, sed jam ostensum est $2\int dx\sqrt{x-xx}$ dare aream circuli diametri 1, quare in serie $1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ [+ etc.] terminus cujus index est $\frac{1}{2}$ aequalis est radici quadratae ex circulo cujus diameter est 1. Cum igitur $\int dx\ (-\ell\, x)^n$ sit terminus generalis seu terminus ordine $\underline{n}$ hujus seriei, habeo $\int dx\ (-\ell\, x)^n = 1 \cdot 2 \cdot 3\ \cdots\ n$. Quod in serierum hanc includentium terminis generalibus inveniendis magni est momenti. Nec minus hoc

$$m \cdot \overline{m+1} \cdot \overline{m+2}\ \ \cdots\ \ \overline{m+n} = \frac{\int dx\ (-\ell\, x)^{m+n}}{\int dx\ (-\ell\, x)^{m-1}}.$$

Maxime universale et latissime patens est hoc theorema

$$(f+g)\,(f+2g)\,(f+3g)\ \cdots\ (f+ng) = \frac{g^{n+1}\int dx\ (-\ell\, x)^n}{(f+(n+1)\ g)\int x^{\frac{f}{g}}dx\ (1-x)^n}.$$

Unde facile fluit hoc

$$\frac{(f+g)\,(f+2g)\cdots(f+ng)}{(h+k)\,(h+2k)\cdots(h+nk)} = \frac{g^{n+1}\,(h+(n+1)\ k)\int x^{\frac{h}{k}}dx\ (1-x)^n}{k^{n+1}\,(f+(n+1)\ g)\int x^{\frac{f}{g}}dx\ (1-x)^n}.$$

Ex hoc Theoremate facile est invenire omnium hujusmodi serierum, quarum termini sunt facta, in quae ingrediuntur quantitates in Arithmetica progressione progredientes, terminos generales. Ut proposita sit haec progressio de qua nuper mentionem feci,[10] $\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10} +$ etc. Hujus terminus ordine n est

$$\frac{n \cdot 2n \cdot 3n\ \cdots\ nn}{(n+1)\,(2n+1)\,(3n+1)\ \cdots\ (nn+1)}.$$

Hunc comparo cum

$$\frac{(f+g)\,(f+2g)\,(f+3g)\,\cdots\,(f+ng)}{(h+k)\,(h+2k)\,(h+3k)\,\cdots\,(h+nk)},$$

quae formula ut in illam transmutetur oportet sit $f=0$, $g=n$ et $h=1$, $k=n$. His valoribus substitutis prodit

$$\frac{n\cdot 2n\cdot 3n\,\cdots\,nn}{(n+1)\,(2n+1)\,(3n+1)\,\cdots\,(nn+1)}=\frac{(1+n+nn)\int x^{\frac{1}{n}}dx\;(1-x)^n}{(nn+n)\int dx\;(1-x)^n}.$$

Id quod est terminus generalis progressionis propositae. Est autem $dx\,(1-x)^n$ integrabile, integrale enim est $C-\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. Constans C debet esse $\dfrac{1}{n+1}$ ut posito $x=0$ totum evanescat. Ponatur nunc $x=1$ ut principio monui, prodibit C seu $\dfrac{1}{n+1}$; est igitur $(nn+n)\int dx\;(1-x)^n=n$, et ideo terminus generalis seriei propositae hanc habet formam

$$\left(\frac{1+n+nn}{n}\right)\int x^{\frac{1}{n}}dx\;(1-x)^n.$$

Sit $n=3$, ut terminus tertius $\frac{3\cdot6\cdot9}{4\cdot7\cdot10}$ prodeat, habebitur

$$\tfrac{13}{3}\int x^{\frac{1}{3}}dx\;(1-x)^3=\tfrac{13}{4}x^{\frac{4}{3}}-\tfrac{39}{7}x^{[\frac{7}{3}]}+\tfrac{39}{10}x^{\frac{10}{3}}-x^{\frac{13}{3}};$$

ponatur $x=1$, habebitur $\frac{13}{4}-\frac{39}{7}+\frac{39}{10}-1=\frac{162}{280}$ = termino tertio. Quaero terminum ordine $\frac{1}{2}$; fiat ergo $n=\frac{1}{2}$, habebitur

$$\tfrac{7}{2}\int xx\,dx\;(1-x)^{\frac{1}{2}}=C-\tfrac{7}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}+\tfrac{14}{5}\,(1-x)^{\frac{5}{2}}-(1-x)^{\frac{7}{2}}.$$

Ergo C est $=\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1$. Ponatur $x=1$, restabit solum C seu $\frac{7}{3}-\frac{14}{5}+1=\frac{8}{15}$. Algebraice ergo hic terminus ordine $\frac{1}{2}$ dari potest nec non ii, quorum indices sunt $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. omnes numeris exprimi possunt; qui autem quanti sint, alio modo vix fortasse inveniri posset. Hic autem observo hunc terminum ordine $\frac{1}{2}$ aequalem esse termino ordine 2, et generaliter terminus ordine $\frac{1}{n}$ aequalis est termino ordine n. Haec fere constituunt unum genus progressionum, ad quod mea methodus deduxit; multa quoque ejus ope in seriebus summandis detexi, et praecipue terminis summatoriis inveniendis omnium earum progressionum, in quarum terminis generalibus exponens vel index in denominatorem ingreditur, ut in progressione harmonica. Sed de his alio tempore, si placuerit, scripturus sum.

Nihil prorsus invenire potui, quod ad Fermatianam observationem[11] spectaret. Sed nondum prorsus persuasus sum, quomodo sola inductione id inferre legitime potuerit, cum certus sim ipsum numeris in formula 2^{2^x} loco x substituendis nec ad senarium quidem pervenisse.

Haec igitur benevole accipias enixe rogo, et favere pergas
Vir Celeberrime
Tibi obstrictissimo
Eulero

Petropoli d. 8 Jan.
1730

R 717 Reply to n° 2
Petersburg, January 8th (19th), 1730
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 69–72r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 11–18; *Euler-Goldbach* (1965), p. 25–28

4
Goldbach to Euler
Moscow, May (11th) 22nd, 1730

Eulero Moscua Petropolin 22. *Maii* 1730.

Egregia teque auctore digna judico quae secundis litteris[1] mecum de terminis generalibus serierum communicasti; hoc tantum in methodo tua cavendum mihi videtur, ne assumta integralis $\int P\,dx$ utrovis modo, hoc est, tam posita $x = 0$, quam posita $x = 1$ in nihilum abeat. Deinde sponte moneo, terminum generalem seriei $\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10} + \&c.$ quem pro exponentibus non integris dederam non quadrare,[2] fatendum tamen est terminum generalem eiusmodi $\dfrac{2n+3}{2} \int dx\ (1-x)^n \sqrt{x}$, ut intelligibilis fiat, in seriem infinitam consueto more resolvi debere, cuius singuli termini integrati tandem exhibebunt terminum generalem indefinitum, quem etiam sine usu Arithmeticae differentialis infinitis modis produci posse constat.

Quod ad Fermatii observationem attinet,[3] tecum sentio, non credibile videri, eum ad sex terminos illius suae seriei exprimendos progressum fuisse, neque tanto labore opus est ad verisimilitudinem illius observationis, facile enim experimur divisore quocunque accepto residua ex terminis ordine quo sequuntur divisis in circulum redire; sit verbi gr[atia] terminus $2^{2^x} + 1$, ubi $x = 2$, divisus per 7, relinquit 3, ergo terminus sequens relinquit idem residuum quod relinquitur ex divisione numeri $(3-1)^2 + 1$ per 7, nempe residuum 5, terminus hunc sequens idem residuum dabit quod relinquitur ex divisione numeri $(5-1)^2+1$ per 7 divisi, nempe 3, ergo omnia residua possibilia omnium terminorum seriei divisorum per 7 (ubi scilicet quotiens sit > 0) sunt vel 3 vel 5; simili ratione facile apparet[4] nullum terminum seriei Fermatianae dividi posse per numerum < 100; sed quidquid sit de Fermatii observatione, hoc certum est, omnem numerum $2^p + 1$, ubi p non sit $=$ alicui numero 2^n (in quo n est numerus integer affirmativus) esse non-primum, cuius quidem divisores facillime inveniuntur. Sic numeri $2^{84} + 1$ divisor est 17, numeri $2^{1736} + 1$ divisor est 257, &c. Vale.

R 718 Reply to n° 3
Moscow, May (11th) 22nd, 1730
Copy of a lost original, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 20v–21v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 19–20; *Euler-Goldbach* (1965), p. 29–30

5

Euler to Goldbach

Petersburg, June 4th (15th), 1730

Vir Celeberrime

Postquam ultimas ad Te misissem literas, de Theoremate Fermatiano[1] diligentius cogitare coepi, idque non tam levi nixum fundamento, quam primum putaveram, perspexi. Quoties enim in $2^n + 1$ non est n numerus ex progressione geometrica 1, 2, 4, 8, etc., divisores semper, ut Ipse Vir Celeberrime in postremis literis monuisti,[2] assignari possunt. Nam si n est numerus impar, binomium $2^n +$ [1] vel etiam generalius $a^n + b^n$ poterit dividi per $a + b$. Si praeterea fuerit n multiplum quodpiam numeri imparis, uti si $n = ki$ denotante i numerum quemcunque imparem; divisor erit a^k+b^k. Quam ob rem, cum solae binarii potentiae hanc habeant proprietatem ut per nullum numerum imparem dividi possint, praeter unitatem, sequitur tum solum binomii $a^n + b^n$ ex hoc fonte divisorem assignari non posse, quando n est potentia quaedam binarii. Hoc quidem multum ad evincendam Theorematis veritatem sed tamen non est prorsus sufficiens. Quanquam enim pro n assumitur dignitas quaedam binarii, tamen ex eo inferre non licet $a^n + b^n$ nullos habere divisores; ut si a sit 4, et b 3, etiamsi ponatur $n = 2$, potest $16 + 9$ dividi per 5. Conducit ergo investigare casus, quibus nihilominus divisores locum habent. Perspicuum est primum, si a et b fuerint numeri inter se compositi ut cf et df, binomium $c^n f^n + d^n f^n$ habere divisorem f^n. Deinde si a et b utrumque fuerit numerus impar, dividi semper poterit per 2. Denique ut hos casus universalius evolvamus, sit $a = mc + \alpha$ et $b = mc + \beta$, erit

$$a^n = \alpha^n + n\alpha^{n-1}mc + \frac{n \cdot n-1}{2}\alpha^{n-2}m^2c^2 + \text{etc.}$$

et

$$b^n = \beta^n + n\beta^{n-1}mc + \frac{n \cdot n-1}{2}\beta^{n-2}m^2c^2 + \text{etc.}$$

ergo

$$a^n + b^n = (\alpha^n + \beta^n) + nmc\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) + \frac{n \cdot n-1}{2}m^2c^2\left(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}\right) + \text{etc.}$$

Ex hoc apparet singulos progressionis terminos praeter primum dividi posse per mc. Quoties igitur $\alpha^n + \beta^n$ et mc communem habent divisorem, per eundem et

a^n+b^n dividi poterit. In his igitur aliisque, si qui forte hic non continentur, casibus, quibus a^n+b^n non fit numerus primus, si non comprehenditur casus Fermatii quo $a=2$ et $b=1$, tuto concludi potest 2^n+1 semper esse numerum primum. Sed forte et alia hujusmodi Theoremata invenire licet, ut 3^n+2^n, si n fuerit dignitas binarii semper numeros primos mihi dare videtur.[3] Caeterum Theorema hoc non tam saepe, si unquam fallit, mihi fallere videtur, quam quae de differentiis potentiarum enunciant: cujusmodi est hoc 2^n-1 semper dare numerum primum, si n sit numerus primus;[4] nam si ponatur $n=11$, divisorem habet $2^{11}-1$ vel 2047, 23, similiter 47 metitur $2^{23}-1$ et 223 hoc $2^{37}-1$. Occurrit mihi hic terminus generalis, quem aliquando inveni, vel functio quaedam ipsius x, quae hanc habet proprietatem, ut quicunque numerus loco x ponatur, ea det numerum divisorum ejusdem numeri; in divisoribus vero habeo et unitatem et numerum ipsum,[5] ita ut numeri primi duos tantum habeant divisores. Est itaque haec mea formula terminus generalis huius seriei,

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 2, & 3, & 2, & 4, & 2, & 4, & 3, & 4, & 2, & 6 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \end{matrix}$$

cujus quilibet terminus indicat, quot index subscriptus habeat divisores, ut 6 habet quatuor 1, 2, 3, 6. Significet nunc x numerum quemcunque, erit numerus divisorum ipsius x hic

$$\frac{3+(-1)^x+1+(-1)^A+1+(-1)^B+1+(-1)^C+1+(-1)^D+\text{etc.}}{2}.$$

Designat vero, A terminum generalem seriei 1, 1, 4, 7, 13, 22, etc. cujus quivis terminus summa est duorum praecedentium et 2; B terminum generalem seriei 1, 1, 1, 6, 11, 21, 41 cujus quilibet terminus est summa trium praecedentium + 3; C terminum generalem seriei 1, 1, 1, 1, 8, 15, 29, 57, etc. cujus quivis terminus est summa quatuor praecedentium + 4. Similis ratio est reliquarum literarum D, E, etc.[6] Quaeratur hinc numerus divisorum senarii, erit $x=6$, $A=22$, $B=21$, $C=15$, $D=10$, $E=1$, $F=1$, et reliquae omnes erunt 1. His positis erit numerus divisorum senarii

$$=\frac{3+(-1)^6+1+(-1)^{22}+1+(-1)^{21}+1+(-1)^{15}+1+(-1)^{10}+1+(-1)^1+1+(-1)^1\,\text{etc.}}{2}.$$

Quia autem -1 elevatum ad numerum parem dat $+1$ et ad numerum imparem -1, erit numerus divisorum

$$=\frac{3+1+1+1+1-1+1-1+1+1+1-1+1-1+1-1}{2}=4,$$

qui sunt 1, 2, 3, 6. Si igitur quis potuerit formula illa posita = 2, eruere quid sit x, haberetur terminus generalis pro serie numerorum primorum; sed isthuc pertingere non spero. Incidi nuper Opera Fermatii legens in aliud quoddam non inelegans theorema, Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum seu semper inveniri posse quatuor numeros quadratos, quorum summa aequalis sit numero dato.[7] Ut $7 = 1 + 1 + 1 + 4$; sed tria quadrata nunquam invenientur, quorum summa sit 7. Ad hoc Theorema demonstrandum requiritur, ut generaliter quatuor quadrata inveniantur z^2, y^2, x^2, v^2 quorum summa aequalis sit summae quinque datorum $1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.[8] Alia ibi habentur Theoremata de resolution[e] cujusvis numeri in trigonales, pentagonales, cubos, etc., quorum demonstratio magnum afferret incrementum Analysi. Ut pagina haec impleatur transcribam quadraturam quandam circuli, quam ex prop[ositione] aliqua Gregorii a St. Vincentio elicui, cujusque falsitatem nemo adhuc ostendit. Ea haec est si peripheria sit p et diameter d, erit $\dfrac{p}{d} = \dfrac{3\,(1+A)\sqrt{3}}{2\,(2A-1)}$; est vero $A = \left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{\ell\,11\,:\,5}{\ell\,203\,:\,53}}$, ubi $\ell\,11 : 5$ denotat logarithmum fractionis $\frac{11}{5}$ et $\ell\,203 : 53$ logarith[mum] hujus $\frac{203}{53}$. Haec expressio prope ad $\frac{22}{7}$ accedit, et si vera esset, magnum sane esset inventum.[9] Vale et favere perge

Vir Celeberrime

Tui observantissimo Eulero

Petropoli die 4. Junii
1730.

R 719 Sequel to n° 3
Petersburg, June 4th (15th), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 86r–87r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 21–24; *Euler-Goldbach* (1965), p. 30–32

6
Goldbach to Euler
Moscow, June 15th / 26th, 1730

Vir Clarissime

Etiamsi vera non esset Fermatii propositio, tamen laude digna mihi videtur propterea quod, cum eius demonstrationem investigamus, in alia incidimus theoremata, quorum veritas solidis argumentis evinci potest, quale est illud quod de numero $a^n + b^n$ divisibili per $a + b$, si n fuerit numerus impar, observasti.

Praeterea (1.) Si a, b, n sint numeri integri, et $\neq$ significet aequationem impossibilem, posito[1] $\dfrac{a \pm n}{n^2+1} \neq b$, sequitur $a^2 + 1$ esse numerum primum; id quod demonstrari potest. Sufficit autem pro n seligere numeros qui $n^2 + 1$ faciunt primos, videlicet 2, 4, 6, 10, 14, &c. (sunt enim $2^2 + 1$, $4^2 + 1$, $6^2 + 1$, &c. numeri primi): sic verbi gr[atia] quoniam illico patet numeros $\dfrac{20 \pm 2}{5}$ et $\dfrac{20 \pm 4}{17}$ non esse integros, sequitur numerum $20^2 + 1 = 401$ esse primum.

(2.) Verisimile est divisorem minimum (unitatem et numerum ipsum hic pro divisoribus non habeo) cuiuscunque numeri $a^{2^x}+1$ esse huius formae $n^{2^x}+1$, sed hoc quia non dum satis examinavi affirmare non possum, nisi de unico casu ubi $x=1$, qui facile demonstratur.[2] Ceterum si verum esset quod verisimile dixi ex eo demonstraretur theorema Fermatianum, nam verbi gr[atia] posito $a=2$, n non posset sumi $=1$ (quoniam $n^{2^x}+1$ fieret numerus par atque adeo dividere non posset numerum imparem) neque $n=2$ (quoniam divisor $n^{2^x}+1$ fieret $=$ ipsi dividendo); ergo $2^{2^x}+1$ non haberet ullum divisorem.

Utrum numeri (3^n+2^n) (ubi n significat dignitatem aliquam binarii) primi sint non dixerim;[3] si coniectare libet, fortasse etiam $(2\cdot 3)^{2^n}+1$ sunt numeri primi, fortasse et $(2p)^{2^x}+1$, si p est primus;[4] sed quis unquam affirmavit numeros (2^n-1) esse primos si n sit primus?[5]

Quae de termino generali numerorum primorum inveniendo ex formula numerum divisorum dati cuiusvis numeri exprimente disseris ingeniose meditata agnosco, et si in usum deduci, ut ipse animadvertis, vix possint.

Fermatii et Gregorii a S. Vincentio opera me non legisse doleo. Quod ex Fermatio refers theorema: <u>Numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum</u>, demonstratum videre cupio, facile illinc infertur <u>Numerum quemcunque esse summam tot quadratorum $(3n+1)$, quot numerus pro arbitrio sumtus n continet unitates</u>.[6] Sunt mihi complura eiusmodi theoremata in promtu quorum demonstrationes neque exercitatissimus Mathematicus, nisi forte fortuna, inveniat, et si sua natura facillimae sint; verbi gr[atia] nullum numerum triangularem si ei addatur 4 habere radicem rationalem octavae vel decimae potestatis,[7] seu quod idem est, positis a et n numeris integris fore

$$\frac{n^2+n+8}{2} \neq a^{9\pm 1}.$$

De quadratura circuli per logarithmos numerorum quos in litteris tuis commemoras expressa vehementer dubito et si ad verum prope accedat.[8] Sunt etiam numeri surdi simplices qui parum a vero aberrant, ut si data diametro $=1$ peripheriam dicamus $3+\frac{\sqrt{2}}{10}$, hic numerus ne quidem $\frac{2}{100\,000}$ a vero deficit,[9] ita ut non putem ullam methodum excogitatam esse quae rationem diametri ad peripheriam terminis tam prope veris geometrice definiat quam haec ipsa; quid enim facilius est quam diagonalem quadrati circumscripti dividere in partes decem et unam decimam addere ad triplum diametri? Vale et fave

Tuo

Christiano Goldbach.

D[atum] Moscua $\frac{15}{26}$ Jun. 1730.

R 720 Reply to n° 5
Moscow, June 15th / 26th, 1730
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 8–9r
Copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 26r–27r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 25–27; *Euler-Goldbach* (1965), p. 33

7
Euler to Goldbach
Petersburg, June 25th (July 6th), 1730

Vir Celeberrime

Theorematis Fermatiani[1] veritas quotidie mihi magis elucere videtur; sed tamen demonstrationem ejus nondum sum nactus. Sunt mihi autem nonnullae ejus inventae proprietates, quae fortasse ad demonstrationem conficiendam utiles esse possent. Fiat series, cujus terminus generalis est $2^{2^{x-1}}+1$, sequens 3, 5, 17, 257, etc., cujus singuli termini secundum Fermatium sunt numeri primi. Demonstrare autem possum, nullum terminum per quemquam praecedentium dividi posse, et praeterea si quis terminus haberet divisorem, sequentium nullum per eundem dividi posse, sed semper residuum fore 2. Certum igitur ex hoc est, omnes ejus progressionis terminos inter se esse primos, vel duos reperiri non posse, qui communem habeant divisorem.

Quod $aa+1$ sit numerus primus, quoties in[2] $\dfrac{a \pm n}{nn+1}$ nullus numerus inveniri potest, qui pro n substitutus fractionem mutet in numerum integrum, demonstrare etiam possum hoc modo: Investigo casus, quibus $aa+b$ (pono autem $b < 2a+1$) fit numerus primus. Fiet hoc si nullos habet divisores; si haberet autem divisores ii esse[nt] hujus formae, $a+m$ et $a-n$; quia igitur $aa+b=(a+m)\,(a-n)$ erit[3] $n=\dfrac{ma-b}{a+m}=m-\dfrac{m^2-b}{a+m}=a-\dfrac{aa-b}{a+m}$. Quoties ergo nullus numerus inveniri potest qui loco m substitutus vel $\dfrac{ma-b}{a+m}$ vel $\dfrac{mm+b}{a+m}$ vel $\dfrac{aa+b}{a+m}$ faciat numerum integrum, toties $aa+b$ non habet divisores, et propterea est numerus primus.

Dicis deinde Vir Celeberrime divisorem minimum ipsius $aa+1$, si quos habet divisores, esse hujus formae $nn+1$.[4] Sed puto unitatem pro divisore minimo haberi oportere; nam hoc nisi esset, theorema verum non esset. Si enim est $a=34$, erit $aa+1=1157$ cujus minimus divisor est 13; si $a=76$ erit $aa+1=5777$ cujus minimus divisor est 53. Quanquam autem hi divisores minimi non quidem unitate excedant quadratum, tamen sunt fortasse omnes summae duorum quadratorum.[5]

An $6^{2^x}+1$ sit numerus primus neque affirmare neque negare possum. De generali formula vero $(2p)^{2^x}+1$ nego etiam si p sit numerus primus:[6] nam si $p=5$, $x=2$, habebitur 10001 qui non est primus sed divisorem habet 73. Neque etiam, quod suspicatus eram, $3^{2^x}+2^{2^x}$ est numerus primus; si enim $x=3$, dividi potest 3^8+2^8 per 17.[7]

Fateor me nullum librum nominare posse, in quo invenerim 2^n-1 esse numerum primum, si n est numerus primus. Tamen bene memini, in inveniendis numeris perfectis hoc theorema vulgo in usum vocari; requiritur enim ad eos inveniendos, ut omnes habeantur casus quibus 2^n-1 est numerus primus.[8]

Theorema, quod quicunque numerus sit summa quatuor quadratorum, demonstrare non possum, neque ipse Fermatius demonstrare se posse affirmat. Tamen rem ad hanc quaestionem reduxi, ut $xx+7$ in quatuor quadrata resolvatur.[9]

Quadraturam Circuli Gregorii a St. Vinc[entio] examinavi eamque ex falso lemmate deductam esse deprehendi. Utique si vera non est, etiam si adhuc centies propius ad verum accederet, tamen prorsus nihili est aestimanda. Sed si vera esset, egregium sine dubio esset inventum. Approximationem Tuam Vir Celeberrime ad rationem peripheriae ad diametrum utilissimam esse in Praxi existimo.[10]

De Theoremate Tuo, quod nullus numerus triangularis 4nario auctus habeat radicem rationalem 8^{vae} vel 10^{mae} dignitatis, cogitans seriem numerorum triangularium investigavi, qui quaternario aucti faciant quadrata[11] atque inveni radices numerorum eorum trigonalium sequentem constituere progressionem: -7, 0, 9, 56, 329, etc., quae hanc habet proprietatem, ut quivis terminus puta n^{mus} aequalis sit $6\,(n-1)^{\text{mo}}-(n-2)^{\text{mo}}+2$. Similem legem habet series numerorum, quorum quadrata sunt numeri trigonales,[12] quae haec est, 0, 1, 6, 35, 204, etc., cujus quivis terminus est septuplum praecedentis demta summa duorum praecedentium. His vestigiis insistens universaliter seriem numerorum integrorum dare possum qui loco x substituti faciunt $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ quadratum; notus autem esse debet unus casus, quo id fit quadratum.

Cum mihi nuper Theorema Fermatianum, quod nullus numerus trigonalis sit biquadratum praeter 1, occurreret,[13] inquirere coepi an $\dfrac{xx+x}{2}$ prorsus non possit esse biquadratum[14] nisi sit $x=1$ vel 0. Posui primo $\dfrac{xx+x}{2}=p^2x^2$ eritque $x=\dfrac{1}{2pp-1}$ et $\sqrt{\dfrac{xx+x}{2}}=\dfrac{p}{2pp-1}$. Ut autem $\dfrac{xx+x}{2}$ fiat biquadratum, debebit $\sqrt{\dfrac{xx+x}{2}}$ denuo esse quadratum; quadratum ergo esse debet $2p^3-p$; ponatur $p=q+1$, habebitur $2q^3+6qq+5q+1$. Radix hujus sumatur $1+\frac{5}{2}q$, erit $2q^3+6qq=\frac{25}{4}q^2$. Ergo $q=\frac{1}{8}$, $p=\frac{9}{8}$ et $x=\frac{32}{49}$. Quamobrem numerus trigonalis cujus radix est $\frac{32}{49}$ erit biquadratum radicis $\frac{6}{7}$. Ex hoc casu jam cognito infiniti alii inveniri possunt.[15] Hoc autem veritatem Theorematis non infirmat cum Fermatius id tantum de numeris integris intelligi velit. Rogatus sum Tibi nomine Cl[arissimi] Bernoullii salutem dicere.[16] Vale et fave

Vir Celeberrime

Tui Observantissimo

Leonhardo Eulero.

Petropoli d. 25 Junii

A. 1730.

R 721 Reply to n° 6
Petersburg, June 25th (July 6th), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 88r–89v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 28–31; *Euler-Goldbach* (1965), p. 34–35

8
Goldbach to Euler
Moscow, July 20th / 31st, 1730

Vir Clarissime

Jam diu animadverti omnem numerum $2^{2^{x+p}}+1$, ubi x et p sint numeri integri, divisum per $2^{2^x}+1$ relinquere 2, propterea quod $\left(2^{2^x}+1\right)\left(2^{2^x}-1\right)$ est $=\left(2^{2^{x+1}}-1\right)$; rursus $\left(2^{2^{x+1}}-1\right)\left(2^{2^{x+1}}+1\right)=\left(2^{2^{x+2}}-1\right)$ et sic porro, donec perveniatur ad $2^{2^{x+p}}-1$, qui numerus binario minor est quam $2^{2^{x+p}}+1$; ex eo quidem certe sequitur omnes numeros seriei Fermatianae esse inter se primos, ut dicis; at quantulum hoc est ad demonstrandum omnes illos numeros esse absolute primos?

Quod affirmaveram divisorem minimum numeri a^2+1 esse huius formae n^2+1, nullo fundamento niti agnosco, quando quidem exemplo numeri $a = 34$ refelli potest; haec erronea hypothesis aliam nihilo meliorem peperit: numerum a^2+1 esse primum si $\dfrac{a \pm n}{n^2+1}$ non possit fieri integer, quae cum facto $a = 34$ satis refutetur, non digna erat nova, qua eandem ornasti, demonstratione.[1] Ob hoc ipsum exemplum a te allatum, magis quam antea dubito de veritate theorematis Fermatiani; fieri enim potest ut minimus divisor alicuius numeri $2^{2^x}+1$ sit centum, vel centies mille notarum, quem usque ad finem mundi nemo inveniat.

Haud satis intelligo cur Fermatius affirmarit numerum quemcunque esse summam quatuor quadratorum, nisi methodum aliquam tenuit datum numerum in quatuor quadratos dividendi, quae methodus si proba fuit, ad demonstrationem theorematis satis fuit.

In superioribus litteris meis pro $\frac{2}{100\,000}$ scribendum erat $\frac{2}{10\,000}$ quod velim corrigas.[2] Ceterum de fallacia Lemmatis Gregoriani a Te deprehensa Tibi gratulor; haud dubie is est fons erroris quem et Cartesium vix triduo immoratum Gregoriano volumini notasse scribit Lipstorpius in Specim[inum] Philos[ophiae] Cartes[ianae][3] part[e] 2, p. 87. Sane si facilitatem legis qua progreditur approximatio spectes nihil puto de quadratura circuli elegantius excogitatum esse quam Leibnitii seriem;[4] sin modum quam citissime approximandi requiramus, eum quem secutus est D. Lagnius (in Comment[ariis] Acad[emiae] Paris[inae] A. 1719) reliquis praestantiorem ex admirabili quod protulit specimine iudicare licet;[5] occultavit ille quidem tum temporis artificium quo usus est, neque scio an deinde explicaverit, posteriorum enim annorum commentarios non memini me vidisse; si quid Tibi de eius methodo constat, rogo ut ad me perscribas.

Demonstrationem meam theorematis: nullum numerum trigonalem praeter 1 esse quadrato quadratum communicavi cum Cl[arissimo] Bernoullio nostro litteris Moscua datis, quas si ad manum sunt tibi facile concedet;[6] ex ea demonstratione perspicies non solum nullum numerum n^{2p+2}, sed ne quidem ullum n^2 (praeter 1 et 36) reperiri in trigonalium ordine, tantum abest ut omnes quadrati radicum 0, 1, 6, 35, 204, &c. quarum progressionem in litteris descripsisti, sint trigonales.[7]

Incidi aliquando in solutionem huius problematis: Numero cuicunque integro quantumvis magno a cuius tantum duae postremae notae dantur addere alium numerum integrum b, hac lege ut aggregatum non habeat radicem rationalem ullius potestatis.

Sit verbi gratia numerus 543 664, cuius tantum duas ultimas notas nempe 64 mihi cognitas fingo, reliquis 5436 (vel quibuscunque aliis) occultatis, huic si addatur 2 ita ut fiat 543 666, is numerus nullam habet radicem rationalem. Vereor ne totum problema simplicitate sua vilescat si methodum solvendi et demonstrationem simul addam, quapropter easdem in futuram epistolam differo.[8]

Vale et fave

Tuo

Christiano Goldbach.

D[atum] Moscua $\frac{20}{31}$ Jul. A. 1730.

R 722 Reply to n° 7
Moscow, July 20th / 31st, 1730
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 10–11r
Copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 30v–31v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 32–34; *Euler-Goldbach* (1965), p. 37–38

9

Euler to Goldbach

Petersburg, August 10th (21st), 1730

Vir Celeberrime

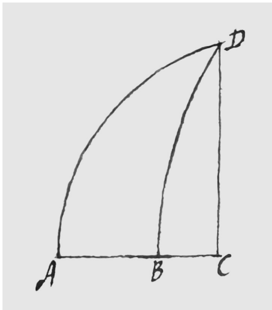
Quantum mihi constat de Theoremate Fermatiano omnem numerum esse summam quatuor quadratorum, ipse Fermatius neque demonstrationem ejus habuisse videtur neque modum generalem numeri cujusque in quatuor quadrata distribuendi; sed id potius videtur tantum observasse, et propterea enunciasse, quia nullum exemplum contrarium ab eo fuit deprehensum.[1] Etiamsi autem haec propositio vera sit, tamen difficillima mihi esse videtur demonstrationis inventio; nullam enim legem observare potui in divisione difficillimorum numerorum hujus formae $nn+7$, atque resolutio in quatuor quadrata semper fortuna tantum succedere videtur, neque ulla prorsus regula contineri. Commentarii Acad[emiae] Paris[inae] ad A. 1719 et sequentes, non adsunt hic in Bibliotheca, et hanc ob rem de methodo

D. Lagnii nihil commemorare possum.[2] Quod autem ad aptam et facilem approximationem ad Aream circuli attinet, memini Majerum nostrum b[eate] d[efunctum] habuisse seriem vehementer convergentem, cujus tres vel quatuor termini tantum sumti darent maximos Ludolphi a Ceulen numeros.[3] Series, quam nuper Tecum communicavi, 0, 1, 6, 35, 204, etc. hanc habet proprietatem, ut cujusvis termini quadratum sit numerus trigonalis,[4] neque haec proprietas ad 0, 1, et 6 tantum pertinet. Nam v. g. quadratum termini 35 est 1225, qui est numerus trigonalis radicis 49. Universaliter vero, cum illius progressionis terminus generalis sit[5] $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}}{4\sqrt{2}}$, hujus quadratum est numerus trigonalis radicis $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n-1}+\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}-2}{4}$. Ex ea igitur serie quam dedi inveniuntur innumerabiles numeri integri, qui simul sunt quadrati et trigonales. Fundamentum ejus sequenti generali Theoremate nititur: Si formula az^2+bz+c fit quadratum casu, quo ponitur $z=p$, fiet ea quoque quadratum casu, quo

$$z=\frac{-\,b+b\sqrt{1+a\lambda^2}}{2a}+p\sqrt{1+a\lambda^2}+\lambda\sqrt{ap^2+bp+c};$$

oportet autem pro λ numerum accipere qui $1+a\lambda\lambda$ faciat quadratum. Si igitur unicus innotescit casus quo az^2+bz+c fit quadratum, ex hac forma statim invenientur innumerabiles, idque in integris numeris, si quidem λ ita accipiatur ut $\dfrac{-\,b+b\sqrt{1+a\lambda\lambda}}{2a}$ fiat numerus integer.[6] Omnes autem numeri hoc modo inventi constituunt seriem ex duabus geometricis conflatam. Agitata sunt hujusmodi problemata de numeris integris inveniendis inter Wallisium et Fermatium. Exemplum maxime difficile erat, invenire numeros integros, qui loco x positi efficiant formulam $109xx+1$ quadratum. Pro hujusmodi quaestionibus solvendis excogitavit D. Pell Anglus peculiarem methodum in Wallisii operibus expositam.[7] Eaque ad meum institutum opus habeo, ut $1+a\lambda\lambda$ fiat quadratum. Ea vero methodus tantum ad exempla prorsus numerica patet, neque ejus est usus in formulis arbitrarios coefficientes habentibus resolvendis, cujusmodi est meus casus az^2+bz+c. Conatus sum similem methodum pro formulis, in quibus indeterminata tres habet dimensiones, invenire. Idem vero non aeque ac in quadraticis praestare potui; sed tamen ea sufficit ad omnes numeros integros inveniendos, legem vero qua ii progrediuntur, non praebet. Exempla ad hoc illustrandum sint haec: Invenire numeros pyramidales trigonales integros, qui sint quadrati vel qui sint triangulares plani.[8] Solutionem Tuam Vir Celeberrime Problematis, quod perscripsisti, ad propositum numerum alium addere, ita ut summa non habeat radicem rationalem ullius potestatis,[9] ex hoc principio ductam esse statim animadverti, quod nullus numerus ullius dignitatis per solum binarium dividi possit, vel quod nulla potentia sit numerus impariter par. Ex duabus autem postremis notis cujusque numeri cognoscitur, utrum per 4 dividi possit an secus. Quamobrem si talis numerus adjiciatur, qui efficiat summam per 2 sed non per 4 divisibilem, habetur quod desideratur. Idem adhuc pluribus modis potest effici, vel faciendo ut ultima nota sit 0, penultima non; vel ut duae postremae notae sint 05, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95; hujusmodi enim terminationes nullae habent dignitates. Similiter apparet, qualis numerus ad propositum quantumvis magnum, cujus notarum summa tantum datur, addi debeat, ut quod prodit nulla sit potentia. Nimirum talis debet addi, qui ad summam notarum additus reddat eam per 3, sed non per 9 divisibilem.

Methodum Tuam lunulas quadrabiles inveniendi vidi,[10] eaque mihi magnopere placuit propter summam ejus et facilitatem et brevitatem. Persequutus sum idem problema jam diu prorsus analytice sequenti modo:



Sit semilunula quaecunque ABD, et ex D in AB productam demittatur perpendiculum DC, arcuum AD, BD sinus. Sit $DC = y$, radius arcus $AD = a$, radiusque arcus $BD = b$; erit integratione per logarithmos absoluta,

$$\text{area } ACD = \frac{aa\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{aa-yy}}{2}$$

et

$$\text{area } BCD = \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-bb}}{b\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{bb-yy}}{2}.$$

Ex his erit semilunulae area[11]

$$\begin{aligned} ADB \;=\;& \frac{aa\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a\sqrt{-1}} - \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-bb}}{b\sqrt{-1}} \\ & - \frac{y\sqrt{aa-yy}+y\sqrt{bb-yy}}{2}. \end{aligned}$$

Ergo perspicuum est quoties in hac expressione quantitates logarithmicae evanescunt, toties lunulam esse quadrabilem, erit enim

$$ADB = \frac{y\sqrt{bb-yy} - \; y\sqrt{aa-yy}}{2}.$$

Quamobrem ad lunulas quadrabiles inveniendas oportet ut sit

$$\frac{aa\sqrt{-1}}{2}\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a\sqrt{-1}} = \frac{bb\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{y+\sqrt{yy-bb}}{b\sqrt{-1}}$$

vel sumtis numeris[12]

$$\left(\frac{y+\sqrt{yy-aa}}{a\sqrt{-1}}\right)^{aa} = \left(\frac{y+\sqrt{yy-bb}}{b\sqrt{-1}}\right)^{bb}.$$

Ex hac aequatione data relatione inter a et b determinabitur y seu semichorda lunulam quadrabilem subtendens. Quanquam in aequatione inventa insunt quantitates imaginariae, tamen in reductione eae ex calculo abeunt, prodituraue pro y valor realis. Solutio haec cum Tua Vir Celeberrime congruit, utraque enim omnes dat casus, qui existunt.[13] Vale et Fave

Vir Celeberrime
Tibi obstrictissimo
Leonhardo Eulero.

Petropoli, d. 10 Aug.
1730

R 723 Reply to nº 8
Petersburg, August 10th (21st), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 99r–100v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 35–39; *Euler-Goldbach* (1965), p. 39–40

10
Goldbach to Euler
Moscow, (September 28th) October 9th, 1730

Vir Clarissime

Numeros qui dividi possunt in tot quadrata quot a continet unitates animadverti posse etiam dividi in quotcunque plura quam a, hoc est in quadrata $(a+n)$ ubi n denotet numerum integrum affirmativum quemcunque. Si igitur verum est numerum quemcunque dividi posse in quadratos quatuor, theorema generalius enunciari poterit: Numerum quemcunque rationalem dividi posse in quadratos quotcunque plures quam 3.[1] Omnis vero numerus qui neque duorum neque trium quadratorum summa sit, semper dividi posse videtur non solum in quatuor quadratos sed etiam in 1 et tres quadratos,[2] sic verbi gr[atia]

$$7 = 1+1+1+4, \quad 23 = 1+4+9+9, \quad 39 = 1+1+1+36,$$
$$15 = 1+1+4+9, \quad 28 = 1+9+9+9, \quad 47 = 1+1+9+36, \quad \&c.,$$

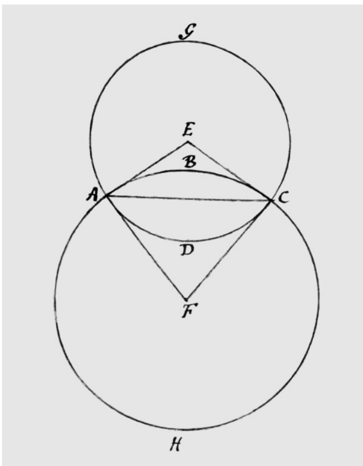
neque ullum exemplum contra adferre poteris; sed huiusmodi theoremata non facile demonstrari cum Fermatio fateor.

Series illa Mayeri quae tribus quatuorve terminis numeros Ludolphinos exhibuit[3] magni momenti videtur, si isti tres quatuorve termini breviore tempore et describi et in summam colligi possunt quam quo tempore opus est ad eosdem numeros methodo Ludolphi determinandos, nisi enim id demonstratur, nihil in eiusmodi serie magnopere admirandum est, cum vel ipsa series Leibnitiana pro lubitu in magis convergentem transmutari possit si v[erbi] gr[atia] millenos quosque terminos eiusdem pro singulis terminis alterius seriei sumamus, sed huius modi compendio, ut dixi, nihil proficimus, quoniam ad duos terminos seriei magis convergentis describendos et addendos tantum temporis requiritur quantum ad colligendam summam bis mille terminorum seriei minus convergentis.

Innumeros esse quadratos trigonales satis ostendisti[4] et hanc ob causam multo magis memorabile est Fermatii effatum: nullum numerum trigonalem praeter 1 esse quadrato quadratum.

Numerum, qui divisus per 9 relinquit 3 vel 6 non habere radicem rationalem, quem ad modum observasti, iam ante plus quam 12 annos ad amicum scripseram; locus ex epistola excerptus in Supplem[ento] Actor[um] Lips[iensium][5] legitur.

Quod mea solutio problematis de quadrandis Lunulis tibi probetur pergratum est, quamquam mihi ipsi displicere coepit postquam non novam, sed a Cl[arissimo] Dan[iele] Bernoullio in Exercitat[ionibus] Math[ematicis] multo ante expositam vidi. Tua solutio mihi in primis arridet quod aequationem ad expressiones definitas reducis quae sane plus habent elegantiae quam series indefinitae. Ceterum quaecunque huius problematis solutiones excogitentur, totum negotium in eo est ut ab expressione quae determinat aream Lunulae removeantur quantitates a circuli quadratura pendentes; igitur iam ante 7 annos cum primum huius problematis mentionem in litteris faceret Nicol[aus] Bernoullius p[ie] m[ortuus] hanc ei solutionem misi:[6]



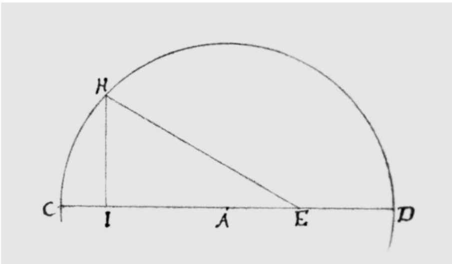
Sint duo circuli sese intersecantes in A et C;

circulus	$AGC = \alpha$;	...	$AHC = \beta$;
pars circuli	$ADCE = \dfrac{\alpha}{p}$;	...	$ABCF = \dfrac{\beta}{q}$;
triang[ulum]	$AEC = b$;	...	$ACF = c$;

erit segm[entum] $ADC = \dfrac{\alpha}{p} - b$; ... $ABC = \dfrac{\beta}{q} - c$;

adeoque Lunula $ABCG = \alpha - \dfrac{\alpha}{p} + b - \dfrac{\beta}{q} + c$; et ponendo $\alpha - \dfrac{\alpha}{p} - \dfrac{\beta}{q} = 0$ (ut scilicet destruantur quantitates quadraturam circuli involventes) erit eadem Lunula $ABCG = b + c$.

Occasione problematis Kepleriani de semicirculo CHD ex dato puncto E ita dividendo ut trilineum CHE sit ad aream semicirculi in ratione data,[7] in alius problematis solutionem incidi:



(1.) dato radio $AC = 1$,
(2.) ratione diametri ad peripheriam 1 ad p,
(3.) arcus dati ad Sinum rectum, $\dfrac{p}{n}$ ad e,
(4.) areae trilinei CHE ad aream semicirc[uli] CHD, 1 ad n,

determinare distantiam puncti E a centro A seu lineam $AE = c$ infinitis modis ita ut sinus HI exprimatur per quantitates p, n, c; postulatur autem solutio quae determinet lineas AE et HI non per series sed per expressiones definitas.[8]

Solutio: Sit m numerus arbitrarius,

$$AE = c = \frac{2p\,(1-m)\sqrt{-1}}{n\left[\left(\sqrt{1-e^2} + e\sqrt{-1}\right)^m - \left(\sqrt{1-e^2} - e\sqrt{-1}\right)^m\right]},$$

erit $HI = \dfrac{p\,(1-m)}{nc}$.

D[atum] 9. Oct. 1730. Moscua

Tui observantissimus
Chr. Goldbach.

R 724 Reply to n° 9
Moscow, (September 28th) October 9th, 1730
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 12r–13r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 33v–34v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 40–43; *Euler-Goldbach* (1965), p. 41–43

11
Euler to Goldbach
Petersburg; October 17th (28th), 1730

Vir Celeberrime

Quod omnis numerus, qui in tot quadrata, quot a continet unitates, dividi potest, etiam in plura possit dividi;[1] ex eo facile intelligitur, quod quadratus numerus quicunque in duos pluresve quadratos possit distribui. Hoc ergo modo numerus quadratorum, qui junctim sumti numerum datum efficiunt, quousque libuerit potest augeri; non vero diminui. Observavi atque demonstrare possum, nullum numerum hac forma contentum, $mm\,(4x+3)$ in duo dividi posse quadrata; neque ullum hujus formae $mm\,(8x+7)$ esse summam trium quadratorum.[2] An vero omnes reliqui in tria pauciorave dividi possint non dixerim; neque an omnes numeri in ea formula contenti in quatuor quadrata possint dividi. Saltem nullum exemplum deprehendere potui. Attamen si verum est aliud Theorema ejusdem Fermatii, omnem numerum esse summam trium numerorum trigonalium,[3] et hoc inde sequitur omnem numerum $mm\,(8x+7)$ esse summam quatuor quadratorum.[4] Vi enim illius Theorematis omnes numeri comprehenduntur in ista formula $\dfrac{aa+a}{2}+\dfrac{bb+b}{2}+\dfrac{cc+c}{2}$. Propterea hujus octuplum $4aa+4a+4bb+4b+4cc+4c$ complectitur omnia multipla octonarii seu omnes numeros hujus formae $8x$. Consequenter haec formula $(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$ continet omnes numeros hujus formae $8x+3$. Quocirca omnes numeri $8x+3$ sunt summa[e] trium quadratorum. Hanc ob rem omnes numeri formae $8x+4$ vel hujus $8x+7$ sunt in 4 quadrata resolubiles. Porroque et hi $mm\,(8x+4)$ atque $mm\,(8x+7)$. Formula $mm\,(8x+4)$ aequivalet huic $mm\,(2x+1)$. Ex hac formula excluduntur omnes numeri impariter pares iique soli; i. e. numeri formae istius $4x+2$. Etiam si ergo verum esset Fermatii Theorema de numeris trigonalibus; tamen ad veritatem nostri ostendendam necesse insuper est demonstrare omnes numeros $4x+2$ in quatuor quadrata esse resolubiles. Quod attinet ad observationem, omnem numerum in quatuor saltem quadrata divisibilem dividi posse in unitatem et tria quadrata,[5] sive quod eodem redit, si a tali numero unitas auferatur, residuum semper in tria quadrata distribui posse: Haec proprietas utique in omnibus numeris centenario minoribus locum habet, sed numerorum majorum innumerabilia exempla in contrarium afferre possum, cujusmodi est 112, qui numerus, quanquam in pauciora quam 4 quadrata dividi nequit, tamen effici non potest, ut unitas in illis quatuor quadratis reperiatur. Nam 111 nunquam in tria quadrata dividetur. Eandem proprietatem habent omnes numeri hac forma contenti $16nn(8x+7)$, neque enim hi neque unitate mulctati in tria vel pauciora quadrata possunt dividi. Numeris autem $16nn(8x+7)$ in quatuor quadrata dividendis non solum effici non potest, ut unitas sed neque ut hujus formae $(2m+1)^2\,\dfrac{nn}{dd}$ quadratum locum in illis quatuor quadratis expleat; denotat hic d numerum dividentem n. De altera quaestione, quomodo quam facillime maximi numeri Ludolphi a Ceulen quadraturam circuli dantes inveniri queant, scribam quae ipse meditatus sum, cum manuscripta Majeri amplius inspicere non liceat.[6] Sit diameter circuli $= b$, chorda quaecunque $= x$ et arcus respondens $= s$, erit

$$s = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3 \cdot b^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot b^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot b^6} + \text{etc.}$$

Haec series[7] eo magis convergit, quo minor accipitur x. Sed ut ratio peripheriae ad radium inde possit inveniri, oportet ut s cum tota peripheria et x cum diametro sit commensurabilis. Ad hoc minor chorda rationalis non adhuc est inventa, quam ea arcus 60 graduum quae est $= \frac{1}{2}b$. Cum autem hoc casu series nequaquam satis convergat,[8] in id cogitandum est, quomodo expressio finita inveniatur ei quam proxime aequalis. Prope accedit haec $s = \dfrac{60bbx - 17x^3}{60bb - 27xx}$, propius etiam haec $s = x + \dfrac{840bbx^3 - 122x^5}{120bb\,(42bb - 25xx)}$ nec non $s = x + \dfrac{x^3}{6bb}\left(\dfrac{420bb}{420bb - 311xx}\right)^{\frac{189}{311}}$. Sed hae omnes nisi x minor quam $\frac{1}{2}b$ accipi potest, non vehementer admodum ad verum accedunt;[9] propterea maxime consultum erit, minorum peripheriae partium chordas, etsi irrationales assumere.[10] Habeo praeterea aliam formulam, qua peripheriam circuli determinare possum. Si diameter ponatur $= 1$ erit

$$\text{peripheria} = \frac{16 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 100 \cdots 4nn}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdots (2n-1)^2} \cdot \frac{8n+2}{2nn+n}$$

vel accuratius,

$$\text{periph[eria]} = 4\,(1+n)\,\frac{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdots 4nn}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdots (2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}}$$

quae posterior expressio semper est justo major; hic quo major accipitur n eo vero propior prodibit peripheria.[11] Vidi Clarissimum Bernoullium nostrum in Litteris ad Te Vir Celeberrime datis mentionem fecisse Theorematis cujusdam mei hanc formulam $\dfrac{a\,dx}{\sqrt[m]{b + cx^m}}$ semper posse in rationalem transmutari et propterea integrari.[12] Significavit is mihi, Te eam Formulam multis modis universaliorem reddidisse. Celeberrimus Bernoullius Pater quoque simile effecit; non solum enim eam sed hanc $\dfrac{a\,dx}{\sqrt[m]{ax^m + bx^n}}$ ad rationalitatem reduxit. Haec videns cogitare coepi, an non omnes plane formulae hoc modo integrari possint, admissis saltem logarithmis; nam quia $\dfrac{dx}{x}$ in $x^m dx$ continetur, quae beneficio logarithmorum integrari possunt, ea pro absolute integrabilibus haberi debent.[13] Nullo autem modo hanc formam $\dfrac{aa\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, quae exprimit elementum curvae elasticae rectangulae, integrare potui neque ellipsin rectificare, etiamsi logarithmi admittantur.[14] Nescio autem, an in nulla Tuarum formularum et hae comprehendantur. Vale et Fave

Vir Celeberrime
Tibi obstrictissimo
L Eulero

Petropoli d. 17 Octobr.
A. 1730

R 725 Reply to n° 10
Petersburg, October 17th (28th), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 111r–112r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 44–47; *Euler-Goldbach* (1965), p. 43–45

12
Goldbach to Euler
Moscow, (October 26th) November 6th, 1730

Vir Clarissime

In ultima epistola tua miror diligentiam quam ad indaganda numerorum mysteria adhibes. Revidi quae ad Cl[arissimum] Bernoullium de formula differentiali cuius mentionem facis[1] scripseram atque illico animadverti casus illos rationales multo brevius quam putaram expediri posse. Praemonendum autem duco formulam

$$A \qquad \ldots \qquad \frac{dx}{(x^m + x^n)^{\frac{1}{m}}}$$

nihilo generaliorem esse formula

$$B \qquad \ldots \qquad \frac{dv}{(v^m + 1)^{\frac{1}{m}}}$$

cum per solam substitutionem $x = v^{\frac{m}{m-n}}$ ex A producatur B, quod etiam agnovit Cl[arissimus] Daniel Bernoullius.[2] Considerabo iam differentialem huius formae

$$C \qquad \ldots \qquad \left(1 + x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$$

(ubi p sit numerus rationalis non integer) quam dico rationalem fieri si n sit numerus integer quicunque; ponatur enim $x = (z-1)^n$, mutabitur C in

$$D \qquad \ldots \qquad n\,(z-1)^{n-1}\, z^p dz,$$

quam apparet fieri rationalem si n sit numerus quicunque integer; si vero ponatur $z = v\,(v-1)^{-1}$, migrabit D in

$$E \qquad \ldots \qquad -\,n\,(v-1)^{-n-p-1}\, v^p dv,$$

quae ad terminos rationales redigi potest, si $-n-p$ sit numerus integer quicunque. Memorabilis haec est convenientia casuum integrabilium et rationabilium (ut sic loquar); illi enim numerum n vel $-n-p$ integrum affirmativum, hi saltem integrum postulant.[3]

Vale. D[atum] Moscua 6. Nov. 1730.

Tui studiosissimus
Christianus Goldbach.

R 726 Reply to nº 11
Moscow, (October 26th) November 6th, 1730
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 14r
Copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 35v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 48–49; *Euler-Goldbach* (1965), p. 47

13
Euler to Goldbach
Petersburg, November 9th (20th), 1730

Vir Celeberrime

Omnis formula differentialis rationalis hanc habet proprietatem ut ejus integratio reduci possit ad integrationem hujus $x^m dx$. Quamobrem si $x^m dx$ pro absolute integrabili habemus, enunciare possumus, omnes formulas rationales esse integrabiles. Cum autem si $m = -1$ integrale ipsius $x^{-1}dx$ sit $\ell\, x$, cujusmodi expressiones in algebraïcis non habemus; si eas tantum formulas integrabiles esse censeamus, quae dant integralia algebraica, oportet superiorem propositionem quodammodo restringi, hocque modo enunciari, ut omnes formulae differentiales, quae in rationales transmutari possunt, integrabiles esse dicantur iis exceptis, quae a logarithmis pendent. Atque ex hoc ortum suum habet magna ea convenientia casuum integrabilium et rationalium, quam in postremis Litteris annotasti. Nescio autem cur eas formulas, quae a logarithmis pendent, non pro integrabilibus habere velimus. Haec ratio sane non sufficit, quod aeque difficile sit dicere quid sit $\ell\, x$ atque $\int dx : x$. Similis mihi videtur differentia, quae est inter $\int 2x\, dx$ et x^2. Deinde demonstratum est quantitatibus logarithmicis aequales algebraicas dari non posse;[1] et propterea ad quasque quantitates exprimendas logarithmi aeque sunt necessarii, atque algebraicae quantitates; et si formulam integrando ad logarithmos perduxerimus aeque contenti esse debemus, ac si ad algebraicas esset reducta. Admissis igitur logarithmis tanquam quantitatibus in $\int x^m dx$ contentis, omnes formulae differentiales rationales sunt integrabiles, omnesque irrationales, quae in rationales transmutari possunt. Maximam ergo habet utilitatem cura et studium, quod ponitur in reducendis formulis irrationalibus ad rationales. Ex eo autem, quod omnes formulae rationales ad $x^m dx$ possunt reduci, forte suspicari licet, omnes prorsus formulas differentiales eo reduci posse, vel omnes prorsus formulas irrationales in rationales transmutari posse. Magnam hujus desiderati inveniendi haberem spem, si quis hanc tantum expressionem $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ ad rationalitatem reducere doceret. Formula Tua Vir Celeberrime $\left(1+x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$, quae rationalis redditur, si vel n vel $n+p$ fuerit numerus integer, latissime patet; deprehendi enim complures formulas, quas non putassem, ut $\dfrac{dx}{\sqrt[m]{1+x^m}}$ et $\dfrac{dx}{\sqrt[m]{x^n+x^{m+n}}}$ in ea comprehendi. Aequivaletque Tuum hoc Theorema sequenti meo, quanquam universalius videtur: $\dfrac{dz}{\sqrt[m]{z^p+z^q}}$ ad rationali[ta]tem reduci potest, quoties vel $\dfrac{p-m}{m\,(p-q)}$ vel $\dfrac{q-m}{m\,(q-p)}$ est numerus rationalis.[2] Ad integrandas autem quascunque formulas rationales Theorema sequens inveni:[3]

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx\ (a-x)\,(b-x)\,(c-x)\,(d-x)\ \text{etc.}}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\,(\gamma+x)\,(\delta+x)\ \text{etc.}}\\
&= \frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{(\beta+a)\,(\beta+b)\,(\beta+c)\ \text{etc.}}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)\,(\delta-\beta)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\beta}{\beta}\\
&\quad+\frac{(\gamma+a)\,(\gamma+b)\,(\gamma+c)\ \text{etc.}}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)\,(\delta-\gamma)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\gamma}{\gamma}+\ \text{etc.}\ \pm Ax\mp\frac{Bx^2}{2}\pm\frac{Cx^3}{3}\mp\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Horum posteriorum terminorum algebraicorum nullus adest, si (posito numero factorum numeratoris, $a-x$, $b-x$, $c-x$ etc., m, et numero factorum denominatoris n) $n=m$ vel $m<n$. Primus tantum Ax locum habet si $m=n+1$. Duo vero Ax et $\dfrac{Bx^2}{2}$ sunt adjiciendi si $m=n+2$. Tres si $m=n+3$ et ita porro. Signorum ambiguorum sumentur superiora si n est numerus par, at inferiora si n est numerus impar. Literae vero majusculae, quae valent si $m>n$ sequentes habent valores: A significat summam omnium factorum quae constant ex tot literis literarum α, β, γ, δ etc. et a, b, c, d etc. quot $m-n$ continet unitates; B significat summam omnium factorum tot habentium factores ex iis literis desumtos quot $m-n-1$ continet unitates; C summam omnium factorum, quae habent $m-n-2$ factores etc. Excluduntur autem omnia ea facta in quibus quaepiam latina litera plures quam unam habet dimensiones. Complectitur autem haec generalis formula integrata omnes formulas differentiales rationales. Numerus enim factorum tam in numeratore quam denominatore est arbitrarius. Quod autem in omnibus factoribus x unius tantum sit dimensionis, id universalitati non nocet, omnes enim formulae algebraicae, in quibus x plures habet dimensiones, sunt divisibiles, in hujusmodi factores simplices. Denique facile perspicitur id universalitati non obesse, quod x alios coefficientes nisi $+1$ et -1 non habeat.

Vale Vir Celeberrime et Fave

Tui observantissimo

Leonhard Euler

Petropoli, d. 9. Novemb.
A. 1730

R 727 Reply to n° 12
Petersburg, November 9th (20th), 1730
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 113r–114r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 50–53; *Euler-Goldbach* (1965), p. 47–49

14
Goldbach to Euler
Moscow, November 18th / 29th, 1731

Vir Clarissime

Jam in litteris Cal[endis] Jun. 1730 ad Cl[arissimum] Bernoullium datis[1] monueram formulas

$$A \ldots \frac{dx}{(x^a+1)^{\frac{1}{n}}}, \qquad B \ldots \frac{u^b du}{(u^c+1)^{\frac{1}{n}}}, \qquad C \ldots \frac{dv}{(v^e+v^f)^{\frac{1}{n}}}$$

pro iisdem haberi posse et propterea me uti velle formula A, in qua duae tantum exponentes arbitrariae insunt, cum in binis reliquis formulis tres exponentes reperiantur.

In formula tua quam pro $\int dx \, \frac{(a-x)\,(b-x)\ \ \&c.}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\ \ \&c.}$ adsignas non video quid fiat denominatore $=0$ in expressione $\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)}$&c. si $\beta=\alpha$ vel $\gamma=\alpha$ &c.[2]

Quod attinet ad $\int \left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$, non facile puto inventum iri integralem praeter casus quos iam in praecedente epistola mea expressi, si scilicet per casus integrabiles eos tantum intelligamus qui vulgo dici solent, quodsi vero magis ad naturam rei quam ad usum qui inter Mathematicos obtinuit respiciamus, apparebit sane eodem jure quo huius differentialis $(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ integralis genuina statuitur $\frac{-2}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}}$ posse etiam $\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ quovis alio casu integrari; nam cum $\int \left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ ut notum est resolvi possit in[3]

$$A \ldots \left(x + \frac{p+n+1}{n+1} A x^{\frac{n+1}{n}} + \frac{p+n+2}{n+2} B x^{\frac{n+2}{n}} + \&c.\right) \left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{p+1}$$

vel in

$$B \ldots \left(\frac{-n}{p+1} x^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n-1}{p+n-1} A x^{\frac{n-2}{n}} + \frac{n-2}{p+n-2} B x^{\frac{n-3}{n}} + \ \&c.\right) \left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{p+1}$$

vel in

$$C\ldots x-\frac{pn}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}+\frac{p\cdot p-1\cdot n}{2\cdot n+2}x^{\frac{n+2}{n}}-\frac{p\cdot p-1\cdot p-2\cdot n}{2\cdot 3\cdot n+3}x^{\frac{n+3}{n}}+\ \&c.,$$

ad inveniendam integralem nihil aliud requiritur quam ut determinetur formula generalis summarum huius seriei

$$\frac{-n}{p+1}x^{n-1}+\frac{n-1}{p+n-1}Ax^{\frac{n-2}{n}}+\ \&c.$$

per expressionem quae finita maneat posito pro n numero quocunque non-integro; qua ratione autem huius modi formula designari possit in dissertatione mea[4] dixi; sola differentia quae inter integrales has novas et alias iam cognitas irrationales (verbi gr. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$) intercedit haec est quod illae a Mathematicis non dum receptae, hae longo usu iam confirmatae sunt.

Ceterum aequatio $\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx=dy$ facile reducitur ad hanc

$$dz=(p+1)\ z\,dv+n\ (1-z)\ v^{-1}dv$$

in qua exponentes prioris n et p coëfficientium locum tenent.[5]

Vale mihique fave
Tibi addictissimo
Christiano Goldbacho.

Moscua $\frac{18}{29}$ Nov. 1731.

R 728 Reply to n° 13 (after a year's silence)
Moscow, November 18th / 29th, 1731
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 15rv
Copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 38rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 54–55; *Euler-Goldbach* (1965), p. 49–50

15
Euler to Goldbach
Petersburg, November 25th (December 6th), 1731

Vir Celeberrime

In integrali hujus formulae $dx\dfrac{(a-x)\,(b-x)\,(c-x)\ \text{etc.}}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\,(\gamma+x)\ \text{etc.}}$ utique difficulter apparet, quid fiat, si litterarum α, β, γ etc. aliquot fuerint aequales.[1] Denominatores in aliquot integralis mei terminis tum evanescunt, et propterea ipsum integrale infinitum fieri videtur. Verum si ad signa terminorum istorum attendimus, videbuntur ii se potius destruere, atque in nihilum abire. Horum autem neutrum recte se habet: nam termini illi in infinitum crescentes junctim sumti dabunt valorem determinatum finitum, quem sequenti modo investigo. Sit $\beta = \alpha$, erit difficultas in duobus integralis terminis istis

$$\frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c)\ \text{etc.}}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\ \text{etc.}}\,\ell\,\frac{x+\beta}{\beta}$$

posita. Ad eorum verum valorem inveniendum pono $\beta = \alpha + d\alpha$; $d\alpha$ vero denotat quantitatem infinite parvam, tantumdem ergo est ac si posuissem $\beta = \alpha$. Brevitatis gratia scribo P loco $\dfrac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\ \text{etc.}}$. Sumo deinde hujus fractionis differentiale posito tantum α variabili, sit illud $Q\,d\alpha$. Manifestum est fore $\dfrac{(\beta+a)(\beta+b)(\beta+c)\ \text{etc.}}{(\gamma-\beta)(\delta-\beta)\ \text{etc.}} = P + Q\,d\alpha$. Est vero etiam $\beta - \alpha = d\alpha$ et $\alpha - \beta = -\,d\alpha$, et

$$\ell\,\frac{x+\beta}{\beta}=\ell\,\frac{x+\alpha+d\alpha}{\alpha+d\alpha}=\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{x\,d\alpha}{\alpha\,(\alpha+x)}.$$

His substitutis duo illi termini abibunt in

$$\frac{P}{d\alpha}\,\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{P}{d\alpha}\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{Px}{\alpha\,(\alpha+x)}-Q\,\ell\,\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{Qx\,d\alpha}{\alpha\,(\alpha+x)}.$$

Horum duo priores termini sese tollunt et postremus prae reliquis evanescit, ita ut pro valore duorum terminorum quaesito habeamus $\dfrac{Px}{\alpha\,(\alpha+x)} - Q\,\ell\,\dfrac{x+\alpha}{\alpha}$ qui in integrali eorum loco substitui debet. Est vero ut posui

$$P=\frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\ \text{etc.}},$$

atque ex hoc erit

$$\begin{aligned} Q \quad = \quad & \frac{(\alpha+a)(\alpha+b)(\alpha+c)\ \text{etc.}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)\ \text{etc.}} \\ & \left(\frac{1}{\alpha+a}+\frac{1}{\alpha+b}+\frac{1}{\alpha+c}+\text{etc.}+\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{1}{\delta-\alpha}+\text{etc.}\right). \end{aligned}$$

Notandum hic est in casu $\beta = \alpha$ non totam quantitatem esse transcendentalem, sed partem ejus esse algebraicam, cum tamen universaliter ambo termini sint transcendentes. Si jam ulterius fuerit $\gamma = \alpha$ eodem modo terminorum infinitorum valor ponendo $\gamma = \alpha + d\alpha$ determinabitur.

De formula $\int \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ non dubito, quin omnes integrabilitatis casus a Te Vir Celeb[errime] sint eruti. Sed de reductione aequationis $\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx = dy$ ad hanc $dz = (p+1)\ z\,dv + n\,(1-z)\ dv : v$ dubium habeo,[2] cum posterior aequatio nunquam sit absolute integrabilis, si quidem adjectionem constantis non negligamus. Sumamus casum simplicissimum, quo $p = 1$ et $n = 1$, erit

$$dz - 2z\,dv + \frac{z\,dv}{v} = \frac{dv}{v}.$$

Multiplicetur haec[3] per $\mathrm{e}^{\ell v - 2v}$ seu quod idem est per $\mathrm{e}^{-2v}v$ (e denotat hic numerum[4] cujus logarithmus hyperbolicus est $= 1$), prodibit

$$\mathrm{e}^{-2v}v\,dz - 2\mathrm{e}^{-2v}zv\,dv + \mathrm{e}^{-2v}z\,dv = \mathrm{e}^{-2v}dv,$$

quae integrata dat $\mathrm{e}^{-2v}vz = \text{Const.} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2v}$ seu $2vz + 1 = a\mathrm{e}^{2v}$, quae algebraica non est nisi sit $a = 0$, et propterea ea ad hanc $x - \frac{1}{2}xx = y + b$ substitutionibus algebraicis reduci non potest. Similis est ratio formulae generalis, haec enim nullo casu est integrabilis ad aequationem algebraicam nisi constans addenda ponatur $= 0$.

Casus nuper formulae riccatianae separabiles considerans[5] sequentem universalem detexi substitutionem, qua aequatio $a\,dq = q^2dp - dp$ ad hanc formam $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$ reduci potest. Ponatur $p = (2n+1)\,x^{\frac{1}{2n+1}}$ atque

$$q = -\frac{a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-5a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-7a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. etc. etc.}\ \cfrac{1}{\cfrac{-(2n-1)\,a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}}y}}}}}}.$$

Haec tantum valet substitutio si n est numerus affirmativus integer, peculiarem habeo si est negativus. Quoties in hac n est numerus integer affirmativus, toties haec fractionum series abrumpitur, et quid pro q substitui debet, facile determinatur. Reciproce etiam aequationem $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$ in hanc $a\,dq = q^2dp - dp$ transformo hac substitutione $x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$ et

$$y \quad (p : 2n+1)^{2n} = \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)\,a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. etc.}\ \cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{a}{p} + q}}}}}.$$

Facile hic cognoscitur si valores harum continuarum fractionum inveniri possent si n denotat numeros fractos, tum formulam $a\,dy = y^2dx - x^m dx$ universaliter posse construi. Interpolatio vero ista nititur inventione termini generalis pro serie hujus proprietatis, si terminus $x$mus fuerit A, ejus sequens B, debet terminus

$(x+2)$mus[6] esse $= (2m+1)\,B + A$ vel in numeris hujus seriei, 1, 1, 4, 21, 151, 1380, etc.

Perpendi ulterius etiam formulam $2^n - 1$, quae non potest esse numerus primus nisi sit n numerus primus, et eos investigavi casus quibus $2^n - 1$ non est numerus primus, quamvis fuerit n talis. Exceptiones istae sunt $n = 11$, $n = 23$, $n = 83$, reliqui numeri primi omnes centenario minores loco n positi reddunt $2^n - 1$ primum.[7] Potest vero $2^{11} - 1$ dividi per 23, $2^{23} - 1$ per 47, et $2^{83} - 1$ per 167: Ratio hujus fundata est hoc theoremate non ineleganti: $2^n - 1$ semper potest dividi per $n+1$ si quidem $n+1$ fuerit numerus primus.[8] Sic $2^{22} - 1$ dividi potest per 23. Saepe etiam $2^{\frac{n}{2}} - 1$, nec non $2^{\frac{n}{4}} - 1$ etc. per $n+1$ dividi possunt, et ex hoc investigatio casuum quibus $2^n - 1$ est numerus primus, non est difficilis.[9]

Vale atque fave
Vir Celeberrime
Tibi obstrictissimo
Leonhardo Eulero

Petropoli, 1731
d. 25 Nov.

R 729 Reply to nº 14
Berlin, November 25th (December 6th), 1731
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 126r–127v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 56–60; *Euler-Goldbach* (1965), p. 50–53

16
Goldbach to Euler
December 6th / 17th, 1731

Vir Celeberrime

Ante omnia mihi emendanda est aequatio in superioribus litteris meis male descripta;[1] scribendum enim erat, in quocunque casu numerorum p et n aequatio (A.) $(1-v)\,v\,dz = (n+p+1)\,zv\,dv + n\,(1-z)\,dv$ est integrabilis, eodem casu aequationem (B.) $(1 - x^{\frac{1}{n}})^p dx = dy$ esse integrabilem, id quod instituto examine deprehendes.

Altera aequatio (C.) $x^{\frac{\mp 4n}{\pm 2n+1}} dx - y^2 dx = dy$ simili modo transmutatur in (D.) $dz - v^2 dz \pm 2nvz^{-1} dz = dv$; quo modo vero separatio variabilium in aequatione (C.) vel (D.) pendeat a termino generali seriei cuius lex progressionis est $A + (2m+1)\,B = C$, non video.[2] De reliquis in posterum.

Vale. D[atum] Moscua $\frac{6}{17}$ Dec. 1731.

Tui observantissimus
Christianus Goldbach.

R 730 Supplement to n° 14
Moscow, December 6th / 17th, 1731
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 16r
Copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 39r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 61; *Euler-Goldbach* (1965), p. 54

17
Euler to Goldbach
[Petersburg], January 3rd (14th), 1732

Vir Celeberrime

Omnis aequatio ex tribus constans terminis facile reducitur ad hanc formam

$$x^m dx + ay^n dx + b\,dy = 0,$$

quae ista substitutione

$$x = v^{\frac{1}{mn+n-m}} z^{\frac{n-1}{mn+n-m}} \qquad \text{et} \qquad y = v^{\frac{m+1}{mn+n-m}} z^{\frac{-1}{mn+n-m}}$$

transformatur in sequentem ordinis secundi aequationem

$$z^2 dv + (n-1)\,vz\,dz + avz\,dv + a\,(n-1)\,v^2 dz + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0.$$

Si fuerit $n = 2$ habetur forma Riccatii $x^m dx + ay^2 dx + b\,dy = 0$, cui ista aequatio ordinis secundi respondet

$$z^2 dv + vz\,dz + avz\,dv + av^2 dz + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0,$$

pro qua mihi difficilior videtur casuum separabilium investigatio, quam pro ipsa $x^m dx + ay^2 dx + b\,dy = 0$. Sit $n = 1$, erit aequatio in quam haec $x^m dx + ay\,dx + b\,dy = 0$ transformatur ista

$$z^2 dv + avz\,dv + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0$$

in qua litera z unicam dimensionem habere censenda est.[1]

Quod aequationis $a\,dy = y^2 dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}\,dx$ ad hanc $a\,dq = q^2 dp - dp$ reductio universalis n denotante numerum quemcunque[2] pendeat ab inventione termini generalis hujus seriei $\overset{m}{A}$, $\overset{m+1}{B}$, $(2m+1)\overset{m+2}{B} + A$, sic ostendo. Reductio illa perficitur hac substitutione

$$x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$$

et

$$y \quad \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n} = \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)a}{p} + \cfrac{1}{\text{etc. usque ad } \cfrac{1}{\cfrac{1a}{p} + q}}}}}.$$

Formula ista continuarum fractionum dat si $n = 1$ hunc valorem $\cfrac{1}{\cfrac{a}{p} + q}$ vel $\dfrac{1}{r+q}$ posito $r = \dfrac{a}{p}$. Si $n = 2$ prodit $\cfrac{1}{3r + \cfrac{1}{r+q}} = \dfrac{r+q}{3r^2 + 3rq + 1}$. Si $n = 3$ fit

$$\cfrac{1}{5r + \cfrac{1}{3r + \cfrac{1}{r+q}}} = \cfrac{1}{5r + \cfrac{r+q}{3r^2+3rq+1}} = \frac{3r^2 + 3rq + 1}{15r^3 + 15r^2q + 6r + q}.$$

Ponatur brevitatis gratia $r + q = s$ seu $q = s - r$, et valores inventi formulae datae respondentes litterae n collocentur in seriem, prodibit

$$\begin{array}{ccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \dfrac{1}{s}, & \dfrac{s}{3rs+1}, & \dfrac{3rs+1}{15r^2s+5r+s}, & \dfrac{15r^2s+5r+s}{105r^3s+35r^2+10rs+1} \quad \text{etc.} \end{array}$$

In qua serie apparet cujusvis fractionis numeratorem esse praecedentis denominatorem. Atque si terminus ordine m sit $\dfrac{A}{B}$ fore sequentem indicis $m+1 = \dfrac{B}{(2m+1)B + A}$. Ex his ergo manifestum est, quod in praecedentibus litteris commemoravi,[3] ex termino generali hujus seriei $\overset{m}{A}$, $\overset{m+1}{B}$, $\overset{m+2}{(2m+1)B + A}$, cognito haberi formulae Riccatianae separationem et integrationem universalem. In illa autem serie ut sit determinata, oportet esse terminum primum $= 1$ et secundum $= s$. Cognitis igitur ex termino generali A et B, factoque $n = m$ erit $x = \left(\dfrac{p}{2m+1}\right)^{2m+1}$ et $y \left(\dfrac{p}{2m+1}\right)^{2m} = \dfrac{A}{B}$ qua substitutione aequatio $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ reducitur ad hanc $a\,dq = q^2dp - dp$, ideoque integrabitur ope logarithmorum universaliter. Aequatio vero $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ modo initio tradito reducitur ad hanc

$$z^2dv + vz\,dz - vz\,dv - v^2dz + a\left(\frac{-2m+1}{2m+1}\right) z\,dv - av\,dz = 0.$$

Haec ergo reducetur ad istam $a\,dq = q^2dp - dp$ substitutione $v = \dfrac{Ap}{(2m+1)\,B}$ et $z = \dfrac{Bp}{(2m+1)\,A}$. Vale et fave

Vir Celeberrime
Tui observantissimo
Leonh. Eulero

Domi d. 3 Jan.
1732

R 731 Reply to nº 16
[Petersburg], January 3rd (14th), 1732
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 130r–131r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 62–64; *Euler-Goldbach* (1965), p. 54–55

18
Goldbach to Euler
Moscow, January 15th / 26th, 1732

Vir Clarissime

In superioribus litteris tuis non animadverteram te in formula A, B, $(2m+1)\,B + A$, sumere m pro exponente terminorum qui competit termino A, quod ex postremis tuis nuper ad me datis nunc satis intelligo[1] videoque simili modo $\int (1 - y^{\frac{1}{n}})^p dy$ pendere a formula generali summarum seriei cuius lex progressionis est[2]

$$((p+n+x) \gtrless (n \pm x))\; A = B,$$

ubi per x intelligo exponentem qui termino A respondet, per $\gtrless$ vero signum divisionis ambiguae, ita ut sumto ex signis $\pm$ superiore, $(n+x)$ sit denominator, sumto inferiore, $(n-x)$ fiat numerator,[3] vel eandem integralem pendere a termino generali summarum seriei cuius lex progressionis est

$$\frac{-\;(n+x-1)\,(p-x+1)\;A}{x\,(n+x)} = B;$$

sed raro admodum contingere arbitror, ut ad terminum huiusmodi generalem expeditior quam ad ipsam integralem quaesitam via sit.

Casu aliquo nuper observavi ex aequationibus quintae potestatis quae hanc formam habent[4]

$$x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(\frac{-\,p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p},$$

quicunque numeri dentur pro m et p, radicem Algebraicam erui posse, quod non contemnendum puto, quotiescunque numerus p in aequatione data $x^5 + \frac{5m}{2}x = n$ per m et n facile determinari potest.[5] Vale.

D[atum] Moscuae $\frac{15.}{26.}$ Januar. 1732.

Tui observantissimus
Christianus Goldbach.

R 732 Reply to n° 17
Moscow, January 15th / 26th, 1732
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 17rv
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 40r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 65–66; *Euler-Goldbach* (1965), p. 55–56

19
Euler to Goldbach
Petersburg, January 31st (February 11th), 1732

Vir Celeberrime

Occasione aequationis ordinis quinti $x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{n}{2}$, cujus radicem *Te assignare posse* scribis[1] quoties est

$$n = \sqrt{\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p}$$

in qua vero determinatio litterae p etiam ab inventione radicis ex aequatione ordinis quinti pendet, non incongruum arbitror communicare, quae de radicibus aequationum proxime inveniendis observavi. Duos omnino modos ad hoc adhiberi solere perspexi, quorum primus est, quo in pluribus aequationis locis loco incognitae x ponitur quantitas non multum ab ea differens, et tum ipsa x quaeritur, deinde hic pro x inventus valor iterum in aliquot locis pro x scribatur, denuoque x quaeratur; hujus operationis ope, quo saepius repetitur, eo propior habebitur quantitas ipsius x. Ut in aequatione $x^2 = 3x + 20$ ponatur 6 loco x ut prodeat haec aequatio $x = \frac{3x+20}{x} = 6\frac{1}{3}$; tum fiat $x = 6\frac{1}{3}$, fiet $x = 6\frac{3}{19}$ porroque eodem modo $x = 6\frac{29}{117}$, tandemque admodum exacte x reperietur. Generaliter etiam, si principio ponatur $x = a$, post unam operationem proveniet $x = 3 + \frac{20}{a}$, post duas $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}$, post tres $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}}$, atque post infinitas $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{\text{etc.}}}}}$. Hujus igitur continuarum fractionum quantitatis valor cognoscitur,[2] est nimirum $= 3 + \frac{\sqrt{89}}{2}$. Hujusmodi etiam est quantitas, quam ad formulam Riccatianam construendam dedi. Hoc etiam modo nititur methodus Cl[arissimi] Bernoullii nostri, quam dedit ope serierum ut vocat recurrentium radices aequationum admodum prope inveniendi.[3] Ita autem hinc eam derivo: sit primo aequatio quadratica $x^2 = ax + b$, fiat ex ea $x = a + \frac{b}{x}$, in qua pono esse $x = \frac{q}{p}$ prope, hoc substituto $x = \frac{aq + bp}{q}$ propius, hocque etiam pro x posito habebitur $x = \frac{a^2q + abp + bq}{aq + bp}$ multo denuo propius; etc. Ex his ipsius x valoribus formatur facile haec series p, q, $aq + bp$, $a^2q + abp + bq$, etc. hanc habens proprietatem A, B, $aB + bA$,[4] adeoque recurrens; si igitur ejus quivis terminus per praecedentem dividitur, quotus dabit valorem ipsi x eo propiorem, quo longius series continuatur; idem quoque evenit, etiam si pro p et q numeri quicunque assumantur, quo vero magis $\frac{q}{p}$ ab x differt, eo longius series est continuanda. Si fuerit proposita aequatio cubica, $x^3 = ax^2 + bx + c$, mutetur ea in $x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$; ad hujus radicem inveniendam pro x assumendi sunt duo valores arbitrarii hujus formae $\frac{q}{p}$ et $\frac{p}{n}$, ex quibus igitur fiet $x^2 = \frac{q}{n}$, prodibit ergo $x = \frac{aq + bp + cn}{q}$. Hinc emergit ista series n, p, q, $aq + bp + cn$, etc. itidem recurrens, et cujus quivis terminus per antecedentem divisus dat x proxime. Simili modo ad aequationis $x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{d}{x^3}$ radicem inveniendam servit haec series m, n, p, q, $aq + bp + cn + dm$, etc. Compendium hic ingens nascitur ex eo, quod principio pro x non unus sed plures valores assumuntur, hocque efficitur ut tot sumendis potestatibus non sit opus, ideoque series facile possit continuari. Aliis forte etiam idoneis modis aequationes possunt disponi, et congrui pro x valores assumi ut series prodeat simplicior, ope cujus radix inveniri potest.

Alter modus appropinquandi est maxime usitatus, atque in eo continetur, ut primo divinando ipsi x propinquus valor habeatur tumque complementum ejus quam proxime investigetur; hoc modo fit aequatio $x^2 = ax + b$, in qua notum sit esse $x = c$ prope; ponatur ergo $x = c + z$, ubi z valde parvum erit respectu c ita ut pro x^2 assumi possit $c^2 + 2cz$, erit ergo $c^2 + 2cz = ac + az + b$ adeoque $z = \frac{c^2 - ac - b}{a - 2c}$ et $x = \frac{c^2 + b}{2c - a}$. Si igitur jam pro c substituatur $\frac{c^2 + b}{2c - a}$, prodibit multo exactius $x = \frac{c^4 + 6bc^2 + b^2 - 4abc + a^2b}{4c^3 + 4bc - 6ac^2 + 4a^2c - 2ab - a^3}$, et ita porro. Hanc methodum vehementer amplificavit Cl[arissimus] Taylor;[5] Aequationem in qua inest incognita x reducere jubet ad nihilum ut prodeat haec forma $X = 0$ ubi X denotat quantitatem quamcunque ex x et cognitis compositam, deinde assumit quantitatem ipsi x propinquam quae sit z, eamque in X pro x substituit; prodibit ergo quantitas ex z et cognitis composita, quae sit $= y$; namque quia non est $z = x$ etiam haec quae prodit quantitas non esse potest $= 0$. Hoc facto sumantur differentialia positis y et z variabilibus, erit inquit $x = \dfrac{z\,dy - y\,dz}{dy}$ q[uam] p[roxime]. Quae non solum pro aequationibus algebraicis, sed etiam transcendentibus valet. Ut sit $\sqrt[2]{7x - x^2} - \sqrt[3]{9 + x^3} = 0$, ponatur $x = z$; erit $\sqrt[2]{7z - z^2} - \sqrt[3]{9 + z^3} = y$, hincque

$$dy = \frac{7dz - 2z\,dz}{2\sqrt[2]{7z - z^2}} - \frac{z^2 dz}{\sqrt[3]{(9 + z^3)^2}}$$

adeoque

$$x = z - \frac{2y\sqrt[2]{7z - z^2} \cdot \sqrt[3]{(9 + z^3)^2}}{(7 - 2z)\sqrt[3]{(9 + z^3)^2} - 2z^2\sqrt{7z - z^2}}.$$

Ponatur $z = 1$ erit $y = \sqrt{6} - \sqrt[3]{10}$ adeoque[6]

$$x = 1 - \frac{12\sqrt[3]{100} + 20\sqrt{6}}{5\sqrt[3]{100} - 2\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6} - 7\sqrt[3]{100}}{5\sqrt[3]{100} - 2\sqrt{6}}.$$

Accuratius deinde idem pertractat, dicitque fore $x = z + v$. At v ex hac aequatione debet determinari

$$y + \frac{v\,dy}{1 \cdot dz} + \frac{v^2 ddy}{1 \cdot 2 \cdot dz^2} + \frac{v^3 d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dz^3} + \text{etc.} = 0.$$

Si ex hac aequatione definiri posset v accurate, etiam re vera foret $x = z + v$. In secundis vero differentiationibus dz pro constante habetur. Inveni vero esse quam proxime

$$v = \frac{-y\,dz}{dy} \cdot \frac{-\dfrac{y^2dz\,d^2y}{1 \cdot 2 \cdot dy^2} + \dfrac{y^3dz\,d^3y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dy^3} - \dfrac{y^4dz\,d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dy^4} + \text{etc.}}{dy - \dfrac{y\,d^2y}{1 \cdot dy} + \dfrac{y^2d^3y}{1 \cdot 2 \cdot dy^2} - \dfrac{y^3d^4y}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot dy^3} + \text{etc.}}$$

Sit $x^3 - a = 0$, erit $z^3 - a = y$, et $dy = 3z^2dz$, $ddy = 6z\,dz^2$ et $d^3y = 6dz^3$. Hinc habebitur

$$v = \frac{-y}{3z^2} \cdot \frac{-\dfrac{y^2}{3z^3} + \dfrac{y^3}{27z^6}}{3z^2 - \dfrac{2y}{z} + \dfrac{y^2}{3z^4}} = \frac{-3yz^2 + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{2y^3}{9z^4}}{9z^4 - 6yz + \dfrac{y^2}{z^2}}$$

atque

$$x = \frac{16z^9 + 51az^6 + 11a^2z^3 + 2a^3}{36z^8 + 36az^5 + 9a^2z^2}.$$

Nimis quidem est operosa haec methodus, si pluries eandem repetere volueris, ponendo iterum loco z, quod pro x jam erat inventum, sed forte etiam compendia poterunt excogitari, quae hanc aeque commodam reddunt, ac priorem methodum.[7] Ad has autem operationes continuandas requiritur series hujus proprietatis, $\overset{n}{x}$, $\overset{n+1}{P}$, $\overset{n+2}{X}$, ut X eodem modo determinetur in P, quo P determinatur in x. Nam pro hac aequatione $x^2 = ax + b$ sunt ipsius x valores successive inventi hi

$$c,\ \frac{c^2+b}{2c-a},\ \frac{c^4+6bc^2+b^2-4abc+a^2b}{4c^3+4bc-6ac^2+4a^2c-2ab-a^3},\ \text{etc.}\ \ldots,\ A,\ \frac{A^2+b}{2A-a}.$$

Inveni autem quomodocunque P detur in x fore

$$X = P + \frac{(P-x)\ dP}{1\cdot dx} + \frac{(P-x)^2\, ddP}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{(P-x)^3\, d^3P}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \text{etc.}$$

Hujusmodi aequatio etiam dari potest pro curva, cujus abscissae si fuerint 1, 2, 3, 4, etc., respondentes applicatae sunt 1, 2, 6, 24, 120, etc., scilicet in aequatione pro ea inerunt differentialia omnium graduum.[8]

Vale et fave
Vir Celeberrime
Tui observantissimo
Leonhardo Euler.

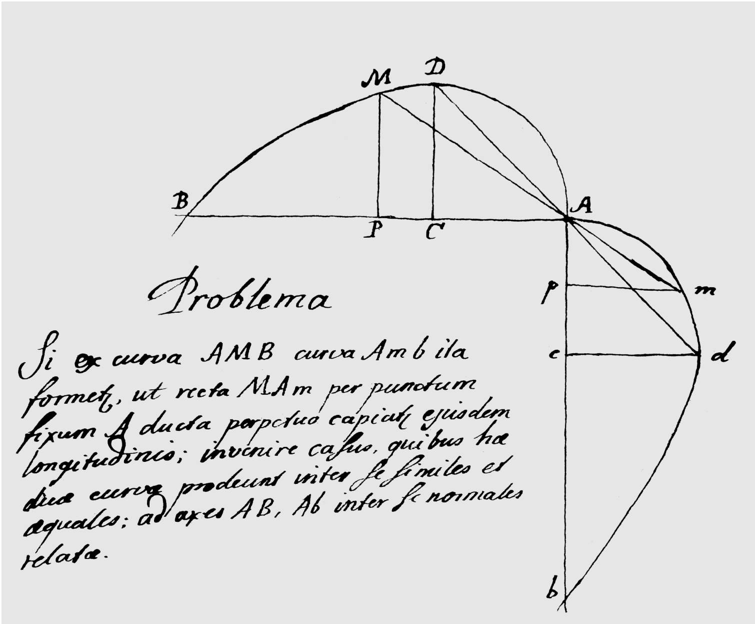
Petropoli d. 31 Jan. 1732.

R 733 Reply to n° 18
Petersburg, January 31st (February 11th), 1732
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 132r–133v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 67–71; *Euler-Goldbach* (1965), p. 56–59

20
Euler to Goldbach
[Petersburg], after January 1732[1]

Problema

Si ex curva AMB curva Amb ita formetur, ut recta MAm per punctum fixum A ducta perpetuo capiatur ejusdem longitudinis; invenire casus, quibus hae duae curvae prodeunt inter se similes et aequales, ad axes AB, Ab inter se normales relatae.[2]



Solutio

Posita longitudine constante $Mm = Dd = AB = 2a$; sit $AP = x$; $PM = y$; atque sumta nova variabili z; sit Q talis functio ipsius z, quae posita z negativa abeat in sui ipsius negativam, cujusmodi sunt, mz; $mz^3 + nz$; etc. Sequenti modo per z coordinatae x et y determinabuntur:

$$x = \frac{(a+z)\sqrt{(aa+zz+2Q)}}{\sqrt{2}\,(aa+zz)};$$
$$y = \frac{(a+z)\sqrt{(aa+zz-2Q)}}{\sqrt{2}\,(aa+zz)}.$$

Eliminando ergo z et Q; infinitae prodibunt aequationes inter x et y, ac proinde innumerabiles curvae AMB problemati satisfacientes. Q[uod] E[rat] I[nveniendum].

Coroll[arium] 1. Erit ergo $\sqrt{(xx+yy)} = a + z$. Atque

$$x : y = \sqrt{(aa+zz+2Q)} : \sqrt{(aa+zz-2Q)}\,.$$

Coroll[arium] 2. Sumta $AC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, fiet $CD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ atque $AD = a$; punctoque D in altera curva sui homologum d respondebit in generatione.

Exemplum.

Sit $Q = naz$; erit $xx : yy = aa + 2naz + zz : aa - 2naz + zz$, seu

$$\begin{aligned} & xx \begin{pmatrix} 2aa + xx + yy & -2a\sqrt{(xx+yy)} \\ +2naa & -2na\sqrt{(xx+yy)} \end{pmatrix} \\ = \quad & yy \begin{pmatrix} 2aa + xx + yy & -2a\sqrt{(xx+yy)} \\ -2naa & +2na\sqrt{(xx+yy)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$2a\left((n+1)\,xx + (n-1)\,yy\right)\sqrt{(xx+yy)} = 2aa\left((n+1)\,xx + (n-1)\,yy\right) + x^4 - y^4,$$

unde sequens oritur aequatio pro curva satisfaciente

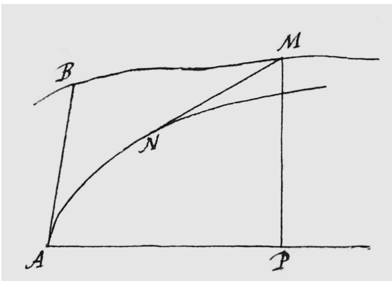
$$\begin{aligned} x^8 \quad - \quad & 2x^4y^4 + y^8 - 4na^2\left((n+1)\,x^2 + (n-1)\,y^2\right)(xx+yy)^2 \\ + \quad & 4a^4\left((n+1)\,x^2 + (n-1)\,y^2\right)^2 = 0, \end{aligned}$$

quae jam innumerabiles praebet curvas quaesitas.

R 734 Undated note, filed with letter nº 24 from July 23rd (August 3rd), 1737
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 178rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 72–73; *Euler-Goldbach* (1965), p. 59–60

21
Euler to Goldbach
[Petersburg], before March 17th (28th), 1735[1]

Constructio aequationis $dy + y^2dx = X\,dx$, in qua X quomodocunque datur per x et constantes, ope motus tractorii.[2]



Describatur super axe AP curva BM hoc modo, ut sumta abscissa $AP = 2b\int dx\sqrt{X}$ applicata PM sit $= \dfrac{b}{2}\,\ell X$. Tum super curva BM filum BA longitudinis b motu tractorio producatur, ut terminus A curvam AN describat, eritque ubique $NM = b$. Ponatur tangens semissis anguli $NMP = t$ (posito sinu toto

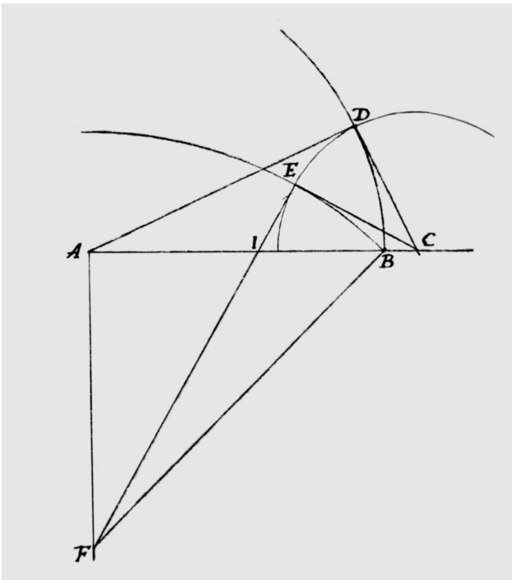
$= 1)$,[3] erit $y = t\sqrt{X}$. Quare cum curva BM ex x et X construatur, ideoque t per x et X cognoscatur, dabitur y quoque per x; hacque ratione aequatio proposita $dy + y^2dx = X\,dx$ ope motus tractorii construitur. Si ponatur $X = x^m$, habetur casus a Riccato propositus[4] pro eoque est $AP = \dfrac{4bx^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}$ et $PM = \dfrac{mb}{2}\,\ell\,x$. Si $m = -2$ est $AP = 2b\,\ell\,x$ et $PM = -\,b\,\ell\,x$. Hoc ergo casu curva BM fit linea recta, et curva AN tractoria communis.[5]

R 735 Undated note, written before March 17th (28th), 1735
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 171, fol. 1
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 60–61

22
Goldbach to Euler
Petersburg, October (1st) 12th, 1735

Vir Clarissime

Hesterni tui theorematis[1] praeterita nocte hanc demonstrationem imaginatus sum quam mane veram deprehendi:



Dato rectangulo quocunque ADC ducatur indefinita AF perpendicularis ipsi AC, ex qua abscindatur $AB = AD$; si ex puncto C ducatur quaevis $CE = CD$ et ex E erigatur perpendicularis occurrens ipsi AF in F, dico esse $EF = BF$.

Sit $AB = AD = a$, $CD = CE = b$, $AC = \sqrt{a^2 + b^2} = f$, $AF = e$, $AI = x$. Erit

$$AF : AI \quad :: \quad CE : EI = \frac{bx}{e};$$
$$AF : FI \quad :: \quad CE : CI = \frac{b\sqrt{e^2 + x^2}}{e} = f - x,$$

ergo

$$x = \frac{e^2 f \pm e\sqrt{e^2 f^2 + (b^2 - f^2)(e^2 - b^2)}}{e^2 - b^2}.$$

Ergo

$$FE = FI + IE = \sqrt{e^2 + x^2} + \frac{bx}{e} = \sqrt{a^2 + e^2} = FB;$$ [2]

ex quo patet, cum puncta E et F sint arbitraria, circulum quemcunque ductum radio FE ad angulos rectos secari per circulum ductum radio CE.

D[atum] Petrop[oli] 12. Oct. 1735.

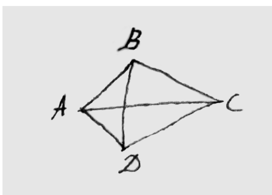
Tui studiosissimus
C. G.

R 736 Petersburg, October (1st) 12th, 1735
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 18r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 74; *Euler-Goldbach* (1965), p. 61

23
Goldbach to Euler
[Petersburg], February 1736

Leonhardo Eulero[1]

Problema mecum communicatum:



Datis in quadrilatero $ABCD$ omnibus lateribus et altera diagonali AC, invenire alteram diagonalem BD: sic solvi posse puto: Sit $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$,

$DA = d$, $BD = y$. Quoniam data diagonali alterutra datur etiam area quadrilateri, quam pono $= \frac{e}{4}$, erit

$$\left(-\left(a^2-b^2\right)^2+2\left(a^2+b^2\right)y^2-y^4\right)^{\frac{1}{2}}+\left(-\left(c^2-d^2\right)^2+2\left(c^2+d^2\right)y^2-y^4\right)^{\frac{1}{2}}=e,$$

unde positis

$$\begin{aligned} -\left(a^2-b^2\right)^2 &= \alpha; \qquad +2\left(a^2+b^2\right)=\beta,\\ -\left(c^2-d^2\right)^2 &= \gamma; \qquad +2\left(c^2+d^2\right)=\delta, \end{aligned}$$

et

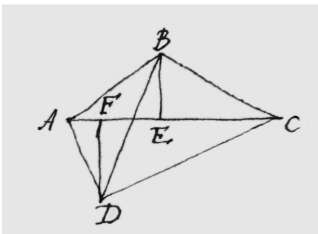
$$\begin{aligned} \frac{2e^2\delta-\left(\alpha-\gamma-e^2\right)(\beta-\delta)}{(\beta-\delta)^2+4e^2} &= \pi,\\ \frac{4e^2\gamma-\left(\alpha-\gamma-e^2\right)^2}{(\beta-\delta)^2+4e^2} &= \tau, \end{aligned}$$

pervenitur ad duplicem valorem

$$y=\left(\pi\pm\sqrt{\pi^2+\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$$

altero diagonalem datam AC, altero quaesitam BD exprimente.

Aliter:



Quoniam datis quatuor lateribus et diagonali AC, dantur etiam perpendiculares ad diagonalem, $BE = f$, $DF = g$, et intercepta $FE = h$, erit diagonalis quaesita $BD = \sqrt{(f+g)^2+h^2}$.

R 737 [Petersburg], February 1736
Copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 42v–43r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 75–76; Euler-Goldbach (1965), p. 62

24

Euler to Goldbach

[Petersburg], July 23rd (August 3rd), 1737

Vir Celeberrime

Cum in hesternam formulam, quam mecum communicare voluisti,[1] diligentius essem meditatus, incidi in sequentes expressiones non solum satis generales sed etiam perquam commodas, ex quibus omnes Tuae formulae Vir Celeberrime expedite derivari queant; posita scilicet abscissa communi $= x$, sint utriusque curvae applicatarum elementa

$$dx\left(\sqrt{RS} \pm \sqrt{(R+1)(S-1)}\right)$$

unde ipsarum curvarum elementa erunt

$$dx\left(\sqrt{(R+1)\,S} \pm \sqrt{R\,(S-1)}\right).$$

Quo igitur utraque curva fiat algebraica, pro R et S tales ipsius x accipiendae erunt functiones, ut tam $dx\sqrt{RS}$ quam $dx\sqrt{(R+1)(S-1)}$ integrationem admittant. Deinde ut arcuum summa algebraice exprimi queat, hanc quoque formulam $dx\sqrt{(R+1)\,S}$ oportet esse integrabilem. Hoc autem pluribus modis facile praestabitur, sumendis pro R et S talibus functionibus ut RS; $(R+1)(S-1)$; et $S\,(R+1)$ fiant quantitates vel ex duobus vel ex uno termino constantes; quippe in quibus exponentes ita accipere licet, ut quaesito satisfiat.

I. Sit $R = ax^m$ et $S = \dfrac{1}{ax^m}$ fient elem[enta] applicatarum

$$= dx\left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{ax^m} - ax^m\right)}\right)$$

et elem[enta] curvarum

$$= dx\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{ax^m}\right)} \pm \sqrt{(1 - ax^m)}\right)$$

atque debebit esse $m = \dfrac{-1}{4i+1}$, denotante i numerum quemcunque affirmativum integrum.

II. Sit $R = ax^m - 1$ et $S = bx^n$ fient applicatarum e[le]menta

$$= dx\left(\sqrt{\left(abx^{m+n} - bx^n\right)} \pm \sqrt{\left(abx^{m+n} - ax^m\right)}\right)$$

et curvarum elementa

$$= dx\left(x^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{ab} \pm \sqrt{(ax^m - 1)(bx^n - 1)}\right).$$

Quo autem tam utraque applicata, quam summa arcuum fiat algebraica vel esse debet $m = \dfrac{4i+2}{4ik-1}$ et $n = \dfrac{4k+2}{4ik-1}$ vel etiam $m = \dfrac{-2i}{2ik+i+k}$ atque $n = \dfrac{-2k}{2ik+i+k}$ existentibus i et k numeris integris affirmativis.

III. Sit $R = \dfrac{ab}{c}x^m - \dfrac{abb}{cc}$ et $S = \dfrac{c}{b}x^m + 1$, fient applicatarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m}\left(\frac{c}{b} - \frac{ab}{c} + ax^m\right) \pm \sqrt{\left(ax^{2m} - \frac{abb}{cc}\right)}\right)$$

atque curvarum elementa

$$= dx\left(\sqrt{x^m}\left(ax^m - \frac{ab}{c}\right) \pm \sqrt{(b + cx^m)}\left(\frac{1}{b} - \frac{ab}{cc} + \frac{a}{c}x^m\right)\right)$$

sumaturque $m = \dfrac{-1}{2i+1}$.

IV. Sit $R = a^2x^{2m} + 2ax^m$ et $S = bx^m$ erunt applicat[arum] elementa

$$= dx\left(x^m\sqrt{\left(a^2bx^m + 2ab\right)} \pm (ax^m + 1)\sqrt{(bx^m - 1)}\right)$$

et curvarum elem[enta]

$$= dx\left(bx^m(ax^m + 1) \pm \sqrt{x^m}\left(a^2x^m + 2a\right)(bx^m - 1)\right)$$

eritque vel $m = \dfrac{1}{i}$ vel $m = \dfrac{-2}{2i+3}$.

Hujusmodi autem formulae plures aliae hinc possunt derivari, per idoneos valores loco R et S substituendos. Vale et favere perge

Vir Celeberrime

Tui Observantissimo

L. Euler

ad d[iem] 23 Jul. 1737.

R 738 [Petersburg], July 23rd (August 3rd), 1737
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 180rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 77–79; *Euler-Goldbach* (1965), p. 62–63

25
Goldbach to Euler
[Petersburg], (September 30) October 11th, 1738

Inveni ego hodie mane[1] formulam generalem in infinitum excurrentem (sed quae abrumpatur quotiescunque exponens terminorum est integer affirmativus) pro serie[2]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{30}-0+\frac{1}{42}+0 \;⁜\; \&c.$$

quae formula si Tibi, Vir Celeberrime, iam nota est, ego inventoris secundi laude contentus ero, sin minus, formulam ipsam libenter tecum communicabo.

A. 1738, d. 11. Oct. st. n.

C. G.[3]

R 739 [Petersburg], (September 30) October 11th, 1738
Address (fol. 19v): “A Monsieur / Monsieur Euler / de l’Academie des Sciences”
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 19r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 80; *Euler-Goldbach* (1965), p. 64

26
Goldbach to Euler
[Petersburg], (October 27th) November 7th, 1739

Vir Clarissime

Ex inventis tuis demonstrari potest,[1] in summa seriei

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^n} &- \frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}\\ &+ \frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{11^n}-\frac{1}{12^n}-\frac{1}{13^n}+\frac{1}{14^n}+\frac{1}{15^n}+\frac{1}{16^n}\\ &- \frac{1}{17^n}-\frac{1}{18^n}-\frac{1}{19^n}-\frac{1}{20^n}+\frac{1}{21^n}+\frac{1}{22^n}-\frac{1}{23^n}+\frac{1}{24^n}+\&c.\end{aligned}$$

quam continuare possum quousque libuerit, si ponatur $=\alpha\pi^n$, numerum α esse rationalem et assignabilem si n sit numerus affirmativus par; et in casu $n=1$, totam seriem fieri $=0$.

D[atum] d. 7. Nov. 1739. st. n.

Tui observantissimus
C. G.

Ut sciri possit an terminus quicunque datus $\dfrac{1}{x^n}$ exigat signum + an signum −? Dico, si x est numerus primus, locum habere signum −; si x productum ex duobus primis, locum habere signum +; si x productum ex tribus primis, locum habere signum −; et ita porro.

V[erbi] gr[atia] $\dfrac{1}{18^n}$ exigit signum −, quia producitur ex tribus 2, 3, 3; $\dfrac{1}{24^n}$ exigit signum + quia producitur ex quatuor 2, 2, 2, 3.

R 740 [Petersburg], (October 27th) November 7th, 1739
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 21r
Address (fol. 21v): "Pour / M.r Le Prof[esseur] Euler"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 81; *Euler-Goldbach* (1965), p. 66

27
Euler to Goldbach
[Petersburg, November 23rd / December 4th, 1739][1]

Vir Celeberrime

Si habeatur Series quaecunque: a, b, c, d, e, etc. atque ponatur

$$\begin{aligned} P &= a+b+c+d+e+\text{etc.} \\ Q &= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\text{etc.} \\ R &= a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+\text{etc.} \\ S &= a^4+b^4+c^4+d^4+e^4+\text{etc.} \\ &\ \text{etc.} \end{aligned}$$

ac praeterea ex terminis a, b, c, d, etc. formentur

1. facta ex singulis quorum summa sit $A = P$
2. facta ex binis, quorum summa sit $= B$
3. facta ex ternis, quorum summa sit $= C$
4. facta ex quaternis, quorum summa sit $= D$

etc.

His positis si numerus, cujus logarithmus est = 1, denotetur littera e (quae ne confundatur cum termino e), erit

$$1+A+B+C+D+\text{etc.} = \mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\text{etc.}};$$

sumendis vero terminis alternis, erit

$$1+B+D+F+H+\text{etc.} = \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\text{etc.}}+\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S-\text{etc.}}}{2}$$

atque

$$A + C + E + G + I + \text{etc.} = \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\,\text{etc.}} - \mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\,\text{etc.}}}{2}.$$

Quod si nunc pro serie $a + b + c + d +$ etc. capiatur series potestatis cujuscunque numerorum primorum ita ut sit

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}\\
Q &= \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \text{etc.}\\
R &= \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \text{etc.}\\
S &= \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \frac{1}{11^{4n}} + \text{etc.}\\
& \text{etc.}
\end{aligned}$$

erit A ipsa series numerorum primorum P; B series factorum ex binis, C series factorum ex ternis et ita porro: unde fiet $1 + A + B + C + D +$ etc. series omnium numerorum puta

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.} = \alpha\pi^n.$$

Quamobrem erit

$$\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\,\text{etc.}} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{ etc.} = \alpha\pi^n,$$

simili vero modo erit

$$\mathrm{e}^{Q+\frac{1}{2}S+\frac{1}{3}V+\frac{1}{4}X+\,\text{etc.}} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{etc.} = \beta\pi^{2n},$$

quae expressio per illam divisa dabit

$$\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S-\frac{1}{5}T+\frac{1}{6}V-\,\text{etc.}} = \frac{\beta\pi^n}{\alpha},$$

unde demonstrari potest egregia illa series

$$1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \text{etc.}$$

cujus summam Tu, Vir Celeberrime, demonstrasti esse $= \dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}$. His praemissis cum sit A series ipsorum numerorum primorum, B series factorum ex binis primis, C

ex ternis et ita porro; scilicet

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\text{etc.}\\
B &= \frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{14^n}+\text{etc.}\\
C &= \frac{1}{8^n}+\frac{1}{12^n}+\frac{1}{18^n}+\frac{1}{20^n}+\frac{1}{27^n}+\text{etc.}\\
D &= \frac{1}{16^n}+\frac{1}{24^n}+\frac{1}{36^n}+\frac{1}{40^n}+\frac{1}{54^n}+\text{etc.}\\
E &= \frac{1}{32^n}+\frac{1}{48^n}+\frac{1}{72^n}+\frac{1}{80^n}+\frac{1}{108^n}+\text{etc.}\\
&\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

sequitur fore

$$1+A+B+C+D+\text{etc.}=\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}}=\alpha\pi^n$$

$$\begin{aligned}
1+B+D+F+\text{etc.} &= \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}}+\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n\\
A+C+E+G\quad\text{etc.} &= \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\text{etc.}}-\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\text{etc.}}}{2}=\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n
\end{aligned}$$

hincque

$$1-A+B-C+D-E+F-G+\text{etc.}=\frac{\beta}{\alpha}\pi^n,$$

quae est ipsa series a Te, Vir Celeb[errime], primum inventa.

Denique ex his constat fore summam seriei $1+B+D+F+\text{etc.}$ in qua insunt producta ex numero pari numerorum primorum, ad summam seriei $A+C+E+G+\text{etc.}$ quae continet numeros primos ipsos et producta ex numero impari eorum, uti est $\alpha^2+\beta$ ad $\alpha^2-\beta$, quae est proportio quam hodie mihi inveniendam proposuisti. Vale Vir Celeberrime, mihique favere perge.

R 741 [Petersburg, November 23rd / December 4th, 1739]
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 209r–210r
Address (fol. 210v): "A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller de Justice et Membre / de l'Academie Imperiale des Sciences / à / St. Petersburg"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 82–85; *Euler-Goldbach* (1965), p. 68–70

28

Goldbach to Euler

[Petersburg], November 24th (December 5th), 1739[1]

Vir Celeberrime

Gratissima mihi fuerunt quae heri scripsisti;[2] mea solutio haec est: Sit

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\&c. &= \alpha\pi^n \\ 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\&c. &= \beta\pi^{2n} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{11^n}+\&c. = M,$$ [3]

cuius denominatores posita $n=1$ sunt producta primorum numero imparium,

$$1+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}+\&c. = N,$$

cuius denominatores posita $n=1$ sunt producta primorum numero parium;[4] erit $\alpha\pi^n+\dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}=2M$, $\alpha\pi^n-\dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}=2N$. Sed nescio an methodus tua valeat ad determinandam verbi gr[atia] rationem inter terminos affirmativos et negativos huius seriei

$$\frac{1}{4^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{12^n}+\frac{1}{16^n}-\frac{1}{18^n}-\frac{1}{20^n}+\&c.$$

cuius denominatores posita $n=1$ sunt omnes potestates numerorum et omnia earum multipla; termini notati signo $+$ continent denominatores productos ex primis numero paribus, termini notati signo $-$ … ex imparibus, quam rationem tamen eruere potero si operae pretium visum fuerit.[5] Sed multo magis Tibi, opinor, placebit quod heri inveni: Sit

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\&c. = \alpha\pi^n,$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\&c. = P$$

(cuius seriei denominatores continent omnes numeros primos), erit

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\&c. = (P-1)^2+1-\frac{2}{\alpha\pi^n}$$

modo sit $n>1$.[6]

Vale et fave
Tuo C. G.[7]

24. Nov. 1739.

R 742 Reply to n° 27
[Petersburg], November 24th (December 5th), 1739
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 23rv
Address (fol. 24v): "Pour / M.r Le Prof[esseur] Euler"
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 48v–49r (fol. 49 was partially cut out from the copybook)
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 86–88; *Euler-Goldbach* (1965), p. 71–72

29
Euler to Goldbach
[Petersburg], November 26th (December 7th), 1739

Vir Celeberrime

Considerans rationem, quae intercedit inter summam seriei

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{etc.}$$

et hanc expressionem $(P-1)^2+1-\dfrac{2}{\alpha\pi^n}$ deprehendi seriem aliquanto esse minorem,[1] ac fore

$$(P-1)^2+1-\frac{2}{\alpha\pi^n}=\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} +2\cdot\ \text{sum[mae] factorum ex ternis}\\ -2\cdot\ \text{sum[mae] factorum ex quaternis}\\ +2\cdot\ \text{sum[mae] factorum ex quinis}\\ \qquad\qquad\text{etc.}\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{terminis inaequalibus}\\ \text{seriei } \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\text{etc.}\end{array}$$

Quod si autem duplices istae factorum ex ternis, quaternis etc. summae, quippe quae per inventa Tua habentur, substituantur, prodit aequatio identica: quod idem non dubito, quin interim Ipse observaveris Vir Celeb[errime].

Incidi heri in hanc seriem non parum curiosam

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{2}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{2}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{3}{8^n}+\frac{2}{9^n}+\frac{2}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{4}{12^n}+\text{etc.}$$

cujus numeratores indicant, quot modis denominatores respondentes sint hujus seriei $2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+\text{etc.}$ vel termini ipsi, vel producta ex binis vel ternis, vel quaternis vel ita porro: sic denominator 60^n numeratorem habebit 11, quia 60 his undecim modis componitur:

I.	60	VII.	$2\cdot 2\cdot 15$
II.	$2\cdot 30$	VIII.	$2\cdot 3\cdot 10$
III.	$3\cdot 20$	IX.	$2\cdot 5\cdot 6$
IV.	$4\cdot 15$	X.	$3\cdot 4\cdot 5$
V.	$5\cdot 12$	XI.	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$
VI.	$6\cdot 10$		

Hujus seriei summam casu, quo $n = 2$, inveni esse $= 2$; atque initio arbitratus sum etiam reliquis casibus summam rationaliter exhiberi posse: verum rem diligentius scrutatus inveni casu $n = 4$ summam fore $= \dfrac{8\mathrm{e}^{\pi}\pi}{\mathrm{e}^{2\pi}-1} = \dfrac{8\pi}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}$; ubi est proxime $\mathrm{e}^{\pi} = 23,1407$.[2]

Deinde omnia fere Theoremata, quae de seriebus numerorum primorum aliisque hinc natis protulisti Vir Celeb[errime], multo latius patere observavi. Si enim sit

$$A = \alpha = a + b + c + d + \text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \text{summae factorum ex binis} \\ C = \text{summae factorum ex ternis} \\ D = \text{summae factorum ex quaternis} \\ \qquad\qquad\text{etc.} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{terminis seriei } A\text{, terminis} \\ \text{aequalibus non exceptis,}\end{array}$$

itemque

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \text{summae factorum ex binis} \\ \gamma = \text{summae factorum ex ternis} \\ \delta = \text{summae factorum ex quaternis} \\ \qquad\qquad\text{etc.} \end{array}\right\} \text{terminis inaequalibus seriei } A \text{ vel } \alpha,$$

fueritque

$$\begin{aligned} 1 + A + B + C + D + E + \text{etc. } &= s \\ 1 - A + B - C + D - E + \text{etc. } &= t \end{aligned}$$

erit

$$\begin{aligned} 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc. } &= \frac{1}{t} \\ 1 - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \text{etc. } &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Hincque

$$\begin{aligned} 1 + B + D + F + \text{etc. } &= \frac{s+t}{2} \\ A + C + E + G + \text{etc. } &= \frac{s-t}{2} \\ 1 + \beta + \delta + \zeta + \text{etc. } &= \frac{s+t}{2st} \\ \alpha + \gamma + \varepsilon + \eta + \text{etc. } &= \frac{s-t}{2st}, \end{aligned}$$

item

$$\begin{aligned} (B-\beta) + (C-\gamma) + (D-\delta) + \text{etc. } &= s - \frac{1}{t} \\ (B-\beta) - (C-\gamma) + (D-\delta) - \text{etc. } &= t - \frac{1}{s} \\ (C-\gamma) + (E-\varepsilon) + \text{etc. } &= \frac{1}{2}(s-t)\left(1 - \frac{1}{st}\right) \\ (B-\beta) + (D-\delta) + \text{etc. } &= \frac{1}{2}(s+t)\left(1 - \frac{1}{st}\right). \end{aligned}$$

Quod si autem loco terminorum a, b, c, d, etc. sumantur eorum quadrata sitque

$$A'' = \alpha'' = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$$

hincque series B'', C'', D'', etc., itemque β'', γ'', δ'', ε'' etc. simili modo formentur, quo supra B, C, D, etc., β, γ, δ etc. ex serie $A = \alpha$, fiet

$$1 + A'' + B'' + C'' + D'' + \text{etc.} \ = st$$

et

$$1 - \alpha'' + \beta'' - \gamma'' + \delta'' - \text{etc.} \ = \frac{1}{st};$$

unde erit generaliter

$$1 - A + B - C + D - \text{etc.} \ = \frac{1 + A'' + B'' + C'' + D'' + \text{etc.}}{1 + A + B + C + D + \text{etc.}}$$

atque

$$(1 + \alpha + \beta + \gamma + \text{etc.})\,(1 - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \text{etc.}) = 1 - \alpha'' + \beta'' - \gamma'' + \delta'' - \text{etc.}$$

Ex his nunc si pro serie $a + b + c + d + \text{etc.}$ substituatur haec $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$ secundum numeros primos procedens, sequentur omnia omnino theoremata, quae mecum communicare voluisti. Vale Vir Celeberrime ac favere perge

Tui Observantissimo
L. Eulero

d. 26 Nov. 1739

R 743 Reply to n° 28
[Petersburg], November 26th (December 7th), 1739
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 213r–214r
Address (fol. 214v): "A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller de Justice et Membre / de l'Academie Imp[eriale] / à / St. Petersburg"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 89–92; *Euler-Goldbach* (1965), p. 73–75

30
Euler to Goldbach
[Petersburg, ca. December 1739][1]

Vir Excellentissime

Seriei cujus terminus generalis est

$$\frac{1}{64x^2-64x+15} \qquad \text{vel} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8x-5}-\frac{1}{8x-3}\right)$$

summa est

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(zz-z^4\right)\,dz}{1-z^8}=\frac{1}{2}\int\frac{zz\,dz}{(1+zz)\,(1+z^4)}=-\frac{1}{4}\int\frac{dz}{1+zz}+\frac{1}{4}\int\frac{(1+zz)\,dz}{1+z^4}$$

si post integrationem ponatur $z=1$.[2] At seriei cujus terminus generalis est

$$=\frac{3m}{64xx-64x+7}=\frac{m}{2}\left(\frac{1}{8x-7}-\frac{1}{8x-1}\right)$$

summa est

$$=\frac{m}{2}\int\frac{\left(1-z^6\right)\,dz}{1-z^8}=\frac{m}{2}\int\frac{\left(1+zz+z^4\right)\,dz}{(1+zz)\,(1+z^4)}=\frac{m}{4}\int\frac{dz}{1+zz}+\frac{m}{4}\int\frac{(1+zz)\,dz}{1+z^4}$$

posito post integrationem $z=1$. Verum est $\displaystyle\int\frac{dz}{1+zz}=\frac{\pi}{4}$;

$$\int\frac{dz}{1+z^4}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ell\left(1+\sqrt{2}\right) \quad \text{et} \quad \int\frac{zz\,dz}{1+z^4}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\ell\left(1+\sqrt{2}\right):$$

Quare si a serie cujus terminus generalis est $\dfrac{1}{(8x-5)\,(8x-3)}$ subtrahatur series $=\dfrac{3m}{(8x-7)\,(8x-1)}$ seriei resultantis summa erit $=-\dfrac{(1+m)\,\pi}{16}+\dfrac{(1-m)\,\pi}{8\sqrt{2}}$.

Vel seriei cujus terminus generalis est $=\dfrac{3m}{64xx-64x+7}-\dfrac{1}{64xx-64x+15}$ summa est $=\dfrac{(m+1)\,\pi}{16}+\dfrac{(m-1)\,\pi}{8\sqrt{2}}$. Quare si $m=1$ summa erit $=\dfrac{\pi}{8}$; at ut summa sit $=0$ oportet esse $m+1+m\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ seu $m=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

II. Si in serie $\dfrac{1}{x\,(2x-1)\,(4x-1)}$ summa terminorum parium ab imparibus subtrahatur, prodit series

$$\frac{1}{1\cdot1\cdot3}-\frac{1}{2\cdot3\cdot7}+\frac{1}{3\cdot5\cdot11}-\frac{1}{4\cdot7\cdot15}+\text{etc.}$$

Quae resolvitur in has tres:

$$\begin{array}{llllllll}
+1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\text{etc.} & = \int \frac{dz}{1+z} \\
+\frac{2}{1} & -\frac{2}{3} & +\frac{2}{5} & -\frac{2}{7} & +\frac{2}{9} & -\frac{2}{11} & +\text{etc.} & = \int \frac{2\,dz}{1+zz} \\
-\frac{8}{3} & +\frac{8}{7} & -\frac{8}{11} & +\frac{8}{15} & -\frac{8}{19} & +\frac{8}{23} & -\text{etc.} & = -\int \frac{8zz\,dz}{1+z^4}
\end{array}$$

et summa omnium est $= \ell\,2 + \frac{\pi}{2} - \pi\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}}\ell\left(1+\sqrt{2}\right)$ unde non video quomodo summa possit esse[3] $= \pi - 4\,\ell\,2$; sin autem res ita se haberet foret $\pi = \frac{10\,\ell\,2 + 4\sqrt{2}\cdot\ell\left(1+\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}+1}$.

III. Seriei $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + $ etc. summa est

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dz\,\left(1 - z + zz - z^3\right)}{1+z^4} = \int \frac{dz\,(1+zz)}{1+z^4} - \int \frac{z\,dz}{1+z^4} - \int \frac{z^3 dz}{1+z^4} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{\ell\,2}{4}.
\end{aligned}$$

IV. Si fuerit $\int d\,\frac{xx\,dz}{dx} = \int \frac{dx}{1+x^3}$ erit utique

$$dz = \frac{dx}{xx}\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{dx}{xx}\left(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}\right)$$

et

$$z = C + \ell\,x - \frac{x^3}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{6\cdot 7} - \frac{x^9}{9\cdot 10} + \text{etc.}$$

Constans autem C si z deberet simul cum x evanescere foret infinita; sin autem C maneat indefinita tum casu $x = 1$ quantitas z indefinitum hoc est quemcunque valorem obtinebit.

V. Sinus ang. 18° est $= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et sin. ang. 54° est $= \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ unde erit $\frac{1}{\sin. 18^\circ} - \frac{1}{\sin. 54^\circ} = 2$, id quod etiam tabulae sinuum ostendunt; est enim $\frac{1}{\sin. 18^\circ} = \sec. 72^\circ$ et $\frac{1}{\sin. 54^\circ} = \sec. 36^\circ$.

VI. Serierum sequentium summae sunt[4]

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{8x-5}-\frac{1}{8x-3}\right) &= \int \frac{dz\,\left(zz-z^4\right)}{1-z^8} = \int \frac{zz\,dz}{(1+zz)\,(1+z^4)} \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{8} \\
\left(\frac{1}{8x-1}-\frac{1}{8x+1}\right) &= \int \frac{dz\,\left(z^6-z^8\right)}{1-z^8} = \int \frac{z^6\,dz}{(1+zz)\,(1+z^4)} \\
&= 1 - \int \frac{dz\,\left(1+zz+z^4\right)}{(1+zz)\,(1+z^4)} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+zz} - \frac{1}{2}\int \frac{dz\,\left(1+zz\right)}{1+z^4} \\
&= 1 - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 1 - \frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{8} \\
\left(\frac{1}{6x-5}-\frac{1}{6x-2}\right) &= \int \frac{dz\,\left(1-z^3\right)}{1-z^6} = \int \frac{dz}{1+z^3} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1+z} + \frac{1}{3}\int \frac{2dz - z\,dz}{1-z+zz} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1+z} - \frac{1}{6}\int \frac{2z\,dz - dz}{1-z+zz} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-z+zz} \\
&= \frac{\ell\,2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

VII. Seriei $1 - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} -$ etc. jamdudum quoque conjectavi summam esse $= p\,(\ell\,2)^{2n-1}$ at casu $n = 2$ facile statim deprehendi valorem ipsius p nequidem rationaliter exhiberi posse.[5]

R 744 [Petersburg, ca. December 1739]
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 211r–212r
Address (fol. 212v): "A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller &c."
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 93–96; *Euler-Goldbach* (1965), p. 76–78

31

Goldbach to Euler

[Petersburg], (November 28th) December 9th, 1739[1]

Vir Celeberrime

Observavi heri denominatoribus 1; $1\cdot 2$; $1\cdot 2\cdot 3$; $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$; &c. innumeris modis assignari posse numeratores algebraicos ita ut series tota fiat summabilis, sic verbi gr[atia]

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{19}{1\cdots 6}+\frac{29}{1\cdots 7}+\frac{41}{1\cdots 8}+\frac{55}{1\cdots 9}+\&\text{c.}$$

est

$$=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{5}{1\ \cdots\ 6}+\frac{6}{1\cdots 7}+\frac{7}{1\cdots 8}+\frac{8}{1\cdots 9}+\&\text{c.}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mp\frac{6}{1\cdots 5}+\frac{7}{1\cdots 6}-\frac{8}{1\cdots 7}+\frac{9}{1\cdots 8}-\frac{10}{1\cdots 9}+\&\text{c.}=1,$$ [2]

quae quidem facile demonstrari possunt; sed ex eodem fonte alia multo abstrusiora derivantur, ut si haec series

$$\frac{a+1}{n}+\frac{2a+3}{1\cdot 2\,n^2}+\frac{3a+7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}+\frac{4a+13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4n^4}+\&\text{c.}$$

(cuius terminus generalis est $\dfrac{ax+x^2-x+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\,n^x}$) fiat $=-1$, posito pro a numero quocunque, dico, ut aequationi satisfiat, sumendam esse $n=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$.

C. G.

d. 9. Dec. 1739.

R 745 [Petersburg], (November 28th) December 9th, 1739
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 25r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 97–98; *Euler-Goldbach* (1965), p. 78

32

Euler to Goldbach

[Petersburg], December 9th (20th), 1739[1]

Vir Celeberrime

Omnes series quae continentur in hac formula generali $\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots x\cdot n^x}$ summari possunt per quantitates exponentiales et algebraicas conjunctim.[2] Quare si vel coefficientes α, β, γ, δ, etc. vel numerus n ita determine[n]tur, ut exponentialia evanescant, obtinebuntur omnes series hujus formae, quae summas algebraicas habere possunt. Quod ut clarius appareat per partes progrediar.

Seriei cujus terminus generalis est	summa erit
$\dfrac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\alpha-\alpha$
$\dfrac{\beta x}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\beta\cdot\dfrac{1}{n}$
$\dfrac{\gamma x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\gamma\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$
$\dfrac{\delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\delta\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)$
$\dfrac{\varepsilon x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\varepsilon\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^2}+\dfrac{6}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)$
$\dfrac{\zeta x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\zeta\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{15}{n^2}+\dfrac{25}{n^3}+\dfrac{10}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}\right)$
$\dfrac{\eta x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\eta\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{31}{n^2}+\dfrac{90}{n^3}+\dfrac{65}{n^4}+\dfrac{15}{n^5}+\dfrac{1}{n^6}\right).$

Lex secundum quam hae summae progrediuntur ita est comparata, ut termino generali $\dfrac{\psi x^{k+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ respondeat summa haec

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\psi\left(\frac{1}{n}+\frac{2^k-1}{1n^2}+\frac{3^k-2\cdot 2^k+1}{1\cdot 2n^3}+\frac{4^k-3\cdot 3^k+3\cdot 2^k-1}{1\cdot 2\cdot 3n^4}+\frac{5^k-4\cdot 4^k+6\cdot 3^k-4\cdot 2^k+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4n^5}+\text{etc.}\right).$$

Ex his igitur perspicitur seriei cujus terminus generalis est $\dfrac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ summam algebraicam omnino esse non posse.[3] Sit ergo terminus generalis $=\dfrac{\alpha+\beta x}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ erit ejus summa $=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\dfrac{\beta}{n}\right)-\alpha$: unde summa toties erit algebraica eaque $=-\alpha$, quoties fuerit $\alpha n+\beta=0$ seu $n=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Hicque continentur bini casus priores a Te Vir Celeb[errime] mihi perscripti, quos quidem facile posse demonstrari dicis. Sit autem terminus generalis $=\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ erit summa $=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\dfrac{\beta+\gamma}{n}+\dfrac{\gamma}{n^2}\right)-\alpha$. Summa igitur erit algebraica scilicet $=-\alpha$ si fuerit $\alpha n^2+(\beta+\gamma)\,n+\gamma=0$ seu

$$n=\frac{-\beta-\gamma\pm\sqrt{\left(\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2-4\alpha\gamma\right)}}{2\alpha}.$$

Hic continetur series illa abstrusior

$$\frac{a+1}{n}+\frac{2a+3}{1\cdot 2\,n^2}+\frac{3a+7}{1\cdot 2\cdot 3\,n^3}+\text{etc.}$$

cujus terminus generalis est $\dfrac{1+(a-1)\,x+x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$, cujus ob $\alpha=1$, $\beta=a-1$, $\gamma=1$ summa est $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{1}{nn}\right)-1$, quae ideo fiet algebraica atque $=-1$ si sit $nn+an+1=0$ seu $n=\dfrac{-a\pm\sqrt{(aa-4)}}{2}$. Simili modo ulterius progredi licet, et cum seriei, cujus terminus generalis est

$$=\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots x\cdot n^x}$$

summa sit

$$=-\alpha+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta}{n}+\frac{\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta}{n^2}+\frac{\delta+6\varepsilon+25\zeta}{n^3}+\frac{\varepsilon+10\zeta}{n^4}+\frac{\zeta}{n^5}\right),$$

haec summa algebraica esse non potest, quin simul fiat $=-\alpha$; erit autem haec summa $=-\alpha$ si fuerit n radix hujus aequationis

$$\alpha n^5+(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)\,n^4+(\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta)\,n^3+(\delta+6\varepsilon+25\zeta)\,n^2+(\varepsilon+10\zeta)\,n+\zeta=0.$$

Hac igitur methodo non solum innumerabiles series istius formae $\dfrac{X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ ubi X functionem denotat algebraicam ipsius x quamcunque rationalem, exhiberi possunt algebraice summabiles, sed etiam intelligitur praeter has inventas alias omnino non dari. Vale Vir Celeberrime ac fave

Tui observantissimo

L. Eulero

d. 9. Dec. 1739

R 746 Reply to n° 31
[Petersburg], December 9th (20th), 1739
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 215r–216r
Address (fol. 216v): "A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller de Justice et / Membre de l'Academie Imp[eriale] / à / Petersburg"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 99–101; *Euler-Goldbach* (1965), p. 79–80

33
Goldbach to Euler
[Petersburg], (February 21st) March 3rd, 1740

Monsieur

Je viens d'apprendre que vos appointemens ont été reglés avec approbation de S[on] Excell[enc]e Mons[ei]g[neu]r le Comte d'Ostermann de la manière que Vous l'aviez souhaité,[1] je vous en felicite de tout mon Coeur et suis avec beaucoup d'Estime

Monsieur
Votre trèshumble et très-obéïssant serviteur
Goldbach.

le 3. Mars n[ouveau] st[yle]
1740.

R 747 [Petersburg], (February 21st) March 3rd, 1740
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 27r
Address (fol. 28v): “A Monsieur / Monsieur Euler / de l’Academie / des Sciences”
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 80

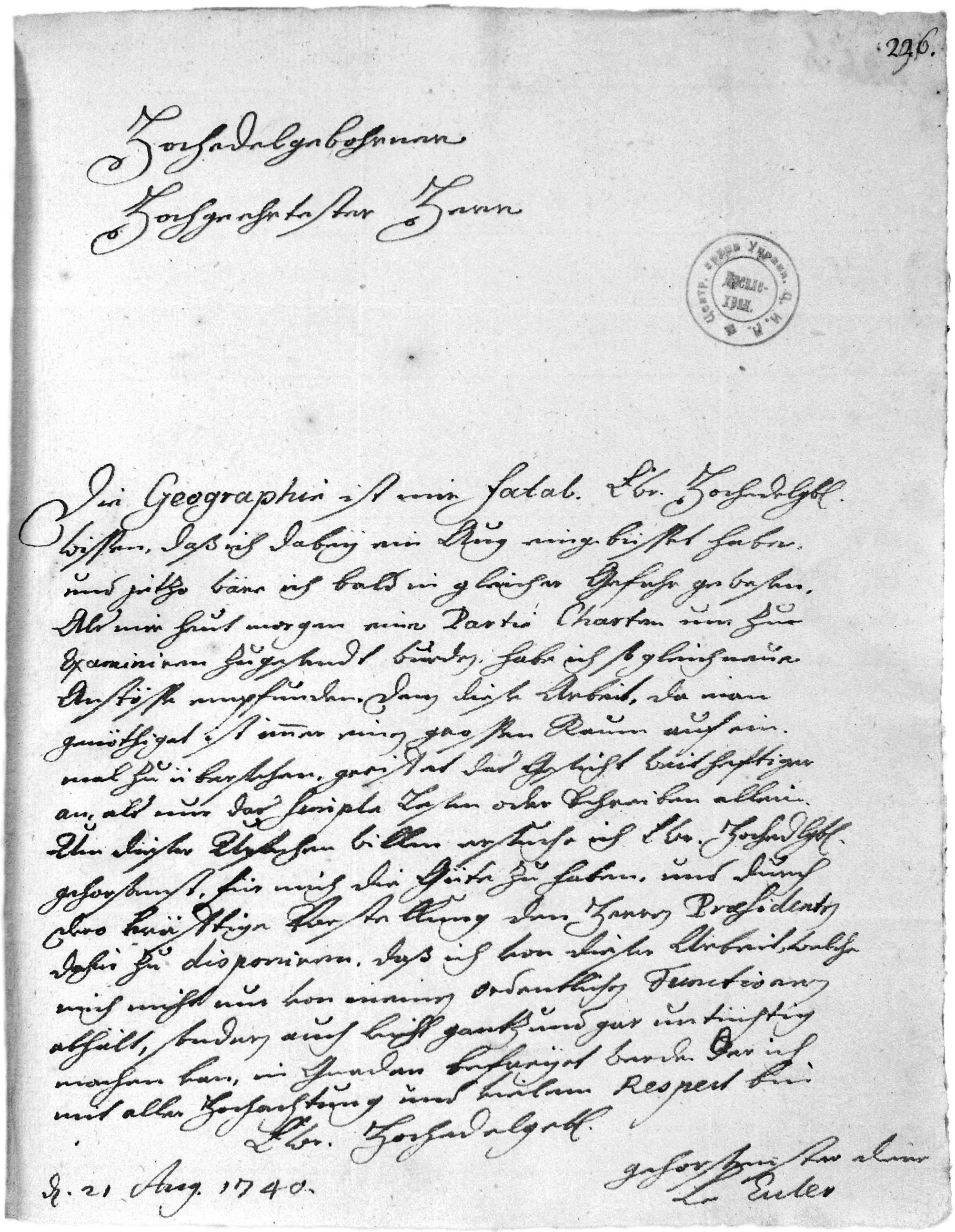
34
Euler to Goldbach
[Petersburg], August 21st (September 1st), 1740

Hochedelgebohrner
Hochgeehrtester Herr

Die *Geographie* ist mir *fatal*. Ewr. Hochedelgb. wissen, daß ich dabey ein Aug eingebüsset habe,[1] und jetzo wäre ich bald in gleicher Gefahr gewesen. Als mir heut morgen eine *Partie Chart*en um zu *Examini*ren zugesandt wurden,[2] habe ich so gleich neue Anstösse empfunden. Denn diese Arbeit, da man genöthiget ist immer einen grossen Raum auf einmal zu übersehen, greiffet das Gesicht weit heftiger an, als nur das simple Lesen oder Schreiben allein. Um dieser Ursachen willen ersuche ich Ewr. Hochedelgb. gehorsamst, für mich die Güte zu haben, und durch Dero kräfftige Vorstellung den Herren *Praesident*en dahin zu *disponi*ren, daß ich von dieser Arbeit, welche mich nicht nur von meinen ordentlichen *Function*en abhält, sondern auch leicht gantz und gar untüchtig machen kan, in Gnaden befreyet werde[3] der ich mit aller Hochachtung und vielem *Respect* bin
Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
L. Euler

den 21 *Aug.* 1740.

R 748 [Petersburg], August 21st (September 1st), 1740
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 226r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 102; *Euler-Goldbach* (1965), p. 81



226.

Hochedelgebohrner
Hochgeehrtester Herr

Die Geographie ist mir fatal. Ew. Hochedelgeb. wissen, dass ich dabey ein Aug eingebüsst habe, und jetzo wäre ich bald in gleicher Gefahr gewesen. Als mir heut morgen eine Partie Charten um zu examiniren zugesandt würden, habe ich sogleich neue Anstösse empfunden. Dann diese Arbeit, da man genöthiget ist einen grossen Raum auf einmal zu übersehen, greifet das Gesicht weit heftiger an, als nur das simple Lesen oder Schreiben allein. Um dieser Ursachen willen ersuche ich Ew. Hochedelgeb. gehorsamst, für mich die Güte zu haben, und durch Dero kräftige Vorstellung den Herrn Praesidenten dahin zu disponiren, dass ich von dieser Arbeit, welche mich nicht nur von meinen ordentlichen Functionen abhält, sondern auch leicht gantz und gar untüchtig machen kan, in Gnaden befreyet werde. Der ich mit aller Hochachtung und tiefstem Respect bin

Ew. Hochedelgeb.

gehorsamster Diener
L. Euler

d. 21 Aug. 1740.

Euler's letter n° 34 to Goldbach, August 21st (September 1st), 1740: reproduction of the *recto* page (RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 226r)

Euler complains of the threat his work at the department of geography poses for his eyesight and asks for Goldbach's help in getting a dispensation.

35
Goldbach to Euler
[Petersburg], August 21st (September 1st), 1740

HochEdler Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*,

So bald ich (*Tit. Tit.*)[1] den Hn *Etats*Rath von *Brevern* spreche will ich nicht unterlassen demselben die gehörige Vorstellung wegen Eurer HochEd. kräncklichen Zustandes zu thun, weil ich aber nicht gewiß bin ob solches morgen oder erst über einige Tage wird geschehen können, hingegen bey dieser Sache *periculum in mora* ist, so halte ich davor, daß Ew. HochEd. wohl thun werden, wann Sie ohne Zeitverlust den Hn *Praesident*en und den Hn Rath *Schumacher* schrifftlich benachrichtigen, daß sie ohne offenbahre Gefahr Ihrer Gesundheit die *Geographi*schen *Occupations* nicht fortsetzen können sondern dieselben so lange biß Sie sich besser befinden werden, aussetzen müssen.[2] Indessen habe ich heute mit vielem Vergnügen von Hn *Secr*[*etaire*] *Tiedeman* vernommen, daß Ew. HochEd. sich schon etwas besser befinden; ich wünsche hertzlich Sie ehestens völlig *restitui*ret zu sehen und verbleibe mit sonderbahrer *Consideration*

Ew. HochEdlen
Dienstergebenster Diener
Goldbach.

den 21. *Aug.* 1740.
in Eil

R 749 Reply to n° 34
[Petersburg], August 21st (September 1st), 1740
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 29rv
Address (fol. 30v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 103; Euler-Goldbach (1965), p. 81

36
Euler to Goldbach
[Petersburg], April 18th (29th), 1741

Hochedelgebohrner
Hochgeehrter Herr *Justiz*-Rath

Im Falle der H. *Prof. Krafft* noch nicht sollte des *Schotenii Exercitationes* Ewr. Hochedelgb. zugeschickt haben; so habe die Ehre damit aufzuwarten; ich habe daraus die *Numeros primos* von dieser *Form* $4n+1$ biß auf 3000 ausgeschrieben; und gegen Dero *Observation* keine *Exception* gefunden.[1]

Der H. *De l'Isle* geht diesen Augenblick von mir weg, und hat mir gesagt, daß bey Neuss schon würklich eine blutige *Bataille* vorgegangen, wobey von Preussischer Seite zwey Prinzen nebst einigen *Generalen*, von Österreichischer Seite aber der *General Lentulus* nebst noch vielen anderen geblieben; doch endlich aber die Preussen das Feld behalten haben.[2] Auch soll *Mr. Maupertuis* welcher in Schlesien von dem König Abschied nehmen wollen, bey dieser *Action* verlohren gegangen seyn.[3]

Ich habe die Ehre mit allem *Respect* zu seyn

Ewr. Hochedelgeb.

gehorsamster Diener

L. Euler

den 18 *Apr.* 1741

R 750 [Petersburg], April 18th (29th), 1741
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 251r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 82

37
Goldbach to Euler
[Petersburg], June (7th) 18th, 1741

Hochgeehrter Herr *Professor*,

Bey Dero Ankunfft in Berlin bitte ich von Hn Geheimen Rath Vockerod zu vernehmen, ob demselben meine zwey Briefe (1.) vom 12. *Nov.* 1740 nebst einem Einschluß an Hn *von Wartenberg*, (2.) vom 10. *Jan. st. n.* 1741 nebst einem Einschluß an Hn von *Podevils* abgegeben worden.[1]

Im übrigen wünsche ich nochmahls eine glückliche Reise[2] und verbleibe mit aller ersinnlichen Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen

ergebenster Diener

Goldbach.

den 18. *Jun.* 1741.
st. n.

R 751 [Petersburg], June (7th) 18th, 1741
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 31r
Address (fol. 32v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des / Sciences"
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 82

38

Euler to Goldbach

Berlin, August 1st, 1741

Hochedelgebohrner Herr *Justiz*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Ewr Hochedelgeb. Wohlgewogenheit und Freundschaft ist gegen mich jederzeit so ungemein groß gewesen, daß ich mich nicht im Stande befinde darfür gebührender massen Dank abzustatten. Ich nehme also die Freyheit Ewr Hochedelg. eine kurze *Relation* von unserer Reise und meinem gegenwärtigen Zustande allhier zu überschreiben; und dieses um so viel mehr, da Dieselben solches bey meinem Abschied ausdrücklich von mir zu verlangen die Güte gehabt haben.

Nachdem wir den 19 *Jun. st. n.* nachmittag von Petersburg abgefahren, und den 20$^{\text{ten}}$ in *Cron*statt zwischen der gantzen Russischen Flotte vor Anker gelegen, sind wir den 21$^{\text{ten}}$ mit völlig *contrair*em Winde durch die Kriegs-Schiffe *lavir*et, und gantz langsam fortgesegelt, biß wir um Mitternacht bey der Brandwacht angekommen. Den 23$^{\text{ten}}$ sahen wir an den Finnischen Küsten die gantze Schwedische Flotte, und wurden auch von einer Schwedischen *Fregatt*e angehalten, deren *Offici*er sich bey unserm Schiffer wegen des Zustands der Russischen Flotte weitläuffig erkundigte: ich musste mich recht verwundern wie unser Schiffer dem Schwedischen *Officier* vorlog, indem er die Anzahl der Russischen Schiffe verdoppelte, und dabey vorgab, daß sich darunter Schiffe von 130 *Canon*en befänden.[1] Des Abends *passir*ten wir bey gutem Weter Hoch-Land. Die Insul *Dagho* fuhren wir den 26$^{\text{ten}}$ vorbey, als wir mehr als 24 Stund einen ziemlich heftigen Sturmwind ausgestanden hatten; ein gleicher Wind stellte sich wiedrum den 27$^{\text{ten}}$ ein welcher biß den folgenden Tag fort daurte, da wir endlich bey der Nördlichen Küste von *Gothland* ankamen; die folgenden Tage hatten wir schönes Wetter aber entweder gar keinen oder doch *contrair*en Wind, so daß wir biß den 5$^{\text{ten}}$ *Julii* zu brachten, ehe wir die Südlichen Küsten von Gothland vorbey segelten, welche *Distanz* doch nicht mehr als 18 Meilen austrägt. Hierauf war der Wind immer gut aber sehr schwach, und bekamen den 8$^{\text{ten}}$ *Julii* Bornholm, den 10$^{\text{ten}}$ aber die Insul Rügen, und die Mündung der Oder zu gesicht. Von da fuhr ich allein auf einem Fahrzeug den Fluß hinauf 2 Meilen weit biß nach *Wolga*st, allwo den 11$^{\text{ten}}$ auch das Schiff glücklich ankam, nach dem wir drey Wochen auf der See zugebracht hatten und meine gantze Gesellschaft ausser mir allein meistentheils elend krank gelegen war. Den 12$^{\text{ten}}$ *transportir*ten wir uns auf ein Stettiner Schiff, welches gleichfalls von Petersburg gekommen, und fuhren bey dem schönsten Wetter durch die angenehmsten Gegenden den Fluß hinauf biß nach Stettin, dahin wir den 13$^{\text{ten}}$ erwünscht angekommen. Daselbst hatte ich Gelegenheit mit dem H. OberHofprediger *Mauclerc* genaue Bekanntschaft zu machen, welchem ich das *Academi*sche *Pacquet* überreichte, und ein ergebenstes *Compliment* von dem H. *Secret*[*aire*] *Tiedeman* ablegte.[2] Durch *Recommendation* des H. Raths *Heinzelmann*s wurde ich auch bekannt mit dem H. *Secretario Bulle*, welcher mir viel Freundschaft erwieß; der H. Ober*Praesident* von *Grumkow* ließ mich zur Tafel *inviti*ren und den 20$^{\text{ten}}$ gieng ich in eine *Disputation*, welche im *Gymnasio* unter dem *Praesidio* des H. *Prof. Stissers* gehalten wurde, allwo ich die meisten von den dasigen H. textitProfessoribus kennen lernte. Den 22$^{\text{ten}}$ *Julii* hatte ich eine Kutsche und Frachtwagen bestellt, mit welchen wir von Stettin gegen Abend abfuhren, und endlich den 25$^{\text{ten}}$ nachmittag allhier zu Berlin glücklich ankamen. In Stettin hatte ich schon von hier Nachricht bekommen, daß für mich ein *Quartier* auf dem Königl[ichen] *Address-Contoir* bey dem H. Hofrath Wilken auf die *Ordres* des H. *Stehelin*s gemiethet worden, welches wir füglich sogleich bezogen. Wir haben das gantze untere *Etage*, so aus 8 Zimmern einer Küche und allen *Commodität*en bestehet.[3] Der H. *Baron* von *Mardenfeld*[4] hatte mich an des H. *Cabinet-Ministre* von *Borck Excell*[*enz*] *addressi*rt, welcher mich sehr gnädig empfangen, und versprochen meinetwegen so gleich an Ihro Königl[iche] *Majestä*t Bericht abzustatten. Ich habe auch an Ihre *Excell*[*enz*] den H. *CabinetsMinistre* von *Podewils* geschrieben, und das mir von dem Fr[anzösischen] *Ambassadeur Marquis de Chetardie* an denselben ertheilte *Recommendations* Schreiben zugesandt. Ich hatte auch noch zwey *Recommendations*Schreiben von dem H. *Ambassadeur* an den H. von *Brand Grand Maitre d'Hotel de la Reine Mere*, und an H. *Achard*, welche mich ungemein höflich aufgenommen haben; der Russische *Ministre* H. von *Brackel* hat mich auch seiner Gnade versichert. Übrigens habe ich hier schon gute Bekanntschaft gemacht mit dem H. Hofrath und Leib*medico Eller*, dem H. Grafen *Algarotti*, dem H. Hofrath *Jariges*, welcher die Stelle eines *Secretarii* bey der Königl[ichen] *Societä*t verwaltet, und den H. *Professoribus Naudé* und Wagner, so daß meine Ankunft allhier biß *dato* noch höchst vergnügt gewesen, und ich mit Gottes Hülfe das angenehmste Leben zu hoffen Ursache habe. Ewr. Hochedelg. *Compliment* an den H. Geheimen Rath *Culenman* und Fr[au] Gemahlin habe ich noch nicht außrichten können, weilen sich Dieselben jetzo auf dem Lande aufhalten. Von *Petersburg* habe ich noch keine Briefe erhalten, und weiß also nicht wie meine hinterlassenen Sachen daselbst stehen. Erstlich beförchte ich meine rückständige *Gage* vom 1 *Jan.* biß den 1 *Jun.* möchte mir nicht ohne *Chicann*en bezahlet werden, weilen mir die Sache wegen meines Hauses so mißlich vorkommt;[5] dann ich habe schon die Ehre gehabt Ewr. Hochedelgb. anzudeuten, daß ich auf der Cantzley eine Schrifft unterschrieben, durch welche ich mich verbunden der *Academi*e mein Hauß für denjenigen Preiß zu überlassen welchen die *Architecti* setzen würden, wobey ich freywillig mündlich *declari*rt, daß wann auch die *Architecti* mein Hauß höher als 400 R. *taxi*ren sollten, ich dennoch nicht mehr als 400 R. verlangte, weilen ich von fremden Käuffern, wie Ewr. Hochedelgb. wohl bekannt, nicht mehr als 400 R. gefordert hatte. Nun haben die *Architecti* das Hauß in aller *Form* auf 400 R. *taxi*rt; dem ungeacht aber ließ der H. Rath Schumacher ohne mit mir deswegen ein Wort zu sprechen, auf den Buchladen nur 300 R. darfür *assigni*ren; ich hielte solches anfänglich für ein Versehen, allein der H. Rath Schumacher sagte mir den Tag vor meiner Abreise, daß solches mit Fleiß geschehen wäre, weilen Er, als ich bey Unterschreibung der Schrifft von 400 R. gesprochen, nur 300 R. verstanden hätte. Ich sagte darauf weiter nichts anders, als daß mir solches nie in Sinn gekommen; dabey *declarir*te ich Ihm die

Zeit meiner Abreise, und bat Leute zu schicken, welche vom Hause *Possession* nehmen, ich vernahm aber in *Cronstat*, daß Er einen gantzen Tag nach meiner Abreise noch niemand gesandt hatte. Ingleichem da im Kaiserl[ichen] Cabinet allergnädigst *resolvi*rt worden, mir nach dem Gutachten der *Academi*e eine *Gratification* zu ertheilen, beförchte ich solches möchte auch durch den H. Schumacher hintertrieben werden. Deswegen ersuche Ew. Hochedelgb. gehorsamst mir eine *Copie* von der meinetwegen aus dem *Cabinet* ergangnen *Resolution* gütigst zukommen zu lassen,[6] und nehme die Freyheit Denselben diese meine *Affair*en bestens zu *recommendi*ren, der ich mit aller schuldigsten Hochachtung lebenslang verharre

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonhard Euler

Berlin den 1 *Aug.*
1741.

R 752 Berlin, August 1st, 1741
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 255–256v
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 82–84

39
Goldbach to Euler
Petersburg, August (8th) 19th, 1741

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen Schreiben vom 1. *Aug.* habe ich den 13. *ejusd*[*em*] allhie erhalten[1] und daraus mit grosser Freude ersehen, daß Sie nach zurückgelegter langwieriger Reise sich nunmehro vergnügt in Berlin befinden; die *Connoissances*, so Sie daselbst schon gemacht haben, scheinen mir alle von besonderer *importance* zu seyn und lassen mich nicht zweiffeln daß ihr dortiger Aufenthalt mit ihrem eigenen Wunsch völlig übereinstimmen werde.

Die *Resolution* davon Ew. HochE. eine Copey verlangen,[2] habe ich noch nicht gesehen, und was Dero übrige *Academi*sche Geld*affai*ren betrifft halte ich dafür daß selbige am besten und kürtzesten durch eine Vorstellung an I[hro] Kays[erlichen] M[ajestä]t hohes *Cabinet* zum Schluß kommen werden, wozu Eurer HochEdelgeb. der Herr *Baron* von Mardefeld welcher sich Ihrer Angelegenheiten bißhero so rühmlich angenommen hat, für andern wird beförderlich seyn können; ich werde indessen nicht unterlassen so offt ichs nöthig und Eurer HochE. *interesse* fürträglich halte, das meinige beyzutragen; ich glaube auch daß es nicht schaden könnte wann Sie an Hn *Legation*s-Rath *Groß* von Ihren *Academi*schen *pretensions* umständliche Erwegung thun möchten.

Was halten E. H. von dergl[eichen] *propositionibus*: $(3m+2)n^2+3$ kan niemahls ein *numerus quadratus* seyn *positis pro m et n numeris integris quibuscunque.*[3]

In den Zeitungen von Gelehrten Sachen habe ich unlängst gelesen daß die beyden Mönchen so *Newtoni Principia Math*[*ematica*] herausgeben Eurer HochE. *Mechanicam* starck gebraucht haben.[4]

Wann Sie auf die Königl[iche] *Bibliotheque* in Berlin gehen werden, lassen Sie sich doch *Joh*[*annis*] *de Luneschlos Thesaurum Mathematum reseratum per Algebram novam*[5] *Patavii* 1646 *in fol*[*io*] und *Petrum Bungum de Numerorum mysteriis*[6] *in* 4.*o* zeigen; ich habe *A*[*nno*] 1718 diese Bücher, aber nur obenhin, gesehen,[7] und kan mich fast gar nichts mehr von der selben Inhalt erinneren.

Ich verbl[eibe] nechst gehorsamster Empfehlung an Dero Frau Liebste und sämmtl[iche] *Familie*, Ew. HochEdelgebohrnen

dienstergebenster Diener

Goldbach.

S.t Petersburg
den 19. *Aug.* 1741 *st. n.*

R 753 Reply to nº 38
Petersburg, August (8th) 19th, 1741
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 33–34r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 104; *Euler-Goldbach* (1965), p. 84–85

40
Euler to Goldbach
Berlin, September 9th, 1741

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*Rath

Ewr. Hochedelgeb. befinde ich mich doppelt verpflichtet: theils für Dero eigene geehrteste Zuschrifft, theils auch fürnehmlich für das Höchst gnädige Schreiben, welches Dieselben im Nahmen Ihro *Excell*[*enz*] des H. Grafen von *Ostermann*s an mich ausgefertiget haben.[1] Gleichwie ich nun Ewr. Hochedelgb. für Dero mir gütigst ertheilten Rath wegen meiner *Affaire* gehorsamst verbunden bin, so zweifle ich nicht, dieselbe werde nächstens zu einem glücklichen Ausgang gereichen, da Ewr. Hochedelgb. ohne Zweifel werden Gelegenheit gehabt haben, mit des H. Grafen von Osterman *Excell*[*enz*] wegen der meinetwegen aus dem *Cabinet* ergangenen *Resolution* weitläuffiger zu sprechen: inzwischen kan ich nicht begreiffen wie es zugegangen, daß Ewr. Hochedelgb. diese *Resolution* noch nicht ist *communicir*t worden, woraus ich nichts anders schliessen kan, als daß darauf aus der *Academi*e noch nicht müsse geantwortet worden seyn. Ehe ich mich *resolvi*ren kan mit dieser meiner *Affair*en den H. *Baron* von Mardenfeld zu bemühen, so habe noch vorher in den *obligeant*sten *Terminis* an den H. Rath Schumacher geschrieben,[2] um im Fall einer abschlägigen oder gar keiner Antwort grösseres Recht zu haben meine Forderung an höherem Ort anhängig zu machen. Ich habe auch meiner Schuldigkeit gemäß erachtet an Ihro *Excell*[*enz*] den H. Grafen *Golovkin* zu schreiben, und Demselben für die mir erwiesene besonders hohe Gnade Dank zu sagen, wobey ich nicht nur von der mir zuerkannten *Gratification* sondern auch von meiner rückständigen *Gage* und Hauß Erwehnung gethan.[3]

Der H. Geh[eime] Rath *Vockerodt*, welcher Sich noch in Breslau befindet lässt Ewr. Hochedelgb. Sein gehorsamst *Compliment* vermelden, und Sich wegen seiner grossen Geschäfte entschuldigen, daß Er noch nicht Ewr. H. zugeschrieben: er hat Dero beyde Briefe richtig erhalten und auch die Einschlüße wohl bestellet.[4]

Vor einigen Wochen haben Ihro *Maj*[*estät*] die Königl[iche] Frau Muter mich zu Sich hohlen lassen, und des Tags darauf hatte ich die Gnade bey Ihro *Maj*[*es*]*tät* zu speisen; und haben so wohl Ihro Majestät als die beyden Königl[ichen] *Princes*sinnen mich auf die Gnädigste und eine recht Leutseelige Art empfangen.[5] Ihro Königl[iche] *Majestä*t der König haben mich auch nicht nur durch den H. G[eheimen] Rath *Jordan* Dero Allerhöchsten Gnade und *Protection* versichern lassen, sondern auch Höchst eigenhändig nachfolgendes Schreiben zuzusenden die Gnade gehabt.[6]

> *Monsieur Euler. J'ai été bien aise d'apprendre que vous étes content de votre sort et établissement présent. J'ai donné les ordres necessaires au Grand Directoire pour la pension de* 1600 *Ecus, que Je vous ai accordée; s'il y a encore quelque chose dont vous aurez besoin, vous n'avez qu'à attendre mon retour à Berlin. Je suis*
>
> *Votre bien affectionné Roy*
>
> *Federic*
>
> *au Camp de Reichenbach*[7]
>
> *ce* 4*me* *sept* 1741.

Weilen Ihro *Majestä*t beschlossen haben ein neues Gebäu zur *Academie* aufzubauen,[8] so ist mir aufgetragen worden, einen vollständigen Riß von den *Academi*schen Gebäuden in S.t *Petersburg* zu verschaffen. Weilen nun alle diese Risse schon würkl[ich] in Kupfer gestochen, ich aber davon nicht leicht ein *Exemplar* von dem H. Schumacher hoffen darf,[9] so nehme die Freyheit Ewr. Hochedelgeb. gehorsamst zu ersuchen ein *Exemplar* von diesen Rissen kauffen und dem H. Stähelin überliefern zu lassen; ich werde mit nächster Post dem H. Stähelin schreiben daß er solche mit allem Dank bezahle und ungesäumt hieher schicke. Ich bitte diese meine Freyheit nicht übel zu nehmen, sondern der Ungewißheit, darinn ich mich befinde, ob jemand anders leicht ein *Exemplar* verschaffen kan, zuzuschreiben; vielleicht ist der H. *Secr*[*etaire*] *Tiedeman*, welchem mein ergebenstes *Compliment* mache im Stande diese Risse zu bekommen, und diese gantze *Commission* auszuführen.[10]

Die beyden gemeldten Bücher habe ich von der *Bibliothec* hohlen lassen, aber in *Petri Bungi mysteriis numerorum*[11] nicht das geringste merkwürdigs gefunden: er durchgehet der Ordnung nach alle Zahlen von 1, 2, 3, biß tausend, und merkt von einer jeden an, wo solche in der Heil[igen] Schrifft und andren *Auctoribus* vorkommen, als bey 38 bringt er nichts anders vor als das *Exempel* des kranken beym Teich zu *Betesda*, welcher 38 Jahre daselbst gelegen. Der Luneschloß ist ein sehr schönes Buch in seiner Art,[12] ich habe aber dasselbe noch nicht völlig durchgegangen.

Ewr. Hochedlgb. *Theorema* daß $(3m+2)\,n^2+3$ kein *Quadrat* seyn könne[13] ist sehr artig, und kan ich die Richtigkeit desselben auf folgende Art darthun: Entweder ist n durch 3 *divisib*[*el*] oder nicht, im ersten Fall ist n^2 *divisib*[*el*] durch 9, und bekommt die *Expression* $(3m+2)\,n^2+3$ eine solche *Form* $9p+3$, welche kein *Quadrat* seyn kan, wie bekannt. Im andern Fall wann n nicht durch 3 *divisib*[*el*] ist so ist n^2 eine solche Zahl $3p+1$, und $(3m+2)\,n^2+3$ bekommt diese *Form* $9mp+3m+6p+5$ das ist $3q+2$, von welcher *Form* gleichfalls bekannt, daß solche niemals ein *Quadrat* seyn kan. Ich habe vor langer Zeit auch solche ähnliche *Theoremata* gefunden: Als $4mn-m-1$ kan *nullo modo* ein *Quadrat* seyn. *Item* $4mn-m-n$ kan auch kein *Quadrat* seyn, *positis* m *et* n *numeris integris affirmativis*.[14]

Von den *Divisoribus quantitatis* $aa \pm mbb$ *si* a *et* b *sint numeri inter se primi* habe ich auch *curieuse proprietates* entdeckt, welche etwas *in recessu* zu haben scheinen,[15] als da sind:

Theor[*ema*] *1. Omnes divisores primi formulae* $aa-2bb$ *continentur in forma* $8n \pm 1$.

Theor[*ema*] *2. Omnes divisores primi formulae* $aa-3bb$ *sunt* $12n \pm 1$.

Theor[*ema*] *3. Nullus numerus primus potest esse divisor formae* $aa-5bb$ *nisi qui sit in hac forma* $10n \pm 1$ *contentus.*

Von den *Integralibus formulae* $\dfrac{dx}{(1-x^n)^{\frac{p}{q}}}$ habe ich auch merkwürdige *Proprietates* gefunden, *si post integrationem ponatur* $x=1$.[16] Als da sind:

Theor[*ema*]. *Integrale* $\int \dfrac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}}$ *se habet ad integrale* $\int \dfrac{dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$ *uti* $\sqrt{2}$ *ad* 1, *posito post utramque integrationem* $x=1$.

Theor[*ema*]. *Integrale* $\int \dfrac{dx}{(1-xx)^{\frac{5}{6}}}$ *se habet ad integrale* $\int \dfrac{dx}{(1-xx)^{\frac{2}{3}}}$ *uti* $\sqrt{3}$ *ad* 1, *posito pariter post utramque integrationem* $x=1$.

Welche *Theoremata* um soviel merkwürdiger scheinen, da sonsten nach der gewöhnlichen Art diese *Integralia* nicht mit einander *compari*rt werden können.

Ich habe die Ehre mit aller schuldigsten Hochachtung zu seyn nebst gehorsamster Empfehlung meiner gantzen *Famille*

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 9 *Sept.* 1741.

R 754 Reply to n° 39
Berlin, September 9th, 1741
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 259–260v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 105–107; *Euler-Goldbach* (1965), p. 85–87

41
Euler to Goldbach
Berlin, September 16th, 1741

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Ungeacht ich Ewr. Hochedelgb. erst vor 8 Tagen geschrieben, so befinde ich mich doch schon wiederum genöthiget Denselben gegenwärtiges zu *addressi*ren. Ich habe nehmlich mit der vorigen Post einen Brief von dem alten H. *Professore Joh*[*ann*] *Bernoulli* erhalten,[1] worinn Er den von mir in seinen *Meditationibus Hydraulicis* angemerkten Irrthum nicht nur erkennet, sondern auch beyligendes Blatt, worinn Er alles *corrigi*ret zugesandt, mit Ersuchen, solches unverzüglich nach *Petersburg* zu *expedi*ren, damit dasselbe noch zu rechter Zeit Seiner *Dissertation*, welche vermuthlich mit nächstem gedruckt werden dürfte, zu *inseri*ren. Er hat mir auch aufgetragen die Kaiserl[iche] *Academi*e in Seinem Nahmen zu bitten, daß man Sorge tragen möchte, daß erstlich der *Text* Seiner *Dissertationum correct* gedrucket, und dann auch die *Figur*en, welche nur *manu tremula* verfertiget, mit aller Zierlichkeit gestochen werden. Ich nehme allso die Freyheit dieses Anliegen des H. *Bernoulli* gehorsamst zu *recommendi*ren, und Ewr. Hochedelgb. zu bitten Sorge zu tragen, daß Demselben ein völliges Genügen geleistet werde.[2]

Vor etlichen Tagen hatte ich die Ehre bei des H. *Cabinet-Ministre* von *Borck Excell*[*enz*] zu speisen. Welcher der gantzen *Compagnie* die Hohe *Intention* Ihro Königl[ichen] *Majestä*t auf die Schlesische *Expedition Medaill*en zu prägen vorlegte, und mich *in Specie* ersuchte aus *S.^{t} Petersburg* von denjenigen *habilen Person*en, welche Sich allda auf diese Sache *applicir*ten, einige Vorschläge zu verschaffen.[3] Ich habe dahero meiner Schuldigkeit erachtet Ewr. Hochedelgb. hievon Nachricht zu geben, und beyligendes *Billet*, worinn die Hohe *Intention* Ihro Königl[ichen] *Majestä*t enthalten, zuzuschicken, mit der gehorsamsten Bitte Dero Gedancken darüber im Fall Dieselben darauf *reflecti*ren wollen, mir zuzuschicken; ich werde davon solchen *Usage* machen, wie Ewr. Hochedelgeb. Selbst für gut befinden werden. Hiemit empfehle mich Ewr. Hochedelgeb. beständigen Wohlgewogenheit, und verbleibe mit aller ersinnlichen Hochachtung

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 16ten *Sept.*
1741

R 755 Berlin, September 16th, 1741
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 261rv
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 88–89

42
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 27th) November 7th, 1741

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Die sonderbahre *distinction* mit welcher Ew. HochEdelgeb. in Berlin aufgenommen worden hat mir nicht anders als sehr erfreulich seyn können, insonderheit habe ich das gnädigste Schreiben Ihro Königlichen Majestät an Ew. HochEd.[1] mit der grössesten *Veneration* gelesen und *admiri*ret. Es muß eine treffliche *directio* ☉' oder ♃ *ad medium coeli* oder dergl[eichen] eine für Ew. HochEd. eingefallen seyn, welche *ex post facto* in dem *themate nativ*[*itatis*] sich wohl wird finden lassen.[2]

Die verlangten Kupfferstiche hat H. *Prof. Stählin* an Ew. HochEdelg. zu besorgen über sich genommen.[3]

Daß Sie in des *Leuneschlos Thesauro* etwas gutes gefunden ist mir sehr lieb.[4] Ich habe schon *A*[*nno*] 1716 in Königsberg von demselben *Autore* ein Tractätchen in 8. gelesen, welches er *paradoxa de quantitate* nennet, das 352.ste heist *Si Deus auferret omne corpus in vase contentum movendo vel annihilando, nec aliud ullum in ablati locum venire permitteret movendo aut creando, hoc ipso vasis latera forent contigua, nec vel tantillum amplius distarent.* Das 473. *Monstrosa et deformia etiam faciunt ad pulchritudinem mundi.* Das 522. *Si Luna esset concava, terra periret incendio.* Das 946. *Pondera campanarum sunt in triplicata ratione sonorum. Verum crassities fidium longitudine et tensione aequalium sunt in ratione duplicata sonorum.* Das 589. *Cum semidiameter gyrorum aquae quovis modo percussae secundo horae minuto dilatatus vix pedem exaequet, et semidiameter spirarum in aëre quavis etiam percussione procreatarum eodem tempore millium trecentorum ac octuaginta pedum existat sequitur aquam millibus trecentum et octuaginta* (1380) *vicibus aëre densiorem atque graviorem esse.*[5]

Der berühmte *Antiquarius* H. *Stosch* wird, weil er so viel ich mich erinnere ein Cüstriner von Geburt ist, denen Gelehrten in Berlin bekannt seyn, wann E. HochEdelg. erfahren wo er sich jetzo aufhält, bitte ich mir davon Nachricht zu geben.[6]

Da ich das vorhergehende schon längst geschrieben, darauf aber durch unterschiedene *distractions* ein mehreres bey zu fügen verhindert worden, so melde jetzo, damit die Antwort nicht gar zu lang aufgehalten werde, nur mit wenigem, daß ich von Eurer HochEdelg. *pension* über dasjenige so in meinem vorigen Briefe enthalten,[7] nichts berichten kan, wie wohl ich hoffe daß Sie auf ihre an hero geschriebene Briefe schon mehrere Nachrichten davon werden erhalten haben. In der *Mathemati*schen *piéce* ist die verlangte veränderung gemacht worden.[8] Für das mir übersandte *avertissement* die *medailles* betreffend bin ich Eurer HochEdlg. sehr verbunden,[9] und werde nicht unterlassen selbiges gut anzuwenden. Künfftig ein mehreres. Ich verbleibe mit besonderer Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

In Eil

S.^{t} Petersburg
den 7. *Nov. st. n.* 1741.

R 756 Reply to n° 40 and n° 41
Petersburg, (October 27th) November 7th, 1741
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 35–36r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 108–109; *Euler-Goldbach* (1965), p. 89–90

43
Euler to Goldbach
Berlin, December 9th, 1741

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Die sonderbare Freude, welche Ewr. Hochedelgb. über mein glückliches *Etablissement* geschöpfet, erkenne mit der schuldigsten Ehrerbietung: und da Dieselben mir bißher so ungemeine *Prob*en Dero Gewogenheit und Freundschaft erwiesen haben, so wünsche nichts so sehr, als diese Höchstschätzbare Zuneigung gegen mich bestendig zu unterhalten. Ich hätte bey dieser Zeit gern aus *Curiosität* meine *Nativität* nachgesehen,[1] besann mich aber erst, daß ich dieselbe dem H. *Prof.* Kraft zurückgelassen. Der H. *Prof.* Stähelin hat mir geschrieben, daß drey *Exemplaria* von den *Academi*schen Kupferstichen dem H. *Brigadier Baudan* mitgegeben worden, welcher aber biß *dato* hier noch nicht angelanget.[2]

Für Ewr. Hochedelgb. Bemühungen wegen meiner *Academi*schen *Affairen* statte hiemit allen gehorsamsten Dank ab; meine Absicht gehet anjetzo nur dahin, wie ich meine ruckstendige *Gage* mit der Bezahlung für mein Haus bekommen möge, wozu ich nächstens bey der Ankunft der *Academi*schen Silberflotte gute Hoffnung habe.[3]

Was die *Pension* anlangt, wozu man mir hat Hoffnung machen wollen, weilen ich darum in *Petersburg* nicht angehalten, so werde ich auch von hieraus deswegen nicht ferner *supplici*ren. Ich habe schon berichtet daß meine hiesige *Occupation*en mich nicht verhindern der *Academi*e jährlich eben so viel *Piec*en zu überliefern, als wann ich noch daselbst gegenwärtig wäre; erachtet die *Academi*e diese meine geringe Dienste nützlich und einer *Pension* werth, so werde solche Gnade mit der grösten *Veneration* erkennen, und mich derselben aus allen Kräften würdig zu machen bestreben.[4]

Für die mir *communicir*ten *Paradoxa* des Lunenschloß[5] bin gehorsamst verbunden: es zeigen einige davon als von dem Ton der Glocken und Saiten eine richtige Einsicht in die *Natur*. Das von den Glocken steht aber schon in *Stifelii* Anmerkungen über die *Coss Christoff Rudolf*s.[6] Das jenige, welches Ewr. Hochedelgb. zuerst von der *annihilir*ten *Materia* in einem Geschirr geschrieben, scheinet auf diesem *Ratiocinio* zu beruhen: Ist keine *Materia* zwischen den Seiten des Gefässes, so ist nichts dazwischen, ist aber nichts dazwischen, so sind die Seiten aneinander, ungeacht das Gefäß seine vorige Figur behält. Ich halte aber dieses *Ratiocinium* für ein blosses *Sophisma*, und bey weitem nicht hinreichend die *impossibilitatem Vacui in Mundo* zu erweisen.

Der H. Geh[eime] Rath Wolf oder vielmehr seine Anhänger haben neulich einen harten Streit mit dem H. Segner *Prof*[*essore*] *Math*[*eseos*] in Göttingen bekommen, indem dieser einige grobe Fehler in des H. Wolfen *Elementis Matheseos* vorgab gefunden zu haben; es sind beyderseits schon verschiedene Schrifften gewechselt worden. Der H. Segner aber hat recht, und von Seiten des H. Wolfs sind die *Defension*en so schlecht beschaffen, daß daher der Wolfianischen *Philosophia* wenig Ehre zuwächst: man hätte besser gethan die Fehler zu erkennen, weilen dieselben gantz offenbar sind, und dieselben in einer neuen Ausgabe, woran würklich gearbeitet wird zu verbessern.[7]

Ich habe letstens auch ein merkwürdiges *Paradoxon* gefunden, nehmlich daß der Werth von dieser *Expression* $\dfrac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ *quam proxime* gleich sey $\dfrac{10}{13}$, und dieser Bruch *differir*t nur *in partibus millionesimis* von der Wahrheit. Der wahre Werth aber dieser *Expression* ist der *Cosinus* dieses *Arcus* 0,693 147 180 559 9 oder der *Arcus* von $39°$, $42'$, $51''$, $52'''$, 9^{IV} in einem *Circul* dessen *Radius* $= 1$.[8]

Ich habe auch noch verschiedene wichtige *Decouvert*en gemacht über die *Integration* solcher *Formul*n $\dfrac{P\,dx}{Q}$, allwo P und Q *functiones quaecunque rationales* von x sind; wovon zu einer andern Zeit die Ehre haben werde Ewr. Hochedelgb. ausführlicher zu schreiben.[9]

Vorjetzo habe die Ehre Ewr. Hochedelgb. noch gehorsamst zu berichten, daß meine Frau letstens mit einer Tochter glückl[ich] niedergekommen;[10] der ich mich und alle die meinen Dero schätzbaren Gewogenheit unterthänig empfehle und mit aller schuldigen Hochachtung verharre

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler.

Berlin den 9ten *Dec.*
1741.

P. S. Wegen des H. Stoschen[11] habe ich mich hier *informir*t: der H. *Prof. Muzelius* im *Joachims*thahlischen *Gymnasio* hat seine Schwester. Derselbe befindet sich würklich zu *Florenz*, allwo er von dem GroßHerzog eine reiche *Pension* geniesst, und seinen jüngeren Bruder bey sich hat, welcher auch ein grosser *Antiquarius* seyn soll. Von dem H. *Hedlinger* habe ich letstens Briefe gehabt aus *Arlesheim* im Bistum Basel, worinn er mir schreibt, daß die gegenwärtigen *Conjunctur*en nicht erlauben nach Norden zu reisen;[12] er arbeitet dort aus eigenem Trieb an einer *Medaille* zu Ehren Ihro Königl[ichen] *Majestä*t unsers Allergnädigsten *Monarch*en. Wegen der jetzigen weit aussehenden *Aspect*en haben I[hro] K[önigliche] *M*[*ajestät*] die Einrichtung der hiesigen *Academie* auf eine bessere Zeit aufzuschieben Allergnädigst geruhet: und alsdann soll auch der H. *Maupertuis* wiedrum hieher kommen.[13] Ich lebe inzwischen in der erwünschtesten Ruhe und habe das Vergnügen meinen *studiis* so obligen zu können, daß ich nicht einmal aus dem Hauße komme; wie ich denn den H. Geh[eimen] Rath *Vockerodt*,[14] welcher schon eine geraume Zeit hier ist, noch nicht einmal gesehen.

R 757 Reply to n° 42
Berlin, December 9th, 1741
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. III, fol. 267–268v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 110–111; *Euler-Goldbach* (1965), p. 90–91

44
Euler to Goldbach
Berlin, February 3rd, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Beyligender Brief an Ewr. Hochedelgeb. ist mir aus der Durch[lauchtigsten] Prinzen von Würtenberg *Palais* zugeschickt worden. Der Handschrifft nach ist solcher von H. *Dr. Duvernoi*, an mich war nur das *Couvert.*[1] Eben vernehme ich daß Ewr. Hochedelgeb. Sich unpäßlich befinden, solches gehet mir sehr zu Herzen, und wünsche, daß dieser Zufall ohne *Suiten* seyn, und gegenwärtiges Dieselben völlig *restitui*rt antreffen möge.

Hiemit empfehle mich Ewr. Hochedelgb. beständigen Wohlgewogenheit und Freundschaft gehorsamst und verbleibe mit aller schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler.

Berlin den 3$^{\text{ten}}$ *Febr.*
A[*nno*] 1742.

R 758 Berlin, February 3rd, 1742
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 5r
The letter was cut, folded and sealed to be sent without an additional envelope. The reverse side shows the address: "*A Monsieur / Monsieur Goldbach / Conseiller de Justice & Membre / de l'Academie Imp*[*eriale*] *des Sciences / à / S^t. Petersbourg.*"
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 92

45
Goldbach to Euler
Petersburg, February (2nd) 13th, 1742

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Den inliegenden Brief von dem Hn *Poleni*[1] habe ich zwar schon den 19. *Januar.* unter dem *Couvert* des Hn *Marinoni* erhalten, ich bin aber damahls an einer Kranckheit so in *appetitu prostrato* bestund und etliche Wochen gewähret hat, nicht allein bettlägerig, sondern auch so entkräfftet gewesen, daß mir alle Lust etwas zu schreiben oder zu lesen, vergangen: ich habe vor 18 Jahren dergleichen Kranckheit gehabt, welche aber nur halb so lang währete, in dem gantzen *intervallo* der 18 Jahre aber bin ich niemahls bettlägerig gewesen. Anjetzo hat es sich seit 8 Tagen mercklich zur Besserung angelassen und ich hoffe nunmehro innerhalb zwey biß 3 Wochen zu vorigen Kräfften zu kommen.

Für die Nachricht von Hn *Stosch*[2] bin ich Eurer HochEdelg. gar sehr verbunden und ist mir um so viel lieber gewesen zu vernehmen wo er sich jetzo aufhält, nachdem in vielen Jahren keine *positiv*e Nachricht von ihm vernommen hatte.

Die *demonstration*[3] meines *theorematis* welche E. H. in Ihrem vorigen Schreiben gegeben, ist eben dieselbe die ich auch hatte.[4]

Das *Theorema* daß $4mn - m - 1$ kein *quadratum* seyn könne, gefället mir sehr, und ob ich es gleich nicht *demonstri*ren kan, so habe doch diese *consequentiam* daraus gezogen, daß nicht allein, wie E. H. schon angemercket, auch $4mn - m - n$ kein *numerus quadratus* sey, sondern *generatim* die *expression* $4mn - m - n^a$, allwo a ein *numerus integer positivus quicunque* ist, niemahls ein *quadratum* geben könne.[5]

Bey der *observation* so Ew. H. mir *communici*ret,[6] daß $\dfrac{2^{+\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ *quam proxime* gleich sey $\dfrac{10}{13}$, ist mir eingefallen daß wann man machen wollte daß $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$ würde, alsdann p kleiner als 3 und grösser als 2 seyn müste; ich gestehe daß diese *limites grosso modo* angegeben sind, habe aber nicht die *curiosité* sie näher zu *determini*ren.[7]

In dem 20.sten Briefe *part*[*is*] 1 von Kolben Beschreibung *Capitis bonae spei* sind einige *Remarques* über die dortige Ebbe und Fluth welche vieleicht *meriti*ren von E. H. gelesen zu werden. Das Buch wird ohne zweiffel auf der Königlichen *Bibliotheque* seyn.[8]

Im fall E. H. den Hn Geheimen Rath *Culeman* schon gesprochen, will ich hoffen daß Sie das aufgetragene *Compliment* nicht werden vergessen haben.

Des Hn *Brigadier* von *Baudan* glückliche Ankunfft in Berlin habe ich von dem Hn Obrist*Lieut*[*enant*] von *Damm* allhie vernommen und werde mich jederzeit freuen wann ich höre, daß es dem Hn *Brigadier* nach Wunsch gehet.[9]

Haben Ew. H. den H. *Achard* schon gehöret, und hat er nicht Ihre *approbation*?[10]

Daß E. H. anjetzo ihre Zeit nach ihrem eignen Belieben anwenden können, gereichet mir zu grossem Vergnügen, und ich möchte für das aufnehmen der Wissenschafften wünschen, daß Sie jederzeit in solcher *Situation* verbleiben könnten.

Eurer HochEdelg. Fr[au] Liebsten *gratuli*re ich von hertzen zu Dero glücklichen Niederkunfft und Vermehrung der *Familie*,[11] bitte mir auch zu melden wie sich mein lieber Pathe *M.r Jean Albert* befindet, und ob seine Gesundheit nunmehro völlig *restitui*ret ist? wie ich es von hertzen wünsche.[12] Ich verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 13. *Febr. st. n.* 1742.

R 759 Reply to nº 43
Petersburg, February (2nd) 13th, 1742
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 37–38v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 53r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 112–113; *Euler-Goldbach* (1965), p. 93

46
Goldbach to Euler
Petersburg, February (13th) 24th, 1742

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen habe hiedurch melden wollen, daß ich des Hn *Doct. du Vernoi* Schreiben unter Dero *Couvert* richtig erhalten habe,[1] es wird auch ohne Zweiffel mein Brief an Ew. HochE. welchen ich den 13. *Febr.* an meinen *Correspondent*en in Königsberg *adres*siret hatte,[2] bereits in Berlin angekommen seyn. Gestern war seit dem 23. *Dec. st. n.* 1741 meine erste Ausfart, da ich denn bey Anziehung der Kleider noch einen mercklichen Abgang von meiner vorigen *Circumferentz observi*rete ohngeachtet ich mich im übrigen von tag zu tag besser befinde. Ich verbleibe mit sonderbahrer Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
dienstergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 24. *Febr. st. n.* 1742.

R 760 Reply to n° 44
Petersburg, February (13th) 24th, 1742
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 39rv
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 94

47
Euler to Goldbach
Berlin, March 6th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Ewr. Hochedelgb. Unpäßlichkeit ist mir in verschiedenen Briefen zu meinem grösten Leidwesen berichtet worden;[1] dahero kan ich Denselben meine innigste Freude nicht gnugsam beschreiben, welche bey Empfang Dero werthesten Zuschrifft empfunden. Ich wünsche von Herzen, daß dieser Zufall nunmehro gäntzlich verschwunden, und Ewr. Hochedelgeb. wiederum zu den vorigen Kräften und einer dauerhaften Gesundheit gelanget seyn möchten.

Vor einiger Zeit habe die Ehre gehabt mit dem H. Geh[eimen] Rath *Culeman* bey dem H. Geh[eimen] Rath *Vockerodt* zu speisen, seit der Zeit aber hat es sich nicht schicken wollen bey demselben meine Aufwartung zu machen. Bey dieser Gelegenheit habe Demselben Ewr. Hochedelgeb. *Compliment* abgestattet, worauf Er sich auf das genauste um Dero gegenwärtige Umstände erkundiget, und bezeuget, daß Er sich sehr für Ewr. Hochedelgb. *interessi*re, und nichts mehr wünschte, als daß in Ihro Königl[ichen] *Maj*[*estät*] Diensten eine *convenable* Stelle für Ewr. Hochedelgeb. ausgefunden werden könnte.

Daß $4mn-m-1$ oder $4mn-m-n$ niemals ein *Quadratum* seyn könne, konnte ich biß anjetzo auch nicht *rigorose demonstri*ren, sondern ich hatte solches aus einem *Theoremate Fermatiano*, worinn behauptet wird, daß eine *summa duorum quadratorum* $aa+bb$ niemals *per numerum formae* $4n-1$ *divisibilis* sey hergeleitet.[2] Dann hat dieses *Theorema* seine Richtigkeit so ist $aa+1 \neq (4n-1)\,m$, da ich Ewr. Hochedelgb. *signum* $\neq$ um eine *aequationem impossibilem* anzuzeigen gebrauche. Dahero ist $aa \neq 4mn-m-1$. Ferner kan auch $\dfrac{aa+1}{4n-1}$ unmöglich ein *numerus integer* seyn, oder es ist $\dfrac{aa+1}{4n-1} \neq i$, folglich ist auch $\dfrac{aa+1}{4n-1}+1$ oder $\dfrac{aa+4n}{4n-1}$ oder $\dfrac{bb+n}{4n-1} \neq i$. Gleichfalls kan $\dfrac{bb+n}{4n-1}+n$ oder $\dfrac{bb+4nn}{4n-1}$ oder $\dfrac{cc+nn}{4n-1}$ kein *numerus integer* seyn. Und wann man auf solche Art fortgehet, so folget daß $\dfrac{aa+n^\alpha}{4n-1} \neq m$, und allso $aa \neq 4mn-m-n^\alpha$, welches die *Consequentz* ist, so Ewr. Hochedelgb. aus diesem *Theoremate* gezogen haben. Die Richtigkeit davon beruhet allso auf der Wahrheit dieses *Theorematis*, daß eine *summa* 2 *quadratorum* $aa+bb$ unmöglich durch $4n-1$ getheilet werden könne (wann nicht aa und bb ein jedes für sich durch $4n-1$ *divisibile* ist). Ich habe aber erst jetzo hievon nachfolgende *Demonstration* gefunden.

Prop[*ositio*] *1. Haec forma* $(a+b)^p-a^p-b^p$ *semper est divisibilis per* $\underline{p}$ *si fuerit* $\underline{p}$ *numerus primus. Dem*[*onstratio*]. *Evolvatur potestas* $(a+b)^p$ *eritque*

$$(a+b)^p-a^p-b^p=\frac{p}{1}a^{p-1}b+\frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}a^{p-2}b^2+\ldots+\frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}a^2b^{p-2}+\frac{p}{1}ab^{p-1};$$

cujus expressionis singuli termini sunt numeri integri; singuli ergo erunt divisibiles per $\underline{p}$ *si quidem* $\underline{p}$ *sit numerus primus: nam si* $\underline{p}$ *foret numerus compositus, fieri posset, ut in quodam termino factor quispiam ipsius* $\underline{p}$ *per factorem denominatoris tolleretur, illeque terminus ac proinde tota expressio cessaret per* $\underline{p}$ *divisibilis esse. Quocirca si* $\underline{p}$ *est numerus primus haec expressio* $(a+b)^p-a^p-b^p$ *semper erit divisibilis per p. Q. E. D.*

Coroll[*arium*] *1. Positis ergo* $a=b=1$ *erit* 2^p-2 *divisibile per numerum primum* $\underline{p}$, *ideoque nisi* $\underline{p}$ *sit* $=2$ *erit* $2^{p-1}-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile.*

Coroll[*arium*] *2. Sit* $a=2$, $b=1$, *erit* 3^p-2^p-1 *divisibile per* $\underline{p}$: *cum autem* 2^p-2 *sit quoque divisibile per* $\underline{p}$, *erit quoque istarum formularum summa* 3^p-3 *divisibilis per* $\underline{p}$, *ideoque nisi sit* $p=3$, *erit* $3^{p-1}-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile.*[3]

Propos[*itio*] *2. Si* a^p-a *fuerit divisibile per* $\underline{p}$ *erit quoque* $(a+1)^p-a-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile. Dem*[*onstratio*]. *Si in prop*[*ositione*] 1 *ponatur* $b=1$, *erit* $(a+1)^p-a^p-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile. Cum autem per hypothesin sit* a^p-a *per* $\underline{p}$ *divisibile, erit quoque summa istarum formularum* $(a+1)^p-a-1$ *per* $\underline{p}$ *divisibilis. Q. E. D.*

Coroll[*arium*] *1. Cum igitur* $1^p - 1$ *divisibile sit per* $\underline{p}$ *erit quoque* $2^p - 2$ *divisibile per* $\underline{p}$, *hincque porro progrediendo per* $\underline{p}$ *divisibiles erunt istae formulae* $3^p - 3$; $4^p - 4$; $5^p - 5$; *etc.*

Coroll[*arium*] *2. Generaliter ergo per numerum primum* $\underline{p}$ *divisibilis erit ista formula* $a^p - a$, *quicunque numerus integer loco* $\underline{a}$ *ponatur. Nisi ergo* $\underline{p}$ *sit divisor ipsius* $\underline{a}$, *erit quoque* $a^{p-1} - 1$ *per* $\underline{p}$ *divisibile.*

Coroll[*arium*] *3. Quoniam simili modo* $b^{p-1} - 1$ *per numerum primum* $\underline{p}$ *est divisibile, nisi* $\underline{b}$ *sit multiplum ipsius* $\underline{p}$, *sequitur fore* $a^{p-1} - b^{p-1}$ *per* $\underline{p}$ *divisibile.*

Theorema. Summa duorum quadratorum aa+bb non est divisibilis per numerum primum $4n - 1$, *nisi utrumque quadratum seorsim per eundem numerum primum sit divisibile.*

Demonstr[*atio*]. *Quoniam per hyp*[*othesin*] *neque* $\underline{a}$ *neque* $\underline{b}$ *divisibile est per* $\frac{4n-1}{\underline{p}}$, *sequitur hanc formulam* $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ *fore per* $4n - 1$ *divisibilem: unde per* $4n - 1$ *non erit divisibilis haec forma* $a^{4n-2} + b^{4n-2}$, *neque propterea ullus ejus factor. At cum* $4n - 2$ *sit numerus impariter par, formulae* $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ *factor est* $aa + bb$: *quocirca* $aa + bb$ *per numerum primum* $4n - 1$ *dividi omnino nequit. Q. E. D.*

Coroll[*arium*] *1. Quoniam si* $4n - 1$ *non est numerus primus, divisorem habet necessario numerum primum hujus formae* $4n - 1$; *sequitur summam duorum quadratorum* $aa + bb$ *per nullum numerum hujus formae* $4n - 1$ *sive primum sive non primum dividi posse.*

Coroll[*arium*] *2. Quodsi ergo summa duorum quadratorum* $aa + bb$ *habeat divisorem, is erit necessario numerus formae hujus* $4n + 1$.

Coroll[*arium*] *3. Si ergo summa duorum quadratorum* $aa + bb$ *per alium numerum dividi nequit, nisi qui ipse sit duorum quadratorum summa (quod demonstrari posse confido), sequitur omnem numerum primum* $4n + 1$ *in duo quadrata esse resolubilem.*[4]

Daß Ewr. Hochedelgeb. die *Curiosité* gehabt zu untersuchen, wann diese *Formul* $2^{+p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ *nihilo aequalis* werden könnte,[5] hat mir Anlaß gegeben anzumerken, daß solches *infinitis modis* geschehe: der erste *Valor pro* $\underline{p}$ ist wie Ewr. Hochedelgb. *observi*rt zwischen 2 und 3, nehmlich $p = 2{,}266\,180\,21$; der wahre *Valor* aber ist $p = \dfrac{\pi}{2\,\ell\,2}$, da ist $\pi = 3{,}141\,592\,65$, und $\ell\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.} = 0{,}693\,147\,180\,5$; alle folgenden *Valores ipsius* $\underline{p}$ entspringen aus diesem, indem man diesen mit 3, 5, 7, 9 etc. *multiplici*rt.

Der H. *Brigadier Baudan* lässt Ewr. Hochedelgb. sein gehorsamstes *Compliment* vermelden, er ist dem König noch nicht *praesenti*rt worden und folglich noch nicht *emploi*rt.[6]

Mr. Achard kenne ich sehr *speciell*, wie dann seine Frau unsers jüngsten Kindes Pathin ist: ich habe Ihn öfters gehört predigen, er ist ein grosser *Orator*. Ihro *Maj*[*estät*] haben den H. *D*[*octor*] Gwandt aus Königsberg hieher an die Stelle des sel[igen] H. Reinbecks beruffen mit einer *Pension* von 2000 Rthl.;[7] er hat aber diese *Vocation* abgebeten. Mein ruhiges Leben ist anjetzo in etwas gestöret worden, indem ich täglich eine Stunde bey dem Land Prinzen von Würtenberg seyn und *Lectiones* geben muß:[8] auch muß ich fast täglich bey dem H. Geh[eimen] Rath *Osterman* speisen, welcher Ewr. Hochedelgb. sein ergebenstes *Compliment* vermelden lässt.[9] Für die gütige Nachfrage wegen unsers Albrechts bin gehorsamst verbunden, derselbe hat vor einiger Zeit ein *Recidiv* von seiner vorigen Krankheit bekommen, befindet sich aber durch Gottes Hülfe wiedrum ziemlich gut;[10] ich habe einen *Praeceptorem Domesticum* angenommen, bey welchem er nebst den übrigen Kindern sehr gut *profiti*rt. Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Hochedelgb. auf das gehorsamste empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochedelgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 6$^{\text{ten}}$ *Mart.*
1742.

R 761 Reply to n° 45
Berlin, March 6th, 1742
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 6–7v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 114–117; *Euler-Goldbach* (1965), p. 94–96

48
Euler to Goldbach
Berlin, March 13th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Das von Ewr. Hochedelgeb. mit der letsten Post vom 24$^{\text{ten}}$ *Febr.* erhaltene Schreiben hat mich herzinnigst erfreuet, da ich aus demselben Dero völlige *Restitution* vernommen; ich wiederhohle allso nochmals meinen aufrichtigsten Wunsch, daß der Allerhöchste Dieselben bey beständiger Gesundheit in allem Wohlstand und Vergnügen biß in das späteste Alter gnädiglich erhalten wolle. Letstens hat der H. Geh[eime] Rath *Jordan* sehr viel von Ewr. Hochedelgeb. mit mir gesprochen, und sich über Dero Zustand erkundiget; er sagte mir daß er Ewr. Hochedelgeb. Persönlich wohl kannte; weil er aber damals, als Sich Dieselben hier befanden, noch sehr jung gewesen ist, so kan es leicht seyn, daß Ewr. Hochedelgb. Sich dessen kaum mehr erinnern werden.[1] Da ich nun hierauf von Denselben die *Project*e zu den Schlesischen *Medaill*en bekommen,[2] so habe ich gleich, nehmlich vorgestern in der Kirche Gelegenheit gehabt solche dem H. Geh[eimen] Rath *Jordan*, als welcher von Ihro Königl[ichen] *Majestä*t dazu beordert ist, zu übergeben; wobey er mir sagte daß er schon eine ziemliche Anzahl dergleichen Vorschläge beysammen habe, an welche er aber meistentheils sehr viel auszusetzen fände: dahero ich um so viel weniger zweifle, daß Ewr. Hochedelgb. nicht den Preiß davon tragen werden. Inzwischen hat gedachter H. Geh[eime] Rath mir aufgetragen Ewr. Hochedelgb. Sein ergebenstes *Compliment* abzustatten. Ich habe die Ehre gehabt in meinem vorigen Schreiben Ewr. Hochedelgeb. zu melden, daß die Durchl[auchtigste] Herzogin von Würtenberg mir die *Information* in der *Mathem*[*atic*] und *Physic* über Dero Prinzen aufgetragen,[3] womit ich schon seit einigen Wochen *continui*re. Weilen ich aber allhier noch keine Vorgesetzte habe, und diese *Occupation* ohne Erlaubnüß nicht wohl über mich nehmen konnte, so habe deswegen *Directe* an Ihro Königl[iche] *Maj*[estät] nach der *Armée* geschrieben: und vor etlichen Tagen darauf die Allergnädigste *Permission* durch ein Hand-Schreiben bekommen. Von außen war die *Addresse* *A mon professeur Euler*, und der Inhalt war folgender:[4]

> *Aiant vû par Votre lettre du* 20 *du Mois passé, que la Duchesse de Würtenberg Vous demande des leçons mathématiques pour les princes de Sa maison, Je Vous en accorde la permission avec bien du plaisir étant au reste*
>
> *Votre bien affectionné Roi*
>
> *Federic*
>
> *Znaim*[5] *ce* 1*er* *Mars* 1742

Übrigens kan ich die sonderbare *Capacität* des ErbPrinzen und den durchdringenden Verstand nicht genugsam bewundern. Meine *Lection* ist täglich von 10 biß 11 Uhr, da dann die Meß angeht.

Laut des H. Stähelins Briefen soll mir Ihro *Excell*[*enz*] der Herr *Lestocq* so sehr gnädig seyn,[6] daß Er versprochen hat mir durch Sein kräftiges Vorwort zu einer jährlichen *Pension* von der Kaiserl[ichen] *Academi*e zu verhelfen, und soll die gantze Sache anjetzo auf einer *favorabl*en Vorstellung von Seiten der *Academi*e beruhen. Ich schreibe deswegen auch mit der heutigen Post an den H. Rath Schumacher, insonderheit aber nehme die Freyheit Ewr. Hochedelgeb. um Dero nachdrücklichen Beystand in diesem meinem Ansuchen gehorsamst zu bitten.[7] Anjetzo wird ohne Zweifel der für die *Academie destinir*te Herr *Praesident* schon ernennet seyn, denn der H. Stähelin schreibt mir, daß er denselben (jedoch ohne zu nennen) nebst einigen Grossen kürtzlich bey sich *tracti*rt habe.[8]

Ewr. Hochedelgb. habe das letste mal meine *Demonstration* des *Theorematis* daß $4mn - m - n$ niemals ein *Quadratum* seyn könne, zu überschreiben die Ehre gehabt; aus derselben folgen noch viel andere artige *Speculation*en in dieser *Materi*e: und ich bin versichert daß Ewr. Hochedelgb. noch viel herrliche *Consequenz*en daraus herleiten werden. Ich habe anjetzo auch eine gantz andere *Methode* gefunden die *Summas Serierum potestatum reciprocarum* zu finden, welche sich nicht wie die erstere auf die *radices infinitas* einer *Aequationis infinitae* gründet, sondern bloß allein aus den *regulis differentiationum* und *integrationum* fleusst: wovon das nächste mal ausführlicher zu schreiben willens bin.[9] Hiemit verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung und schuldigsten *Veneration*

Ewr. Hochedelgebohrnen
Meines Hochgeehrtesten Herrn *Justiz*-Raths
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 13[ten] *Mart.*
1742.

P. S. Seit 8 Tagen hat man allhier einen *Comet*en wahrgenommen, erst vorgestern aber hat man Gelegenheit gefunden denselben auf dem *Observatorio* zu *observi*ren. Er erschien den 11[ten] um mitternacht *in ala boreali Cygni*, so daß *Longitudo* war $12°$, $30'$, und *Latitudo bor*[*ealis*] $71°$. Sechs Stunden hernach schien er beynahe um $2°$ *in consequentia* fortgerückt zu seyn; woraus ich schliesse, daß dieser *Comet* nicht weit von seinem *Perihelio* seyn müsse, ob er aber erst dahin gehe oder schon daher zurükkomme, kan aus dieser einigen *Observation* nicht geschlossen werden: die letst vergangene Nacht war es trüb, daß man nicht *observi*ren konnte. Im übrigen schien der *Nucleus* wie eine *stella* 4*[tae]* *magnitudinis*, hatte eine *comam*, und *caudam* ungefehr $3°$ lang. Was hierüber in *Petersburg* entweder *observi*rt worden oder noch wird *observi*rt werden, solches ersuche Ewr. Hochedelgb. gehorsamst mir zu melden; so bald man allhier wird mehrere und *accurat*ere *Observation*en machen können, werde ich solche gleich der *Academie* zu überschreiben die Ehre haben.[10]

R 762 Reply to n° 46
Berlin, March 13th, 1742
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 8–9v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 118–120; *Euler-Goldbach* (1965), p. 97–99

49
Goldbach to Euler
[Moscow], April (1st) 12th, 1742

Ex litteris ad Cl[*arissimum*] *Eulerum* 12. *Apr.*[1]

Meine *Demonstration*,[2] daß, wann $4mn - m - n^\alpha$ kein *numerus quadratus* ist, auch $4mn - m - n^{\alpha+1} \neq a^2$, fliesset alsofort aus der einigen *supposition* $m = 4p - n^\alpha$, denn hiedurch wird $4n\,(4p - n^\alpha) - 4p \neq 4b^2$, *quae aequatio divisa per 4 dat* $4pn - p - n^{\alpha+1} \neq b^2$, so daß in der *aequation* $x^\alpha = 4px - p - a^2$, wo α ein *numerus integer quicunque* ist, x keinen *valorem positivum in integris* haben kan: Es folget auch ferner, daß ob gleich $p^2 - p - e^2$ *infinitis modis* ein *quadratum in integris* ist, dennoch $\dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - p - e^2}}{2}$ niemahls ein *numerus integer* seyn kan;

item daß die zu erst erwehnte Formul $4mn-m-n^\alpha$ keinen *numerum triangularem* gebe, oder daß $x^\alpha = 4px - p - \dfrac{(b^2-b)}{2}$ niemahls eine *radicem affirmativam in integris* haben kan.

Gegen die mir *communicir*te *Demonstration*, wofür ich Eurer HochE. sehr verbunden bin, finde ich nichts zu erinnern, vieleicht könnte man aber *generaliter* sagen, daß $(a+b)^p - a^p - b^p$ allezeit *per aliquem divisorem ipsius p divisibile* ist, woraus denn als ein *casus particularis* folget, daß wann p ein *numerus primus* ist, die gedachte Formul *per ipsum numerum p divisibilis* seyn müsse.[3] Bey gelegenheit dessen, was E. H. von der Formul $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ schreiben, habe ich *observi*ret, daß wann n *variabilis* gesetzt wird, alsdann $2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-np\sqrt{-1}} = 2$ werde, so offt n ein *numerus pariter par* ist und daß sie hingegen $= -2$ werde, so offt n ein *numerus pariter impar*[4] ist, und wann n ein *numerus integer*, q aber ein *numerus quicunque rationalis aut irrationalis* ist, so wird allezeit

$$2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}.^{[5]}$$

Es ist meines erachtens auch *remarquable*, daß wann man p durch diese *aequation determini*ret $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, alsdann $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} =$ wird

$$\left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2x+1} - \left(-1+\sqrt{5}\right)^{2x+1}}{2^{2x+1}}\right) - \left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2x-1} - \left(-1+\sqrt{5}\right)^{2x-1}}{2^{2x-1}}\right),$$

so offt x ein *numerus integer* ist.

Nachdem ich diese *observation* wieder durchgelesen, finde ich dieselbe von keiner Wichtigkeit, man darff nur setzen $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, so ist $a^x + a^{-x}$ der *terminus generalis.*

R 763 Reply to n° 47
[Moscow], April (1st) 12th, 1742
Copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 56v–57v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 121–122; *Euler-Goldbach* (1965), p. 99–100

50
Euler to Goldbach
Berlin, May 8th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Justiz*-Rath

Ewr. Hochedelgb. Abreise nach Moskau haben mir die beyden *Prinz*en *Dolgorughki*, welche mich gantz unvermuthet allhier besuchten,[1] zu wissen gethan, und der H. Rath Schumacher hatte mir so gar geschrieben, daß Dieselben gesinnet wären die *Academi*e gäntzlich zu verlassen, und zu Dero grossem *Avantage* bey Hofe oder in der Reichs*Canz*ley *engagi*rt werden sollten.[2] Gleichwie nun diese Ewr. Hochedelgb. so grosse Veränderung bey mir den grösten Eindruck gemachet, so wünsche von gantzem Herzen, daß dieselbe zu Dero höchstem Vergnügen, und beständigen Wohlfahrt gereichen möge. Inzwischen statte hiemit Ewr. Hochedelgb. für die noch immerfort gegen mich hegende Hochgeneigte *Intention* allen gehorsamsten Dank ab, und empfehle mich Dero ferneren sonderbaren Gewogenheit: hoffe aber dabey daß diese Veränderung mir das innigste Vergnügen nicht benehmen wird, Denselben von Zeit zu Zeit meine gehorsamste *Devotion* zu bezeugen, und von Dero *Commercio* zu *profiti*ren.

Noch vor Erhaltung dieser Nachricht habe ich bey dem H. Geh[eimen] Rath *Culeman* zu speisen die Ehre gehabt, da insonderheit die Frau Geheime Räthin sehr umständlich Sich über Ewr. Hochedelgeb. Zustand erkundiget, und ihre sonderbare Hochachtung und Freundschaft gegen Dieselben auf das deutlichste zu erkennen gegeben. Sie haben mir beyderseits aufgetragen Ewr. Hochedelgb. Ihr ergebenstes *Compliment* abzustatten.[3]

Mit *Catalogis* von Französischen Büchern könnte Ewr. Hochedelgeb. zur Gnüge aufwarten, wann entweder Dieselben die *Post*-Freyheit genössen, oder mir jemand anzeigen wollten, an wen ich solche *addressi*ren sollte; dann von hier kan dieselben ohne etwas zu bezahlen, wegschicken.

Die *Madame La Marquise du Chatellet* hat mir ein *Exemplar* von der neuen *Edition* der *Institutions Physiques* nebst ihrem *Portrait* zugeschickt.[4] Die Bücher, welche Ewr. Hochedelgeb. auch immer verlangen möchten, können von hier aus bequem nach *Petersburg* geschickt, und darfür allda die Bezahlung entweder an H. Stähelin oder das *Berlini*sche *Contoir* entrichtet werden.[5] Von *Mr. Achard* weiß ich nicht das geringste, daß durch den Druck herauskommen wäre.[6]

Weilen die übersandten *Inscription*en[7] von Ewr. Hochedelgb. eigener Hand geschrieben waren: und dabey nichts gemeldet war von dem *Auctore*, so habe nicht gezweifelt, daß dieselben nicht von Denselben seyn sollten. Ich habe aber anjetzo dem H. Geh[eimen] Rath *Jordan* gemeldet, daß ein guter Freund solche Ewr. Hochedelgb. *communici*rt hatte.

Bey Ihro Königl[ichen] *Majestät* Anwesenheit allhier habe ich verschiedene mal *praesenti*rt werden sollen; es sind aber immer Hinternüsse dazwischen gekommen, biß endlich Allerhöchst Dieselben gantz plötzlich von hier abgereiset sind.[8]

Der H. Rath Schumacher hat mir geschrieben, daß meine *Pension* bey der *Academi*e schon so gut als fest gesetzet sey, und ich allso nur den Anfang mit Einsendung meiner *Piecen* machen sollte; hierauf habe denselben Posttag zwey ziemlich grosse *Piec*en dahin geschickt.[9] Ich nehme aber dennoch die Freyheit Ewr. Hochedelgb. diese *Affaire* gehorsamst ferner zu *recommendi*ren.

Die *Corollaria*, welche Ewr. Hochedelgb. aus meinem *Theoremate*, daß $4mn - m - n$ kein *Quadratum* seyn könne, hergeleitet sind sehr merkwürdig, und übertreffen das *Theorema* selbst weit an Wichtigkeit. Dann daß $4mn-m-n$ auch kein *numerus trigonalis* seyn könnte, hatte ich nicht wahrgenommen, anjetzo aber habe aus dieser Anleitung auch befunden, daß eben diese *Formul* $4mn - m - n$ auch kein *numerus heptagonalis* seyn könne.[10] Überhaupt habe gefunden, daß alle Zahlen welche nicht $= 4mn - m - n$ seyn können, in dieser *Formul* $xx + yy + y$ enthalten sind; dahero diese *Expression* $4mn - m - n + xx + yy + y$ alle mögliche Zahlen geben muß,[11] welches *Theorema* einiger massen ähnlich ist dem *Fermatiano*, daß $pp + qq + rr + ss$ alle mögliche Zahlen hervorbringe. Ich habe noch viel mehr dergleichen *Theoremata*: als $3aa + 3bb + 7cc$ kan niemals ein *Quadratum* seyn: *Item* $2aa + 6bb + 21cc$ *quadratum esse nequit*, und dergleichen;[12] ich habe aber noch keine dergleichen *Formulam* finden können, in welcher 4 *Litterae a se invicem non pendentes* enthalten wären.[13]

Daß im übrigen meine jüngst überschickte *Demonstration* bey Ewr. Hochedelgb. Beyfall gefunden erfreuet mich sehr. Daß aber diese *Formul* $(a+b)^p - a^p - b^p$ auch durch p oder einen *Divisorem* des p *praeter unitatem*, wann p kein *numerus primus* ist, *divisibilis* seyn sollte,[14] kan durch meine *Demonstration* nicht nur nicht erwiesen werden, sondern es trifft auch in vielen Fällen nicht zu. Als wann $a = 1$ *et* $b = 1$, *et* $p = 35$, so lässt sich $2^{35} - 2$ weder durch 5 noch durch 7 theilen.

Wann *Generaliter* $a^{p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = b$, so ist

$$a^{xp\sqrt{-1}} + a^{-xp\sqrt{-1}} = \left(\frac{b + \sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x + \left(\frac{b - \sqrt{(bb-4)}}{2}\right)^x,$$

und folglich wann $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 3$, so wird

$$\begin{aligned} 2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}} &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2x}. \end{aligned}$$

Sonsten kommen Ewr. Hochedelgb. *Observationen*[15] mit meinem *General-Theoremate*, daß

$$a^{+p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2 \textit{ cosinui Arcus } p\,\ell\, a,$$

meistentheils überein, nur daß $2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}}$ nicht gleich ist $2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}$, wann nicht entweder $(2n+q)\,p\,\ell\,2$ oder $2np\,\ell\,2$ gleich ist $m\pi$ *denotante* $1 : \pi$ *rat*[*ionem*] *diam*[*etri*] *ad peripheriam.*

Hiemit habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung und schuldigster *Veneration* mich zu nennen

Eurer Hochedelgebohrnen
gehorsamsten Diener
Leonh. Euler

Berlin den 8ten *May.* 1742.

R 764 Reply to n° 49
Berlin, May 8th, 1742
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 14–15r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 123–124; *Euler-Goldbach* (1965), p. 100–102

51
Goldbach to Euler
Moscow, (May 27th) June 7th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Auf Eurer Hochedelgebohrnen letztes Schreiben vom 8. *Maii* berichte ich hiemit, daß ob ich zwar kein neues *engagement* gesuchet, mir dennoch von dem Reichs *Collegio* schon den 19. *Febr. st. n.* wider mein Vermuthen die Stelle eines *Etat*s-Raths angetragen worden, welche ich unter gewissen Bedingungen *accepti*ret habe. *Nil temere, nil timide.*[1]

Ich wünsche hertzlich daß die vielfältigen *promesses* Eurer HochE. hiesige *pension* betreffend bald zur *realité* kommen mögen, ich halte aber noch dafür daß der Weg den ich bald nach Ihrer Ankunfft in *Berlin* vorgeschlagen,[2] damahls der beste und kürtzeste gewesen wäre wenn er sich mit dem *Systemate Mundi optimi* hätte reimen wollen.

Ohngeachtet[3] ich mich in meinem vorigen Briefe mit der *particula* vieleicht *précautioni*ret, so hätte doch nicht geglaubet daß die Formul $(a+b)^p - a^p - b^p$ sich nicht allezeit durch einen von den *divisoribus numeri* p solte *dividi*ren lassen, wann solches nicht durch das von E. H. angeführte *exemple* deutlich bestättiget würde.[4]

So viel ich mich erinnere, hatte ich mir in meinem letzten Briefe die Formul $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}}$, *posito* $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, als *applicatas* einer *curvae serpentiformis*, deren *abscissae* x sind, vorgestellet,[5] und welche den *axem* so offt durchschneidet als die Formul $= 0$ wird, so daß wann die *formula ipsa* $= 2$ ist, die *applicata maxima* unten oder oben herauskommet, folglich unzehliche andere *applicatae* einander unter sich gleich seyn müssen, nichtsdestoweniger ist in meiner damahligen *expression* ein Fehler eingeschlichen den E. H. mit recht angemercket haben, und leicht verbessert werden kan, in dem es heissen sollen, daß wann q ein *numerus quicunque*, und $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ gesetzet wird, alsdann *posito pro* n *integro quocunque* seyn werde

$$2^{(8n-4-q)\,p\sqrt{-1}} + 2^{-\,(8n-4-q)\,p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-\,qp\sqrt{-1}}.$$ [6]

Ew. HochEdelgb. haben gefunden, daß alle Zahlen so nicht $4mn - m - n$ seyn können, in dieser Formul begriffen sind $v^2 + v + u^2$, und ich finde, daß alle $4mn - m - n$ zu dieser Formul $y^2 + y - x^2$ gebracht werden können,[7] so daß eine jede gegebene Zahl gleich ist $p^2+p\pm q^2$ woselbst p *&* q *numeros integros* anzeigen, oder auch eine von beyden *litteris* 0 bedeuten kan, woraus zu sehen ist daß eine jede Zahl aus einem *duplo numeri triangularis* $\pm$ *numero quadrato* bestehet; weil aber auch eine jede Zahl gleich ist der Formul $u^2+v^2+v+y^2+y-x^2$, so wird, wann man setzet $u=\dfrac{z^2+z}{4}+1$, $x=\dfrac{z^2+z}{4}-1$, $u^2-x^2=z^2+z$, folglich jedes *numeri dati dimidium* $\dfrac{n}{2}=\dfrac{v^2+v+y^2+y+z^2+z}{2}$ *id est tribus trigonalibus.*[8]

Daß in der *formula polygonalium* $\dfrac{(p-2)\,x^2-(p-4)\,x}{2}$, wann sie gleich werden soll $4mn-m-n$, p weder 5 ± 2 noch 5 ± 1 seyn könne, sondern alle *trigonales*, *tetragonales*, *hexagonales* und *heptagonales* ausgeschlossen werden, folget *ex iisdem principiis.*[9]

Ich halte es nicht für undienlich daß man auch die jenigen *propositiones* anmercke welche sehr *probabiles* sind, ohngeachtet es an einer würcklichen *demonstration* fehlet; denn wann sie auch nachmahls falsch befunden werden, so können sie doch zu Entdeckung einer neuen Wahrheit gelegenheit geben. Des *Fermatii* Einfall daß jeder *numerus* $2^{2^{n-1}}+1$ eine *seriem numerorum primorum* gebe, kan zwar, wie Ew. H. bereits gezeiget haben, nicht bestehen, es wäre aber schon was sonderliches, wann diese *series* lauter *numeros unico modo in duo quadrata divisibiles* gäbe;[10] auf solche Weise will ich auch eine *conjecture hazardi*ren: daß jede Zahl welche aus zweyen *numeris primis* zusammengesetzet ist ein *aggregatum* so vieler *numerorum primorum* sey als man will (die *unitatem* mit dazu gerechnet) biß auf die *congeriem omnium unitatum.*[11]

Nachdem ich dieses wieder durchgelesen,[12] finde ich, daß sich die *Conjecture in summo rigore demonstri*ren lässet *in casu* $n+1$, *si successerit in casu* n, *et* $n+1$ *dividi possit in duos numeros primos.* Die *demonstration* ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens daß eine jede Zahl die grösser ist als 2 ein *aggregatum trium numerorum primorum* sey.[13]

Zum Exempel

$$4=\left\{\begin{array}{l}1+1+1+1\\1+1+2\\1+3\end{array}\right.\qquad 5=\left\{\begin{array}{l}2+3\\1+1+3\\1+1+1+2\\1+1+1+1+1\end{array}\right.\qquad 6=\left\{\begin{array}{l}1+5\\1+2+3\\1+1+1+3\\1+1+1+1+2\\1+1+1+1+1+1\end{array}\right.\qquad \&c.$$

Hierauf folgen ein paar *observationes* so *demonstri*ret werden können:

Si v *sit functio ipsius* x *eiusmodi ut facta* $v=c$ *numero cuicunque, determinari possit* x *per* c *et reliquas constantes in functione expressas, poterit etiam determinari valor ipsius* x *in aequatione* $v^{2n+1}=(2v+1)\,(v+1)^{n-1}$.[14]

Si concipiatur curva cuius abscissa sit x, *applicata vero sit summa seriei* $\dfrac{x^n}{n\cdot 2^{2n}}$ *posita* n *pro exponente terminorum, hoc est, applicata*

$$=\frac{x}{1\cdot 2^2}+\frac{x^2}{2\cdot 2^4}+\frac{x^3}{3\cdot 2^6}+\frac{x^4}{4\cdot 2^8}+\&c.,$$

dico, si fuerit abscissa	$= 1,$	*applicatam fore*	$\frac{1}{3}$ [15]
	2	...	$\ell\, 2$
	3	...	$2\,\ell\, 2$
	4	*vel major* ...	*infinitam.* [16]

Ich verharre mit aller ersinnlichen Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 7. *Jun. st. n.* 1742.

P. S. Die beyden andern *formulas numerorum non quadratorum*, deren Ew. HochEdelgb. Erwehnung thun, habe ich noch nicht untersuchet, ich glaube aber daß selbige, wann man setzet $a = hx + k$, $b = lx + m$, $c = nx + p$, sich wohl möchten unter nachfolgende Formul *rangi*ren lassen, allwo f, g, γ, δ *numeri integri aff*[*irmativi*] sind

$$\left(2f \begin{array}{l} -4\gamma\delta \\ -4\gamma^2 \end{array}\right) x^2 + 4\,(f - 2\gamma\delta)\left(2g \begin{array}{l} -\delta^2 \\ -2f \end{array}\right) x + \left(2g \begin{array}{l} -\delta^2 \\ -2g \end{array}\right)^2,$$

denn diese kan niemals ein *quadratum* geben.

Ohngeachtet der Postfreyheit so E. H. haben wird doch allhie das Brief*porto* von Berlin biß Memel mitgerechnet, und vor jeden Brief werden 65 *Cop.* bezahlet, ich will also meine Briefe künfftig nicht weiter als biß *Memel franqui*ren. Was die *Catalogos* betrifft[17] so dörfften dieselben nur mit einer Gelegenheit, wann andere Sachen von dort nach S.ᵗ Petersburg abgehen, mitgeschicket werden, weil kein *periculum in mora* ist; indessen möchte ich wohl wissen ob die neueste *edition* von dem *Dictionaire de Trevoux* so in diesem oder im vorigen Jahre herausgekommen seyn soll, in Berlin schon verkauffet werde und was sie koste?[18]

Positis m et p numeris integris affirm[*ativis*], *haec expressio*

$$\frac{p + 2 \pm \sqrt{4p - m + 3}}{m}$$

non potest fieri numerus integer.[19]

Wann E. H. einige *exemplaria* von Dero *Memoire de fluxu et refluxu maris* übrig hätten würde ich mir eines da[von] ausbitten.[20] Hat Ihre *Correspondance* mit dem Hn *Chevalier Mouhi* gantzlich aufgehöret? Die *recension* so er von der *Mad*[*ame*] *la Marqu*[*ise*] *du Chatellet Institutions Physiques* machen wird, möchte wohl lesenswürdig seyn. Haben Ew. H. in dessen nicht erfahren was die von ihm gebrauchte fremde *expression à la trancaise* heißen soll?[21] Wann in des Hn *Poleni* Briefe, den ich aus S. Petersburg übersandt habe,[22] etwas merckwürdiges gestanden, bitte ich mir davon einige Nachricht aus, *item* ob in der Uberschrifft auf den Briefen an E. H. etwas zu ändern sey?

R 765 Reply to n° 50
Moscow, (May 27th) June 7th, 1742
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 43–45v
Partial copy, 6 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 58v–61r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 125–129; *Euler-Goldbach* (1965), p. 103–105

52
Euler to Goldbach
Berlin, June 30th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Eur. Hochedelgeb. neues *Engagement* bey dem Reichs*Collegio* hat mir der H. Rath Schumacher so gleich zu wissen gethan und so gar eine *Copie* von der deswegen ergangenen *Ukas*e zugeschickt.[1] Ich *Gratuli*re zu dieser Veränderung von gantzem Herzen, und wünsche daß Eur. Hochedelgb. dabey alles dasjenige *Avantage* und Vergnügen finden mögen, welches Dieselben Selbst wünschen.

Allhier lebt nun alles in den grösten Freuden, da heute der schon längst gewünschte Friede zwischen unserm Allergnädigsten König, und der Königin von Ungarn und Böheim, mit allen *Solennität*en *publici*rt worden, und Ihro Majestät der König innert 14 Tagen allhier gewiß eintreffen werden. Die *Articul* des Friedens sind noch nicht völlig bekannt, doch soll die Königin gantz Nieder- und Ober-Schlesien abgetretten haben; dagegen aber Sich nächstens in Böhmen Crönen lassen: und wie man versichert, so soll *Prag* schon erobert seyn.[2]

Man vermuthet auch, daß gleich nach Ihro Königl[ichen] *Maj*estät Zurückkunft mit Errichtung der neuen *Academi*e der Anfang gemacht werden soll, und allem Ansehen nach dörffte solches bey den jetzigen Umständen ohne den *Mr. Maupertuis* geschehen.

Vor einigen *Po*st-Tagen habe ich von *Petersburg* die völlige *Resolution* wegen meines *Engagement*s bey der *Academi*e nebst einer jährlichen *Pension* von 200 Rub. erhalten, und über dieses ist mir noch die *Restitution* aller auf die *Correspondenz* gehenden Unkösten versprochen worden; ich verwundere mich aber sehr, daß die *Academi*e noch keinen *Praesident*en bekommen.[3]

Ewr. Hochedelgb. werde mit der ersten Gelegenheit verschiedene *Catalogos* von den neuesten Büchern entweder nach *Petersburg* oder gar nach *Moscau* zu übersenden die Ehre haben.[4] Von der neuesten *Edition* des *Dictionnaire de Trevoux*[5] habe hier noch nichts erfahren können, man hat mir aber gewiesen, daß dieses Werk *A*[*nno*] 1732 schon aus 5 *Vol.* bestanden, und 45 Rthl. gekostet habe.

Von dem *Chevalier de Mouhy* habe seit der Zeit keine Briefe mehr bekommen; wegen der Redens Art *à la trancaise* hatte ich in *Stettin* den *M.ʳ Mauclerc* gefragt, welcher mir so gleich gesagt hat, daß darinn ein Druckfehler sey, und *à la fra*[*n*]*çoise* heissen müsse.[6]

In dem Briefe von dem H. *Poleni*, welchen Ewr. Hochedelgb. mir aus *Petersburg* zuzuschicken die Güte gehabt,[7] ist nichts sonderbar neues gestanden; als daß nunmehro auch die *Exercitationes Vitruvianae Tertiae* nebst einer *Dissertation de Institutionibus Experimentalis Mechanicae Philosophiae* herausgekommen. Ferner sey auch von dem *P. Abbate Grandi* ein *Cursus Mathematicus*, von dem *P. Caraccioli* ein *Tractatus de Lineis Curvis*, und von des H. *Poleni* Tochtermann dem *Julio Pontedera Antiquitatum Latinarum Graecarumque Enarrationes atque Emendationes* zum Vorschein gekommen,[8] von welchen allen Werken ich noch keines gesehen. Ingleichen habe auch noch keine von meinen in *Paris* gedruckten *Dissertation*en bekommen;[9] und kan auch allhier fast keine Gelegenheit finden dazu zu gelangen. Ich werde nun bald wieder eine *Dissertation* nach *Paris* schicken *sur la meilleure maniere d'observer l'inclinaison de l'aiguille aimantée*;[10] und da ich bey dieser Gelegenheit auf die *Theoriam Magnetis meditir*t, so habe ich endlich ein sehr *simples* und den *Legibus naturae* gemässes *Systema* gefunden, wodurch ich alle *proprietates* und *phaenomena Magnetis et ferri* auf eine sehr leichte und deutliche Art erklären kan; über welche *Materi*e ich künftiges Jahr eine *Piece* nach *Paris* senden werde.[11]

Letstens habe ich wiedrum eine *Piece* nach *Petersburg de Oscillationibus pendulorum flexibilium* geschickt;[12] und nächstens wird hier der 7$^{\text{te}}$ *Tomus Miscell*[*aneorum*] zum Vorschein kommen, darinn ich eine ziemliche Anzahl *Piec*en gegeben.[13] Einige davon handeln von einer neuen Art die *Summas serierum potestatum reciprocarum* zu finden. Erstlich habe ich eine *Methode* gegeben alle *Formulas differentiales rationales* zu *integri*ren, da dann das *Integrale*, wann dasselbe nicht *algebraicum* ist, entweder *a logarithmis*, oder *a quadratura circuli* oder von beyden zugleich *dependi*rt. Hieraus habe ich das *integrale* dieser *Formul*

$$\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$$

*generaliter exprimi*rt, und dabey gefunden, daß wann man setzt $x = 1$, alsdann im *Integrali* sich die *membra logarithmica destrui*ren, und nur diejenigen so *a quadratura circuli dependi*ren, übrigbleiben; welche zusammen genommen endlich auf diese *Expression* $\frac{\pi \, cos.\frac{m}{n}\pi}{n \, sin.\frac{m}{n}\pi}$ *reduci*rt werden. Hierauf habe ich die *formul* $\int \frac{x^{m-1} - x^{n-m-1}}{1 - x^n} dx$ *per series integri*rt, *modo ordinario*, und nachdem ich $x = 1$ gesetzet, diese *Aequation* gefunden:[14]

$$\frac{\pi \, cos.\frac{m}{n}\pi}{n \, sin.\frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + etc.$$

allwo $1 : \pi$ *rationem diametri ad peripheriam* bedeutet, und folglich *posito radio seu sinu toto* $= 1$, die halbe *peripherie* oder der *arcus* 180° durch π angedeutet wird; und allso wird $\frac{m}{n}\pi$ ein *arcus determinatus*, davon man den *sinum* und *co-*

sinum anzeigen kan. Nun setze ich $\frac{m}{n} = x$; so kommt diese *Series* heraus

$$\frac{\pi\ cos.\,\pi x}{sin.\,\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + etc.;$$

setzt man $x = \frac{1}{4}$, so wird $\pi x = 45°$, und $cos.\,\pi x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *et* $sin.\,\pi x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ und folglich

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - etc.$$

Hieraus kan man aber *per differentiationem* auf höhere *potestates* kommen: denn *sumto* $\underline{x}$ *variab[ili]* ist $d.\,cos\,\pi x = -\pi\,dx\,sin\,\pi x$ und $d.\,sin\,\pi x = \pi\,dx\,cos.\,\pi x$; dahero wird

$$d.\frac{\pi\ cos\,\pi x}{sin\,\pi x} = \frac{-\pi\pi\,dx\ (sin\,\pi x)^2 - \pi\pi\,dx\ (cos\,\pi x)^2}{(sin\,\pi x)^2} = \frac{-\pi\pi\,dx}{(sin\,\pi x)^2}$$

ob $(sin\,\pi x)^2 + (cos\,\pi x)^2 = 1$, *nempe quadrato radii*: allso wann die *series* auch *differenti*rt wird, so kommt

$$\frac{-\pi\pi\,dx}{(sin\,\pi x)^2} = \frac{-dx}{xx} - \frac{dx}{(1-x)^2} - \frac{dx}{(1+x)^2} - \frac{dx}{(2-x)^2} - \frac{dx}{(2+x)^2} - etc.$$

und durch $-dx$ *dividi*rt

$$\frac{\pi\pi}{(sin\,\pi x)^2} = \frac{1}{xx} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + etc.;$$

setzt man $x = \frac{1}{4}$, weil $sin.\,\frac{1}{4}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, so wird $2\pi\pi = \dfrac{16}{1} + \dfrac{16}{9} + \dfrac{16}{25} + etc.$ oder $\dfrac{\pi\pi}{8} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{7^2} + etc.$ Man kan aber noch weiter *differenti*ren, und solcher gestalt *ad summas quarumcunque potestatum* gelangen; dann es wird

$$d.\frac{\pi\pi}{(sin\,\pi x)^2} = \frac{-2\pi^3\,dx\,cos.\,\pi x}{(sin\,\pi x)^3} = \frac{-2dx}{x^3} + \frac{2dx}{(1-x)^3} - \frac{2dx}{(1+x)^3} + etc.$$

und folglich

$$\frac{\pi^3 cos\,\pi x}{(sin\,\pi x)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - etc.;$$

sit $x = \dfrac{1}{4}$, erit $2\pi^3 = \dfrac{64}{1} - \dfrac{64}{3^3} + \dfrac{64}{5^3} - \dfrac{64}{7^3} + etc.$ Solcher gestalt finde ich allso die *Summas omnium potestatum* und noch viel *generaler* als durch die vorher gebrauchte *methode*, weil ich hier *loco x quamcunque fractionem substitui*ren kan.

Diese *Methode* habe ich dem H. *Nicolao Bernoulli* nach Basel geschrieben, und erwarte darüber noch seine Meinung.[15] Ich erinnere mich aber, daß Ewr. Hochedelgeb. schon vormals angemerket haben,[16] daß wann man die *Summ* von dieser *Serie*

$$\frac{1}{a+\alpha x}+\frac{1}{b+\beta x}+\frac{1}{c+\gamma x}+etc.$$

wüsste, man daraus *per differentiationem* die *Summ* von dieser finden könnte

$$\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n}+\frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n}+\frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}+etc.$$

wovon meine *summatio* hier ein *Casus* ist.

Generaliter ist $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=2\,cos\,A[rcus]\;p\,\ell\,2$. Wann allso $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}$ soll $=0$ seyn, so muß $p\,\ell\,2$ einem solchen *arcui circuli* gleich seyn, dessen *cosinus* $=0$; diese Eigenschaft aber haben alle *arcus in hac formula* $\dfrac{(2n+1)\;\pi}{2}$ *contenti*: und folglich wird $p=\dfrac{(2n+1)\;\pi}{2\,\ell\,2}$. Dahero *posito* $p=\dfrac{(2n+1)\;\pi}{2\,\ell\,2}$ oder $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$, so wird

$$2^{xp\sqrt{-1}}+2^{-xp\sqrt{-1}}=2\,cos\,A[rcus]\,xp\,\ell\,2=2\,cos\,A[rcus]\,\frac{(2n+1)\;x\pi}{2}.$$

Wann allso seyn soll $2^{qp\sqrt{-1}}+2^{-qp\sqrt{-1}}=2^{rp\sqrt{-1}}+2^{-rp\sqrt{-1}}$ so muß

$$cos\,A[rcus]\frac{(2n+1)\;q\pi}{2}=cos\,\frac{(2n+1)\;r\pi}{2}.$$

Die *cosinus* aber von zweyen verschiedenen *arcubus* sind einander gleich, wann entweder die *summa* oder *differentia arcuum* gleich ist einem *multiplo* von der gantzen *peripheria* 2π; dahero wird

$$\frac{(2n+1)\;q\pi}{2}\pm\frac{(2n+1)\;r\pi}{2}=2m\pi,$$

und folglich $q\pm r=\dfrac{4m}{2n+1}$; so daß seyn wird

$$2^{\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}}+2^{-\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}}=2^{qp\sqrt{-1}}+2^{-qp\sqrt{-1}};$$

worinn alles dasjenige enthalten ist, was Ewr. Hochedelgb. von dieser *Mat*erie mir überschrieben haben.[17]

Nicht nur alle Zahlen, welche diese *Formul* $4mn-m-n$ gibt, sind enthalten in $yy+y-xx$, sondern gar alle möglichen Zahlen, welche so wohl in $4mn-m-n$ als nicht darinn begriffen sind;[18] und allso ist *independenter* von diesem *Theoremate* eine jede Zahl in dieser *Formul* $uu+v^2+v+y^2+y-x^2$ enthalten. Hieraus lässt sich aber nichts *ad resolutionem numeri cujusque in numeros trigonales vel* *quadratos* schliessen,[19] dann da ein jeder Buchstabe u, v, y, und x, eine jegliche Zahl andeutet, so kan man nicht vor u, $\frac{zz+z}{4}+1$ noch vor x, $\frac{zz+z}{4}-1$ setzen, weilen diese *Formulae* $\frac{zz+z}{4}\pm 1$ nicht mehr alle möglichen Zahlen geben, welche doch durch u und x angedeutet werden. Dann da eine jede Zahl sogar in dieser *Formul* $uu-xx$ enthalten ist, so müste kraft dieser *substitution* auch eine jede Zahl in dieser $zz+z$ enthalten und allso ein *numerus trigonalis* seyn.

Wann alle in dieser *Formula* $2^{2^{n-1}}+1$ enthaltenen Zahlen nur *unico modo in duo quadrata divisibiles* wären, so müsten auch alle diese Zahlen nothwendig *numeri primi* seyn; welches aber nicht ist.[20] Dann alle diese Zahlen sind in dieser *Formula* $4m+1$ enthalten, welche so oft sie ein *numerus primus* ist, unfehlbar *in duo quadrata hocque unico modo resolvi*rt werden kan; so oft aber $4m+1$ kein *numerus primus* ist, so ist dieselbe Zahl entweder gar nicht *resolubilis in duo quadrata*, oder *pluribus uno modis.* Daß aber $2^{32}+1$, welche Zahl kein *numerus primus* ist, zum wenigsten *duobus modis in duo quadrata divisibilis* sey, kan ich allso zeigen: I. Wann $\underline{a}$ *et* $\underline{b}$ *in duo quadrata resolubiles* sind, so wird auch das *product* $\underline{a}\,\underline{b}$ *in duo quadrata resolubile* seyn; II. *si productum* $\underline{a}\,\underline{b}$ *et alter factor* $\underline{a}$ *fuerint numeri in duo quadrata resolubiles, tum quoque alter factor* $\underline{b}$ *in duo quadrata erit resolubilis*: diese *Theoremata* können *rigidissime demonstri*rt werden. Nun ist $2^{32}+1$, welche Zahl *in duo quadrata est resolubilis nempe* 2^{32} *et* 1, *divisibilis per* $641=25^2+4^2$; dahero der andere *Factor*, den ich *brevitatis gratia* $\underline{b}$ nennen will, gewiß auch eine *summa duorum quadratorum, sit* $b=pp+qq$*, ita ut sit* $2^{32}+1=\left(25^2+4^2\right)(pp+qq)$*: erit* $2^{32}+1=(25p+4q)^2+(25q-4p)^2$*; et simul* $2^{32}+1=(25p-4q)^2+(25q+4p)^2$, und folglich zum wenigsten *duobus modis* eine *summa duorum quadratorum.* Hieraus kan man nun die *Resolutionem duplicem a priori* finden; dann es wird $p=2556$ *et* $q=409$: und folglich $2^{32}+1=65\,536^2+1^2=62\,264^2+20\,449^2$. Daß eine jegliche Zahl, welche *in* 2 *numeros primos resolubilis* ist, zugleich *in quot quis voluerit, numeros primos* zertheilt werden könne, kan aus einer *Observation*, welche Ewr. Hochedelgb. vormals mit mir *communici*rt haben, daß nehmlich ein jeder *numerus par* eine *summa duorum numerorum primorum* sey, *illustri*rt und *confirmi*rt werden.[21] Dann ist der *numerus propositus* $\underline{n}$ *par* so ist er eine *summa duorum numerorum prim*[*orum*], und da $n-2$ auch eine *summa duorum numerorum* [*primorum*] ist, so ist n auch eine *summa trium*; und auch *quatuor*, und so fort. Ist aber $\underline{n}$ ein *numerus impar* so ist derselbe gewiß eine *summa trium n*[*umerorum*] *p*[*rimorum*], weil $n-1$ eine *summa duorum* ist, und kan folglich auch *in quotvis plures resolvi*rt werden.[22] Daß aber ein jeder *numerus par* eine *summa duorum primorum* sey, halte ich für ein gantz gewisses *Theorema*, ungeacht ich dasselbe nicht *demonstri*ren kan.[23]

Daß $\frac{p+2\pm\sqrt{(4p-m+3)}}{m}$ nimmer ein *numerus integer* werden könne erhellet daher, weilen wann man diese *Formul* einem *numero integro* n gleich setzt, herauskommt $p=mn\pm\sqrt{(4mn-1)}$, es kan aber $4mn-1$ kein *quadratum* seyn.[24]

Ewr. Hochedelgb. *Theorema*,[25] daß wann man *ex aequatione* $v = c$, *existente* v *functione quapiam ipsius* x, die *radicem* x finden kan, man auch *ex hac aequatione* $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$ den *valorem ipsius* x bestimmen könne, hat mich zu ergründen viel mühe gekostet, biß ich endlich gemerket, daß diese *Aequation* $v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1} = 0$ *divisibilis* sey *per* $vv - v - 1$; dann es ist

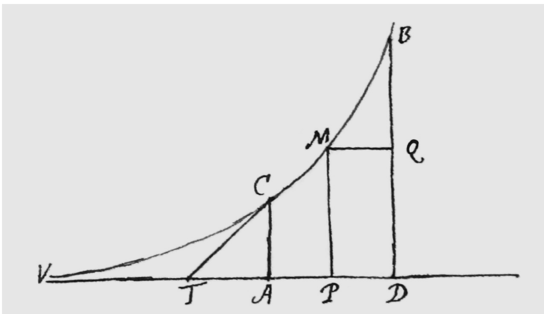
$$v^{2n+1} - (2v+1)(v+1)^{n-1} = v\left(v^{2n} - (v+1)^n\right) + (vv - v - 1)(v+1)^{n-1};$$

und $v^{2n} - (v+1)^n$ ist durch $vv - (v+1)$ *divisibilis. Quicquid ergo sit* n *aequationi* $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$ *satisfacit* $vv = v + 1$, und ist allso $v = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, aus welcher *Aequation* man *per hypothesin* die *radicem* x finden kan.

Si concipiatur [*curva*] *cujus abscissa posita* $= x$, *applicata sit*

$$y = \frac{x}{1 \cdot 2^2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^4} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^6} + \frac{x^4}{4 \cdot 2^8} + \mathit{etc.},$$

erit generaliter $y = \ell \dfrac{4}{4-x}$, und folglich ist die *curva* eine *logarithmica*, darinn die *applicata* zum *assymtoto* wird wann $x = 4$.



Es sey VCB eine *Logarithmica ordinaria asymtoton habens* VD, deren *subtangens constans* $AT = 1$; *capiatur applicata* $AC = 1$, *et ducta alia quacunque* PM, *positisque* $AP = t$, *et* $PM = u$, *erit* $t = \ell\, u$ *seu* $u\,dt = du$. *Jam ducatur applicata* $DB = 4AC = 4$, *erit* $AD = \ell\, 4$: *et ducta* MQ *fiet* $BQ = x$ *et* $QM = y$ *pro casu proposito; erit enim* $AP = t = \ell\, 4 - y$ *et* $PM = u = 4 - x$, *unde ob* $t = \ell\, u$ *erit* $\ell\, 4 - y = \ell\,(4-x)$ *et* $y = \ell \dfrac{4}{4-x}$. Sonsten haben Ewr. Hochedelgb. *pro summa seriei ipsi* y *aequalis casu* $x = 1$ geschrieben $\frac{1}{3}$, da diese *summ* ist $= \ell\, \frac{4}{3}$.[26]

Hiemit empfehle mich zu Ewr. Hochedelgb. beständigen Gunst und Gewogenheit, und habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn,

Ewr. Hochedelgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 30$^{\text{ten}}$ *Junii*
1742.

R 766 Reply to n° 51
Berlin, June 30th, 1742
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 22–25r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 130–136; *Euler-Goldbach* (1965), p. 107–111

53

Goldbach to Euler

Moscow, July (19th) 30th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen an mich abgestatteten Glückwunsch erkenne ich mit der schuldigsten Danckbarkeit und *gratuli*re gleichfalls zu Dero bevorstehenden *perpetuell*en *pension* aus Pariß, denn es scheinet je länger je mehr daß E. HochEdelg. die dortige *Academie des Sciences* sich bey Austheilung der Preise gäntzlich *tributaire* machen werden.[1]

Von den Friedens *Condition*en wird jedermann gestehen daß sie für Ihro König-l[iche] Majestät nicht *glorieus*er hätten vermuthet werden können,[2] welches auch mir zu grosser Freude gereichet.

Bey Gelegenheit[3] des *loci corrupti* den der H. *Mauclerc* so glücklich *restitui*ret hat,[4] erinnere ich mich daß ich in den von *Wallisio dechifrir*ten Briefen[5] einige Stellen angemercket, die einer andern *interpretation* nöthig haben,[6] wie es E. H. wann Sie nachfolgende *remarques* mit den Briefen selbst *conferi*ren wollen, ohne Zweiffel befinden werden: *Tom.* III *Op*[*erum*] *p.* 666, *lin*[*ea*] 4 hatte in dem Briefe gestanden 125, 44, 24, 123, 68, 28. Er setzet an statt 24 die Zahl 26 und lieset

125,	44,	26,	123,	68,	28,
co	*n*	*d*	*ui*	*st*	*e*

welches kein frantzösisches Wort ist, da doch vielmehr von dem *Copist*en die zwey Zahlen 40 und 20 oder die eine 348 ausgelassen worden und das gantze Wort heissen soll: <u>*Conclaviste*</u>. *Lin*[*ea*] 10 *ibid.* setzet er für 128 die Zahl 138 und *interpreti*ret sie <u>*Hongrois*</u>; es ist aber viel wahrscheinlicher daß 128 recht geschrieben, und <u>*homme*</u> heist. Auch ist nicht zusehen warum *p.* 665, *lin*[*ea*] 7 von unten, die Zahl 380 welche er gar nicht in den *clavem* gesetzet, <u>*pall*</u> heissen soll da dieselbe vielmehr <u>*paye*</u> bedeuten wird. Die Zahl 136 welche er gar nicht *interpreti*ret soll vermuthlich heissen <u>*Dame*</u>. Dessen ohngeachtet halte ich die von *Wallisio* bewerckstelligte *Dechifri*rung vor einen grossen *effort de l'Esprit humain.* Er gestehet aber aufrichtig daß ihm unterschiedene *chifri*rte Briefe in die hände gekommen daraus er nichts finden können.

Ich sehe wohl daß bey meinen Briefen allezeit die Erinnerung nöthig ist: *Omnia probate*,[7] weil es mehrenteils an gehöriger *at*[*ten*]*tion* fehlet, indessen wird es mir doch lieb seyn wann nur etwas darin enthalten ist so Eurer HochE. *approbation* *meriti*ret. An die *observation* welche Sie mir schon längst *communici*ret, daß die *numeri* $4m+1$ nur auf einerley Art in zwey *quadrata* getheilet werden können, habe ich damahls als ich den letzten Brief geschrieben, nicht gedacht.[8] Daß alle Zahlen in der *formula* $y^2 + y - x^2$ begriffen sind[9] ist gewiß, doch hätte dieses meiner damahligen *intention* nichts gehindert wann nur die *suppositiones* $u = \frac{z^2+z}{4} + 1$ und $x = \frac{z^2+z}{4} - 1$ aus zulänglichen Gründen wären hergeleitet worden; denn wie es in dieser *proposition*: *quilibet numerus est aequalis tribus trigonalibus, uni affirmativo et duobus negativis*,[10] darauf nicht ankommt daß in den *tribus formulis* $\frac{x^2+x-y^2-y-z^2-z}{2}$, x, y und z alle nur mögliche Zahlen bedeuten, son[dern] vor x auch gar wohl gesetzt werden kan $2u^2$, wann man nur erweiset, daß diese *adhibita substitutio* dem *numero cuicunque dato*, so aus der gantzen erwehnten *formul* heraus kommen soll, nicht hinderlich ist, so würde es auch mit dem *casu* daß jeder *numerus* aus *tribus trigonalibus* bestehet, eine gleiche Bewandniß haben, wann die *suppositio* $x = \frac{z^2+z}{4} + 1$ gnugsahm gegründet wäre.

Bald nach dem ich meinen Brief geschrieben hatte, sahe ich, daß die *observation* $\frac{p+2 \pm \sqrt{4p-m+3}}{m} \neq$ *numero integro* von keiner Erheblichkeit ist.[11] Vieleicht sind diese etwas besser: $1 + 16a^2 + 16b^2$ *nunquam habet radicem huius formae* $4n-1$, *sed semper huius* $4n+1$. *Numerus* $4x^4+1$ *in unico casu est primus, si* $x = 1$.[12]

Gleichwie es aber *series numerorum* giebt welche entweder nicht können durch $4n-1$ *dividi*ret werden, oder gar *numeri primi* sind, so wären auch dergleichen *series* von Zahlen zu suchen die entweder *numeri primi* sind, oder durch $4n+1$ nicht können *dividi*ret werden, oder wenigstens den *divisorem minimum* niemahls *huius formae* $4n+1$ haben, denn so offt es sich träffe, daß ein *terminus eius seriei* gleich würde a^2+1, könnte man *demonstri*ren daß es ein *numerus primus* sey. In der *serie numerorum trigonalium unitate auctorum* sind gewiß sehr wenige *casus* da der *divisor minimus ad hanc formam* $4n+1$ gehöret; einer von diesen *casibus* ereignet sich wann der *exponens termini* ist 252 und der *numerus* $\triangle$*lis unitate auctus* aus den *factoribus* 29 und 401 bestehet.[13] Wann man aber dergleichen *casus in quibus divisor minimus est huius formae* $4n+1$ durch eine *generale exception* ausschliessen könnte, so wären alle *termini huius formae* a^2+1 insofern sie in selbiger *exception* nicht begriffen sind, *numeri primi*.[14]

Was ich von $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$ geschrieben hatte war bloß *ex consideratione numeri* $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ hergenommen, ohne zu vermuthen daß die *aequatio* *dividi*ret werden könnte, welches doch, wie ich jetzo sehe, in dergleichen Fällen unumgänglich nöthig ist.[15]

So viel ich mich erinnere, ist mir niemahls eine *methode data summa seriei*

$$\frac{1}{a+\alpha x} + \frac{1}{b+\beta x} + \frac{1}{c+\gamma x} + \&c.$$

inveniendi summam

$$\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n}+\frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n}+\frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n}+\&c.$$

bekannt gewesen,[16] ausser in dem Fall da *summa prioris seriei* aus einer bekannten *functione ipsius* x bestehet, solcher gestalt wird auch *data* $\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\&c.$ *summabili*, die *series* $\alpha x+2^n\beta x^2+3^n\gamma x^3+4^n\delta x^4+\&c.$ *summabilis*; welches aber nichts sonderliches ist, da hingegen die gröste Schwierigkeit darin bestehet, daß man in Ermangelung einer solchen *functionis finitae ipsius* x eine *expressionem aequivalentem substitui*ren und selbige hernach immer weiter *differentii*ren könne, wie E. H. es mit den *Sinibus arcuum circuli* gemachet. Indessen will ich doch ein *Theorema* hieher setzen so mir nun seit wenigen Tagen eingefallen: *Sint tres series*

$$\begin{array}{ll} A\ \ldots & a+b+c+d+\&c. \\ B\ \ldots & ab+(a+b)\,c+(a+b+c)\,d+\&c. \\ C\ \ldots & a^2+b^2+c^2+d^2+\&c. \end{array}$$

dico esse $B=\dfrac{A^2-C}{2}$, *unde sequitur cognitis summis duarum serierum ex his tribus, dari etiam summam tertiae seriei, et cognita summa unius seriei dari etiam rationem quam alterutra series reliquarum habet ad alteram. Sit exempli gratia* $a=\dfrac{1}{m}$, $b=\dfrac{1}{m^2}$, $c=\dfrac{1}{m^3}$ *&c., erit* $B=\dfrac{1}{(m+1)\,(m-1)^2}$. *Sit* $a=1$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{5}$, $d=-\frac{1}{7}$ (*signis post binos quosque terminos alternantibus*), *erit series* $B=0$.[17] *Si ponatur*

$$\frac{1}{2^n}-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n}+\left(1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{1}{4^n}-\&c.=f\pi^{2n},$$

ubi $\pi=$ *circumferentiae circuli cuius diameter* 1, *erit* f *functio ejusmodi ipsius* n, *quae posito* $n=1$ *fiat* $\dfrac{6p^2-\pi^2}{12}$, *ubi* $p=\ell\,2$; *si vero* n *ponatur numerus integer maior unitate, tota functio fiat numerus rationalis, propterea quod in illa functione his casibus quantitates numeris* p *et* π *affectae sese destruunt.* Hiebey habe ich *observi*ret daß $1+p^2=\dfrac{3\pi^2}{20}$ *fere.*[18]

Ich möchte wohl wissen ob E. H. die *summas* nachfolgender *serierum* $ab^2+(a+b)\,c^2+(a+b+c)\,d^2$ &c. und $a^2b+\left(a^2+b^2\right)c+\left(a^2+b^2+c^2\right)d+\&c.$, wann $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$ oder $a+b+c+\&c.=\ell\,2$, *per logarithmos et quadraturam circuli* exprimieren können?

Neulich fand ich einen Zettel darauf von meiner Hand, vermuthlich schon vor einigen Jahren, geschrieben war:[19] *Seriei* $1+2^p+3^p+4^p+$ *&c. summa ad datum* *terminum x est*

$$\begin{aligned}1 \quad + \quad & 2^p (x-1) + (3^p - 2^p)(x-1)\frac{(x-2)}{2} \\ + \quad & (4^p - 2\cdot 3^p + 2^p)(x-1)\frac{(x-2)}{2}\frac{(x-3)}{3} \\ + \quad & (5^p - 3\cdot 4^p + 3\cdot 3^p - 2^p)(x-1)\frac{(x-2)}{2}\frac{(x-3)}{3}\frac{(x-4)}{4} \; + \&c.\end{aligned}$$

quae series abrumpitur si p sit numerus integer affirmativus, nec plures continet terminos, quam $p+2$ continet unitates.[20]

Auf einem andern Zettel fand ich folgendes: *Ex his formulis*

$$\begin{array}{rl}\text{(I.)} & u^n \\ \text{(II.)} & nu^{n+1} - (n+1)\,u^n \\ \text{(III.)} & n^2u^{n+2} - \big(2n^2+2n-1\big)\,u^{n+1} + (n+1)^2\,u^n \\ \text{(IV.)} & n^3u^{n+3} - \big(3n^3+3n^2-3n+1\big)\,u^{n+2} + \big(3n^3+6n^2-4\big)\,u^{n+1} - (n+1)^3\,u^n\end{array}$$

quae in infinitum continuari possunt ea lege, ut si antecedens fuerit

$$n^pu^{n+p} + \alpha u^{n+p-1} + \beta u^{n+p-2} + \gamma u^{n+p-3} + \&c.,$$

sequens fiat

$$\begin{array}{llll} n^{p+1}u^{n+p+1} - n^p\,(n+p+1)\,u^{n+p} & - \alpha\,(n+p)\,u^{n+p-1} & - \beta\,(n+p-1)\,u^{n+p-2} & - \&c. \\ \qquad + \alpha\,(n-1) & + \beta\,(n-2) & + \gamma\,(n-3) & + \&c. \end{array}$$

Sumatur formula quaecunque A et in casu particulari ubi fit $n=0$, eadem formula ponatur $=B$; dico $\dfrac{A-B}{(u-1)^{p+1}}$ esse summatricem seriei

$$1 + 2^pu + 3^pu^2 + 4^pu^3 \;\ldots +\; n^pu^{n-1}.$$

Sit exempli causa $p=1$, erit $A = nu^{n+1} - (n+1)\,u^n$, et in casu particulari ubi $n=0$ transit A in $-1=B$, qua propter[21]

$$\frac{A-B}{(u-1)^2} = \frac{nu^{n+1} - (n+1)\,u^n + 1}{(u-1)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 \;\ldots +\; nu^{n-1}.$$

Sonst habe ich auch bemercket daß die *summa Seriei* $1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} + \&c.$ gleich sey

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}x^n\,(x+1)^n \quad - \quad & \frac{(n-2)}{2^2\cdot 3}x^{n-1}\,(x+1)^{n-1} \\ + \quad & \frac{(7n-8)\,(n-1)\,(n-3)}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}x^{n-2}\,(x+1)^{n-2} - \&c.\end{aligned}$$[22]

oder (*posito* $y = x\,(x+1)$) *erit summatrix*

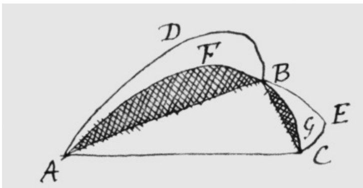
$$= \frac{1}{2n}\big(y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \;\ldots\; my^2\big)$$

ubi a, b, &c. determinantur hoc modo:

$$
\begin{aligned}
&(n-1)\,a &+\quad & n\,(n-1)\,(n-2) = 0\\
&(n-2)\,b &+\quad & \frac{a\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 3} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 0\\
&(n-3)\,c &+\quad & \frac{b\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\cdot 3} + \frac{a\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\\
& &+\quad & \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 0;
\end{aligned}
$$

solte auch hierin etwas verschrieben seyn, so kann ich es doch gleich *rectifici*ren, wie denn auch dasjenige, was jetzo von den *exponentibus paribus* gesagt worden, auf alle *exponentes in genere* zu *extendi*ren nicht schwer seyn würde.

In den *Compendiis Geometricis* wo das *Theorema Pythagoricum demonstri*ret wird, solte man billig solches auch von allen *figuris similibus demonstri*ren,[23] woraus denn dieses *corollarium* folget:



Si triangulum rectangulum ABC tangatur a curva quacunque AFBGC in tribus punctis A, B, C, et super basibus AB et BC describantur curvae ADB, BEC ipsi curvae ABC per omnia similes, nec sese in aliis punctis praeter A, B, C intersecantes, fore (deductis segmentis cancellatis AFB, BGC) reliquas quasi-lunulas $ADBF + BECG = \triangle ABC$*; quae quasi-lunulae in lunulas veras transibunt, si curva ABC fuerit semicirculus.*

Hiernechst verbleibe ich mit besonderer Hochachtung,

Eurer HochEdelgebohrnen

ergebenster Diener

Goldbach.

Moscau den 30. *Julii st. n.* 1742.

R 767 Reply to nº 52
Moscow, July (19th) 30th, 1742
Original, 4 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 46–49r
Partial copy, 7 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 61r–64r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 137–143; *Euler-Goldbach* (1965), p. 112–115

54
Euler to Goldbach
Berlin, August 28th, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß Ewr. Hochedelgb. mir einen bestandigen *Tribut* von der *Academie* zu *Paris prophe*zeyen, erkenne ich als eine deutliche *marque* Dero gegen mich hegenden besondern Wohlgewogenheit mit der schuldigsten Dankbarkeit:[1] ob ich aber gleich zu Erhaltung dieses Vortheils meiner seits nicht ermangeln lasse, so scheinet doch meine von hieraus abgeschickten *Piec*en eben dasjenige Schicksaal betroffen zu haben welches vor etlichen Jahren den H. *Cammer* Herrn Korff so viel Mühe gekostet hat zu *redressi*ren.[2] Dann ich habe schon zu Anfang des vorigen Monaths meine *Piec*e über die *Inclination* des *Magnet*en an den H. *De Mairan* geschickt, und gleich wohl noch keine Antwort, daß selbige angekommen, erhalten.[3] Hernach hatte ich verwichenen *Martium* eine *Piece* über den *Motum Fluidorum in Canalibus elasticis* an die *Academi*e *des Sciences* nach *Dijon*, von welcher über diese *Materi*e ein Preiß von 30 *Louisd'or* bestimmt war, gesandt, und gleichfalls darüber noch keine Antwort empfangen,[4] welches mich glauben macht, daß diese beyden *Piecen* entweder irgendwo aufgehalten, oder gar verlohren gegangen seyn müssen; wobey ich nur dieses am meisten bedaure, daß ich von diesen beyden *Piec*en keine *Copi*en gehalten habe.

Zu Aufbauung der neuen *Academi*e der Wissenschaften allhier sind von Ihro Königl[ichen] *Majestät* die nöthigen *Ordres* schon gegeben worden, allein wegen der Aufrichtung selbst ist noch nichts *resolvi*rt worden. Die alte *Societät* hatte letstens bald ein grosses Unglück betroffen, indem bey Nacht auf dem Königl[ichen] Stall Feur ausgekommen wodurch die gantze vordere *Face* nach den Linden verbrannt, und die gantze Mahler *Academi*e zu Grund gegangen.[5]

Der H. Rath Schumacher hat mir vor einiger Zeit gemeldet, daß Ihro Kaiserl[iche] *Majestät* schon würckl[ich] für die *Academi*e in *Petersburg* zu sorgen und derselben einen *Praesident*en zu geben Allergnädigst geruhet hätten; da aber Ewr. Hochedelgb. davon keine Meldung gethan, so muß ich die *Confirmation* dieser Zeitung noch erwarten.[6]

Ewr. Hochedelgb. *Emendation*en der von *Wallisio dechifrir*ten Briefe[7] halte ich vor gantz richtig, erkenne aber dabey mein Unvermögen, selbsten diese tiefsinnige *Materi*e zu untersuchen.

Daß diese *Expression* $\sqrt{(1+16aa+16bb)}$ niemals eine Zahl von dieser *Form* $4n-1$ geben könne, ist ein sehr schönes *Theorema*,[8] davon die *Demonstration* nicht so leicht in die Augen fällt. Dann gesetzt, daß $4n-1 = \sqrt{(1+16aa+16bb)}$, so würde $16nn - 8n = 16aa + 16bb$, und folglich $n\,(2n-1) = 2\,(aa+bb)$. Weilen nun $2\,(aa+bb)$ ein *numerus par* ist, so müste n ein *numerus par* seyn, indem $2n-1$ gewiß *impar* ist. Es sey allso $n = 2p$, so wird $2p\,(4p-1) = 2\,(aa+bb)$ und dannenhero $4p-1$ ein *divisor formulae* $aa+bb$ welches nicht seyn kan: oder

$p\,(4p-1)$ müste eine *summa duorum quadratorum* seyn, welches ebenfalls nicht möglich ist.

Daß $4x^4+1$ niemals ein *numerus primus* seyn könne ausser dem *Casu* wann $x=1$, ist kein Wunder, weilen diese *Formula generaliter in duos factores resolvi*rt werden kan, denn es ist $4x^4+1=(2xx+2x+1)\,(2xx-2x+1)$.

Ob es solche *Series Numerorum* gebe, welche entweder durch $4n+1$ nicht *divisibiles*, oder gar *numeri primi* sind, zweifle ich sehr;[9] wann aber gleichwohl dergleichen sich finden sollten, so würde man daraus einen grossen Vortheil zu Erfindung der *numerorum primorum* ziehen können.

Übrigens halten die *Divisores primi* aller *Serierum* von Zahlen, welche in dieser *Formula* enthalten sind $\alpha xx \pm \beta yy$ eine sehr artige Ordnung, welche, ungeacht ich davon noch keine *Demonstration* habe, dennoch ihre völlige Richtigkeit zu haben scheint. Ich nehme deswegen die Freyheit Ewr. Hochedelgb. einige dergleichen *Theoremata* zu überschreiben, aus welchen noch unendlich viel andere hergeleitet werden können.[10]

I. *Si x et y sunt numeri primi inter se haec formula $xx+yy$ per alios numeros primos non est divisibilis, nisi qui contineantur in hac forma $4n+1$; atque hi numeri primi omnes ipsi in hac forma $xx+yy$ continentur.*

Dieses bekannte *Theorema* setze ich voraus, um die *connexion* der übrigen desto besser vor Augen zu legen.

II. *Haec formula $2xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis* $8n+1$ oder $8n+3$ *contineantur: et quoties $8n+1$ vel $8n+3$ fuerit numerus primus, erit is aggregatum ex quadrato et duplo alterius quadrati, seu erit formae $2xx+yy$.*

III. *Haec formula $3xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis* $12n+1$, *et* $12n+7$ (oder in dieser einzeln $6n+1$) *contineantur. Et quoties* $6n+1$ *est numerus primus, continebitur in forma $3xx+yy$.*

IV. *Haec formula $5xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in his formis $20n+1$; $20n+3$; $20n+9$; $20n+7$ contineantur: et omnis numerus primus in una harum quatuor formularum contentus erit ipse numerus formae $5xx+yy$.*

V. *Haec forma $6xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in una harum quatuor formularum $24n+1$; $24n+5$; $24n+7$; $24n+11$ contineantur: et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $6xx+yy$.*

VI. *Haec forma $7xx+yy$ alios divisores primos non habet, nisi qui in una harum 6 formularum $28n+1$; $28n+9$; $28n+11$; $28n+15$; $28n+23$; $28n+25$* (oder in einer dieser dreyen $14n+1$; $14n+9$; $14n+11$) *continea*[*ntur*:] *et omnis numerus primus in una harum formularum contentus est ipse numerus formae $7xx+yy$.*

Nun aber ist *omnis numerus trigonalis unitate auctus* in dieser *Formula* $7xx+yy$ enthalten,[11] und folglich können die *numeri trigonales unitate aucti* keine andern *Divisores primos* haben, als welche in diesen *Formulis* $14n+1$; $14n+9$; $14n+11$; oder welches gleich viel in dieser $7xx+yy$ enthalten sind. Hieraus lassen sich nun leicht alle *numeri primi* finden, welche einen *numerum trigonalem unitate* *auctum dividi*ren: Solche sind nehmlich 1; 11; 23; 29; 37; 43; 53; 67; 71; 79; *etc.* Dahero können keine andere *numeri primi hujus formae* $4m+1$ *divisores* seyn *numeri trigonalis unitate aucti*, als welche in einer von diesen 3 *formulis* begriffen sind $28n+1$; $28n+9$; $28n+25$.

Hieraus ist allso klar daß diese *Expression* $pxx+yy$ keine andern *Divisores* habe, als welche in einer gewissen Anzahl von solchen *formulis* $4pn+s$ enthalten sind, allwo s einige Zahlen bedeutet, welche ob sie gleich keine Ordnung unter sich zu halten scheinen, dennoch nach einer schönen *Lege* fort gehen: welche aus diesen *Theorematis* erhellet.

VII. *Si numerus primus formae* $4pn+s$ *fuerit divisor formulae* $pxx+yy$, *tum etiam omnis numerus primus in hac forma generaliori contentus* $4pn+s^k$ *erit divisor formulae* $pxx+yy$, *atque etiam ipse erit numerus formae* $pxx+yy$. *Ex*[*empli*] *gr*[*atia*]. *Quia numerus primus* $28n+9$ *est numerus formae* $7xx+yy$, *erunt etiam numeri primi* $28n+81$ $(28n+25)$; $28n+729$ $(28n+1)$ *etc. numeri formae* $7xx+yy$.

VIII. *Si duo numeri primi* $4pn+s$ *et* $4pn+t$ *fuerint divisores formulae* $pxx+yy$, *tum omnis numerus primus hujus formae* $4pn+s^kt^i$ *erit simul numerus formae* $pxx+yy$.[12]

Wann man allso von einer solchen *Expression* $pxx+yy$ schon einige *divisores primos* entdecket hat, so kan man durch diese *Theoremata* leicht alle möglichen finden. Als es sey diese *formul* $13xx+yy$ gegeben, worinn diese Zahlen 14; 17; 22; 29; 38; 49; 62; *etc.* enthalten sind. *Numeri igitur primi qui sunt divisores formulae* $13xx+yy$ *erunt* 1; 7; 11; 17; 19; 29; 31: folglich müssen alle *numeri primi in his formulis* $52n+1$; $52n+7$; $52n+11$; *etc. divisores* von $13xx+yy$ seyn können. Die *Formul* $52n+7$ gibt aber nach dem *Theor*[*emate*] VII noch diese $52n+49$; $52n+343$ (oder $52n+31$); $52n+7\cdot 31$ oder $52n+9$; ferner $52n+7\cdot 9$, oder $52n+11$; ferner $52n+7\cdot 11$ oder $52n+25$; ferner $52n+7\cdot 25$ oder $52n+19$; ferner $52n+7\cdot 19$ oder $52n+29$; ferner $52n+7\cdot 29$ oder $52n+47$; ferner $52n+7\cdot 47$ oder $52n+17$; ferner $52n+7\cdot 17$ oder $52n+15$; ferner $52n+7\cdot 15$ oder $52n+1$, und hier endet sich die Verschiedenheit der Zahlen, welche zu $52n$ gesetzt werden können, um *numeros primos in forma* $13xx+yy$ *contentos* hervorzubringen. Allso nur allein daraus daß 7 ein *Divisor formae* $13xx+yy$ seyn kan, weisen die beyden letsten *Theoremata*, daß alle *numeri primi in his formulis*

$52n+1$;	$52n+31$;	$52n+25$;	$52n+47$
$52n+7$;	$52n+9$;	$52n+19$;	$52n+[17]$[13]
$52n+49$;	$52n+11$;	$52n+29$;	$52n+15$

contenti diese *form* $13xx+yy$ haben, und auch *divisores* von solchen Zahlen $13xx+yy$ seyn können, und mehr *formulae* können auch durch die *Theoremata* nicht herausgebracht werden. Dahero gewiß ist daß kein anderer *numerus primus* ein *divisor formae* $13xx+yy$ seyn kan, als welcher in einer der gefundenen 12 *Formul*n enthalten ist. Weilen nun ein jeder *numerus primus in hac forma contentus* $4pn+1$ ein *Divisor* von $pxx+yy$ seyn kan. Hieher können schöne *Proprietates* hergeleitet werden als z[um] e[xempel]: Weil 17 ein *numerus primus* und auch von dieser *Form* $2xx+yy$: so ist gewiß daß so offt $17^m\pm 8n$ ein *numerus primus* ist, solcher auch eine solche Zahl $2xx + yy$ seyn müsse. Und wann $17^m \pm 8n$ eine Zahl ist von dieser *Form* $2xx + yy$ und doch keinen *Divisorem* von dieser *Form* *admitti*rt, so ist dieselbe gewiß ein *numerus primus.*

Eine gleiche Beschaffenheit hat es auch mit den *Divisoribus hujus modi formularum* $pxx - yy$, oder $xx - pyy$; welche wann sie *primi* sind in dieser *Form* $4np \pm s$ enthalten seyn müssen; da s einige *determinir*te Zahlen bedeutet. Nehmlich in einigen Fällen wird seyn:

1. *Omnes divisores primi formae* $xx - yy$ *continentur in* $4n \pm 1$, welches klar.

2. *Omnes divisores primi formae* $2xx - yy$ *continentur in* $8n \pm 1$.

Coroll[*arium*]. *Ergo numerus primus* $8n \pm 3$ *non est numerus formae* $2xx - yy$.

3. *Omnes divisores primi formae* $3xx - yy$ *continentur in forma* $12n \pm 1$.

4. *Omnes divisores primi formae* $5xx - yy$ *continentur vel in* $20n \pm 1$ *vel in* $20n \pm [9]$ (oder in dieser einzeln $10n \pm 1$)

etc.

Et si numerus primus $4pn + s$ *fuerit divisor formae* $pxx - yy$ *oder* $xx - [pyy]$, *tum* $\pm 4np \pm s^k$ *erit ipse numerus formae* $pxx - yy$ *vel* $xx - pyy$ *quoties fuerit numerus primus. Si duo numeri primi* s, *et* t *fuerint numeri formae* $pxx - yy$, *tum quoties* $\pm 4np \pm s^\mu t^\nu$ *fuerit numerus primus, simul erit numerus formae* $pxx - yy$. Allso weil 7, und 17 *numeri primi* und von dieser *Form* $2xx - yy$ sind, so wird auch $\pm 8n \pm 7^\mu \cdot 17^\nu$ eine Zahl von dieser *Form* seyn, so oft dieselbe ein *numerus primus* ist. Es sey $\mu = 1$, $\nu = 1$; so ist $7 \cdot 17 = 119$; und $119 + 8 = 127 =$ *numero primo*; folglich wird seyn $127 = 2xx - yy = 2 \cdot 64 - 1$. Hieraus ist nun klar daß es nicht möglich ist *suiten* von Zahlen so in einer solchen *Formul* $pxx \pm qyy$ begriffen sind, zu finden, welche nicht *divisores* von dieser art $4n + 1$ *admitti*ren sollten.

Ich glaube aber fest daß ich diese *Materi*e bey weitem noch nicht erschöpfet habe, sondern daß sich darinn noch unzehlich viele herrliche *Proprietates Numerorum* entdeken lassen; wodurch die *Doctrina de Divisoribus* zu einer weit grössern Vollkommenheit gebracht werden könnte;[14] und bin dabey gewiß daß wann Ewr. Hochedelgb. diese *Materi*e einiger *Attention* würdigen werden, Dieselben darinn sehr wichtige *Decouvert*en machen würden. Der grösste Vortheil wurde aber sich alsdenn recht zeigen, wann man für diese *Theoremata Demonstrationes* finden sollte.

Wenn 3 *Series* allso beschaffen sind,[15] daß $A = a + b + c + d + etc.$, $B = ab + (a + b)\, c + (a + b + c)\, d + etc.$, *et* $C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + etc.$, so ist B die *summa factorum ex binis terminis seriei* A, und ist folglich die *dupla summa factorum ex binis* $2B$ *una cum summa quadratorum singulorum* C gleich dem *Quadrato seriei* A *seu* $2B + C = AA$, *et* $B = \dfrac{A^2 - C}{2}$; solche *Theoremata* können auf höhere *Potestates extendi*rt werden, als wann

$$\begin{aligned} A &= a + b + c + d + etc. \\ B &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + etc. \\ C &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + etc. \\ D &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + etc. \end{aligned}$$

so wird seyn *terminorum* a, b, c, d, e, *etc.*

$$\textit{summa factorum ex binis} = \frac{A^2 - B}{2}$$

$$\textit{summa factorum ex ternis} = \frac{A^3 - 3AB + 2C}{6}$$

$$\textit{summa factorum ex quaternis} = \frac{A^4 - 6A^2B + 8AC + 3B^2 - 6D}{24}$$

etc.;

wann aber $A = a + b + c + d + \textit{ etc.}$ und $B = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \textit{ etc.}$ und $C = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \textit{ etc.}$ und Ewr. Hochedelgb. mir *proponi*rte *series* gesetzt werden

$$P = ab^2 + (a+b)\,c^2 + (a+b+c)\,d^2 + (a+b+c+d)\,e^2 + \textit{etc.}$$

item

$$Q = a^2b + \left(a^2 + b^2\right)c + \left(a^2 + b^2 + c^2\right)d + \textit{etc.}$$

so wird seyn $P + Q = AB - C$: folglich wann

$$\begin{array}{rcl} A & = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \textit{etc.} \\ B & = & 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \textit{etc.} \\ C & = & 1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \frac{1}{125} - \textit{etc.} \end{array}$$

so kan die *summa* der beyden *serierum* $P+Q$ nicht *per logarithmos et quadraturam circuli* angegeben werden, weilen die *Series* C noch nicht *summir*t werden kan; viel weniger kan allso eine jede für sich *summir*t werden: wann aber dieses geschehen könnte so hätte man die *summam Seriei* C, welche ich bißher vergebens gesucht.

Die *Valores* $1 + p^2$ und $\dfrac{3\pi^2}{20}$, wann $p = \ell\,2$, *differi*ren so wenig von einander, daß ich dieselben bald für völlig gleich gehalten hatte:[16] ich habe deswegen beyder *Valores* genauer gesucht und gefunden $1 + p^2 = 1{,}480\,453\,013\,9$ und $\dfrac{3}{20}\pi^2 = 1{,}480\,440\,66$.

Die *Formulae* welche Ewr. Hochedelgeb. mir für die *Summationem Seriei* $1 + 2^p + 3^p + 4^p + \textit{ etc.}$ *usque ad datum terminum* überschrieben, erinnere ich mich noch in *Petersburg* bey Denselben gesehen zu haben,[17] und entspringet die erstere *Expression* $1 + 2^p\,(x-1) + (3^p - 2^p)\,\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{1\cdot 2} + \textit{etc.}$ *ex differentiis continuo sumtis*, und die andern *Formulae* kommen *per differentiationem* heraus.

Um aber die *Summam* in der bequemsten *Form* zu finden, so halte ich diese Art vor die leichteste:

$$\begin{aligned}
1 \quad + &\quad 2^p + 3^p + 4^p + 5^p + 6^p \ \ldots + \ x^p \\
= &\quad \frac{x^{p+1}}{p+1} + \frac{x^p}{1\cdot 2} + \frac{p}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}x^{p-1} - \frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6}x^{p-3} \\
+ &\quad \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\,(p-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6}x^{p-5} - \frac{p\,(p-1)\,\cdots\,(p-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots 9}\cdot\frac{3}{10}x^{p-7} \\
+ &\quad \frac{p\,(p-1)\,\cdots\,(p-8)}{2\cdot 3\cdots 11}\cdot\frac{5}{6}x^{p-9} - \frac{p\,(p-1)\,\cdots\,(p-10)}{2\cdot 3\cdots 13}\cdot\frac{691}{210}x^{p-11} \\
+ &\quad \frac{p\,(p-1)\,\cdots\,(p-12)}{2\cdot 3\cdots 15}\cdot\frac{35}{2}x^{p-13} - \textit{etc.}
\end{aligned}$$

allwo das Hauptwerk auf diese *Seriem fractionum* ankommt, welche Ewr. Hochedelgb. genugsam noch bekannt seyn wird:[18]

$$\overset{1}{\frac{1}{2}};\quad \overset{2}{\frac{1}{6}};\quad \overset{3}{\frac{1}{6}};\quad \overset{4}{\frac{3}{10}};\quad \overset{5}{\frac{5}{6}};\quad \overset{6}{\frac{691}{210}};\quad \overset{7}{\frac{35}{2}};\quad \overset{8}{\frac{3617}{30}};\quad \overset{9}{\frac{43\,867}{42}};\quad \overset{10}{\frac{1\,222\,277}{110}};\quad \overset{11}{\frac{854\,513}{6}};$$

$$\overset{12}{\frac{1\,181\,820\,455}{546}};\quad \overset{13}{\frac{76\,977\,927}{2}};$$

so weit habe ich sie *continuir*t. Der *Terminus generalis exponenti n respondens* kan allso *exprimir*t werden

$$(2n+1)\left(-\frac{1}{2}+\frac{(2^{2n}-2\cdot 1)}{3}-\frac{(3^{2n}-3\cdot 2^{2n}+3\cdot 1)}{4}+\frac{(4^{2n}-4\cdot 3^{2n}+6\cdot 2^{2n}-4\cdot 1)}{5}-\textit{etc.}\right),$$

welche gleichfalls *abrumpir*t wird.

Ob gleich diese *Series* $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\textit{etc.}$ *per quadraturam circuli exprimir*t wird, so kan doch die *summ* von dieser $x+\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{9}+\dfrac{x^4}{16}+\textit{etc.}$ nicht *generaliter* gegeben werden;[19] und ausser den *Casum* $x=1$ habe bißher noch keinen andern als wann $x=\frac{1}{2}$, *summi*ren können. Nehmlich *posito* $p=\ell\,2$ *et* $\pi : 1 =$ *periph*[*eria*] : *diam*[*etrum*], so kommt heraus

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16\cdot 16}+\frac{1}{25\cdot 32}+\frac{1}{36\cdot 64}+\textit{etc.}=\frac{\pi\pi-6pp}{12}.$$

Endlich habe die Ehre noch dieses *Theorema* hinzuzufügen, welches öffters einen grossen Nutzen haben kan:[20]

Th[*eorema*]: *Si fuerit*

$$s=1+\frac{a}{n+1}+\frac{aa}{2n+1}+\frac{a^3}{3n+1}+\frac{a^4}{4n+1}+\frac{a^5}{5n+1}+\ \textit{etc.},$$

erit

$$\begin{aligned}\frac{ss}{2}=\frac{1}{2} \quad &+ \quad \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{aa}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\\ &+ \quad \frac{a^3}{3n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)\\ &+ \quad \frac{a^4}{4n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{4n+1}\right)+\ etc.\end{aligned}$$

Hiemit empfehle mich Ewr. Hochedelgb. gehorsamst, und verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochedelgeb.
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 28ten *Aug.*
1742.

P. S. Der H. *Hedling*er, welcher mit S[eine]r Fr[au] Liebste seit kurzem hier ankommen, und bey uns *logir*t, lässt Ewr. Hochedelgeb. seine gehorsamste Empfehlung machen.

R 768 Reply to nº 53
Berlin, August 28th, 1742
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 26–29v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 144–153; *Euler-Goldbach* (1965), p. 116–120

55
Goldbach to Euler
Moscow, (September 20th) October 1st, 1742

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen bin ich für die Nachricht daß (*Tit*[*ulo*]) H. *Hedlinger* in Berlin angekommen und sich meiner annoch erinnert, sehr verbunden,[1] ich bitte mich demselben ferner zu empfehlen und hoffe noch immer ihn in diesen Gegenden wieder zu sprechen. Falls noch keine Nachricht von Eurer H. nach Pariß übersandten *Memoire* eingelauffen,[2] würde rathsahm seyn, dem Hn *De Mairan* durch ein besonderes Schreiben nebst einem *attestato* vom Berlinischen Posthause zu *notifici*ren daß eine *piéce* an ihn abgegangen wodurch der *Autor* um den künfftigen Preiß bey der *Academie competi*ret, und Sie wann selbige nicht zu gehöriger Zeit angekommen wäre, in dessen Nahmen (nach dem *Advocat*en *stilo*) *de termino non elabendo* *protesti*ren wolten.

Daß[3] $p\,(4p-1)$ keine *summa duorum quadratorum* seyn kan, wird von E. H. als bekannt angenommen, ich *deduci*re es aber daher *quia* $n \neq 2p \pm \sqrt{4p^2 - p - a^2}$, und dieses *quia* $n^2 \neq 4pn - p - a^2$; sonst habe ich auch gefunden daß eine *summa trium datorum quadratorum* nicht gleich seyn kan dem *facto ex duobus multiplicato per quadratum par*[4] oder daß $e^2 + f^2 + g^2 \neq 4e^2f^2p^2$; imgleichen *si est* $fmn - m - n \neq a^2$ (*ubi* f, m, n, a *sint integri affirmativi*) *erit etiam* $fp^2mn - m - n \neq a^2$, *ubi* p *praeterea sit integer*. Da es aber mit dem *casu* $f = 4$ bekannter massen *in aequatione priori* seine richtigkeit hat, so wird auch $4mnp^2 - m - n \neq a^2$, und kann gar wohl seyn[5] daß f für sich selbst noch viele oder unzehliche *valores* ausser dem *quaternario* hat, wie es sich denn findet, daß wann alle *divisores primi huius numeri* $3xx + yy$ (*ubi* x *et* y *sunt numeri inter se primi*) unter dieser *formula* $6n + 1$ begriffen sind (*de quo dubitare nefas*)[6] f auch $= 12$ gesetzt werden kan, folglich $12mnp^2 - m - n \neq a^2$. Ich habe unter den *remarques* so Ew. HochEdelg. mir von den *divisoribus formulae* $px^2 + y^2$ *communici*ren wollen insonderheit diese betrachtet, daß ein jeder *numerus* $\triangle$*lis unitate auctus* in dieser *formula* $7xx + yy$ enthalten ist und dahero keine andere *divisores primos* haben soll als welche in diesen *formulis* $14n+1$, $14n+9$, $14n+11$ bestehen; weil aber unzehliche *numeri* $\triangle$*les* (als zum Exempel 21) *unitate aucti* zu dieser *formul* $7x^2 + y^2$ gleichwohl nicht gebracht werden können[7] so verstehe ich Eurer H. *Theorema* nur von den *numeris trigonalibus paribus quorum scilicet exponentes sunt huius formae* $4m - \dfrac{(1 \mp 1)}{2}$, denn dieser *exponentium trigonales unitate aucti* sind offenbahr $7m^2 + (m \pm 1)^2$ und gehören alle, sie mögen *primi* oder *non primi* seyn, unter nachfolgende 4 *Classes* $7n + 0$, $7n + 1$, $7n + 2$, $7n + 4$, welches jedoch mit Eurer HochE. *specification* der *divisorum* (als worin der *numerus* 7 ausgelassen ist) nicht übereinkommet. Ich bin indessen Eurer H. für die *communication* dieser besondern *theorematum* sehr verbunden, ohngeachtet ich nicht alles *pro rei dignitate* einsehen kan.

Nach dem von E. H. mir schon längst *communici*rten *valore* $\ell\,2$ hatte ich $1 + \ell\,2 \cdot \ell\,2$ gefunden $= 1[,]480\,453\,017\,915\,20\ldots$ welcher von den in Dero Schreiben angeführten Zahlen etwas *differi*ret, weil aber der *error* sich erst nach der neunten Ziffer äussert, will ich den von E. H. angegebenen *valorem* lieber für wahr annehmen als die *multiplication* wiederhohlen.[8]

Die 12 *terminos seriei* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$ *&c.* habe ich auch schon längst abgeschrieben gehabt und den 13.den aus Dero letzterem Briefe bereits dazu gesetzet.

Das *quadratum seriei*[9] $s = 1 + \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{a^2}{2n+1} + \&c.$ welches ist

$$ss = 2\left(1 + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \&c.\right)$$

scheinet nur bloß deswegen merckwürdig zu seyn, weil die *coëfficientes* in einer so leichten Ordnung fortgehen.

Was ich in meinem vorigen von den *Lunulis* geschrieben hatte, ist von E. H. vermutlich übergangen worden nicht weil es unrichtig, sondern weil es gar zu offenbahr ist.[10]

Da nach der angenommenen Bedeutung der *signorum* $\pm$ und $\mp$ diese *formul* $\pm\, a \mp b$ entweder $a-b$ oder $-\,a+b$ heissen muß, so ist allerdings ein *signum* nützlich welches ausser diesen beyden *valoribus* auch $a+b$ und $-\,a-b$ andeutet, dieses erinnere ich mich in einigen Büchern mit ☊ ausgedruckt gesehen zu haben,[11] und auf solche weise halte ich dafür daß man durch ☊ 1 ☊ $\frac{1}{2}$ ☊ $\frac{1}{3}$ ☊ $\frac{1}{4}$ ☊ $\frac{1}{5}$ ☊ *&c.* alle *quantitates rationales, surdas & a quibuscunque quadraturis pendentes*[12] *exprimi*ren könne; die gantze Kunst bestehet nur darin daß die *signa* + *&* − *suis locis* recht *substitui*ret werden.[13]

Weil aber doch das *signum* ☊ nur *alternative* entweder + oder − bedeutet so kan man noch ein *signum*, etwa ÷ (welches der *Stifelius* vor − zu gebrauchen pfleget)[14] in diesem Verstande annehmen, daß es *simul et* + *et* − bedeute; so giebt es *exempli gr*[*atia*] eine *seriem numerorum n*, der *apparence* nach *valde irregularem*, und die wohl noch von niemanden *consideri*ret seyn mag, von dieser beschaffenheit $n \div p = P$, wo p und P *numeros primos* bedeuten, so daß wan $n-p$ ein *numerus primus* ist, *ex natura numeri n* auch $n+p$ ein *numerus primus* seyn muß, durch n aber werden folgende *numeri* angedeutet 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 18, 24, 30, *&c.* Gleichwie nun alle *numeri primi maiores quam* 3 unter die formul $6m \pm 1$ gehören, so hat es das ansehen daß die *termini* dieser neuen *seriei* welche grösser als 8 sind in der *formul* $6m$ begriffen seyen.[15]

Die *series numerorum* 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, *&c.* deren *quadrata unitate aucta numeri primi* sind, scheinet diese *proprietatem* zuhaben daß eine jede Zahl aus zweyen der vorhergehenden bestehe als $6 = 2+4$, $24 = 10+14$, $20 = 4+16$ *&c.*;[16] offtmahls ist der *terminus unico modo ex duobus praecedentibus compositus*, als $74 = 20 + 54$.

Es ist unlängst bey einer gewissen Gelegenheit darüber *raisonni*ret worden ob die *globi sanguinei* welche nach des *Leuvenhoek*s *observation* 6 zusammen einen *globum maiorem formi*ren,[17] nicht ferner aus 6 kleinern und diese wieder aus 6 kleinern *et sic in infinitum* zusammengesetzt seyn könnten? Wann aber 6 *globi intra cavitatem globi maioris* solcher gestalt *concipi*ret werden, daß sie sich ein ander so viel möglich berühren, so wird der *diameter globi cuiusvis minoris* sich *ad diametrum globi maioris, in quo continentur*, verhalten wie 1 zu $1+\sqrt{2}$, und wann dieses auf die *globos sanguineos*, deren ein jeder für sich selbst nicht eigentlich ein *globus* sondern ein *aggregatum sex minorum globorum* ist, *applici*ret wird, diese kleineren *globuli* aber, wie gemeldet, aus 6 noch kleinern *&c.* bestehen sollen, so findet es sich daß man nothwendig bey einem gewissen *gradu determinato* mit solcher *diminutione globorum* aufhören muß; denn weil die *soliditas omnium globorum ex ordine n ad soliditatem unius globi ex ordine primo* ist wie $\dfrac{6^{n-1}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{3n-3}}$ *ad* 1, so würde, wann die *subdivisio* auf gleiche art *in infinitum* fortgienge, *propter* $n = \infty$, das *aggregatum omnium istorum globorum respectu globi maximi infi-*

nite parvum seyn, folglich auch mit dem besten *microscopio* nicht gesehen werden können, welches der *experience* zuwieder läufft. Ich habe (*Tit*[*ulo*]) den Hn von *Bl...* [18] mit welchem ich hierüber gesprochen, *meo periculo* versichert daß es Ew. HochEdelgb. eben so finden würden und bitte mir desfalls Dero *sentiment* hievon mit wenigem zu melden.

Bey dem *meo periculo* fällt mir der *Matanasius* ein, davon ich unlängst die 6.te *edition* gelesen, nachdem ich das Buch in 18 Jahren nicht gesehen hatte;[19] die *approbation generale* so es bey dem *Publico* gefunden und davon der *Autor* selbst unterschiedene *passages* anführet, zeuget in der That von dessen *merite*, und trifft hier gewisser massen des *Ciceronis* Ausspruch ein: *id ipsum est summi oratoris, summum oratorem populo videri.*[20]

Ich habe mich nach einem Buch so den *Titul* fuhret *Labyrinthus Algebrae Aut*[*ore*] *Joh*[*anne*] *Jac*[*obo*] *Ferguson*, *Hagae Com*[*itum*] 1667, 4., und ich selbst schon vor 30 Jahren in händen gehabt (wiewohl nichts daraus behalten) bey unterschiedenen Personen vergeblich erkundiget; dem Hn *Hermann* welcher doch eine grosse *connoissance* von dieser art Büchern hatte, war es auch gantz unbekannt; neulich fand ich ohngefehr obgedachten *Tit*el in meinen *excerptis*, und dabey geschrieben: *de quo tractatu iudicium vide in Actis Anglicanis ad ann*[*um*] 1669, *mens*[*em*] *Jul.*, *p.* 202; vieleicht ist etwas darin so einige *attention meriti*ret.[21]

Ich bin mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 1. *Oct. st. n.* 1742.

Was[22] ich vorhin von dem *Dictionaire de Trevoux* geschrieben hatte beziehet sich auf folgende Nachricht aus den gelehrten Zeitungen: Das *Dict*[*ionaire*] *de Trevoux* ist zu *Nanci* bey *Pierre Antoine* 1733 gedruckt und soll von demselben 1741 wieder heraus gegeben werden.[23]

Auch möchte wohl wissen ob der *Thesaurus Stephani* in 4 *folianten curante Gesnero* in Leipzig schon gedruckt sey?[24]

vert[*e*]

Inliegenden Brief bitte ich so lang in Verwahrung zu behalten, bis sich eine bequeme Gelegenheit selbigen fortzuschicken findet.[25]

R 769 Reply to nº 54
Moscow, (September 20th) October 1st, 1742
Original, 5 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 50–53v, 140r
Address: "*A Monsieur / Monsieur Euler / De l'Academie des Sciences / à / Berlin.*"
Partial copy, 8 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 64v–68r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 154–159; *Euler-Goldbach* (1965), p. 122–124

56
Euler to Goldbach
Berlin, October 27th, 1742

Wohlgebohrner Herr *Etats*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Ewr. Wohlgb. soll zuvorderst im Nahmen des H. *Hedling*ers vor Dero Geneigtes Andenken gehorsamsten Dank abstatten; derselbe befindet sich noch allhier bey uns und scheinet gesinnet zu seyn gleich nach Ihro Kaiserl[ichen] *Majestät* Zurückkunft in S^t *Petersburg* dahin einen *Tour* zu machen. Wegen meiner nach *Paris* gesandten *Piec*e habe ich noch keine Nachricht erhalten; ich habe deswegen neulich den H. *Clairaut* gebeten, sich desfalls bey *M.^{r} Demairan* zu erkundigen, und hoffe darauf bald Antwort zu bekommen.[1] Unterdessen versichert man mich auf der hiesigen *Post*, daß diese *Piece* nicht nur richtig von hier abgegangen, sondern auch in *Paris* angekommen seyn müsse. Sollte dieselbe dem ungeacht verlohren gegangen, oder zu späth angekommen seyn, so zweifle ich sehr, ob ich zum zweyten mal eine solche *Dispensation* hoffen könnte, indem mir anjetzo eine solche nachdrückliche Unterstützung fehlet; inzwischen werde doch Ewr. Wohlgeb. gutem Rath Folge leisten, als worfür gehorsamsten Dank abstatte.

Wann E. W. eine solche *Demonstration* haben, daß $n^2 \neq 4pn - p - a^2$ worinn nicht angenommen wird, daß $q\,(4p-1)$ keine *Summa duorum quadratorum* seyn kan, so ist dieselbe höchst merkwürdig, indem darauß nicht nur diese Wahrheit sondern noch viel andere weit leichter *demonstrir*t werden könnten; ich muß inzwischen gestehen, daß ich aller angewandten Mühe ungeacht keine andere *Demonstration* habe finden können. Hingegen sehe ich deutlich ein daß $ee+ff+gg \neq 4e^2f^2p^2$: dann soll eine *summa trium quadratorum* einen *numerum parem* machen, so muß entweder nur ein *Quadratum* oder alle drey *quadrata paria* seyn: im erstern Fall kommt ein *numerus impariter par* heraus, welcher folglich kein *Quadrat* seyn kan; dahero ist klar daß alle drey *Quadrata paria* seyn müssten; es sey allso $e = 2a$; $f = 2b$; $g = 2c$; so müsste $aa + bb + cc$ gleich seyn $16a^2b^2p^2$, und folglich müssten um soviel mehr a, b, und c *numeri pares* seyn, und so fort *in infinitum*. Aus diesem Grunde folget also noch dieser *generalere* Satz daß $aa + bb + cc \neq 4abn$. *Si* $fmn - n \neq a^2$ *erit quoque positis* mpp *et* npp *pro* m *et* n $\quad fmnp^4 - mpp - npp \neq \square$ und folglich $fmnpp - m - n \neq \square$; damit aber die erste *Aequation* ihre Richtigkeit habe, so kan freylich der *coefficiens* f *praeter* 4 unendlich viel andere *Valores* haben, wie Ewr. Wohlgeb. angemerket haben:[2] wobey ich hierauf gefallen daß, *si formulae* $faa+1$ *nullus extat divisor formae* $4fm-1$, auch immer $4fmn-m-n \neq \square$. Weil nun nach den letstens überschriebenen *Observationen*, *hujusmodi formula* $faa + bb$ *dividi nequit per numerum primum formae* $4fm - 1$,[3] so folget *generaliter* daß $4fmn - m - n \neq$ *quadrato*, welcher *universal* Satz sich vielleicht noch leichter *demonstrir*en lässt, als ein *casus particularis*:[4] es käme allso darauf an daß man *demonstrir*te, daß $\dfrac{aa+m+n}{4mn}$ nimmermehr ein *numerus integer* seyn könne; oder daß $\frac{aa+p}{pp-qq}$ *ubi p et q uterque vel numerus par vel impar esse debet*[5] kein *numerus integer* seyn könne: oder daß $mpp - mqq - p$ kein *quadratum* seyn könne. Bey Überschreibung der *divisorum primorum formulae* $pxx + yy$, welche alle in solchen *formulis exprimir*t werden können $4p + \alpha$, $4p + \beta$, *etc.* habe vergessen zu melden, daß ausser diesen der *Binarius*, *et ipse numerus p ejusque divisores* Platz finden;[6] deren *numerus determinatus* ist, und in den vorigen *Formulis* nicht begriffen sind; und folglich *à part* bemerket werden müssen. Allso sind alle *divisores primi formae* $7xx + yy$ entweder 2 oder 7 oder in diesen *Formul*n enthalten $14n + 1$; $14n + 9$; $14n + 11$; und so offt $14n + 1$, oder $14n + 9$ oder $14n + 11$ ein *numerus primus* ist, so hat derselbe selbst diese *Formam* $7xx + yy$. Alle *Numeri trigonales aucti unitate* $\frac{xx+x}{2} + 1$ sind zwar nicht eigentlich in $7xx + yy$ enthalten, sondern in $\frac{7xx+yy}{4}$;[7] und sind allso alle *numeri trigonales unitate aucti et quater sumti* in dieser *Form* begriffen $7xx + yy$; da nun das *simplum* keine andere *Divisores* haben kan als das *Quadruplum*, so folget dem ungeacht, daß alle *numeri primi, qui sunt divisores cujusque numeri trigonalis unitate aucti*, in diesen *Expression*en begriffen sind: 2; 7; $14n + 1$; $14n + 9$; $14n + 11$; und dagegen wird keine *Exception* gefunden werden. Daß unsere *Expressiones pro* $\ell 2 \cdot \ell 2$ nicht völlig übereinkommen, rührt ohne Zweifel daher, daß der $\ell 2$ in beyden *Calculis* nicht gleich *accurat* genommen worden; ich erinnere mich nicht mehr auf wie viel Figuren ich den $\ell 2$ genommen, ich habe solchen in meinen Schrifften nur auf 16 Figuren aufgezeichnet; es ist aber noch *accurat*er

$$\ell 2 = 0{,}693\,147\,180\,559\,945\,309\,417\,232\,1$$

und nachdem ich die *multiplication* nochmal gemacht so finde ich

$$\ell 2 \cdot \ell 2 = 0{,}480\,453\,013\,918\,201\,424\,667\,102\,4.$$

Das gemeldte *Theorema*:[8] *si*

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + etc.$$

erit

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + etc.,$$

ist deswegen merkwürdig, weilen durch dasselbe sehr leicht die *summa hujus seriei*

$$1 + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 9} + etc.$$

gefunden werden kan; dann weilen ist

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + etc.$$

ponatur summa quadratorum horum terminorum

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + etc. = p;$$

et summa factorum ex binis terminis illius seriei $\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + etc.\right)$ $= q$; *erit* $p + 2q = \frac{\pi\pi}{16}$: *erit autem*

$$q = \left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} - & etc. & = -\frac{1}{2}\,(1) \\ +\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 9} - & etc. & = +\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ -\frac{1}{1\cdot 7} - \frac{1}{3\cdot 9} - \frac{1}{5\cdot 11} - & etc. & = -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \\ +\frac{1}{1\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 11} + \frac{1}{5\cdot 13} - & etc. & = +\frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) \\ etc. & etc. & etc. \end{array} \right.$$

es ist allso

$$-q = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + etc.;$$

wann nun in obiger *serie* genommen wird $a = -1$; und $n = 2$; und allso gesetzt wird

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - etc. = \frac{\pi}{4}$$

erit

$$-q = \frac{ss}{2} = \frac{\pi\pi}{32}.$$

Dahero weilen $p = \frac{\pi\pi}{16} - 2q$, so ist

$$p = \frac{2\pi\pi}{16} = \frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + etc.,$$

und gleicher gestalt kan dieses *Theorema* bey andern Gelegenheiten gantz unerwartete nützliche Dienste leisten. Daß in meinem vorigen Ewr. Wohlgeb. Einfall *de lunulis* nicht beantwortet habe[9] ist aus Versehen geschehen: der Grund davon ist zwar *ex similitudine figurarum* leicht einzusehen, indessen können daher doch solche *curieus*e *Consequentz*en gezogen werden, welche auf eine andere Art schwehrlich werden bewiesen werden können.

Was für Zahlen vor n angenommen werden können, daß wann $n-p$ ein *numerus primus* ist auch $n+p$ ein solcher werde, und dabey p einen *numerum primum* bedeutet, kan meines Erachtens nicht *generaliter* angezeiget werden;[10] wann aber für p eine *determinir*te Zahl angenommen wird, so können *quovis casu series numerorum pro n* gefunden werden; als wann $p = 1$, so hat man für n diese Zahlen:

2; 4; 6; 12; 18; 30; 42; 60; 72; *etc.*, als welche Zahlen alle *sive aucti sive minuti unitate numeros primos* geben. Ist $p = 2$ so kommt für n diese *Series* 3; 5; 9; 15; 21; 39; 45; 69; 81; *etc.*; weil aber hier lauter *numeri impares* kommen, so sey $p = 3$; und für alle *Valores* von n kommt diese *series*: 4; 8; 10; 14; 16; 20; 26; 34; 40; *etc.* *Datur ergo unicus numerus* 4 *qui omnibus numeris primis* (*excepto* 2) *se minoribus sive auctus sive minutus producat numeros primos.* Der grosse Vortheil, welchen uns die *Analysis* bringt, kommt in der That nur von den *signis* her, welche man nach gewissen Grundgesetzen zu *tracti*ren pflegt; und dahero stehen noch wichtige Erweiterungen zu vermuthen, wann man neue *signa introduci*ren sollte; die Hauptsach aber wird auch auf die Erfindung der Regeln ankommen, nach welchen man dieselben *signa tracti*ren muß. Der *Newton* in *Arithmetica universali* hat die *signa dubia* nur durch *puncta* angedeutet; und kan deswegen weil dadurch die *Multiplication* angedeutet zu werden pflegt, nicht *imitir*t werden.[11] Ewr. Wohlgb. *Reflexion* über die *compositionem globulorum sanguineorum*[12] hat ihre völlige Richtigkeit, dergestalt, daß wann eine *similis compositio in infinitum* fortgienge, die *quantitas materiae* völlig *evanescir*te. Es sey A das *Volumen* eines *globi sanguinei*, welches zugleich die *quantitatem materiae* oder sein Gewicht anzeigen würde, wann der *globus solid* oder *massiv* wäre; ist aber derselbe aus 6 *globulis* zusammen gesetzt, welche alle *solid* sind, so ist die *quantitas materiae* nur

$$= \frac{6A}{\left(1+\sqrt{2}\right)^3} = \frac{6A}{7+5\sqrt{2}} = 0{,}071\,067\,811\,8 \cdot 6A$$

oder $= 0{,}426\,406\,870\,6 \cdot A$; das ist die *quantitas materiae* in einem solchen *globulo sanguineo contentae* wird bey nahe $\frac{14}{6}$ mal kleiner seyn, als wann derselbe *solid* wäre. Sollten diese 6 *globuli* wiedrum aus 6 noch kleinern zusammen gesetzt seyn, so würde die *quantitas materiae* und folglich das *Pondus* $\frac{14}{6} \cdot \frac{14}{6}$ das ist $\frac{196}{36}$ oder 5 mal geringer, und auf solche Art bald *imperceptib*el werden: da nun aber doch ein jeder *globulus sanguineus* ein Gewicht hat, so ist klar daß diese Art der Zusammen Setzung nicht weit fortgeht, und nicht einmal sich über die dritte Ordnung erstreckt. Dan sollte ein jeder von diesen *Globulis* wiedrum aus 6 andern bestehen; wann auch diese so schwehr als Gold angenommen würden, so könnte doch das würckliche Gewicht nicht herauskommen. Um dieses deutlicher einzusehen, so sey die *gravitas specifica materiae, ex qua globuli non amplius compositi constant,* $= n$; wann allso die *globuli sanguinei* selbst *solid* wären und aus dieser *materia* bestünden; so würde ihre *gravitas specifica* gleich seyn

n oder	$= 1{,}000\,000\,0 \cdot n$
wären aber die *globuli* $II^{ord[inis]}$ *solid*, so ist die *gravitas specifica*	$= 0{,}426\,406\,8 \cdot n$
sind erst die *globuli* $III^{ord[inis]}$ *solid*, so ist die *gravitas specifica*	$= 0{,}181\,822\,8 \cdot n$
sind die *globuli* $IV^{ord[inis]}$ *solid*, so ist die *gravitas specifica*	$= 0{,}077\,530\,5 \cdot n$
sind die *globuli* $V^{ord[inis]}$ *solid*, so ist die *gravitas specifica*	$= 0{,}033\,059\,5 \cdot n.$

Wann allso die *gravitas specifica ultimae materiae sanguinem constituentis* so schwehr wäre als Gold, und erst die *globuli* $V^{ord[inis]}$ *solid* wären, so würde doch die *gravitas specifica sanguinis* schon 30 mal kleiner seyn, als des Golds, und allso fast um die Helfte leichter als Wasser. Da nun die *gravitas specifica sanguinis* nicht kleiner ist als des Wassers, und die *ultima materia* bey weitem nicht so schwehr als Gold angenommen werden kan, so ist gantz klar, daß dieser *modus compositionis cujusque globuli ex sex minoribus* sich unmöglich *ultra III ordinem* erstrecken könne.

Bey dem obgedachten *Theoremate*[13] daß $4nab - a - b$ nimmer ein *numerus quadratus* seyn könne, oder daß $\frac{pp+a+b}{ab}$ kein *numerus integer per quaternarium divisibilis* sey, habe ich zwar gesehen, daß $\frac{pp+a+b}{ab}$ *infinitis casibus* ein *numerus integer* werden kan; derselbe ist aber allzeit entweder *impar* oder doch *impariter par*, *infinitis autem valoribus pro a et b assumtis* kan $\frac{pp+a+b}{ab}$ nicht einmal ein *numerus integer* werden:

sit $a=1,\ b=1$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = pp+2,$	und allso entweder *impar* oder *impariter par.*
sit $a=1,\ b=2$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+3}{2}:$	(2, 6, 14, 26, *etc.*), nehmlich allzeit *impariter par.*
sit $a=1,\ b=3$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+4}{3}:$	welche *Formul* nimmer ein *numerus integer* seyn kan.
sit $a=1,\ b=4$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+5}{4}:$	diese kan auch nimmer ein *numerus integer* werden.
sit $a=1,\ b=5$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+6}{5}$	(2; 3; 11; 14; 30; *etc.*) entweder *impar* oder *impariter par.*
sit $a=2,\ b=2$; *erit* $\frac{pp+4}{4}:$	(1, 2, 5, 10, 17, 26, *etc.*) welche *numeri* entweder *impares* oder *impariter pares.*
sit $a=2,\ b=3$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+5}{6}$	(1, 5, 9, 21, *etc.*) alle *impares.*
sit $a=2,\ b=4$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+6}{8};$	allso muß sey[n] $p = 2q$; und $\frac{2qq+3}{4}$ = *int*[*eger*] welches unmöglich.
sit $a=2,\ b=5$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+7}{10},$	welche *Formul* kein *numerus integer* seyn kan.
sit $a=2,\ b=6$; *erit* $\frac{pp+a+b}{ab} = \frac{pp+8}{12}$	(1, 2, 6, 9, 17, 22 *etc.*) wo kein *multiplum quatern*[*arii*] vorkommt.

Wann man vielleicht diese *Casus* weiter *continuir*t und wohl erwiegt, so könnte man den wahren Grund finden, warum $\frac{pp+a+b}{ab}$ niemals ein *numerus integer per* 4 *divisibilis* werden kan. Es scheinen auch aus der *Form* $\frac{pp+a+b}{ab}$ außer den *multiplis quaternarii* noch andere Zahlen ausgeschlossen zu seyn, als zum *exempel* 7, dann ich habe noch keine *Valores pro a, b et p* finden können *ut* $\frac{pp+a+b}{ab}$

fieret = 7; dem ungeacht aber können *multipla* von 7 als 14, 21, *etc.* herauskommen.[14] Es scheinen allso in dergleichen *Speculation*en noch grosse Geheimnüße verborgen zu ligen; wovon dem *Fermatio* einige wichtige bekant gewesen seyn mögen: deren Verlust um so viel mehr zu bedauren ist. Ich habe an *M.r Clairaut* geschrieben, ob die *Manuscripta* von *Fermat* noch zu finden wären, da aber der *Gout* für dergleichen Sachen bey den meisten erloschen ist, so ist auch die Hoffnung verschwunden.[15]

Wo ich mich nicht betriege, so habe ich des *Fergusons Labyr*[*inthum*] *Algebrae*[16] auf der *Bibliothec* in *Petersburg* gesehen; zum wenigsten war mir dieser *Titul* schon bekannt ungeacht ich mich nicht recht erinnern kan, wo ich etwas davon gesehen, gelesen oder gehöret habe; ich glaube aber daß der H. *Prof.* Krafft darüber würde einige Nachricht geben können: inzwischen werde ich mich auch deswegen in der hiesigen *Bibliothec* erkundigen.

Mit dem Druck des *Thesauri Stephani*[17] ist in *Leipzic* noch nicht einmal der Anfang gemacht worden, weilen der H. *Prof. Gesner* nicht eher will anfangen lassen, biß er selbst die gantze Arbeit zu Ende gebracht, damit das Werk um so viel vollkommener werde, und nicht durch *supplementa* nachgeholfen werden müsse.

Den Brief an den H. *Baron Stosch* habe ich bey S[eine]r Frau Schwester so bestellt,[18] daß derselbe in kurzer Zeit richtig einkommen wird; ich hätte ihn auch an den H. *Poleni* nach *Padua* einschliessen können, allein ich glaube daß dieser Weg sicherer ist.

Den H. *Prof.* Krafft erwartet man mit dem Anfang des künftigen Jahrs allhier, und der H. *Prof. Heinsius* dörfte auch nächstens seine *Dimission* verlangen, weilen die *Universität Wittenberg* ihm die durch das Absterben des H. *Hasii vacant*e *Professionem Math*[*eseos*] bestimmet hat.[19] Hier geht das Gerücht, daß die *Praesidenten* Stelle bey der *Academi*e dem Prinzen *Cantemir* aufbehalten werde:[20] welches gewiß für die *Academi*e das gröste Glück seyn würde. Der H. *Brigadier Baudan* ist hier noch ausser Dienst, und hat sich mit ein *M.lle* verheurathet, deren Vermögen ungefehr in 4000 Rthl. bestehet, darunter ein artiges Hauß begriffen war, welches ich für 2000 Rthl. gekaufft, und dazu von Ihro Königl[ichen] *Majestä*t das *Privilegium* eines Freyhauses erhalten habe. Dasselbe ligt zwischen der Fridrichs und Dorotheen Statt, nahe bey dem Ort, wo Ihro *Majestä*t der König das Neue Schloß und die *Academi*e zu bauen beschlossen hat; daß allso die *Situation* nicht erwünschter seyn könnte.[21] Der H. *Brigadier Baudan* wird nun mit seiner Gemahlin wieder nach Rußland zurükkehren, und daselbst weiter Dienste suchen, wozu er Hofft, daß Ewr. Wohlgeb. durch kräftige *Recommendation* viel werden *contribui*ren können;[22] um welche Gewogenheit für denselben auch ich gehorsamst bitte, der ich zugleich mich nebst allen meinigen Dero beständigen Gewogenheit gehorsamst empfehle und mit der schuldigsten Hochachtung Lebenslang verharre

Ewr. Wohlgebohrnen

Meines Hochgeehrtesten Herrn *Etats* Raths

gehorsamster Diener

Leonh. Euler

Berlin den 27ten *Octobr.*
1742.

P. S. Wegen des *Dictionnaire de Trevoux* habe in vielen hiesigen Buchläden herumgeschickt,[23] darüber aber nicht die geringste Nachricht erhalten; so sehr schlecht ist es mit dem Buchhandel allhier beschaffen.

R 770 Reply to n° 55
Berlin, October 27th, 1742
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 31–34r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 160–168; *Euler-Goldbach* (1965), p. 125–129

57
Goldbach to Euler
Moscow, (November 25th) December 6th, 1742[1]

den 6. *Dec.* 1742.

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

In meinem vorigen Briefe[2] hatte ich $n^2 \neq 4pn-p-a^2$ als einen *casum particularem huius* $n^\alpha \neq 4pn-p-a^2$ angenommen, welches aber darauf beruhet, daß a^2+1 durch $4n-1$ nicht *dividi*ret werden kan. Ich gestehe daß ich zum öfftern vermuthet, es würde das *theorema* $4mn-m-1 \neq a^2$, weil kein ander *numerus determinatus* als 4 und 1 darin vorkommt, sich durch die *proprietates quadratorum per quaternarium divisorum demonstri*ren lassen, insonderheit da man die Wahrheit des *theorematis* gleich einsiehet wann m ein *numerus formae* $4u+0$ oder $4u-3$, worin schon die helffte aller *casuum possibilium* begriffen ist, hingegen hat sich allezeit bey den *casibus* $m = 4u-1$ und $m = 4u-2$ eine *difficultät* gefunden, biß ich endlich gestern die *demonstration* folgender massen eingerichtet:[3]

1. Quicunque numerus divisus per 4 relinquit 2 vel 3, ille non est quadratus.
2. Si ulla harum quatuor aequationum impossibilium

$$\left.\begin{array}{ll} A \ldots & 4mn-m-1 \\ B \ldots & 4mn-m-n \\ C \ldots & 4mn-m-n^2 \\ D \ldots & 4mn-n-1 \end{array}\right\} \neq \square$$

est vera, omnes simul verae sunt,[4] quoniam si vera est $4mn-m-n^\alpha$, vera etiam est $4mn-m-n^{\alpha+1}$ et $4mn-n-m^\alpha$, et rursus, si posteriores verae sunt, vera etiam est prima, ut in superioribus litteris ostensum fuit.

3. Omnes numeri possibiles pro m et n continentur his quatuor casibus

$$\begin{array}{cccc} m = 4u + 0, & m = 4u + 1, & m = 4u + 2, & m = 4u + 3, \\ n = 4v + 0, & n = 4v + 1, & n = 4v + 2, & n = 4v + 3, \end{array}$$

sed per applicationem horum casuum apparet, quicunque sint valores ipsius m et n, semper aliquam quatuor formularum A, B, C et D ita dividi posse per 4 ut remaneat 2 vel 3. Sit enim m vel $n = 0$ (quod compendii causa scribo pro $m = 4u + 0$ et $n = 4v + 0$ et sic in ceteris), formula A vel D div[isa] per 4 relinqu[it] 3.

Si m vel $n = 1$, formula A vel D divisa per 4 relinquit 2;

si $m = 2$, $n = 2$, C divisa per 4 relinquit 2;

si $\left.\begin{array}{l} m = 2,\ n = 3 \\ m = 3,\ n = 2 \end{array}\right\}$, B divisa per 4 relinquit 3;

$m = 3$, $n = 3$, B divisa per 4 relinquit 2.

Ergo nulla formularum A, B, C, D aequalis est quadrato.

Die Zahl so ich pro $\ell\,2$ von E. H. *communici*ret bekommen muß allerdings unrichtig abgeschrieben gewesen seyn,[5] weil sie schon in der 14.den Ziffer fehlet, ich bin also Eurer H. für die weit *accurat*ere sowohl von dem $\ell\,2$ als dessen *quadrato*, welche in Dero letztem Schreiben enthalten sind, verbunden.

Ein dergleichen Fehler muß gewiß auch entweder in des *M.r Lagni* oder in des Hn *Sharp numerum pro quadratura circuli* eingeschlichen seyn. Wann ich mich recht erinnere so haben E. H. diese *varietät* schon längst bemercket; weil aber doch *M. Sharp* ausdrückl[ich] saget daß er auch von der letzten Ziffer, so weit seine Zahl gehet, gewiß sey, so glaube ich vielmehr daß in der Zahl des *M. Lagni* entweder im drucken oder im abschreiben eine 6 für eine 5 gesetzt worden, welches dennoch zu *rectifici*ren wäre wann die in dem *numero Lagniano* nachfolgenden Ziffern einigen Nutzen haben sollen.[6]

Bey dem Punct von den *globulis sanguinis* ist mir lieb die *confirmation* meines *raisonnement*s zu sehen; ob man aber sicher annehmen könne daß diese *globuli* mit der gantzen *massa sanguinis* einerley *gravitatem specificam* haben, zweifele ich, weil nicht allein die *globuli* sondern auch die *lympha* als *partes constitutivae, sed heterogeneae,* diejenige *massam* ausmachen, welche nach Eurer H. *hypothesi* bey nahe so schwer als das Wasser ist.[7]

Was Sie von dem *theoremate*

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \&c.$$

ergo[8]

$$\frac{ss}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \&c.$$

erwehnen, halte ich in der That für sehr merckwürdig, nachdem ich sehe, daß man dadurch *data summa seriei*[9] $1 \mathbin{:\!+\!:} \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mathbin{:\!+\!:} \frac{1}{7} + \&c.$ die *summam seriei* $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c.$ finden könne, bey welcher Gelegenheit zugleich melde, daß ich (wiewohl *per ambages*) auch die *summas* nachfolgender *serierum*

$$1 - \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}\right) + \&c.,$$
$$1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \&c.,$$
$$\frac{1 \cdot 1}{4} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{25}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \&c.$$

gefunden habe, wozu man vieleicht durch einen viel nähern, aber mir unbekannten Weg gelangen kan.[10]

Wie ich gäntzlich mit Eurer H. der Meinung bin, daß man die Zahlen welche vor n anzunehmen sind, damit wann $n - p$ ein *numerus primus* ist auch $n + p$ ein *numerus primus* werde, *denotante p numerum primum*, nicht *generaliter* bestimmen könne, so halte ich auch dafür, daß die *numeri* 2, 4, 6, 12, *&c.* welche *tam addita quam demta unitate numeros primos* geben schwerlich *generaliter* oder *per certam legem progressionis* dürfften zu finden seyn,[11] so daß es *hoc respectu* mit beyden *seriebus* einerley bewandniß zu haben scheinet.

Für die mir gegebenen Nachrichten bin ich Eurer H. sehr verbunden; ich dancke auch dem Hn *Brigadier de Baudan* für das Vertrauen so Er zu mir zu tragen beliebet, an meiner guten *intention* zu Dessen Vergnügen ewas beyzutragen wird es gewiß niemahls ermangeln;[12] ich bitte demselben in meinem Nahmen zur vollzogenen Heyrath zu *gratuli*ren und wünsche mir das Glück, den Hn *Brigadier* bald wieder in *S.ᵗ Petersbourg* zu sehen.

Ubrigens verbleibe ich nechst hertzlicher Anwünschung alles Wohlergehens und schuldigster Empfehlung an Dero Fr[au] Liebste wie auch sämmtliche Familie

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau.

P. S. Die künfftigen Briefe können wieder nach *S.* Petersburg gesandt werden.[13]

R 771 Reply to n° 56
Moscow, (November 25th) December 6th, 1742
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 56–58r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 69r–70r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 172–175; *Euler-Goldbach* (1965), p. 132–134

58

Euler to Goldbach

Berlin, December 15th, 1742[1]

Wohlgebohrner Herr *Etats*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Beyligender Brief wird ohne Zweifel von dem H. *Baron Stosch* seyn, weilen mir derselbe von Seiner Frau Schwester zugesandt worden;[2] dahero Ewr. Wohlgeb. vermutlich lieb seyn wird, daß ich Denselben diese Antwort ohne Verzug zusende.

Der junge H. *Ehler* aus Dantzig welcher vor einiger Zeit aus Frankreich gekommen und hier durch gereiset,[3] hat mir unter andern gesagt, daß das *Dictionnaire de Trevoux* in *Paris* unter der Presse sey, und nächstens zum Vorschein kommen werde.[4]

Seit dem ich Ewr. Wohlgeb. das letste mal zuzuschreiben die Ehre gehabt, habe ich allhier ein Haus gekauffet, wozu mir der H. *Brigadier Baudan* Anlaß gegeben, weilen dieses Hauß Seiner Frau Liebste zugehörte, ihre gantze Habschafft aber zu Geld gemacht werden musste, indem er gleich nach der Hochzeit nach Polen gereiset, von dannen er wiedrum, wann er daselbst kein anständiges *Emploi* findet, nach Rußland gehen wird. Ihre Königl[iche] *Majestä*t haben auf mein Allerunterthänigstes Ansuchen dieses Haus auf ewig von aller Ein*quartir*ung loßzusprechen allergnädigst geruhet.[5] Weilen ich in diesem Hauß Zimmer und Raum in Überfluß habe, so wird der H. Geh[eime] Rath *Osterman*[6] welcher Sich noch in Westfahlen aufhält, bey mir wohnen, und sein Leben in der Stille zu bringen.

Unlängst ist Ihro *Majestä*t dem König eine neue *Poeti*sche Übersetzung der *Psalm*en *Davids dedicir*t worden welche sowohl wegen der *Poesi*e als der richtigen Ausdrückung des Grund *Text*s grosse *Approbation* findet und auch schon auf dem Schloß statt der Lobwasserischen Psalmen eingeführt werden soll. Der Verfasser davon ist ein Landsman von mir nahmens H. *Spreng*, welcher schon lang für einen grossen *Poet*en *passir*t ist.[7]

Der Zustand der *Academi*e in *Petersburg* gehet mir wegen des H. Rath Schumachers sehr zu Herzen, am meisten aber ist der H. *Bernoulli* darüber *allarmir*t, weilen er beförchtet seine bißher genossene *Gage* zu verlieren.[8] Es werden anjetzo des Alten H. *Bernoullis* Schrifften, so noch nicht *publicir*t worden, in *Geneve* gedruckt; dieses Werk soll unserm König *dedicir*t werden, und der Verleger will selbst herkommen, solches zu *praesenti*ren. Mit demselben werde ich bey dieser Gelegenheit einen *Accord* wegen meiner *Scientia navali* zu treffen suchen, welches vermuthlich die *Academi*e nicht übelnehmen wird.[9]

Ewr. Wohlgeb. habe schon letstens zu melden die Ehre gehabt, daß ich wegen meiner nach *Paris* gesandten *Piec*e an den H. *Clairaut* geschrieben; ungeacht nun derselbe biß *dato* im Schreiben sehr *exact* gewesen, so habe ich doch noch zu meiner grossen Verwundrung von demselben keine Antwort erhalten.[10] Inzwischen will mir der Hiesige *Post Director* beweisen daß diese meine *Piec*e richtig in *Paris* angekommen.

Ich bin anjetzo auch mit dem H. *Prof. Nicolao Bernoulli* in *Correspondenz* gekommen; diese hat bißher *roulir*t über die *summationem serierum* $1+\dfrac{1}{2^{2n}}+\dfrac{1}{3^{2n}}+\dfrac{1}{4^{2n}}+etc.$ worüber Derselbe sehr schöne *Reflexion*en gemacht.[11] Bey dieser Gelegenheit habe ich Demselben eine kurze *Methode communicir*t alle *differentialia hujus formae*

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+etc.}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5+etc.}\,dx$$

zu *integri*ren *vel absolute* wann möglich *vel ope logarithmorum vel quadraturae circuli.* Diese *Methode* bestehet darinn daß man erstlich den *Denominatorem* in seine *factores simplices resolvi*re; weil aber öfters einige von diesen *factoribus imaginarii* werden, so hatte ich angemerkt daß da alle *factores imaginarii* immer *numero pares* seyn müßen, dieselben auch so beschaffen sind, daß je zween mit einander *multiplicir*t ein *Productum reale* geben.[12] An diesem Satz zweifelte nun letstens der H. *Bernoulli*, und glaubte daß es solche *formulas* gäbe, deren *Factores imaginarii* nicht diese Eigenschaft hätten. Dieses zu behaupten brachte er diese *Formul* $x^4-4x^3+2xx+4x+4$ als ein *Exempel* vor welche nachfolgende 4 *factores simplices imaginarios* hatte:

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & x-1-\sqrt{2+\sqrt{-3}}\\
\text{II.} & x-1+\sqrt{2+\sqrt{-3}}\\
\text{III.} & x-1-\sqrt{2-\sqrt{-3}}\\
\text{IV.} & x-1+\sqrt{2-\sqrt{-3}},
\end{array}$$

von welchen man Seiner Meinung nach nicht sollte zwey finden können, welche mit einander *multiplicir*t ein *Productum reale* hervor brächten. Dieses *Exempel* schien mir auch anfänglich meinen Satz umzustossen; als ich aber die Sach reiffer überlegte, so fand daß der I und III mit einander *multiplicir*t dieses *Productum reale*

$$xx-\left(2+\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+1+\sqrt{7}+\sqrt{4+2\sqrt{7}},$$

die zwey übrigen aber der II und IV dieses

$$xx-\left(2-\sqrt{4+2\sqrt{7}}\right)x+1+\sqrt{7}-\sqrt{4+2\sqrt{7}}$$

geben. Weilen nun durch diese Antwort das gemachte *Dubium* gehoben wird,[13] so vermuthe ich nun von dem H. *Bernoulli* zur *Recompens* eine richtige *Demonstration* meines Satzes: *omnem expressionem algebraicam* $\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+etc.$ *vel in factores reales simplices* $p+qx$, *vel saltem in factores reales quadratos* $p+qx+rxx$ *resolvi posse*;[14] welcher Satz (den ich ungefehr wie einige *Theoremata Fermatiana* aber nicht *summo rigore demonstri*ren kan) in der *Analysi* von sehr grossem Nutzen ist, dann daraus folgt *omnem formulam differentialem vel rationalem vel* *ad rationalitatem reducibilem, nisi absolute integrari queat, semper certe ope vel logarithmorum vel quadraturae circuli integrari posse.*

Mit dem neuen *Tomo Miscellaneorum Berolin*[*ensium*] ist man schon ziemlich weit gekommen, worinn fast die gantze *Classis Mathematica* von mir kommt.[15] Weilen ich aber von den in *Petersburg* zurückgelassenen *Piec*en keine *Copi*en habe, und dieselben entweder sehr späth oder gar nicht zum Vorschein kommen dürften,[16] so nehme die Freyheit Ewr. Wohlgeb. gehorsamst um Dero Rath zu bitten, wie ich am füglichsten zu denselben gelangen könnte. Ich verlange solche gar nicht um anderwerts drucken zu lassen; dann dazu finden sich immer *Materi*en genug: sondern nur um mich darinn umzusehen damit ich nicht eine Sach zweymal zum Vorschein bringe.

Von dem H. Geh[eimen] Rath *Vockerodt* habe Ewr. Wohlgb. ein gehorsamstes *Compliment* zu vermelden,[17] der ich mich zu Dero beständigen Wohlgewogenheit gehorsamst empfehle und mit der schuldigsten Hochachtung verharre

Ewr. Wohlgebohrnen

Meines Hochgeehrtesten Herrn *Etats*-Raths

gehorsamster Diener

Leonh. Euler

Berlin den 15ten *Dec.*
1742.

R 772 Berlin, December 15th, 1742
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 37–38v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 169–171; *Euler-Goldbach* (1965), p. 130–131

59
Goldbach to Euler
Moscow, December (13th) 24th, 1742[1]

HochEdelgebohrner Herr

Hochgeehrter Herr *Professor*,

Als ich neulich die vermeinten *Summas* der beyden letzteren *Serierum* in meinem vorigen Schreiben[2] wieder betrachtet, habe alsofort wahrgenommen, daß selbige aus einem blossen Schreibfehler entstanden, von welchem es aber in der That heisset:

Si non errasset fecerat ille minus:[3]

denn ich bin durch diese Gelegenheit auf *summationes aliarum serierum* gerathen die ich sonst kaum gesuchet vielweniger gefunden haben würde.

Ich halte dafür das[!] es ein *problema problematum* ist die *summam huius*:

$$1+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2^m}\right)+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}\right)+\&c.$$

in den *casibus* zu finden wo m *et* n nicht *numeri integri pares et sibi aequales* sind,[4] doch giebt es *casus* da die *summa* angegeben werden kan, *exempli gr*[*atia*] *si* $m=1$, $n=3$, denn es ist

$$1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\&c.=\frac{\pi^4}{72}$$

(wann π gewöhnlicher massen für die *peripheriam circuli cuius diameter* $=1$ genommen wird); hingegen weiß ich die *summas serierum*

$$A\ldots\ 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\&c.$$

und

$$B\ldots\ 1+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\&c.$$

noch nicht, ob ich gleich weiß daß $2A+B=\dfrac{19\pi^6}{2\cdot5\cdot7\cdot3^4}$, wie ich denn auch die *summam* der folgenden beyden *serierum* $C+D$ allezeit finden kan, *si* m *et* n *sint numeri pares quicunque*

$$C\ \ldots\ 1+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2^m}\right)+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\&c.$$
$$D\ \ldots\ 1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\&c.$$

Ubrigens beziehe ich mich auf mein voriges Schreiben und verbleibe nechst hertzlicher Anwünschung eines glücklichen neuen Jahres

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau, den 24 *Dec.*
1742.

R 773 Supplement to n° 57
Moscow, December (13th) 24th, 1742
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 54–55r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 70r–71r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 176–177; *Euler-Goldbach* (1965), p. 134–135

60

Euler to Goldbach

Berlin, January 5th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß Ewr. Wohlgb. glücklich wiedrum nach *S.^{t} Petersburg* möchten zurükgekommen seyn wünsche ich von gantzem Herzen. Ich habe vor einigen Wochen von dem H. *Baron* Stosch eine Antwort an Ewr. Wohlgb. noch nach *Moscau* abgeschickt,[1] welche zweifelsohne richtig wird eingetroffen seyn; desselben Schwager H. *Muzelius* ist dieser Tagen bey mir gewesen, und hat von mir zu wissen verlangt welcher gestalt Ewr. Wohlgeb. in Rußische Dienste gekommen, um solches dem H. *Baron Stosch* berichten zu können. Nachdem der H. *Brigadier Baudan* von hier nach Brandenburg abgereiset um allda seine Heurath zu vollziehen, habe ich weder denselben noch Briefe von ihm gesehen; ich habe aber gehöret daß er von da nach Warschau gegangen, und sich bey dem Fürsten *Czartorinski* aufhalte; sollte er aber daselbst keine Dienste finden, so sey er gesinnet wiedrum nach *Petersburg* zurückzukehren.

Ewr. Wohlgeb. *Demonstration*, daß $4mn-m-n$ kein *Quadratum* seyn könne,[2] will mir noch kein völliges Genügen leisten. Dann ungeacht, wann $4mn-m-1 \neq \square$ auch seyn muß $4mn-m-n \neq \square$ und $4mn-m-n^2 \neq \square$, so folgt doch nicht hinwiedrum: *quibus casibus pro m et n substitutis una formula quadratum esse nequeat, iisdem casibus reliquas formulas quadrata esse non posse.* Dieses erhellet aber deutlicher, wann man die *derivationem* der übrigen *Formul*n aus der ersten betrachtet, nehmlich aus $4mn-m-1$: man setze allso $m = 4p-1$; so kommt $4\,(4np-n-p)$; wann allso $4mn-m-1$ auf keinerley art ein *quadratum* seyn kan, so kan diese *Formul* auch kein *Quadrat* seyn *casu* $m = 4p-1$, und folglich kan auch $4np-n-p$ kein *Quadratum* seyn. Nun aber haben Ewr. Wohlgeb. nur gewiesen daß wann m *vel* n sey $= 4u+1$, die *Formul* $4mn-m-1$ kein *Quadratum* seyn könne, und dahero folget daraus nicht daß $4np-n-p$ kein *Quadrat* seyn könnte, *eodem casu* n *vel* $p = 4u+1$. Ferner ist klar daß wann man nur bewiesen hätte daß $4mn-m-1 \neq \square$ *casu* $m = 4u-1$, daraus schon folgen würde daß $4np-n-p \neq \square$. Wann aber bewiesen wäre, daß $4np-n-p \neq \square$, so würde daraus nur folgen daß $4mn-m-1$ kein *Quadratum* seyn könnte *casu quo* $m = 4u-1$, aber nicht *generaliter*. Wann man aber nur beweisen könnte daß $4mn-m-1$ kein *Quadratum* seyn könne *casu* $m = 4u-1$, so würde daraus schon folgen, daß $4mn-m-n$ gantz und gar kein *Quadratum* seyn könnte. Villeicht dörfte aber das *Theorema generale* $4mnp-m-n \neq \square$, wovon Ewr. Wohlgb. keine Meldung thun, leichter zu *demonstri*ren fallen. Es ist aber für sich klar daß wann entweder $m+n = 4u+1$, oder $m+n = 4u+2$ die *Formul* $4mnp-m-n$ kein *Quadratum* seyn könne, dahero nur die beyden *casus* $m+n = 4u$, und $m+n = 4u-1$ zu *demonstri*ren übrig bleiben. Wann man für den ersten Fall setzt $m = 2u+a$, und $n = 2u-a$; so hat man zu beweisen, daß $p\,(4uu-aa)-u$ kein *Quadrat* seyn könne.

Es kan allso diese *Formul* $\dfrac{bb+u}{4uu-aa}$ kein *numerus integer* seyn; *ponatur* $a = 2u-c$ so kan $\dfrac{bb+u}{c\,(4u-c)}$ kein *numerus integer* seyn; und hieraus können unendlich viel schöne *Theoremata* hergeleitet werden; ich muß unterdessen gestehen, daß ich aller angewandten Mühe ungeacht noch keine *Demonstration* von diesem *Theoremate* habe finden können daß $4mnp-m-n \neq$ *Quadrato*. Es kommt aber darauf an daß man *demonstrire* daß eine solche Zahl $4paa+1$ nimmer *divisibilis* seyn könne *per numerum formae* $4pq-1$. Es sind aber alle mögliche *Divisores formulae* $4paa+1$ enthalten in einer gewissen Anzahl solcher *Formul*n $4np+1$; $4np+\alpha$; $4np+\beta$; $4np+\gamma$; *etc.* wobey zu merken daß, wann unter den Zahlen α, β, γ, *etc.* eine Zahl f enthalten ist, zugleich alle *potestates ipsius* f darunter vorkommen, und wann darunter zwey Zahlen f *et* g vorkommen, so müssen auch alle *potestates* einer jeden, und alle daraus mögliche *Producte* vorkommen; wann man allso einen oder etliche *numeros pro* α, β, γ, *etc.* weiß, so kan man zugleich die übrigen finden; die simpelsten *Divisores* aber der *formul* $4paa+1$ sind die *Valores* dieser *Formul* selbst wann *pro* a ein *numerus determinatus* gesetzt wird: und allso hat man vor α, β, *etc.* solche *Valores primitivos*, $4p+1$; $16p+1$; $36p+1$; daher entstehen wann man alle *potestates* nimmt, und solche ineinander *multiplicir*t, alle übrige *Valores litterarum* α, β, γ, δ, *etc.*; es ist aber klar daß alle diese Zahlen von solcher *form* $4mp+1$ seyn werden; dahero alle *Divisores formulae* $4paa+1$ nothwendig allso seyn müssen $4np+4mp+1$; und kan allso eine solche Zahl $4np-1$ nimmer ein *Divisor* seyn; dieses ist aber nur wahr in so fern die *Divisores primitivi* von der *Form* $4mp+1$ sind: wann aber ein *derivativus* von der *Form* $4mp-1$ wäre so müste auch ein *primitivus* diese *Form* haben.[3] Hieraus folget nun soviel, daß wann dieses *Theorema* bey kleinen Zahlen wahr ist, dasselbe auch bey grossen wahr seyn müsse.[4] Wann gleich *Sharp* sagt, daß er von seiner letsten *Figur in quadratura Circuli* sicher sey,[5] so kan doch solches nicht behauptet werden, wann er nicht zum wenigsten auf 3 oder 4 *Figur*en weiter hinaus gerechnet hat, welches doch nicht geschehen: dahero dieses schon als ein Merkmal der *Accuratesse* zu halten, daß seine letste *Figur* nur um 1 zu klein ist; ich kan mich auch nicht erinnern, daß ich jemalen um dieser Ursach willen an der Richtigkeit des *Lagny*s Zahlen gezweifelt habe. Bey der *Mat*erie über die *globulos sanguineos*[6] habe ich nicht so genau angenommen, daß die *globuli rubri* mit der gantzen *massa* einerley *gravitatem specificam* haben; dann meine *Reflexion*en bleiben einerley, wann gleich dieselbe 2 oder mehr mal grösser oder kleiner angenommen würde: unterdessen ist doch soviel gewiß, daß die *Gravitas specifica* der *globulorum rubrorum* nicht so sehr viel vom Wasser *differi*ren wird; es wäre dann, daß man dieselben niemals *pur* ohne Vermischung der *Lymphae* bekommen könnte; in welchem Fall es freylich nicht mehr auf die *Gravitatem specificam* allein ankommen würde um die Unmöglichkeit des *progressus in infinitum* zu zeigen.

Ich hatte dieses *Theorema*: *si*

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{aa}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + etc.$$

erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) \mathit{etc.},$$

dem H. *Professori Nicolao Bernoulli* geschrieben,[7] wovon Er mir nachfolgende schöne *Demonstration* zugeschickt.[8] Er schreibt x^n für a; und t für sx; *eritque*

$$sx = t = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \mathit{etc.},$$

qua differentiata prodit

$$dt = dx\,\left(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \mathit{etc.}\right);$$

diese zwey *series multiplicir*t er mit einander, *terminos secundum potestates ipsius x ordinando*, und bekommt

$$t\,dt = dx \left(\begin{array}{c} x + x^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) \\ + x^{3n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)[+\mathit{etc.}] \end{array}\right),$$

quae integrata dat

$$\frac{1}{2}tt = \frac{1}{2}ssxx = \frac{1}{2}xx + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \mathit{etc.};$$

dividatur per xx et ob $x^n = a$ *erit*

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \mathit{etc.}$$

Er geht auf diese Art weiter und *multiplicir*t $\frac{1}{2}tt$ nochmal mit dt, und findet *post integrationem*

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}s^3 = {} & \frac{1}{6} + \frac{a}{n+3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) \\ & + \frac{aa}{2n+3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right) \\ & + \frac{a^3}{3n+3}\left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) \\ +\frac{1}{3n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right) \end{array}\right) \mathit{etc.} \end{aligned}$$

Um nun auf solche *Summationes* zu kommen dergleichen Ewr. Wohlgeboh[ren] gefunden,[9] so sey $n = 1$; *erit*

$$s = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} + \mathit{etc.} = \frac{1}{a}\,\ell\,\frac{1}{1-a};$$

unde fit

$$A\ldots\ \frac{1}{2aa}\left(\ell\,\frac{1}{1-a}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{a}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{aa}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{a^3}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\ etc.$$

Sit $n=2$ *erit* $s=1+\frac{a}{3}+\frac{aa}{5}+\frac{a^3}{7}+etc.=\frac{1}{2\sqrt{a}}\,\ell\,\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$, *unde fit*

$$B\ldots\ \frac{1}{8a}\left(\ell\,\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{1}{2}+\frac{a}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{aa}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \frac{a^3}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\ etc.$$

Si $n=2$ *et* $a=-b$ *erit* $s=1-\frac{b}{3}+\frac{bb}{5}-\frac{b^3}{7}+etc.=\frac{1}{\sqrt{b}}\,\mathrm{A\,tang.}\sqrt{b}$, *unde fit*

$$C\ldots\ \frac{1}{2b}\left(\mathrm{A\,tang}\sqrt{b}\right)^2 = \frac{1}{2}-\frac{b}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{bb}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \frac{b^3}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\ etc.$$

Ponatur in A, $a=-1$; *et in C*, $b=1$; *ob* $\mathrm{A\,tang}\,1=\frac{\pi}{4}$ *erit*

$$D\ldots\quad \frac{1}{2}(\ell\,2)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\ etc.$$

$$E\ldots\quad \frac{\pi\pi}{32}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)\ etc.$$

$$F\ldots\quad \frac{1}{8}(\ell\,2)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)\ etc.$$

$$[E]-F\ \ldots\ \frac{\pi\pi}{32}-\frac{1}{8}(\ell\,2)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\ [etc.]$$

$$[E+]\,F\ \ldots\ \frac{\pi\pi}{32}+\frac{1}{8}(\ell\,2)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)[etc.]$$

Si D subtrahatur a serie $\frac{\pi\pi}{12} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + etc.$ *erit*

$$[G] \ldots\ \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(\ell\, 2)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\ etc.$$

Quoniam si fuerit $s = a - b + c - d + e - etc.$ *et* $t = aa + bb + cc + dd + etc.$ *erit summa factorum ex binis terminis seriei* $s \quad = \frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}t$: *eritque adeo*

$$\frac{1}{2}ss - \frac{1}{2}t = -\,b\cdot a + c\,(a-b) - d\,(a-b+c) + e\,(a-b+c-d) - etc.;$$

addendo t erit

$$\frac{1}{2}ss + \frac{1}{2}t = aa - b(a-b) + c(a-b+c) - d(a-b+c-d) + e(a-b+c-d+e) - etc.$$

Sit $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - etc.$ *erit* $s = \ell\, 2$ *et* $t = \frac{\pi\pi}{6}$; *unde fit*

$$\begin{aligned} H\ \ldots -\frac{1}{2}(\ell 2)^2 + \frac{\pi\pi}{12} \\ = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + etc. = G. \end{aligned}$$

$$I \ldots\ \frac{\pi\pi}{12} + \frac{1}{2}(\ell\, 2)^2 = 1\cdot 1 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + etc.$$

$$[D+]\, H\ \ldots\ \frac{\pi\pi}{12} = 1 - \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{2}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - etc.$$

seu

$$\frac{\pi\pi}{12} = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{21}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{36}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + etc.$$

Hier sind nun die beyden *series* G und I die beyden erstern, welche Ewr. Wohlgb. überschrieben.

Es ist bey der *Serie* $1 + \frac{x}{4} + \frac{xx}{9} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{25} + \frac{x^5}{36} + etc.$ merkwürdig daß dieselbe nur in 3 Fällen *summi*rt werden kan,[10] welche sind $x = 1$; $x = [-1;]$ und $x = \frac{1}{2}$; der letstere *Casus* folgt aber auß der *Serie G* kraft die[ses] *Theorematis*: *Si*

$$s = 1\cdot a - \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{3}(a+b+c) - \frac{1}{4}(a+b+c+d) + etc.,$$

e[*rit*]

$$\begin{aligned} s = \frac{a}{1\cdot 2} \quad &+ \quad \frac{1}{2\cdot 4}(a-b) + \frac{1}{3\cdot 8}(a-2b+c) + \frac{1}{4\cdot 16}(a-3b+3c-d) \\ &+ \quad \frac{1}{5\cdot 32}(a-4b+6c-4d\,[+e) + etc.;] \end{aligned}$$

wann nun für $a+b+c+d+etc.$ diese *Series* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+etc.$ gesetzt wird, so ist $s=\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(\ell\, 2)^2$. Um aber zu finden was diese *Expression*

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4}+etc.$$

betrage, so setze ich

$$z=x-\frac{n}{1}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^3}{3}+etc.$$

und *differentiando* wird

$$dz=dx\left(1-\frac{n}{1}\cdot x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2-etc.\right)=dx\,(1-x)^n:$$

dahero *integrando*

$$z=\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$$

un[d] *facto* $x=1$ *fit*

$$1-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{4}+etc.=\frac{1}{n+1}.$$

Dah[ero] ist

$$\frac{\pi\pi}{12}-\frac{1}{2}(\ell\, 2)^2=\frac{1}{1^2\cdot 2}+\frac{1}{2^2\cdot 4}+\frac{1}{3^2\cdot 8}+\frac{1}{4^2\cdot 16}+\frac{1}{5^2\cdot 32}+etc.$$

Was abe[r] Ewr. Wohlgb. beyde letstern *Series* betrifft, nehmlich[11]

$$\begin{aligned} p &= 1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+etc. \\ q &= \frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{25}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+etc. \end{aligned}$$

so ist klar d[aß]

$$p-q=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+etc.\right)\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+etc.\right)=\frac{\pi\pi}{12}\,\ell\, 2;$$

und allso wann d[ie] *Summ* von einer bekannt wäre, daraus die andere gleich *summir*t werden könnte; es ist zwar

$$\frac{13}{1440}\pi^4=1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+[etc.],$$

ich habe aber noch keinen Weg entdecken können um die *valores* p und q zu bestimmen, dahero von Ewr. Wohlgb. die *Methode* diese *Series* zu *summir*[en], mit grossem Verlangen erwarte. Wann Ewr. Wohlgb. hernach auch diese *Seriem*

$$r = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + etc.$$

*summi*ren könnten, so würden die beyden *Series* $p + r$ die schon längst gesuchte *Summam* dieser *Seriei* $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + etc.$ geben.[12]

Der H. *Hedling*er[13] nebst meiner gantzen *Familie* lassen sich Ewr. Wohlgb. gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonhard Euler.

Berlin den 5ten *Jan.*
1743.

P. S. M^r Clairaut hat mir nun geschrieb[en] daß meine nach *Paris* geschickte *Piece* zu re[chter] Zeit glückl[ich] eingekom[men.][14]

R 774 Reply to n° 57
Berlin, January 5th, 1743
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 41–43v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 178–187; *Euler-Goldbach* (1965), p. 135–140

61
Euler to Goldbach
Berlin, January 19th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgeb. haben in der That den gemeldten Schreibfehler als ein grosses Glück anzusehen,[1] wann derselbe zu solchen herrlichen Erfindungen Anlaß gegeben. Es hat mich viele Stunden und grosse *calculos* gekostet, ehe ich nur die Wahrheit der mir gütigst *communicir*ten *Summation*en habe einsehen können; ich kan mich aber auch nicht weiter rühmen, als daß ich dieselben *demonstri*ret habe. Die *Methode* wodurch ich dazu gelanget, ist ziemlich weit her gesucht, und so beschaffen, daß ich auch vermittelst derselben diese *Summas* nimmer würde herausgebracht haben, wann mir solche nicht schon vorher aus Ewr. Wohlgeb. Schreiben bekannt gewesen wären. Ich habe aber nachfolgende *Series* zu Hülfe genommen

$$\begin{array}{ll} A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + etc. & B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + etc. \\ C = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + etc. & D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + etc. \\ E = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + etc. & F = 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + etc. \\ G = \frac{1}{1^8} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + etc. & H = 1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{4^9} + etc. \\ etc. & \end{array}$$

von welchen die *Summae* A, C, E, G, *etc.* bekannt sind; aus diesen habe ich endlich mit grosser mühe folgende hergeleitet

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{1}{2^3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + etc. \\ &= \frac{1}{2}AA \\ \beta &= 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + etc. \\ &= AC - \frac{1}{2}BB \\ \gamma &= 1 + \frac{1}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^7}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \; etc. \\ &= AE - BD + \frac{1}{2}CC. \\ \delta &= 1 + \frac{1}{2^9}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4^9}\,(etc.) \\ &= AG - BF + CE - \frac{1}{2}DD \\ & \quad etc. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{1}{2^2}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) etc. \\ &= \frac{1}{2}AA + \frac{1}{2}C \\ b &= 1 + \frac{1}{2^4}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{4^4}\,(1 + etc.) \\ &= BB - \frac{1}{3}E \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c &= 1+\frac{1}{2^6}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^6}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^6}\left(1+etc.\right)\\
&= 2BD-\frac{3}{2}CC+\frac{1}{4}G\\
d &= 1+\frac{1}{2^8}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^8}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^8}\left(1+etc.\right)\\
&= 2BF-3CE+\frac{4}{2}DD-\frac{1}{5}[I]\\
& \quad etc.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p &= 1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{4^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\right) etc.\\
&= \frac{1}{2}BB+\frac{1}{2}E\\
q &= 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{4^5}\left(1+etc.\right)\\
&= \frac{3}{2}CC-\frac{5}{8}G\\
& \quad etc.
\end{aligned}
$$

Weilen nun A, C, E, G, *etc.* gegeben sind nehmlich $A=\frac{\pi^2}{6}$; $C=\frac{\pi^4}{90}$; $E=\frac{\pi^6}{945}$; $G=\frac{\pi^8}{9450}$; *etc.*, so geben obige *series*:

$$\alpha=\frac{1}{2}AA=\frac{\pi^4}{72};$$

$$2\beta+b=2AC-\frac{1}{3}E=\frac{19\pi^6}{2\cdot 5\cdot 7\cdot 3^4}$$

welches Ewr. Wohlgeb. zwey ersten *Theoremata* sind. Ferner ist auch

$$2\gamma+c=2AE-\frac{1}{2}CC+\frac{1}{4}G;$$

und

$$\beta+p=AC+\frac{1}{2}E;$$

und endlich ist

$$1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+etc.=\frac{\pi^8}{16\cdot 3\cdot 25\cdot 7}.$$

Weil aber diese meine *Methode* nicht natürlich genug ist, so ersuche Ewr. Wohlgb. gehorsamst mir Dero *Methode* gütigst zu *communici*ren.

Das letste *Theorema* war mir gleich bekannt, dann wann man setzt

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + etc. \\ s &= 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + etc. \end{aligned}$$

und

$$t = 1 + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{3^{m+n}} + \frac{1}{4^{m+n}} + etc.$$

so wird seyn

$$rs + t = \left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right) + \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + etc. \\ 1 + \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + etc. \end{array} \right\};$$

da nun, wann *m et n numeri pares* sind, die *summa* r, s, und t angegeben werden kan, so sind auch in diesen Fällen diese beyden letsten *series* zusammen genommen *summa*bel.[2]

Seit dem ich Ewr. Wohlgeb. zugeschrieben, ist mir erst eingefallen, daß ich Denselben schon vor geraumer Zeit eine *Rigor*ose *demonstration* von diesem *Theoremate* daß $4mn - m - n \neq quadr[ato]$ überschrieben hatte.[3] Solches hatte ich aber so sehr vergessen, daß ich in meinem letsten schrieb, ich hätte aller Mühe ungeacht davon noch keine *Demonstration* finden können; ich will allso diese *Demonstration* kurzlich wiederhohlen.

Lemma. Si fuerit p numerus primus haec expressio $a^{p-1} - 1$ *divisibilis erit per p.* Hievon haben Ewr. Wohlgeb. die *Demonstration* schon *approbi*rt; hieraus *raisonni*re ich allso:

Sit $p = 4n - 1$, *erit* $a^{4n-2} - 1$ *divisibile per* $4n - 1$, *si fuerit* $4n - 1$ *numerus primus. Ergo* $a^{4n-2} + 1$ *non erit divisibile per* $4n - 1$. *At* $a^{4n-2} + 1$ (*ob* $4n - 2 =$ *numer*[*um*] *impariter parem*) *est divisibile per* $aa + 1$. *Consequenter cum* $a^{4n-2} + 1$ *non sit per* $4n - 1$ *divisibilis, nec ejus factor* $aa + 1$ *per* $4n - 1$ *erit divisibilis.*

Porro si $aa + 1$ *per nullum numerum primum formae* $4n - 1$ *fuerit divisibile, etiam per nullum numerum compositum formae* $4n - 1$ *divisibile erit; si enim* $4m - 1$ *non fuerit numerus primus, unum saltem factorem primum habebit formae* $4n - 1$.

Cum igitur $aa + 1$ *per* $4n - 1$ *dividi nequeat, haec aequatio*

$$aa + 1 = (4n - 1)(4m - 1)$$

erit impossibilis, ideoque $aa \neq 16mn - 4m - 4n$ *seu* $4mn - m - n \neq$ *quadrato. Q. E. D.*

Ewr. Wohlgeb. läst Sich der H. *Hedling*er und meine gantze *Famille* gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonhard Euler

Berlin den 19ten *Jan.*
1743.

R 775 Reply to n° 59
Berlin, January 19th, 1743
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 44–45v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 188–192; *Euler-Goldbach* (1965), p. 140–142

62
Goldbach to Euler
Petersburg, (January 25th) February 5th, 1743[1]

HochEdelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen Schreiben vom 15. *Dec.* 1742 habe ich den 3. *Januar.* *a*[*nni*] *c*[*urrentis*] kurtz vor meiner Abreise von *Moscau* daselbst erhalten[2] auch aus dem inliegenden[3] mit Freuden ersehen daß der Herr von *Stosch* schon eine geraume Zeit her von dem Englischen Hofe eine jährl[iche] *pension* von 320 Pf[und] Sterl[ing] geniesset. Zu Dero neugekaufften Hause *gratuli*re ich von Hertzen,[4] und noch vielmehr zu dem von I[hro] Königl[ichen] M[ajestä]t darauf allergnädigst verliehenen *privilegio*. Von dem grossen Poeten dessen E. H. Erwehnung thun[5] war mir vorhero nichts bewust in dem ich sowohl die Gelehrten als andern Zeitungen nicht in der gehörigen Ordnung lese, ich erinnere mich aber, daß ich schon vor mehr als 10 Jahren bey dem Hn *Baron* von *Mardefeld* eine in Dantzig in 8.° mit ziemlich grossen Buchstaben gedruckte fürtreffliche Ubersetzung der Psalmen in deutschen Versen[6] gesehen habe; der jetzige neue Ubersetzer welchem das erwehnte Buch ohne Zweiffel schon bekannt gewesen, wird es also allem vermuthen nach, noch weiter gebracht haben, und möchte ich gern eine Übersetzung mit der andern *conferi*ren. Wann der *T*... noch lebete[7] würde er die verlangten Abschrifften von Eurer HochE. *Memoires* mit grosser *ponctualité* übersenden,[8] anjetzo aber weiß ich in der That nicht wer dergl[eichen] Geschäffte besorget. Das *Compliment* von dem Hn Geheimen Rath *Vockerodt* ist mir sehr angenehm gewesen,[9] ich wünschte hertzlich den selben einmal in einem *considerabl*en *Poste* (wann es auch gegen seine eigene *intention* wäre) allhie wieder zu sehen.

Wann dasjenige was Ew. H. von den *radicibus imaginariis* melden,[10] *demonstri*ret werden könnte, so müste auch folgen daß *posito c imaginario quocunque*; *f reali quocunque*, und $c\sqrt{4c^4 - f} = r =$ *numero reali*; $m = \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}}$,

$n = \sqrt{-c^2 - \dfrac{r}{c}}$, so wohl $(m+n)$ als $c\,(m-n)$ *reales* sind; es stünde solchemnach etwan der *casus* $x^4 + 72x - 20$ zu untersuchen, allwo die 4 *divisores* sind *positis* $c = 1 + \sqrt{-2}$; $f = -20$; $\sqrt{4c^4 - f} = \dfrac{r}{4c} = \dfrac{18}{1+\sqrt{-2}}$

$$\text{(I.)}\quad x + c + \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}}, \qquad \text{(II.)}\quad x + c - \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}},$$

$$\text{(III.)}\quad x - c + \sqrt{-c^2 - \frac{r}{c}}, \qquad \text{(IV.)}\quad x - c - \sqrt{-c^2 - \frac{r}{c}}.$$

Auf Dero anderes Schreiben vom 5. *Januar.* habe ich zu antworten daß die *objection*, welche Ew. HochE. bei $4mn - m - 1 \neq \Box$ und den andern Formuln machen, schon damahls zum theil von mir bemercket worden wiewohl ich meinete daß selbige leicht würde zu *solvi*ren seyn; jedoch glaube ich daß alles viel kürtzer und ohne dergleichen *casus particulares* zu hülf zu nehmen *demonstri*ret werden kan; vorher aber will nur *ad verba*: "Ferner ist klar daß wann man nur bewiesen hätte daß $4mn - m - 1 \neq \Box$ *casu* $m = 4u - 1$, daraus schon folgen würde daß $4np - n - p \neq \Box$; wann aber bewiesen wäre daß $4np - n - p \neq \Box$ so würde daraus nur folgen daß $4mn - m - 1$ kein *Quadratum* seyn könne *casu quo* $m = 4u - 1$, aber nicht *generaliter*",[11] diese kleine Erinnerung machen, daß nicht allein $B \ldots 4np - n - p \neq \Box$ ein *casus particularis* von $A \ldots 4mn - m - 1 \neq \Box$, sondern auch A ein *casus particularis* von B ist, welches natürlicher Weise *contradictorium* seyn würde, wann das $\Box$ *in* A und B *idem quadratum determinatum* bedeutete, nun aber, da es in beyden Fällen *diversos valores* hat, gar wohl bestehen kan; denn gleich wie aus dem *casu particulari ipsius* A, *ubi* $m = 4u - 1$, die *formula* $4\,(4nu - u - n)$ oder diese *aequivalens* $B \ldots 4nu - n - u \neq \Box$ entspringet, so kömmt aus dem *casu particulari ipsius* B, wann u gesetzt wird $= 4n^2p - n$, die *formula* $4np - p - 1 \neq \Box$ herauß, welche *posito p pro numero integro quocunque* die *formulam A* giebt, wie denn auch *generaliter* $4mn - m - n^{2\alpha-1} \neq \Box$ durch die *substitution* $m = 4n^{2\alpha}p - n^{2\alpha-1}$ alsofort in $4np - p - 1 \neq \Box$ verwandelt werden kan.[12]

Hie solte die neue *demonstration* folgen, weil sie mir aber nach besserer Überlegung selbst kein gnügen thut so muß dieser Punct biß auf eine andere Zeit ausgesetzt bleiben, indessen habe ich angemercket daß die *propositio* $4pmn - m - n \neq \Box$ *per substitutionem* $m = 4n^2q - n$ *in hanc similem* $4npq - p - q \neq \Box$ verwandelt wird.[13]

Aus der mir *communici*rten *demonstration*[14] des *theorematis*: *Si*

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \&c.,$$

erit

$$\frac{1}{2}ss = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \&c.,$$

erhellet zugleich die grosse Einsicht des Hn *Autoris* in dergleichen Sachen, und die unterschiedenen *applicationes* so E. H. von dem *theoremate* selbst machen, halte ich für sehr merckwürdig. Die *Summae serierum G et I* sind eben diejenigen so ich gefunden hatte,[15] die *summa* $D + H$ war mir auch bekannt.

Daß die *summae serierum*

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \&c.$$

und

$$q = \frac{1 \cdot 1}{4} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \&c.,$$

so ich gefunden zu haben vermeinet, aus einem blossen Schreibfehler entstanden wären habe ich selbst schon Eurer HochEdelg. in meinem letzten Schreiben erinnert,[16] ich hätte dahero auch an selbige *series* nicht weiter gedacht, wann ich sie nicht in Dero Schreiben wiederholet gesehen,[17] worauf ich denn alsofort befunden, daß beyder *Summa* von $z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.$ *dependi*ret. Ew. HochEd. *inferi*ren mit grössestem Recht, daß wann ich die *seriem*

$$r = \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \&c.$$

auch *summi*ren könnte, alsdann $z = p + r$ gefunden seyn würde, nun lässet sich zwar die *series* r gar schön *summi*ren, denn sie ist $= \frac{(\pi^2 - 3)\ \ell 2}{6}$,[18] aber p weiß ich nicht anders zu *exprimi*ren als durch $z - r$. Ich hatte auch in meinem vorigen geschrieben, daß ich die *summam seriei*

$$1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \&c.$$

noch nicht wüste, selbige aber *dependi*ret gleichfalls von der *summa* z und ist $= -\frac{z^2}{2} + \frac{\pi^6}{2 \cdot 3^3 \cdot 7}$.[19]

Aus Eurer Hochedelg. letztem Schreiben vom 19. *Jan.* ist mir lieb gewesen zu ersehen daß die *series* α, β, und b nicht von den leichtesten zu *summi*ren sind, was nun die *series* α und $2\beta + b$ betrifft, so kommen unsere *methodi* darin völlig überein, daß $\alpha = \frac{1}{2}AA$ und $2\beta + b = \frac{19\pi^6}{2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}$, hierin aber sind sie unterschieden, daß Eurer H. *methode* giebt $\beta = AC - \frac{1}{2}BB$, $b = BB - \frac{1}{3}E$, meine hingegen $\beta = \frac{\pi^6}{2 \cdot 3^3 \cdot 7} - \frac{BB}{2}$, $b = BB - \frac{11\pi^6}{2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}$;[20] den *valorem* $p = \frac{1}{2}BB + \frac{1}{2}E$ finde ich richtig, die übrigen habe noch nicht untersuchet. Meine *methode* werden E. H. aus nachfolgendem einigen *Schemate* gnugsam *pro omnibus seriebus huic similibus* ersehen können:

Sit

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \&c. = \frac{\pi^2}{6}, \\ C &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \&c. = \frac{\pi^4}{90}, \end{aligned}$$

erit duplum summae productorum ex binis terminis seriei A aequale $A^2 - C$, sed hoc duplum etiam est aequale sequentibus seriebus

$$\begin{array}{lllll} & & \text{(I.)} & \text{(II.)} & \text{(III.)} \\ +2\left(\frac{1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{4^2\cdot 5^2}+\&c.\right) & = 2\Bigg(& \frac{\pi^2}{3\cdot 1^2} & -2 & -1\Bigg) \\ +2\left(\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 4^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{4^2\cdot 6^2}+\&c.\right) & = 2\Bigg(& \frac{\pi^2}{3\cdot 2^2} & -\frac{2\left(1+\frac{1}{2}\right)}{2^3} & -\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}\right)}{2^2}\Bigg) \\ +2\left(\frac{1}{1^2\cdot 4^2}+\frac{1}{2^2\cdot 5^2}+\frac{1}{3^2\cdot 6^2}+\frac{1}{4^2\cdot 7^2}+\&c.\right) & = 2\Bigg(& \frac{\pi^2}{3\cdot 3^2} & -\frac{2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}{3^3} & -\frac{\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)}{3^2}\Bigg) \\ \&c. & & & \&c. & \end{array}$$

Wann nun die drey *columnae perpendiculares* besonders *summi*ret werden, so entstehet

$$\begin{array}{ll} \text{(I.)} & \frac{2\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\&c.\right) = \frac{2\pi^4}{3\cdot 6} \\ \text{(II.)} & -4\left(1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\&c.\right) \\ \text{(III.)} & -2\left(1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\&c.\right); \end{array}$$

die letzte *series* aber ist bekannter massen gleich $\frac{-7\pi^4}{180}$ also muß die mittlere seyn

$$A^2 - C - \frac{2\pi^4}{3\cdot 6} + \frac{7\pi^4}{180} = \frac{-10\pi^4}{180}$$

oder

$$1+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{64}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\&c. = \frac{\pi^4}{72}.$$

An Dero sämmtliche *familie* bitte mich dienstl[ich] zu empfehlen, wie auch den Hn *Chevalier Hedlinger* meiner beständigen Hochachtung zu versichern und verharre mit sonderbahrer *Consideration*

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg den 5. *Febr.* 1743.

P. S. Den durch E. H. mir übersandten Brief aus Sachsen habe ich wohl erhalten.[21]

Daß das *Theorema* $4mn - m - 1 \neq \square$ von E. H. schon längst *demonstri*ret worden, habe ich nicht vergessen, es ist aber nur die Frage gewesen, ob man es nicht noch auf eine andere Art *demonstri*ren könne?[22]

R 776 Reply to nº 58, nº 60 and nº 61
Petersburg, (January 25th) February 5th, 1743
Original, 4 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 61–64v
Partial copy, 7 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 71r–74r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 193–197; *Euler-Goldbach* (1965), p. 143–145

63
Goldbach to Euler
Petersburg, February (1st) 12th, 1743[1]

den 12. *Febr.* 1743.

Da ich anjetzo nach Königsberg schreibe[2] so habe gegenwärtiges *Post scriptum* zu meinem letzten Briefe an Ew. HochEdelgeb. mit absenden und zugleich einen abermahl eingeschlichenen Fehler *corrigi*ren wollen, denn die *summa*[3]

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \&c.$$

ist nicht $z - \dfrac{\pi^2 \,\ell\, 2}{6} + \dfrac{\ell\, 2}{2}$, sondern $z - \dfrac{\pi^2 \,\ell\, 2}{6} + u$ wann

$$u = 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + {}^{[4]}\ \&c.;$$

setzet man ferner

$$v = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \&c.,$$

so wird $u + v = \dfrac{\pi^2 \,\ell\, 2}{3}$.

Sonst habe ich auch *observi*ret, daß wann man setzet

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \&c.$$

$$B = \frac{3}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{7}{3\cdot 4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{9}{4\cdot 5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \&c.,$$

alsdann seyn werde

$$\frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.$$

Ich weiß nicht ob dergleichen *casus* bißhero sonderlich betrachtet worden *ubi series* $= \infty$ *dividitur per aliam* $= \infty$;[5] ich mag mir nicht die Mühe nehmen zu sehen was *per actualem divisionem* der *Seriei* B durch $2A$ vor *termini* herauskommen möchten, weil ich vermuthe daß die selben sehr *confus* aussehen werden.

Wann man ferner setzet

$$C = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \&c.,$$

so wird

$$\frac{C}{A} = \frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.,$$

woraus aber nicht folget daß $2C = B$, sondern nur daß $2C - B$ ein *infinite parvum* sey *respectu ipsius* B *vel* C.

R 777 Supplement to nº 62
Petersburg, February (1st) 12th, 1743
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 59rv
Copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. III, fol. 74rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 198–199; *Euler-Goldbach* (1965), p. 146

64
Euler to Goldbach
Berlin, February 26th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Nach Abstattung meiner gehorsamsten *Gratulation* zu Ewr. Wohlgeb. glücklichen Zurückkunft in *S.t Petersburg*, finde ich mich im Stande Denselben von einer *Edition* des *Dictionnaire de Trevoux* zuverlässige Nachricht zu geben: solches ist im vorigen Jahr in Basel bey H. Christ (welcher die Brandmüllerische Buchhandlung ererbet) gedruckt worden, bestehet in 6 *Tom. in Fol.* und kostet 30 *fl.* oder ungefehr 15 *Rub.*; der *Titul* ist *Dictionnaire de Trevoux, nouvelle Edition considerablement augmentée*, 6 *Vol. fol.* 1742; davon werden nächstens *Exemplaria* allhier zu bekommen seyn.[1] Die gemeldte Dantziger *Edition* der Psalmen[2] ist mir unbekannt, ich bin aber von Leuten, welche dieselbe und die neue gesehen haben, versichert worden, daß diese jene weit übertreffe. In dieser sind auch die Lobwasserischen *Melodi*en und Abtheilungen beybehalten worden, daß man sich derselben in den

Kirchen bedienen kan. Es liegen hier viel *Exemplaria*, und haben Ewr. Wohlgeb. nur zu befehlen, ob ich mit Gelegenheit eines überschicken soll.

Die über die *Academie* hochverordnete *Commission* hat mir letstens die versprochene *Pension* auf das gnädigste *confirmi*ret, und der H. *Admiral* Graf *Gollovin pressi*rt mich sehr meine *Scientiam navalem* nächstens gegen eine ansehnliche *Recompens* einzuschicken; ich habe solche völlig zu Ende gebracht, und nur um Erlaubnüß gebeten, solche vorher abschreiben zu lassen.[3]

Was ich von den *Radicibus imaginariis aequationum* gemeldet, daß dieselben immer dergestalt paar weiß genommen werden können, daß so wohl das *product* als die *summ* von zweyen *real* werde, kan ich zwar nicht *generaliter demonstri*ren, aber doch von allen *Aequationibus sexto gradu inferioribus*,[4] in gleichen auch von dieser weit *general*eren *aequation* $\alpha x^{5n} + \beta x^{4n} + \gamma x^{3n} + \delta x^{2n} + \varepsilon x^n + \zeta = 0$, *denotante n numerum integrum quemcunque*; dahero der von Ewr. Wohlgeb. gemeldte *Casus*[5] keine Schwierigkeit hat; ich glaube aber daß in den *Expression*en ein kleines Versehen seyn muß, weilen dieselben nicht zusammen stimmen, dann wan $c = 1+\sqrt{-2}$, und $f = -20$, so wird $\sqrt{4c^4 - f} = \dfrac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{-2}}$ und nicht $= \dfrac{18}{1+\sqrt{-2}}$. Ich bin den Spuren Ewr. Wohlgeb. nachgegangen, und glaube daß Dieselben auf diese *Aequation* gekommen seyn würden:

$$x^4 + 8\,(\alpha\alpha + \beta\beta)\; x\sqrt{2\,(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 12\alpha^4 - 40\alpha^2\beta^2 + 12\beta^4 = 0,$$

welche erstlich in diese zwey *factores imaginarios resolvi*rt wird:

$$\begin{aligned} &xx+2\left(\alpha+\beta\sqrt{-1}\right)x+4\alpha\beta\sqrt{-1}-2(\beta\beta-\alpha\alpha)-2\left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)\sqrt{2(\beta\beta-\alpha\alpha)}=0\\ &xx-2\left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)x+4\alpha\beta\sqrt{-1}-2(\beta\beta-\alpha\alpha)+2\left(\alpha-\beta\sqrt{-1}\right)\sqrt{2(\beta\beta-\alpha\alpha)}=0\end{aligned}$$

dahero die 4 *Radices* sehr *complicat* seyn würden. Dem ungeacht aber ist eben dieselbe *Aequation* auch ein *Product* von diesen zweyen *Factoribus realibus*

$$\begin{aligned} xx + 2x\sqrt{2\,(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 6\beta\beta - 2\alpha\alpha = 0\\ xx - 2x\sqrt{2\,(\beta\beta - \alpha\alpha)} + 2\beta\beta - 6\alpha\alpha = 0\end{aligned}$$

woraus die Wahrheit meines Satzes erhellet. Überhaupt aber wann 2 *factores imaginarii in se ducti* dieses *Productum reale* $x^4 + Bxx + Cx + D$ herausbringen sollen, so müssen dieselben allso beschaffen seyn

$$\begin{aligned} xx + \left(b + c\sqrt{-1}\right)x - aa - ab + bc\sqrt{-1} + ac\sqrt{-1}\\ xx - \left(b + c\sqrt{-1}\right)x - aa + ab + bc\sqrt{-1} - ac\sqrt{-1};\end{aligned}$$

nun aber kan das *productum* dieser zwey *factorum imaginariorum* auch in diese 2 *factores reales resolvi*rt werden:

$$(xx + 2ax + aa - bb)\,(xx - 2ax + aa + cc)\,.$$

Gleicher gestalt wann eine *aequation* nachfolgende 4 *radices imaginarias* hat:

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & x = p + q\sqrt{-1} + \sqrt{\left(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1}\right)}\\
\text{II.}\quad & x = p + q\sqrt{-1} - \sqrt{\left(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1}\right)}\\
\text{III.}\quad & x = p - q\sqrt{-1} + \sqrt{\left(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1}\right)}\\
\text{IV.}\quad & x = p - q\sqrt{-1} - \sqrt{\left(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1}\right)};
\end{aligned}$$

um abzukürzen setze ich $pp - qq - r = t$; $2pq - s = u$: so wird erstlich $\sqrt{tt + uu} \pm t$ allzeit eine *quantitas positiva*, und folglich $\sqrt{\left(\pm\, t + \sqrt{(tt + uu)}\right)}$ eine *quantitas realis* seyn; dieses vorausgesetzt, so ist die *summa radicum* I + III

$$= 2p + \sqrt{2t + 2\sqrt{(tt + uu)}};$$

summa II *et* IV

$$= 2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{tt + uu}};$$

productum radicum I · III

$$= pp + qq \quad \begin{array}{l} + p\sqrt{2t + 2\sqrt{tt + uu}} \\ + q\sqrt{-2t + 2\sqrt{tt + uu}} \end{array} \quad + \sqrt{tt + uu}$$

und *productum radicum* II · IV

$$= pp + qq \quad \begin{array}{l} - p\sqrt{2t + 2\sqrt{tt + uu}} \\ + q\sqrt{-2t + 2\sqrt{tt + uu}} \end{array} \quad + \sqrt{tt + uu},$$

welches alles *Quantitates reales* sind.

Ewr. Wohlgeb. *Transformatio*[6] *formulae* $4pmn - m - n \neq \square$ *in hanc* $4npq - p - q \neq \square$ *ope substitutionis* $m = 4n^2q - n$ kan ein grosses Licht zur *Demonstration* geben; dann wann man nur *demonstrir*en könnte daß $4pmn - m - n$ kein *Quadrat* sey, wann m eine Zahl ist von dieser Art $4nnq - n$, so würde zugleich *demonstrir*t seyn daß $4pmn - m - n$ *nullo modo* ein *Quadrat* seyn könnte. Eine gleiche *Transformation* geht auch an durch diese *Substitution*en:

$$m = (4np)^{2\alpha}\, x - \frac{n\left((4np)^{2\alpha} - 1\right)}{4np - 1}$$

oder

$$m = 4nn\,(4np)^{2\alpha}\, y - \frac{n\left((4np)^{2\alpha+1} - 1\right)}{4np - 1}.$$

Ich kan auf keine Weise herausbringen,[7] daß diese *series*

$$r = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right) - etc. = \frac{(\pi\pi-3)\ \ell 2}{6};$$

dann da alle *termini evoluti* von dieser *Form* $\dfrac{1}{xx\,(x+n)}$ sind, und

$$\frac{1}{xx\,(x+n)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{xx} - \frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{nn}\cdot\frac{1}{(x+n)}$$

so folget nach der von Ewr. Wohlgeb. mir gütigst *communicir*ten *Methode*, daß

$$r = \frac{\pi\pi\,\ell 2}{6} - 1 + \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + etc.;$$

allso müste seyn

$$\frac{1}{2}\ell 2 = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\ [-\ etc.;]$$

ich finde aber die *summam* dieser *seriei per approximationem* $= 0,7504$ und folglich grösser als $\ell 2$.

Daß diese *series*

$$\beta = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + etc. = AC - \frac{1}{2}BB,$$

habe auch durch Ewr. Wohlgeb. *Methode* gefunden, daß ich allso die *summ* $\dfrac{\pi^6}{2\cdot 3^3\cdot 7} - \dfrac{1}{2}BB$ für verdächtig halte, weilen *proxime* $\dfrac{\pi^6}{2\cdot 3^3\cdot 7} = 2,543\,35$, und $\dfrac{1}{5}BB = 0,722\,47$, und allso der *Valor* für β viel zu groß herauskäme; dieses wird noch mehr bestätiget, wann Ewr. Wohlgeb. angeben

$$b = 1 + \frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right) + etc. = BB - \frac{11\pi^6}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7},$$

dann da $BB = 1,444\,940$ und $\dfrac{11\pi^6}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7} = 1,865\,13$, so würde b *negativum* werden.[8]

Für die von Ewr. Wohlgeb. mir gütigst *communicir*te *Methode* sage tausendfältigen Dank, indem dieselbe weit leichter und *natür*licher auf diese *series* leitet, als diejenige welche ich gebrauchet, und sehr *embarrassant* ist. Um aber diese herrliche *Methode* auf die folgenden *Casus* zu *applici*ren, so habe dieses *Lemma* gebrauchet:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^n\,(x+a)^n} \quad = \quad & \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{(x+a)^n}\right) - \frac{n}{a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)\\ & + \frac{n\,(n+1)}{1\cdot 2a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right)\\ & - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3a^{n+3}}\left(\frac{1}{x^{n-3}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-3}}\right) + [etc.]\end{aligned}$$

biß man *ad potestates primas ipsarum* x *et* $x+a$ kommt. Von den *sig*[*nis*] *ambiguis* gelten die oberen wann n ein *numerus par* ist, sonst die untren. Wann auch ungleiche *Dignitates* mit einander *multiplici*rt werden, so dienet dieses *Lemma*:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^m(x+a)^n} \quad + \quad & \frac{1}{x^n(x+a)^m} \\ = \quad & +\frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^m}\pm\frac{1}{(x+a)^m}\right)-\frac{n}{1a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{m-1}}\mp\frac{1}{(x+a)^{m-1}}\right) \\ & +\frac{n(n+1)}{1\cdot 2a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{m-2}}\pm\frac{1}{(x+a)^{m-2}}\right)-[etc.] \\ & +\frac{1}{a^m}\left(\frac{1}{x^n}\pm\frac{1}{(x+a)^n}\right)-\frac{m}{1a^{m+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\mp\frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right) \\ & +\frac{m(m+1)}{1\cdot 2a^{m+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}}\pm\frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right)-[etc.;]\end{aligned}$$

wann man nun setzt

$$P=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+etc.$$

$$Q=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+etc.$$

et

$$Z=1+\frac{1}{2^{m+n}}+\frac{1}{3^{m+n}}+\frac{1}{4^{m+n}}+etc.$$

so findet sich

$$\begin{aligned}PQ-Z=&+\frac{1}{1\cdot 2^m}+\frac{1}{2^n\cdot 3^m}+\frac{1}{3^n\cdot 4^m}+etc.+\frac{1}{1\cdot 2^n}+\frac{1}{2^m\cdot 3^n}+\frac{1}{3^m\cdot 4^n}+etc. \\ &+\frac{1}{1\cdot 3^m}+\frac{1}{2^n\cdot 4^m}+\frac{1}{3^n\cdot 5^m}+etc.+\frac{1}{1\cdot 3^n}+\frac{1}{2^m\cdot 4^n}+\frac{1}{3^m\cdot 5^n}+etc. \\ &+\frac{1}{1\cdot 4^m}+\frac{1}{2^n\cdot 5^m}+\frac{1}{3^n\cdot 6^m}+etc.+\frac{1}{1\cdot 4^n}+\frac{1}{2^m\cdot 5^n}+\frac{1}{3^m\cdot 6^n}+etc. \\ &\qquad\qquad etc. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad etc.\end{aligned}$$

Wann man nun so wohl gleiche als ungleiche *Dignitates* mit einander *multiplici*rt, wie Ewr. Wohlgeb. unfehlbar werden gethan haben, so finde wie schon vorher gemeldt $\beta = AC - \frac{1}{2}BB$ und $b = BB - \frac{1}{3}E$, und wann man weiter geht und setzt

$$\begin{aligned}\alpha &= 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+etc. \\ \beta &= 1+\frac{1}{2^6}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+etc. \\ \gamma &= 1+\frac{1}{2^7}\left(1+\frac{1}{2}\right)+etc.\end{aligned}$$

so findet sich $\gamma = AE - BD + \frac{1}{2}CC$ und $2\alpha + 5\beta = 10BD - \frac{9}{2}CC$ wo A, B, C, D, *etc.* die vorgemeldten *valores* behalten.

Die *Series* $B = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^3} + etc.$ will sich noch auf keine Art *tractiren* lassen; ich fand letstens *per approximationem* daß $BB = A - \dfrac{1}{5}$, welches ziemlich genau eintrifft, aber doch nicht Stich hält, dann es ist $BB = 1,444\,940\,798\,43$ und $A = 1,644\,934\,066\,84$; dahero $A - \dfrac{1}{5} = 1,444\,934\,066\,84$ und

$$BB = A - \frac{1}{5} + \frac{673}{100\,000\,000}.$$

Inzwischen ist der *nexus* zwischen dieser *Serie* $B = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + etc.$ und den längst bemerkten Brüchen $\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{6}; \dfrac{3}{10}; \dfrac{5}{6}; \dfrac{691}{210}; \dfrac{35}{2}$; *etc. remarquabel*; dann wann

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{5}{6} - \frac{691}{210} + \frac{35}{2} - etc.,$$

so ist $B = 1 + \frac{1}{2}s$. Der Beweiß davon steckt in meiner *Dissertation de inventione termini summatorii ex dato termino generali*.[9] Dann wann man setzt

$$Z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \frac{1}{x^3}$$

und

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + etc.\ in\ infinitum,$$

so wird

$$\begin{aligned} B = Z \quad &+ \quad \frac{1}{2xx} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^8} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2x^{10}} \\ &+ \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2x^{12}} - \frac{691}{210} \cdot \frac{1}{2x^{14}} + etc.; \end{aligned}$$

wann man allso für x eine beliebige Zahl als 10 annimmt, so kan man *per additionem actualem* Z finden: es wird nehmlich

$$Z = 1,197\,531\,985\,674\,193\,251\,668\,686\,286\,978\,0;$$

dahero ist

$$B = Z + \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{40\,000} - \frac{1}{12\,000\,000} + \frac{1}{1\,200\,000\,000} - etc.$$

und wird

$$B = 1,202\,056\,903\,159\,594.$$

Gleicher Gestalt können auch die *Summae serierum reliquarum potestatum* gefunden werden, nachdem man einige *terminos ab initio actu addi*rt hat. Als es sey

$$Z = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \frac{1}{x^n}$$

und

$$N = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \textit{etc. in infinitum}:$$

so wird seyn

$$\begin{aligned} N \;=\; & Z + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot x^n} + \frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2x^{n+1}} - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6x^{n+3}} \\ & + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{6x^{n+5}} - \frac{n\,(n+1) \cdots (n+6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9} \cdot \frac{3}{10x^{n+7}} \\ & + \frac{n\,(n+1)\,(n+2) \cdots (n+8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 11} \cdot \frac{5}{6x^{n+9}} - \frac{n\,(n+1) \cdots (n+10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 13} \cdot \frac{691}{210x^{n+11}}\ \textit{etc.} \end{aligned}$$

Durch diese Regel habe ich nachfolgende *Summas vero proximas* gefun[den:]

$$\begin{array}{lll}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \textit{etc.} & = 1{,}644\,934\,066\,848\,226\,436 & = A \\
1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \textit{etc.} & = 1{,}202\,056\,903\,159\,594\,281 & = B \\
1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \textit{etc.} & = 1{,}082\,323\,233\,711\,138\,191 & = C \\
1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \textit{etc.} & = 1{,}036\,927\,755\,106\,863\,293 & = D \\
1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \textit{etc.} & = 1{,}017\,343\,061\,984\,449\,139 & = E \\
1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \textit{etc.} & = 1{,}008\,349\,277\,386\,601\,872 & = F \\
1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \textit{etc.} & = 1{,}004\,077\,356\,197\,944\,339 & = G \\
1 + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{3^9} + \textit{etc.} & = 1{,}002\,008\,392\,826\,082\,210 & = H \\
1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \textit{etc.} & = 1{,}000\,994\,575\,127\,618\,085 & = I \\
1 + \frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{3^{11}} + \textit{etc.} & = 1{,}000\,494\,188\,604\,194\,651 & = K \\
1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \textit{etc.} & = 1{,}000\,246\,086\,553\,308\,048 & = L \\
1 + \frac{1}{2^{13}} + \frac{1}{3^{13}} + \textit{etc.} & = 1{,}000\,122\,713\,347\,585\,744 & = M \\
1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \textit{etc.} & = 1{,}000\,061\,248\,135\,058\,704 & = N \\
1 + \frac{1}{2^{15}} + \frac{1}{3^{15}} + \textit{etc.} & = 1{,}000\,030\,588\,236\,307\,020 & = O \\
1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \textit{etc.} & = 1{,}000\,015\,282\,259\,408\,657 & = P
\end{array}$$

Bald wird der 7$^{\text{te}}$ *Tomus* von den hiesigen *Miscellaneis* zum Vorschein kommen, welcher ziemlich stark seyn wird in dem ich allein in der *Mathemati*schen *Class* auf 28 Bogen habe: darunter ist eine grosse *Piece* von dem *Comet*en des vorigen Jahres, und eine neue Art die *series* $1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} +$ *etc.* zu *summi*ren, welche bloß allein durch *differentiation* geschieht.[10] Vor etlichen Wochen hat man wiedrum einen *Comet*en allhie gesehen, welcher aber ohne Schwantz und sehr klein war, auch nur 10 Tage lang aus dem *Dracone* durch *ursam majorem* in

Leonem minorem gehend *observi*rt worden: es ist aber keine so *accurate Observation* gemacht worden, wodurch man seinen Lauf bestimmen könnte.[11] Die *Opera Joh*[*annis*] *Bernoullii omnia* werden bald aus der Presse kommen, und Unserm König *dedici*rt werden.[12] Es nimmt mich sehr wunder, ob Ewr. Wohlgeb. mit der *Academie* in gar keiner *Connexion* mehr stehen.

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Wohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Euer Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 26ten *Febr.*
1743.

R 778 Reply to n° 62
Berlin, February 26th, 1743
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 48–50v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 200–208; *Euler-Goldbach* (1965), p. 147–152

65

Goldbach to Euler

Petersburg, March (7th) 18th and (12th) 23rd, 1743

den 18. *Mart.* 1743.

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Endlich stellet sich die *demonstratio nova* ein,[1] so im folgenden bestehet:

Lemma 1. Si aequatio B $\ldots\ 4mn - m - 1 = a^2$ *non est possibilis casu quo* m *est numerus huius formae* $4u - 1$, *neque ullo alio casu ipsius* m *erit possibilis, ut in superioribus litteris ostensum fuit.*

Lemma 2. Si vera est aequatio B, vera etiam erit C $\ldots\ 4Mn - M - 1 = A^2$ *posito* $M = 2a + m + 4n - 1$, *fiet enim* $A = a + 4n - 1$.

Sed aequatio C non potest fieri vera nisi M sit numerus huius formae $4v-1$ (*per Lemma 1*), *erit igitur* $M = 4v-1 = 2a+4n-1+4u-1$, *ergo* $4v = 2a+4n+4u-1$, *hoc est numerus par = numero impari, quod est absurdum, ergo et aequatio B est absurda.*

Similiter de aequatione D $\ldots$[2] $4pmn - m - n\,[= a^2]$ *iudicandum est quae vera esse non potest nisi sit* m *huius formae* $4n^2q - n$ (*ut in superioribus litteris ostensum fuit*), *quo facto erit* $4pnM - M - n = A^2$, *si ponatur* $M = ((4pn - 1) + 2a + m)$, $A = 4pn - 1 + a$; *sed quia* m *est huius formae* $4n^2q - n$ *et*

M huius formae $4n^2Q-n$, *habebitur* $4pn-1+2a+4n^2q=4n^2Q$, *hoc est numerus impar = numero pari, quod est absurdum, ergo et aequatio D est absurda.*

Was ich von den *radicibus imaginariis* erinnern wollen,[3] gehet eigentlich dahin: daß weil die 4 folgenden *radices*:

$$x=\begin{cases} -\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{-\dfrac{a^2}{4}+\sqrt{\dfrac{a^4}{4}-f}} \\ +\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{-\dfrac{a^2}{4}-\sqrt{\dfrac{a^4}{4}-f}} \end{cases}$$

in se ductae $x^4\pm 2a\left(\dfrac{a^4}{4}-f\right)^{\frac{1}{2}}x+f=0$ geben, folglich auch so offt als f und $2a\sqrt{\dfrac{a^4}{4}-f}$ *numeri reales* sind, zweene von gemeldten *radicibus in se ductae numeros reales* hervor bringen müssen, wann aber Ew. Hochedelg. wie Sie in Dero letzterem Schreiben melden die Wahrheit Ihres *asserti* von allen *aequationibus quartae potestatis demonstri*ren können,[4] so *cessi*ret das angeführte *dubium* von selbsten.

Aus den in Eurer Hochedelg. Schreiben beygebrachten Umständen sehe ich wohl daß die von mir angegebene *Summa* aus einem Irrthum entstanden,[5] wobey ich die von *M.r Vaugelas* in den *Remarques sur la Langue Françoise* gemachte Erinnerung *applici*ren muß, wann er saget, daß im fall es sich finden sollte daß er selbst anders geschrieben als er nach seinen *Remarques* hätte schreiben sollen, man alsdenn nicht seinem Exempel sondern seinen Regeln zu folgen habe;[6] es ist mir also sehr lieb daß Ew. H. an meiner *methode* etwas gutes gefunden, ohngeachtet in die von mir angeführten Exempel einige Fehler eingeschlichen sind.

Wäre mir Eurer HochE. *Lemma* wodurch $\dfrac{1}{x^m(x+a)^n}$ in andere *series resolvi*ret wird eher bekannt gewesen so hätte ich die erwehnten *Summas* viel leichter und ordentlicher finden können. Ich habe indessen angemercket, daß wann die *summa seriei* deren *formula generalis* ist $\dfrac{1}{(3x-2)^2}$ für bekannt angenommen und $=a$ gesetzt wird, alsdann jede *series cuius terminus generalis est* $\dfrac{1}{(6x+p)^2}$ *ubi p sit numerus quicunque integer exprimi*ret werden kan *per a et quadraturam circuli*, hingegen kan ich die *series huius formae* $\dfrac{1}{(12x+p)^2}$ *dato p numero quocunque* nicht anders *ad quadraturam circuli reduci*ren als *cognitis summis trium casuum* $p=11$, $p=10$, $p=9$ *aut aliorum trium his aequivalentium.*

Es wird Eurer HochE. vermuthlich nicht schwer seyn Ihr *Lemma* auch auf

$$\frac{\alpha x^{2n-2}+\beta x^{2n-3}+\gamma x^{2n-4}+\&c.}{(px+q)^n(px+r)^n}$$

zu *extendi*ren, so ist zum Exempel *positis* $p = 4$, $q = -3$, $r = -1$, die *summa seriei* $\dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(4x-3)^2\,(4x-1)^2}$

$$= \frac{\alpha\left(64u + \pi^2 - 6\pi\right)}{2^9} + \frac{\beta\left(16u + \pi^2 - 4\pi\right)}{2^7} + \frac{\gamma\left(\pi^2 - 2\pi\right)}{2^5}$$

wann u die *summam seriei* $\dfrac{1}{(4x-3)^2}$ andeutet.

Imgleichen wann $p = 4$, $q = -2$, $r = 0$, so wird die *summa seriei* $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(4x-2)^2\,(4x)^2}$

$$= \frac{\alpha\pi^2}{2^9} + \frac{\beta\left(\pi^2 - 8\,\ell\,2\right)}{2^8} + \frac{\gamma\left(\pi^2 - 12\,\ell\,2\right)}{3\cdot 2^5}.$$

Wann man setzet $v = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \ldots + \dfrac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
A &=^{[7]} \frac{1}{n^2\,(n+1)} \mp \frac{(2n+1)}{(n+1)^2\,n^2}\left(v + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{\pi^2}{6\,(n+1)\,n}\\
B &= \frac{1}{(n+1)^2\,(n+2)} - \frac{(2n+3)}{(n+2)^2\,(n+1)^2}\left(v + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\\
&\quad + \frac{\pi^2}{6\,(n+2)\,(n+1)}\\
C &= \frac{1}{(n+2)^2\,(n+3)} - \frac{(2n+5)}{(n+3)^2\,(n+2)^2}\left(v + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)\\
&\quad + \frac{\pi^2}{6\,(n+3)\,(n+2)}
\end{aligned}$$

so werden die *quantitates* AC *et* B^2 desto weniger von ein ander *differi*ren je grösser der *numerus* n genommen wird.

Was Ew. HochEdelgeb. von der *summa seriei* B in Dero Schreiben beyfügen halte ich für sehr merckwürdig. Die *Dissertation de inventione termini summatorii* erinnere ich mich nicht gesehen zu haben,[8] weiß auch nicht, ob dieselbe in Berlin oder allhie herausgekommen ist. Vor die mir *communicir*ten *summas in terminis decimalibus* dancke ich dienstl[ich]. Bey der letzten Zahl in $P = 1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} +$ *&c.* ist nicht deutlich zu sehen ob die selbe 1 oder 7 heißen soll, wie wohl auch darauf nicht viel ankommt.[9] Ich verbleibe mit besonderer Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} *Petersbourg* den 23. *Mart.* 1743.

R 779 Reply to n° 64
Petersburg, March (7th) 18th and (12th) 23rd, 1743
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 65–66v
Partial copy, 6 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 2r–4v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 209–212; *Euler-Goldbach* (1965), p. 152–154

66
Euler to Goldbach
Berlin, April 9th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Wohlgeb. bin für die mir gütigst überschriebene *Demonstration*, daß $4mn - m - 1$ keine *Quadrat* Zahl seyn kan, gehorsamst verbunden. Die *Raisonnemens* darinn sind wegen der *propositionum exclusivarum* und *infinitarum*, so darinn häuffig vorkommen, so tiefsinnig, daß ich viele Mühe gehabt ehe ich dieselben habe völlig einsehen und auseinander wickeln können, und die gewöhnlichen Regeln der *Logic* scheinen mir dazu kaum hinlänglich zu seyn. Alles beruhet auf dem ersten *Lemmate*, und wann dasselbe seine Richtigkeit hat, so ist an der *Demonstration* nicht das geringste auszusetzen. Ewr. Wohlgeb. beruffen Sich wegen dieses *Lemmatis* auf Dero vorige Briefe,[1] aus welchen ich diese *Demonstration* gezogen:

I. *Si* $4nx - x - 1$ *est quadratum casu* $x = m$, *tum erit etiam quadratum casu* $x = 16mnn - 4n - 1$.

II. *Ergo si* $4nx - x - 1$ *non est quadratum casu* $x = 16mnn - 4n - 1$, *tum eadem formula* $4nx - x - 1$ *non erit quadratum casu* $x = m$.

III. *Cum igitur* $16mnn - 4n - 1$ *contineatur in forma* $4v - 1$, *si demonstretur formula* $4nx - x - 1$ *quadratum esse non posse casu* $x = 4v - 1$, *tum etiam certum erit formulam* $4mn - m - 1$ *quadratum esse non posse.*

IIII. *Quare formula* $4mn - m - 1$ *quadratum esse non poterit, nisi quadratum sit haec formula* $4nx - x - 1$ *existente* x *numero formae* $4v - 1$.

V. *Quoniam ergo hae formulae* $4mn - m - 1$ *et* $4nx - x - 1$ *congruunt formula* $4mn - m - 1$ *quadratum esse non potest, nisi sit* m *numerus formae* $4v - 1$.

Wann diese letste *Conclusion* ihre Richtigkeit hat, als worinn Ewr. Wohlgeb. erstes *Lemma* besteht, so ist die gantze übrige *Demonstration* vollkommen. Allein eben diese letste *Consequentz* erwecket bey mir einen *Scrup*el, welchen ich nicht wohl mit Worten ausdrucken kan. Daß aber dieser mein *Scrup*el gegründet sey, kan ich dadurch zeigen, weilen man auf gleiche Art beweisen könnte, daß $4mn - m + 1$ kein *quadratum* seyn könnte, *nisi sit* m *numerus hujus formae* $4v + 1$, welches doch falsch ist. Diese *Demonstration* würde allso lauten:

I. *Si* $4nx - x + 1$ *est quadratum casu* $x = m$, *erit etiam quadratum casu* $x = 16mnn + 4n + 1$, *fit enim* $64mn^3 - 16mnn + 16nn = 16nn\,(4mn - m + 1)$.

II. *Ergo si* $4nx - x + 1$ *non fuerit quadratum casu* $x = 16mnn + 4n + 1$, *non erit quadratum haec forma* $4mn - m + 1$.

III. *Cum igitur* $16mnn + 4n + 1$ *contineatur in forma* $4v + 1$, *si demonstretur formula* $4nx - x + 1$ *quadratum esse non posse casu* $x = 4v + 1$, *tum simul certum foret, hanc formulam* $4mn - m + 1$ *prorsus quadratum esse non posse.*

IV. *Quare formula* $4mn - m + 1$ *quadratum esse non poterit nisi quadratum sit haec formula* $4nx - x + 1$ *casu* $x = 4v + 1$.

V. *Quoniam ergo formulae* $4mn - m + 1$ *et* $4nx - x + 1$ *congruunt formula* $4mn - m + 1$ *quadratum esse non poterit, nisi sit* m *numerus formae* $4v + 1$.

Da nun in dieser *Demonstration* ein Fehler gewiß steckt, so kan auch die vorhergehende, als welche dieser in allem gleich ist, nicht *admittir*t werden. Vielleicht können aber Ewr. Wohlgeb. von Dero ersten *Lemmate* eine andere *Demonstration* geben, welche dieser *Difficultä*t nicht unterworfen ist, deren Richtigkeit am füglichsten auf gleiche Art erkannt werden kan, wann nehmlich Ewr. Wohlgb. untersuchen werden, ob eben dasselbe *Ratiocinium* nicht auf die *Formul* $4mn - m + 1$ sich *applici*ren lasse.

Was die andere *Demonstration* betrifft, daß $4pmn - m - n$ kein *Quadratum* seyn könne, so kommt gleicher gestalt die gantze Sach nur darauf an, daß man richtig beweise, dieselbe *Formul* könne kein[e] *quadrat* Zahl geben *nisi sit* $m = 4nnq - n$. Wann dieser Satz seine Richtigkeit hätte, so würde die folgende *Demonstration* nicht einmal nöthig seyn, weilen *ob eandem rationem* auch seyn müsste $n = 4mmr - m$, und folglich zugleich $m < n$ und $n < m$, welches unmöglich ist. Man könnte aber auf eben diese Art auch beweisen, daß $pmn - m - n$ nimmer ein *Quadratum* seyn könne, dann kraft eben des vorigen *Ratiocinii* müsste $pmn - m - n$ kein *Quadrat* seyn können *nisi sit* $m = nnq - n$; nun aber würde dieser Schluß der Wahrheit doch nicht gemäß seyn.

Ungeacht ich aber auf diese Weise in dem *Ratiocinio* einen Fehler verspühre, so muß ich doch gestehen daß ich denselben nicht deutlich darthun und vor Augen legen kan; welches doch sehr nöthig wäre, um in andern Fällen denselben desto sicherer vermeiden zu können.

Meine Regel um eine solche *Expression* $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + etc.}{(px-q)^m\,(rx-s)^n}$ in ihre *partes simplices* zu *resolvi*ren, wann nur $k < m+n$, verhält sich folgender gestalt.[2] *Sint partes quaesitae*

$$+\frac{A}{(px-q)^m} + \frac{B}{(px-q)^{m-1}} + \frac{C}{(px-q)^{m-2}} + \frac{D}{(px-q)^{m-3}} + \ldots + \frac{M}{px-q}$$
$$+\frac{\mathfrak{A}}{(rx-s)^n} + \frac{\mathfrak{B}}{(rx-s)^{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{(rx-s)^{n-2}} + \frac{\mathfrak{D}}{(rx-s)^{n-3}} + \ldots + \frac{\mathfrak{M}}{rx-s}.$$

Ponatur brevitatis gratia $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + etc.}{(rx-s)^n} = Q$, *et quaerantur per differentiationem continuam posito* dx *constante valores* $\dfrac{dQ}{dx}, \dfrac{ddQ}{dx^2}, \dfrac{d^3Q}{dx^3}, \dfrac{d^4Q}{dx^4}$, *etc. eritque*

$$\begin{array}{ll}
A = Q & \textit{posito } x = \dfrac{q}{p} \\[2mm]
B = \dfrac{1}{1p} \cdot \dfrac{dQ}{dx} & \textit{posito } x = \dfrac{q}{p} \\[2mm]
C = \dfrac{1}{1 \cdot 2pp} \cdot \dfrac{ddQ}{dx^2} & \textit{posito } x = \dfrac{q}{p} \\[2mm]
D = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3p^3} \cdot \dfrac{d^3Q}{dx^3} & \textit{posito } x = \dfrac{q}{p} \\
\textit{etc.} &
\end{array}$$

Simili modo si ponatur $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \textit{etc.}}{(px-q)^m} = S$ *erit*

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{A} = S & \textit{posito } x = \dfrac{s}{r} \\[2mm]
\mathfrak{B} = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{dS}{dx} & \textit{posito } x = \dfrac{s}{r} \\[2mm]
\mathfrak{C} = \dfrac{1}{1 \cdot 2r^2} \cdot \dfrac{ddS}{dx^2} & \textit{posito } x = \dfrac{s}{r} \\[2mm]
\mathfrak{D} = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3r^3} \cdot \dfrac{d^3S}{dx^3} & \textit{posito } x = \dfrac{s}{r} \\
\textit{etc.} &
\end{array}$$

Wann allso diese *Formul* $\dfrac{axx + bx + c}{(4x-3)^2\,(4x-1)^2}$ *proponi*rt wird um die *partes*

$$\frac{A}{(4x-3)^2} + \frac{B}{4x-3} + \frac{\mathfrak{A}}{(4x-1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x-1}$$

zu finden, so wird erstlich $Q = \dfrac{axx+bx+c}{(4x-1)^2}$; $\dfrac{dQ}{dx} = \dfrac{2ax+b}{(4x-1)^2} - \dfrac{8\,(axx+bx+c)}{(4x-1)^3}$, und *posito* $x = \dfrac{3}{4}$ *ob* $p = 4$ *et* $q = 3$ *erit*

$$A = \frac{\frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c}{4} = \frac{9}{64}a + \frac{3}{16}b + \frac{1}{4}c$$

$$B = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{3}{2}a + b}{4} \quad \frac{-\frac{9}{2}a - 6b - 8c}{8}\right) = -\frac{3}{64}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c.$$

Hernach ist $S = \dfrac{axx+bx+c}{(4x-3)^2}$, $\dfrac{dS}{dx} = \dfrac{2ax+b}{(4x-3)^2} - \dfrac{8\,(axx+bx+c)}{(4x-3)^3}$ und *posito* $x = \dfrac{1}{4}$ *ob* $r = 4$ *et* $s = 1$ *erit*

$$\mathfrak{A} = \frac{\frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c}{4} = \frac{1}{64}a + \frac{1}{16}b + \frac{1}{4}c$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}a + b}{4} + \frac{\frac{1}{2}a + 2b + 8c}{8}\right) = \frac{3}{64}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c.$$

Folglich wird die *proponir*te *Expression* $\dfrac{axx+bx+c}{(4x-3)^2\,(4x-1)^2}$ in diese *partes resolvir*t:

$$\begin{aligned}&+a\left(\frac{9}{64\,(4x-3)^2}-\frac{3}{64\,(4x-3)}+\frac{1}{64\,(4x-1)^2}+\frac{3}{64\,(4x-1)}\right)\\&+b\left(\frac{3}{16\,(4x-3)^2}-\frac{1}{8\,(4x-3)}+\frac{1}{16\,(4x-1)^2}+\frac{1}{8\,(4x-1)}\right)\\&+c\left(\frac{1}{4\,(4x-3)^2}-\frac{1}{4\,(4x-3)}+\frac{1}{4\,(4x-1)^2}+\frac{1}{4\,(4x-1)}\right).\end{aligned}$$

Wann allso die gegebene *expressio* ein *terminus generalis seriei infinitae* ist, *ob*[3]

$$\int\frac{1}{4x-3}-\int\frac{1}{4x-1}=\frac{\pi}{4};$$

et

$$\int\frac{1}{(4x-3)^2}+\int\frac{1}{(4x-1)^2}=\frac{\pi\pi}{8}$$

et

$$u=\int\frac{1}{(4x-3)^2}$$

wie Ewr. Wohlgeb. annehmen, so wird derselben *seriei summa* seyn

$$\begin{aligned}&= a\left(\frac{\pi\pi}{512}+\frac{1}{8}u-\frac{3\pi}{256}\right)+b\left(\frac{\pi\pi}{128}+\frac{1}{8}u-\frac{\pi}{32}\right)+c\left(\frac{\pi\pi}{32}-\frac{\pi}{16}\right)\\&= \frac{\pi\pi}{512}(a+4b+16c)+\frac{u}{8}(a+b)-\frac{\pi}{256}(3a+8b+16c);\end{aligned}$$

wann allso $a=-b$ so kan die *summa seriei per solam quadraturam Circuli* angegeben werden.

In der überschriebenen *summa seriei*[4] $1+\dfrac{1}{2^{16}}+\dfrac{1}{3^{16}}+etc.$ ist die letste *Figur* ein 7 und nicht 1.

Daß die drey *Formul*n A, B, C, *posito* $v=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ so beschaffen sind, daß wann n ein *numerus valde magnus* ist *proxime* $AC=B^2$ seyn wird, deucht mir daraus klar zu seyn, weilen in diesem Fall dieselben *quantitat*en so gar fast einander gleich werden.

Wann die *summa seriei* $\dfrac{1}{(3x-2)^2}$ für bekant angenommen wird so ist auch die *summa seriei* $\dfrac{1}{(3x-1)^2}$ bekannt, und da in beyden die *termini alterni* besonders *summir*t werden können, so findt man daraus die *summam seriei* $\dfrac{1}{(6x\pm n)^2}$ *denotante n numerum quemcunque integrum*; hieraus ist ferner klar, daß um die *seriem* $\frac{1}{(12x \pm n)^2}$ zu *summi*ren drey *casus diversi ipsius n* für bekannt angenommen werden müssen.

Ewr. Wohlgeb. *Postscriptum* vom 12$^{\text{ten}}$ *Febr.* habe ich wohl erhalten, und weilen ich auf die fürnehmsten *Punct*en schon geantwortet hatte,[5] und nicht wusste daß Denselben die Briefe *franco* zugestellet werden, so habe meine fernere Antwort biß jetzt verspahret. Ewr. Wohlgb. darinn enthaltene *Reflexion* über zwey *series*, deren jede eine *summam infinitam* hat, doch aber unter sich eine *Rationem finitam* haben,[6] ist sehr merkwürdig. Dergleichen *series* können nach Belieben auf folgende Art gefunden werden:

Sit seriei $a+b+c+d+$ *etc.* $=A$ *summa infinita, hujus autem seriei* $\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ *etc.* $=B$ *summa finita, erit*

$$\begin{array}{llllll} AB = & a\alpha & +b(\alpha+\beta) & +c(\alpha+\beta+\gamma) & +d(\alpha+\beta+\gamma+\delta) & +\mathit{etc.} \\ & & +\beta a & +\gamma(a+b) & +\delta(a+b+c) & +\mathit{etc.}; \end{array}$$

hier ist aber die *summa seriei inferioris finita*, und folglich *evanesci*rt dieselbe *prae superiori*, dahero ist $\frac{AB}{A} = B$ oder

$$\begin{aligned} &\frac{a\alpha + b(\alpha+\beta) + c(\alpha+\beta+\gamma) + d(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \mathit{etc.}}{a+b+c+d+\mathit{etc.}} \\ = \;& \alpha+\beta+\gamma+\delta+\mathit{etc.} \end{aligned}$$

Ferner ist auch $b+c+d+e+\mathit{etc.} = A$, und allso $AB = b\alpha + c(\alpha+\beta) + d(\alpha+\beta+\gamma) + \mathit{etc.}$ welche zur obigen gethan gibt

$$2AB = (a+b)\alpha + (b+c)(\alpha+\beta) + (c+d)(\alpha+\beta+\gamma) + \mathit{etc.} = C$$

und allso $\frac{C}{2A} = B$. Wann

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \mathit{etc.}$$

und

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \mathit{etc.},$$

so kommen Ewr. Wohlgb. *series* heraus.

Meine *Dissertation de inventione termini summatorii ex dato termino generali seriei*[7] ist in dem 8$^{\text{ten}}$ *Tomo Comment*[*ariorum*] gedruckt. Dieselbe besteht kürzlich darinn, daß wann man setzt $\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X} = S$, oder wann S den *Terminum summatorium* einer *Seriei* andeutet, deren *Terminus generalis* ist $= X$ das ist eine *Quantitas ex indice x utcunque composita*, so wird seyn

$$\begin{aligned} S \;=\;& \int X\,dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\,dx} - \frac{1}{6}\cdot\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^3} \\ +\;& \frac{1}{6}\cdot\frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7\,dx^5} - \frac{3}{10}\cdot\frac{d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9\,dx^7} + \frac{5}{6}\cdot\frac{d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11\,dx^9} \\ -\;& \frac{691}{210}\cdot\frac{d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13\,dx^{11}} + \mathit{etc.} \end{aligned}$$

da *ob integrationem* $\int X\,dx$ eine solche *Constans* muß *addi*rt oder *subtrahi*rt werden, daß die ganze *Expressio* wird $= 0$ wann $x = 0$.

Wann allso zum *Exempel* der *terminus summatorius* von dieser *serie*

$$1 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + etc. \ \dots \ x^8$$

gesucht werden soll, so ist $X = x^8$; $\int X\,dx = \frac{1}{9}x^9$; $\dfrac{dX}{dx} = 8x^7$; $\dfrac{ddX}{dx^2} = 7 \cdot 8x^6$; $\dfrac{d^3X}{dx^3} = 6\cdot 7\cdot 8x^5$; $\dfrac{d^4X}{dx^4} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^4$; $\dfrac{d^5X}{dx^5} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^3$; $\dfrac{d^7X}{dx^7} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x$; $\dfrac{d^9X}{dx^9} = 0$, und die folgenden *Differentialia* alle *evanesciren*; dahero wird

$$S = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

So oft allso X eine *functio integra* von x ist, weilen bey einer jeglichen *Differentiation* die *Dimensiones* abnehmen, so muß immer ein *terminus summatorius in forma finita* gefunden werden. Wann aber der *Terminus generalis* X eine *fraction* ist, so gehn auch die *Differentiationes in infinitum* fort, und folglich wird der *terminus summatorius per seriem infinitam exprimi*rt. In diesem Fall kan auch die *Constans adjicienda* nicht anderst gefunden werden, als daß man *datum terminorum numerum actu addi*re und die *constantem* so annehme daß in diesem Fall die bekannte *Summ* herauskomme. Als es sey

$$S = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{x^3},$$

so ist $X = \dfrac{1}{x^3}$ und $\int X\,dx = \text{Const.} - \dfrac{1}{2xx}$; ferner $\dfrac{dX}{dx} = -\dfrac{3}{x^4}$; $\dfrac{ddX}{dx^2} = \dfrac{3\cdot 4}{x^5}$; $\dfrac{d^3X}{dx^3} = -\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{x^6}$; $\dfrac{d^5X}{dx^5} = -\dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{x^8}$; *etc.*; dahero wird

$$S = Const. - \frac{1}{2xx} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2x^{10}} - etc.;$$

um die *Constantem* zu finden so *addi*re man *actu* 10 *terminos*; gesetzt die gefundene *Summ* sey N, so muß *posito* $x = 10$, $S = N$ werden; allso wird

$$Const. = N + \frac{1}{2\cdot 10^2} - \frac{1}{2\cdot 10^3} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 10^4} - \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10^6} + \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10^8} - etc.,$$

woraus diese *Constans verae proxima* leicht gefunden wird.

Hernach kan man leicht die *summam seriei ad datum quemvis terminum* finden, und wann man die *summam in infinitum* verlangt, so setze man $x = \infty$, und da wird $S = Const.$; allso die *Constans inventa* ist die *summa seriei in infinitum continuatae.*

Wann man diese *Seriem*

$$\frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \dots + \frac{1}{aa+aa}$$

*actu summir*t, so ist die *Summ* deswegen merkwürdig, weil durch dieselbe die *Quadratura circuli* so nahe gefunden werden kan:[8] es sey

$$s = \frac{1}{aa} + \frac{1}{aa+1} + \frac{1}{aa+4} + \frac{1}{aa+9} + \ldots + \frac{1}{aa+aa}$$

so wird *proxime* seyn $\pi = 4as - \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{6aa}$; als wann man setzt $a = 1$, *fit* $s = 1,5$; *et* $\pi = 3,166\,666\ldots$ zu groß; *si* $a = 2$ *fit* $s = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 0,575$; $4as = 4,6$ und allso $\pi = 3,141\,666\,66\ldots$ zu groß; *sit* $a = 3$ *fit*

$$s = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} = 0,343\,589\,743\,589\,743\,589\,7,$$

$$\begin{array}{lcll}
4as = & 12s & = & 4,123\,076\,923\,076\,923\,0 \\
\textit{subtr.} & \dfrac{3}{a} & = & 1, \\
\textit{add.} & \dfrac{1}{6aa} & = & \underline{0,018\,518\,518\,518\,518\,5} \\
\textit{fiet} & \pi & = & 3,141\,595\,441\,595\,441\,5;
\end{array}$$

diese *Expression* gibt allso die *Peripheri*e immer zu groß. Ich habe demnach den *Excessum* gesucht, und gefunden daß sey

$$\begin{aligned}
\pi \;=\; & 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot 3\,aa} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^2\cdot 3\cdot 7\,a^6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 11\,a^{10}} \\
& - \frac{35}{2}\cdot\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 15\,a^{14}} + \frac{43\,867}{42}\cdot\frac{1}{2^8\cdot 9\cdot 19\,a^{18}} - \frac{854\,513}{6}\cdot\frac{1}{2^{10}\cdot 11\cdot 23\,a^{22}} \\
& + \frac{769\,779\,27}{2}\cdot\frac{1}{2^{12}\cdot 13\cdot 27\,a^{26}} - \textit{etc.} \\
& - \frac{4\pi}{e^{2\pi a}-1},
\end{aligned}$$

allwo dieser letste *terminus* ungemein klein wird, wann a mittelmässig groß angenommen wird: dann es ist schon $e^{6\pi} = 153\,552\,990$, weilen $e^{\pi} = 23,140\,69$. Ewr. Wohlgeb. waren einmal auf *operation*en bedacht wie man Zahlen finden könnte, so ohne einige *legem* fortgiengen, um zu versuchen ob man nicht etwa auf eine solche Art die Zahl $\pi = 3,141\,59$ *etc.* herausbringen könnte.[9] Solche *irregulier*en Zahlen können nun gefunden werden durch die ordentliche *Division* wann man bey jeder *operation* den *Divisorem* um 1 vermehrt: als aus diesem *Exempel* zu sehen

$$\begin{array}{l|ccccccccccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 10} \\
\textit{Dividend} & 1, & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\textit{Divisores} & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, \\
\hline
\textit{Quotus} & 0, & 4 & 6 & 4 & 7 & 8 & 2 & 7 & 4 & 3 & 9 & 0 & 7
\end{array}\;\cdots$$

$$\cdots\;\begin{array}{cccccccccccccc}
{\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 15} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 9} & {\scriptstyle 18} & {\scriptstyle 9} & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
14, & 15, & 16, & 17, & 18, & 19, & 20 & & & & & & \\
\hline
6 & 3 & 9 & 3 & 4 & 9 & 4 & \textit{etc.}; & & & & &
\end{array}$$

wann ich nehmlich so viel mal nehmen könnte daß nichts übrig blieb, so nehme ich einmal weniger, damit diese *Division in infinitum* fortgehe; wann man nun auf eine solche Art die *Quadraturam Circuli* finden könnte, so hielte ich dieselbe für so gut als würklich gefunden. Auf die vorher beschriebene Art durch die *series* $\pi = 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{6aa}$ *etc.* wann für a eine etwas grosse Zahl als 10 genommen wird, kan der *valor ipsius* π auf viel Figuren ziemlich leicht gefunden werden, allein da die *coefficientes* sehr *irregulär* fortgehen so halte ich keine *methode* bequemer um den *valorem ipsius* π zu finden als diejenige, welche schon längsten einmal gefunden. Ich weiß nicht ob Ewr. Wohlgebohrnen Sich derselben noch erinnern: sie besteht aus 2 *seriebus* deren jede stark *convergi*ret und auch leicht *per approximationes* auf sehr viel Figuren *summir*t werden kan. Es sey nehmlich[10]

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{1}{7\cdot 2^4} + \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{1}{11\cdot 2^6} - \frac{1}{13\cdot 2^7} - etc. \\ B &= \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{13\cdot 2^{13}} - etc. \end{aligned}$$

so wird seyn $\pi = 4A + 2B$ oder es ist

$$\begin{aligned} \pi = 3 \quad + \quad & \frac{1}{3} - \frac{1}{5\cdot 2} - \frac{1}{6\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{10\cdot 2^3} + \frac{1}{11\cdot 2^4} \\ - \quad & \frac{1}{13\cdot 2^5} - \frac{1}{14\cdot 2^5} - \frac{1}{15\cdot 2^6} + etc. \end{aligned}$$

Da in diesen *seriebus* nur die *potestates binarii* vorkommen, so kan ich auch solche geben, worinn nur die *potestates* von 2 und 3 enthalten sind. Also wann man setzt

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + etc.$$

und

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} - \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \ etc.,$$

so wird seyn $\pi = 4C + 4D$. Diese *Series* scheinen mir nun weit bequemer zu seyn, als diejenige, welcher sich *Sharp*, *Machin*, und *Lagny* bedienet, als welche ihre grosse Zahlen durch Hülfe dieser *seriei*

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9\cdot 3^4} - etc.$$

[gefunden,] welche nicht so stark *convergir*t als eine von den obigen, und noch dazu dieser Schwierigkeit unterworfen ist, daß man erstlich $\sqrt{3}$ auf so viel Figuren als man haben will suchen, und dann diese beschwehrliche Zahl beständig *dividir*en muß; deswegen kan sich in keinem *termino* eine *revolutio periodica figurarum* finden, wodurch man die folgenden Figuren aus den vorhergehenden finden könnte: dahingegen bey meinen *Seriebus* dieser Vortheil in einem jeden *Termino* statt findet, so daß ich wohl 10 *terminos per fractiones decimales* von meinen *seriebus evolvir*en wolte, ehe *Lagny* einen einzigen von seinen *evolvir*t hat.

Den beygefügten Brief nach Leipzig habe gleich den selben Tag, als ich Ewr. Wohlgeb. Schreiben erhalten, fortgeschickt.[11] So bald von der neuen *Basel Edition* des *Dictionnaire de Trevoux*[12] *Exemplaria* entweder hier oder in Leipzig ankommen werden, so werde nicht ermangeln Ewr. Wohlgeb. *Ordres* ein völliges Genügen zu leisten.

Da nunmehr die über die *Academie* Hochverordnete *Commission* ihre Endschafft erreichet,[13] so wird die darauf folgende *Resolution* lehren, wie weit ich auf die mir geschehenen *Promess*en Staat machen könne.

Nachdem ich von *M.r Clairaut* vernommen, daß *M.r Demairan* meine im vorigen Jahr an Ihn *addressir*te *Piece* bekommen, und mir darauf noch ein *Recepisse* ausgebeten, so habe ich seit der Zeit gar keine Antwort mehr erhalten;[14] dahero ich noch nicht weiß, ob es rathsam seyn wird dieses Jahr etwas dahin zu schicken.

Der H. *Hedling*er, welcher künftige Woche nach der Schweitz zurükreisen wird,[15] der H. Geh[eime] Rath *Vockerodt*, welcher wegen Seiner *Charge* mit Niemand *Correspondir*en darf,[16] der H. *Prof. Strube*,[17] und meine gantze *Famille* lassen sich nebst mir Ewr. Wohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung

Eurer Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 9ten *April*
1743.

R 780 Reply to n° 63 and n° 65
Berlin, April 9th, 1743
Original, 5 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 53–57v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 213–224; *Euler-Goldbach* (1965), p. 154–161

67
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 23rd) May 4th, 1743

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Ich sehe in der That, daß das letztlich angeführte[1] *Lemma* 1 nicht alsofort aus dem was ich vorher von der *aequatione* $4mn - m - 1 = a^2$ geschrieben hatte, erhellet, dahero bitte ich nachfolgendes *raisonnement* in *consideration* zu ziehen:

Si in aequatione $E \ldots\ 4mn - m - 1 = a^2$ *ponatur* $m = 4v - 1$, $v = 4n^2M - n$ *et* $a = 16n^2A^2$, *transmutabitur aequatio* E *in* $F \ldots\ 4nM - M - 1 = A^2$, *quae cum non differat ab aequatione* E *nisi sola specie litterarum* M, A *et* m, a *et pro unaquaque harum litterarum poni possint omnes numeri integri affirmativi,* *necesse est aequationem E et F unam eandemque esse. Si vero in E solus valor* (*ex hypothesi impossibilis*) $m = 4v - 1$ *comprehendit aequationem F in omni sua amplitudine, quae aequatio F revera aequivalet aequationi E; sequitur, per casum* $m = 4v - 1$, *si impossibilis est in E, non magis excludi omnes casus possibiles aequationis F quam omnes casus possibiles ipsius aequationis E, cum nullus casus possibilis reperiatur in E quin sit assignabilis in F.*

Dieses wird sich hoffentlich auch in dem von Eurer HochEdelgebohrnen vorgeschlagenen *parallelismo* mit der *formul* $4nx - x + 1$, deren *casus quadrabilitatis* ich nicht untersuchet habe, *souteni*ren, wo nicht, so wird es mir lieb seyn die Sache ins künfftige besser einzusehen. Ich dancke indessen dienstl[ich] für die in Eurer Hochedelg. Schreiben enthaltenen schönen *theoremata*, wovon ich vieleicht künfftig etwas zu melden gelegenheit haben werde.[2] Die hiesigen *nova litteraria* werden E. H. von den HHn *Professoribus* mit welchen Sie in *Correspondance* stehen besser als von mir erhalten können. Wann E. H. sichere Nachricht haben daß *M^r de Mairan* Dero *Memoire* empfangen,[3] und Sie demselben wissen lassen, daß sein *Recepisse* noch nicht ankommen, so sehe ich nicht daß solches ausbleiben des *Recepisse* Eurer Hochedelg. zu einigem *préjudice* gereichen könne. Dero sämmtl[icher] *familie*, wie auch dem Hn *Chevalier Hedlinger* und Hn *Prof. Strube* bitte mich dienstl[ich] zu empfehlen, und verbleibe mit vieler hochachtung

Eurer hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^t Petersburg den 4. *Maii* 1743.

vert[*e*]

P. S. Haben Ew. Hochedelgeb. eine *methode* den *valorem* in dem *casu* zu *determini*ren da $f = 1$ und π in der gewöhnlichen Bedeutung genommen wird *in hac formula*?

$$\frac{\pi^2}{6f\,(f-1)} - \frac{(2f-1)}{f^2\,(f-1)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{f\,(f-1)^2};$$

ich halte dafür, daß der *valor quaesitus* alsdann seyn werde

$$1 - \frac{\pi^2}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \&c.\right).^{[4]}$$

Wann ich mich recht erinnere so haben Sie mir ehemahls eine formul *communici*ret welche die *summas serierum quarum formula est* $\frac{1}{x^2 + fx}$ *generaliter* giebt *posito pro f numero quocunque etiam fracto*; die formul selbst aber ist mir vorjetzo nicht bekannt.[5]

R 781 Reply to n° 66
Petersburg, (April 23rd) May 4th, 1743
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 67–68v
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 5r–6r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 225-226; *Euler-Goldbach* (1965), p. 162

68
Euler to Goldbach
Berlin, May 21st, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Aus der Verwandlung dieser *Formul* $4mn - m - 1 = aa$ in diese ähnliche $4Mn - M - 1 = AA$, *facta substitutione* $m = 4v - 1$, $v = 4nnM - n$ *et* $aa = 16n^2A^2$, kan ich nicht sehen daß mehr folget, als, *si formula* $4mn - m - 1$ *quadrata nequeat esse casu* $m = 4v - 1$, *omnino quadratum esse non poterit*; oder wann man *demonstri*ren könnte daß $4mn-m-1$ *nullo casu* $m = 4v-1$ ein *quadrat* wäre, so wäre zugleich richtig erwiesen, daß eben dieselbe *Formul nullo prorsus casu* ein *Quadrat* seyn könnte. Hingegen kan diese *Conclusion* nicht zugegeben werden: *omnes casus, quibus* $4mn - m - 1$ *sit quadratum, habere* $m = 4v - 1$; aber diese *Consequenz* hat wiedrum ihre Richtigkeit, *si cognitus esset casus, quo* $4mn - m - 1 = \Box$, *neque tamen fuerit* $\underline{m}$ *numerus formae* $4v - 1$; *ex eo certe alius casus derivari posset quo* $\underline{m}$ *esset numerus formae* $4v - 1$. Um aber die Sach deutlicher zu machen so will ich diese ähnliche *Formul* $9mn - m - 1 = aa$ betrachten welche wann man setzt $m = 9v - 1$, $v = 9nnM - n$ *et* $a = 9nA$ in diese $9Mn - M - 1 = AA$ verwandelt wird; wann man nun schliessen wollte diese *Formul* $9mn - m - 1$ könne kein *quadratum* seyn, *nisi* m *sit numerus formae* $9v - 1$, so würde die Unrichtigkeit dieses Schlusses so gleich erhellen, dann $9mn - m - 1$ wird ein *Quadratum* in folgenden *casibus*:

$n = 2;$	$m = 1$	$n = 3;$	$m = 1$	$n = 6;$	$m = 10$
$n = 2;$	$m = 10$	$n = 3;$	$m = 17$	$n = 6;$	$m = 17$
$n = 2;$	$m = 26$	$n = 3;$	$m = 37$	$n = 6;$	$m = 109$
$n = 2;$	$m = 53$	$n = 3;$	$m = 85$	$n = 6;$	$m = 130$
	etc.		*etc.*		*etc.*,

woraus erhellet daß $9mn - m - 1$ *infinitis modis* ein *Quadratum* seyn könne, ohne daß m ein *numerus hujus formae* $9v-1$ ist, ungeacht eben dasjenige *Raisonnement* hier angebracht werden kan, welches bey der *Formul* $4mn-m-1$ gemacht worden.

Dieses Jahr hat der H. *Prof. Daniel Bernoulli* das gantze *Praemium* erhalten, und meiner *Piece* ist das <u>*Accessit*</u> jedoch ohne meinen Nahmen zuerkannt worden;[1] der H. *Hedling*er ist vergangenen Mittwochen von hier nach der Schweitz zurükgereiset.

Nunmehr sind die *Opera Joh*[*annis*] *Bernoullii omnia*[2] in 4 *Quart* Bänden fertig worden; der Verleger *M.*^{r} *Bousquet* hat dieselben selbst hieher gebracht und dem König ein *Magnifiq* eingebundenes *Exemplar praesentir*t; ich habe auch eins von dem H. *Bernoulli* zum *Praesent* erhalten; die 3 ersten *Tomi* enthalten alle seine *Piec*en, welche bißher hinundwieder gedruckt worden, der 4$^{\text{te}}$ aber die *Anecdota*; das *Exemplar* wird nicht anderst als für 20 *fl.* in *Francfort* verkaufft. *M.*^{r} *Bousquet* hat ein *Contract* mit mir geschlossen kraft welches er alle meine Schrifften, ausgenommen diejenigen welche ich nach *Petersburg* zu schicken schuldig bin, zu drucken [übernimmt], und wird den Anfang mit dem *Tractat de Isoperimetris* machen. Er hätte gern mit der *Scientia Navali* angefangen, ich muß aber erst vernehmen, ob die *Academi*e noch gesinnet seyn wird, dasselbe zu drucken.[3]

Ewr. Wohlgeb. *Problema de inveniendo valore hujus expressionis*

$$P = \frac{\pi^2}{6n\,(n-1)} + \frac{1}{n\,(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)}{nn\,(n-1)^2}$$

casu quo $n = 1$, ist gewiß mit eines von den Schwehrsten in dieser Art; ich habe eben denjenigen *Valorem* herausgebracht, welchen Ewr. Wohlgeb. mir entdecket.[4] Um denselben zu finden habe ich gesetzet $n = 1 + \alpha$, *denotante* α *numerum evanescentem*: *sit enim hoc casu* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} = Q$, *atque formula proposita abibit*[5] *in hanc*

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi\pi}{6\alpha\,(1+\alpha)} + \frac{1}{\alpha^2\,(1+\alpha)} - \frac{(1+2\alpha)\,Q}{\alpha^2\,(1+\alpha)^2} \\ &= \frac{\pi\pi}{6}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\,(1+2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 3\right) \\ &= \frac{\pi\pi}{6\alpha} - \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right); \end{aligned}$$

die gantze Sach kommt allso auf den *Valorem ipsius* Q an, *posito* $n = 1+\alpha$. Diesen finde ich allso: *Generaliter* ist $Q = \int \frac{1-x^n}{1-x}dx$, *si post integrationem ponatur* $x = 1$; dann es ist $\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$, folglich $\int \frac{1-x^n}{1-x}dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}$, dahero *facto* $x = 1$, *erit* $Q = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, wie angenommen worden. Nun setze ich $n = 1 + \alpha$, *eritque* $Q = \int \frac{1-x^{1+\alpha}}{1-x}dx = \int \frac{1-x\cdot x^\alpha}{1-x}dx$. *At cum sit generaliter*

$$x^y = 1 + \frac{y\,\ell\,x}{1} + \frac{y^2\,(\ell\,x)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3\,(\ell\,x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + etc.$$

erit

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{dx}{1-x}\left(1 - x - \frac{\alpha x\,\ell\,x}{1} - \frac{\alpha^2 x\ (\ell\,x)^2}{1\cdot 2} - \frac{\alpha^3 x\ (\ell\,x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} - etc.\right) \\ &= x - \alpha\int \frac{x\,dx}{1-x}\ell\,x - \frac{\alpha^2}{2}\int \frac{x\,dx}{1-x}\,(\ell\,x)^2 - \frac{\alpha^3}{6}\int \frac{x\,dx}{1-x}\ (\ell\,x)^3 - etc. \end{aligned}$$

posito post singulas integrationes $x = 1$. Nun *integri*re ich eine jede *formul à part.*

1. ist $\int \frac{x\,dx}{1-x}\ell\,x = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + etc.\right)\,\ell\,x$; *at generaliter est* $\int x^m dx\,\ell\,x = -\,\frac{1}{(m+1)^2}$ *posito post integrationem* $x = 1$. *Ergo erit*

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}\ell\,x = -\,\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} - \ etc. = -\,A + 1 = 1 - \frac{\pi\pi}{6}$$

posito $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + etc. = \frac{\pi\pi}{6}$.

Secundo est $\int \frac{x\,dx}{1-x}\,(\ell\,x)^2 = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + etc.\right)\,(\ell\,x)^2$; *at est generaliter* $\int x^m dx\ (\ell\,x)^2 = \frac{1\cdot 2}{(m+1)^3}$ *posito* $x = 1$, *unde fit*

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}\,(\ell\,x)^2 = 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ etc.\right) = 2\,(B-1)$$

posito $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + etc.$

Tertio est $\int \frac{x\,dx}{1-x}\ (\ell\,x)^3 = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + etc.\right)\,(\ell\,x)^3$; *at est generaliter* $\int x^m dx\ (\ell\,x)^3 = -\,\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(m+1)^4}$ *posito* $x = 1$, *unde fit*

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}\ (\ell\,x)^3 = -\,6\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ etc.\right) = -\,6\,(C-1)$$

posito $C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + etc.$

Simili modo si ponatur $D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + etc.$, $E = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + etc.$, *reperietur tandem*

$$Q = 1 + \alpha\,(A-1) - \alpha^2\,(B-1) + \alpha^3\,(C-1) - etc.,$$

hincque ob $A = \frac{\pi\pi}{6}$ *erit*[6]

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi^2}{6\alpha} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi\pi}{6} - 1\right) + B - 1 + 1 \\ &= 1 - \frac{\pi\pi}{6} + B \end{aligned}$$

oder wie Ewr. Wohlgeb. gefunden

$$P = 1 - \frac{\pi\pi}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \textit{ etc.}\right).$$

Für die *summam seriei* $\dfrac{1}{xx + fx}$ habe ich eine *formulam integralem* schon längst gefunden;[7] nun aber hat mich eben diese Untersuchung auf eine bequemere *Expression* geleitet, welche allem Ansehen nach Ewr. Wohlgeb. bekant seyn und Dieselben ebenfalls auf diese *Materi*e geführt haben wird. Dann da *posito* $x = f$ gefunden ist

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{f+1} \\ = \;& 1 + f\,(A-1) - ff\,(B-1) + f^3\,(C-1) - f^4\,(D-1) \;\textit{ etc.} \end{aligned}$$

erit quoque

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{1+f} = 1 + \frac{f}{2\,(2+f)} + \frac{f}{3\,(3+f)} + \frac{f}{4\,(4+f)} + \textit{etc.}$$

Sit

$$S = \int \frac{1}{xx + fx} = \frac{1}{1\,(1+f)} + \frac{1}{2\,(2+f)} + \frac{1}{3\,(3+f)} + \textit{etc.}$$

erit

$$\begin{aligned} S \;&=\; \frac{1}{f}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{f}\right) \\ &=\; \frac{1}{1+f} + (A-1) - f\,(B-1) + ff\,(C-1) - f^3\,(D-1) + \textit{ etc.} \end{aligned}$$

Ich verharre mit der schuldigsten Hochachtung
Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 21ten *May*
1743.

R 782 Reply to n° 67
Berlin, May 21st, 1743
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 60–61v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 227–231; *Euler-Goldbach* (1965), p. 163–165

69

Goldbach to Euler

Petersburg, June (11th) 22nd, 1743[1]

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Ew. HochEdelgeb. waren in Dero vorigem Schreiben der Meinung das alles auf dem bewusten ersten *Lemmate* beruhete,[2] und wann dasselbe seine Richtigkeit hätte, an der *Demonstration* des *Theorematis* nicht das geringste auszusetzen wäre, ich wolte dahero in meinem letzten Briefe die Wahrheit des *Lemmatis primi* darthun,[3] und sehe auch daß ich darin nicht übel *réussi*ret, nachdem Ew. Hochedelgeb. zugeben daß "wann man *demonstri*ren könnte daß $4mn - m - 1$ *nullo casu* $m = 4v - 1$ ein *quadrat* wäre, zugleich richtig erwiesen seyn würde daß eben dieselbe formul *nullo prorsus casu* ein *quadrat* seyn könnte".[4] Dieses ist aber der einige Inhalt des *Lemmatis primi*. Ohngeachtet aber beyde *Lemmata* ausser Zweiffel sind, so erkenne ich doch nunmehro daß die *demonstration* aus einer andern Ursache nicht bestehen kan, denn es heisset daselbst: "*aequatio C non potest fieri vera nisi M sit numerus huius formae* $4v-1$ *(per lemma primum)*"; dieses folget aber in der That aus dem *lemmate primo* nicht. Vieleicht findet sich künfftig etwas besseres.

Die *summam* der Formul

$$P = \frac{\pi^2}{6n\,(n-1)} + \frac{1}{n\,(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\,\ldots\,+\frac{1}{n}\right)}{n^2\,(n-1)^2}$$

casu quo $n = 1$, welche Ew. Hochedelg. durch eine so schöne und *generale methode* herausgebracht,[5] hatte ich gantz ohngefehr und nur in selbigem *casu particulari* allein angemercket, denn weil die *series*

$$\begin{aligned} A\ \ldots\ & \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}\left(1+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3\cdot 4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4\cdot 5}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right) + \&c. \\ & = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ \&c. \end{aligned}$$

aus nachfolgenden *numero infinitis seriebus* bestehet[6]

$$\begin{aligned} B\ \ldots\ & \frac{1}{1\cdot 2\cdot 1} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 9} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 16} + \&c. = z + 1 - \frac{\pi^2}{6} \\ C\ \ldots\ & \frac{1}{2\cdot 3\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 16} + \&c. = \frac{1}{2\cdot 1^2} + \frac{\pi^2}{2\cdot 1\cdot 6} - \frac{3}{4\cdot 1^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ D\ \ldots\ & \frac{1}{3\cdot 4\cdot 1} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 9} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 16} + \&c. = \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{\pi^2}{3\cdot 2\cdot 6} - \frac{5}{9\cdot 2^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \\ & \qquad\qquad \&c. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \&c. \end{aligned}$$

und die *summa generalis omnium serierum* B, C, D, *&c.* ist

$$\frac{\pi^2}{6n\,(n-1)}+\frac{1}{n\,(n-1)^2}-\frac{(2n-1)}{n^2\,(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}\right)$$

so wird die *summa seriei* B (allwo $n=1$) $= z+1-\dfrac{\pi^2}{6}$.

Diejenige *division* welche E. Hochedelg. in Dero Schreiben vom 9. *Apr.* angeführet haben,[7] dienet, so viel ich sehe, nur dazu, daß man in dem *quoto* einen *numerum non circulantem* erhalte, dergleichen *numeri non circulantes* aber können auf unzehliche andere Arten ohne solche mühsahme *division* gefunden werden, zum Exempel der *numerus* 1.1..1...1....1 *&c. in inf*[*initum*] ist gewiß *non circulans*, es mögen die *loca vacua, quae punctis designata sunt*, mit allen Zahlen nach belieben (wann es nur nicht lauter 1 *in infinitum* sind) ausgefüllet werden, als

$$\left.\begin{array}{l} 101\,001\,000\,100\,0[0]1\,000\,001\ \&c.\\ 121\,221\,222\,122\,2[2]1\,222\,221\ \&c.\\ 101\,231\,141\,126\,7[8]1\,135\,141\ \&c.\\ \&c.\end{array}\right\}\ \text{sind } \textit{non circulantes}.^{[8]}$$

Es können alle *fractiones rationales per denominatorem* 100 00 . . . *et numeratorem circulantem exprimi*ret werden, welche *numeratores* aber zweyerley sind (1.) *in quibus datur elementum initiale non circulans*, (2.) *in quibus idem est elementum initiale, quod circulans*, als zum Exempel $\dfrac{1}{2}=\dfrac{5\underline{0}}{1\underline{0}}$ allwo das *elementum initiale non circulans* ist 5, das unterstrichene *elementum circulans* ist 0;

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{\underline{3}}{1\underline{0}}$ allwo das *elementum initiale* und *circulans idem* ist nehml[ich] 3;

$\dfrac{61}{162}=\dfrac{3\,\underline{765\,432\,198}}{1\underline{0}}$ allwo das *elementum initiale* $=3$, das *elementum circulans* $=765\,432\,198$;

es trifft sich auch bißweilen daß das *elementum circulans* aus so viel Zifern bestehet als in dem *denominatore fractionis* $\dfrac{1}{a+1}$ der *numerus a unitates* hat, *exempli gr*[*atia*] *si* $a=22$ *erit* $\dfrac{1}{23}=\dfrac{\underline{434\,782\,608\,695\,652\,173\,913\,0}}{1\underline{00}}$.

Wann man setzet[9]

$$\left(y^{-1}-1\right)\left(3^2y^{-1}-1\right)\left(5^2y^{-1}-1\right)\left(7^2y^{-1}-1\right)\ \ldots\left((2n-1)^2\,y^{-1}\,[-1]\right)=Y$$

und $dY=P\,dy$, so wird die *formula* $-\dfrac{P\,dy}{Y}-n$ die *summatrix tot terminorum seriei*

$$A\ \ldots\ \frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\&c.$$

quot n continet unitates, est autem terminus generalis seriei A ...

$$\frac{1}{(2x-1)^2\,y^{-1}-1}$$

posita x pro exponente terminorum, igitur quia si ponatur $y=\frac{1}{4}$ *series A transit in*

$$B\ \ldots\ \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\frac{1}{13\cdot 15}+\ \&c.$$

quae in infinitum continuata[10] *aequalis est semicirculo cuius diameter* $=1$*; erit seriei B summatrix* $-\frac{Py}{Y}-n$*, si differentiatione peracta ponatur* $y=\frac{1}{4}$*. Sit exempli gratia* $n=2$*, fiet*

$$-\frac{Py}{Y}-2=\frac{10y^{-1}-2}{9y^{-2}-10y^{-1}+1}=\frac{10y-2y^2}{9-10y+y^2}=\frac{38}{105}.$$

Es giebt unzehliche *quadrata* welche zu dieser Formul

$$C\ \ldots\ 4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$$

denotantibus m et n numeris integris affirmativis nicht gebracht werden können,[11] als 1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 *&c.*; wann man aber eine *formulam infinitorum quadratorum ad formulam C non revocabilium* geben könnte, so wäre auch das *Problema*: *invenire numerum primum dato quocunque maiorem*, *solvi*ret.[12]

Dato termino primo seriei $\frac{1}{a}$ *et lege progressionis hac, ut dato quocunque termino* $\frac{1}{A}$ *fiat terminus sequens* $=\frac{1}{A\,(A-1)+1}$*, erit summa totius seriei* $=\frac{1}{a-1}$.[13]

Der H. *Hedlinger* wird vermuthlich zeit seiner Anwesenheit in Berlin einen Stempel mit dem *Portrait* Ihro Königl[ichen] M[ajestä]^t verfertiget haben, und in diesem fall möchte ich wissen ob man einen Abdruck davon in Wachs erhalten könnte.[14] Ich verharre mit besonderer Hochachtung

Eurer HochedelGebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 22. *Jun. st. n.* 1743.

R 783 Reply to n° 68
Petersburg, June (11th) 22nd, 1743
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 69–71r
Partial copy, 8 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 6v–9v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 232–236; *Euler-Goldbach* (1965), p. 166–168

70

Euler to Goldbach

Berlin, July 9th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Wohlgeb. erstes *Lemma*, worauf ich die gantze *Demonstration* gegründet zu seyn glaubte,[1] hatte ich nicht so wohl nach den Worten, womit dasselbe ausgedrückt war, betrachtet, als nach der *Application* desselben in den nachfolgenden *Proposition*en, und habe deswegen die gantze *Demonstration* aus eben dem jenigen Grunde für unrichtig gehalten, welchen Ewr. Wohlgeb. anjetzo Selbst anzeigen.[2] Dann ich gab zu, daß wann $4mn - m - 1$ *nullo casu* $m = 4v - 1$ ein *Quadratum* wäre, eben dieselbe *Formul nullo prorsus casu* ein *Quadratum* seyn könnte. Ich zog aber diesen Satz, worinn die *Application* bestund in Zweifel, *quod omnes casus, quibus unquam formula* $4mn - m - 1$ *quadratum fieri queat, ideo in hac forma* $m = 4v - 1$ *contineantur.* Die Unrichtigkeit dieser *Application* kan durch folgendes *Exempe*l am deutlichsten eingesehen werden. *Si demonstrari posset, nullum numerum imparem esse quadratum, simul demonstratum foret, nullum prorsus numerum esse quadratum*; diese *Propositio hypothetica* hat ihre völlige Richtigkeit, daraus aber folget diese keineswegs: *Ergo si uni dantur numeri quadrati, ii omnes numeri erunt impares.*

Die Art nach welcher Ewr. Wohlgeb. den schönen Satz[3] betreffend den *Valorem Expressionis*

$$\frac{\pi^2}{6n\,(n-1)} + \frac{1}{n\,(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{n^2\,(n-1)^2},$$

casu $n = 1$, herausgebracht, ist sehr merkwürdig. Man kan auf eine ähnliche Art viel andere dergleichen schöne Sätze herausbringen. Als da

$$\frac{1}{m\,(m-a)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right)$$

so wird seyn[4]

$$\begin{array}{ll}
B\ldots & \frac{1}{2\cdot 1^2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{4\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 4^2}+\ \mathit{etc.} = \frac{\pi^2}{1\cdot 6}-\frac{1}{1^2}\,(1)\\
C\ldots & \frac{1}{3\cdot 1^2}+\frac{1}{4\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 3^2}+\frac{1}{6\cdot 4^2}+\ \mathit{etc.} = \frac{\pi^2}{2\cdot 6}-\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\\
D\ldots & \frac{1}{4\cdot 1^2}+\frac{1}{5\cdot 2^2}+\frac{1}{6\cdot 3^2}+\frac{1}{7\cdot 4^2}+\ \mathit{etc.} = \frac{\pi^2}{3\cdot 6}-\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\
& \qquad\qquad \mathit{etc.}
\end{array}$$

Erit ergo generaliter

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n\cdot 1^2}+\frac{1}{(n+1)\,2^2}+\frac{1}{(n+2)\,3^2}+\frac{1}{(n+3)\,4^2}+\textit{etc.}\\ =\;&\frac{\pi^2}{(n-1)\,6}-\frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)\\ =\;&\frac{\pi^2}{(n-1)\,6}-\frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n\,(n-1)^2}. \end{aligned}$$

Dahero muß dieser *Expressionis valor casu quo* $n = 1$ die *summam hujus seriei* geben $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+$ *etc.*

Ob diejenige *Division*, wodurch ich einen *numerum in infinitum excurrentem non circulantem* erhalten,[5] in der That einigen Nutzen haben könne, will ich nicht bestimmen; ich dachte aber wann man auf eine solche Art diese Zahlen 3, 141 592 65 *etc.* herausbringen könnte, die *Quadratura Circuli* für völlig gefunden gehalten werden könnte. Ewr. Wohlgeb. Art *numeros non circulantes* zu *formi*ren war mir noch sehr wohl bekannt; es ist aber meines Erachtens dienlich viel dergleichen Arten zu bemerken, um etwan mit der Zeit eine solche zu entdecken, wodurch die *Quadratura Circuli* ausgedrückt werden könnte. Es findet sich aber in Ewr. Wohlgeb. Art noch eine gewisse Ordnung, dergleichen in den Zahlen 3, 141 59 *etc.* allem Ansehen nach nicht statt findet. Daß alle *Numeri rationales in fractiones decimales circulantes* (das *elementum initiale* ausgenommen) *resolvi*rt werden, ist eine *proprietas essentialis numerorum rationalium*; und es ist leicht zu sehen, daß das *Elementum circulans fractionis decimalis ex hac fractione* $\frac{a}{b+1}$ *ortae* niemalen mehr als b *figur*en enthalte; dann wann man würkl[ich] *dividi*ret, so können nicht mehr als b^{erley} *residua* überbleiben; so offt man aber gleiche *Residua* bekommt, so offt *circuli*rt der *Quotus*.

Die *Expressio summatrix*, welche Ewr. Wohlgeb. für diese *seriem*

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2\,y^{-1}-1}$$

geben,[6] kan in vielen Fällen sehr nutzlich seyn. Es können aber immer aus *Factoribus per differentiationem series summabiles* gefunden werden. Die von Ewr. Wohlgeb. gefundene *summ* bringe ich solcher gestalt heraus.

$$\textit{Cum sit } \left(y^{-1}-1\right)\left(3^2y^{-1}-1\right)\left(5^2y^{-1}-1\right)\cdots\left((2n-1)^2\,y^{-1}-1\right)=Y \textit{ erit}$$

$$\begin{aligned} \ell Y &= \ell\left(y^{-1}-1\right)+\ell\left(3^2y^{-1}-1\right)+\ell\left(5^2y^{-1}-1\right)+\ldots+\ell\left((2n-1)^2\,y^{-1}-1\right)\\ &= \ell\,(1-y)+\ell\left(3^2-y\right)+\ell\left(5^2-y\right)+\ldots+\ell\left((2n-1)^2-y\right)-n\,\ell\,y; \end{aligned}$$

sumantur differentialia, eritque

$$\frac{dY}{Y}=\frac{P\,dy}{Y}=-\frac{dy}{1-y}-\frac{dy}{3^2-y}-\frac{dy}{5^2-y}+\ldots-\frac{dy}{(2n-1)^2-y}-\frac{n\,dy}{y}.$$

Multiplicetur per $-\dfrac{y}{dy}$ *erit*

$$-\frac{P\,y}{Y}-n=\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2\,y^{-1}-1}\;\ldots=A.$$

Um aber auf diese Art einen *numerum terminorum finitum* zu *summi*ren, so deucht mir, daß die *additio actualis* nicht schwehrer seyn würde, als die *Execution* dieser *Methode*. Wollte man aber diese *seriem in infinitum excurrentem summi*ren, so würde man auf diese Art um so viel weniger gewinnen, da man die *summam hujus seriei A* alsdann *absolute* anzeigen kan. Denn man suche einen *angulum* $\underline{\alpha}$, *qui sit ad angulum rectum ut* $\surd y$ *ad* 1; *sit porro radius ad tangentem hujus anguli* $\underline{\alpha}$ *ut* 1 *ad* θ; *dico fore*

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\textit{etc. in infin[itum]}=\frac{\theta\pi\surd y}{4},$$

tenente π *valorem consuetum* $3{,}141\,592\,65$ *etc.* Ich kan auch die *summam hujus seriei* angeben

$$\frac{1}{y^{-1}+1}+\frac{1}{3^2y^{-1}+1}+\frac{1}{5^2y^{-1}+1}+\textit{ etc. [in] inf[initum]}=P.$$

Sit enim $\mathrm{e}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+$ *etc. ac ponatur* $\mathrm{e}^{\pi\surd y}=\theta$ *seu sit* $\log.\theta=\pi\surd y$; *eritque summa quaesita* $P=\dfrac{\theta-1}{\theta+1}\cdot\dfrac{\pi\surd y}{4}$. *Est vero quoque*

$$\theta=1+\frac{\pi\surd y}{1}+\frac{\pi^2y}{1\cdot 2}+\frac{\pi^3y\surd y}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\pi^4y^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\textit{etc.}$$

Vel ponatur $\frac{1}{4}\pi\pi y=n$, *erit sequenti modo*

$$2P=\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{3+\cfrac{n}{5+\cfrac{n}{7+\cfrac{n}{9+\cfrac{n}{11+\textit{etc.}}}}}}}.$$

Diese *Expression* ist eine *fractio continua*, von welcher *Materi*e etliche *Dissertation*en im *Academi*schen *Archiv* ligen, um deren *Copi*e ich letstens angehalten, weilen ich das meiste vergessen, und bey mir nirgend angemerkt finde.[7]

Was für *quadrat* Zahlen in dieser *Expression* $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ nicht enthalten sind ist schwehr zu sagen,[8] indem diejenigen *Quadrata*, welche darinn enthalten sind nicht anders als durch unendlich viel *formul*n ausgedruckt werden können. Für das erste habe ich gleich gesehen, daß alle *Biquadrata* in dieser *Formul* enthalten sind. Hernach kan ich unendlich viel *series numerorum* geben, deren *Quadrata* in dieser *Expression* $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ enthalten sind: Nehmlich alle *Quadrat* Zahlen, welche in nachfolgenden *Formulis* enthalten sind, werden zugleich in obiger *expression* begriffen: $(5p\pm 1)^2$; $(13p\pm 4)^2$; $(17p\pm 2)^2$; $(29p\pm 6)^2$; $(37p\pm 3)^2$; $(41p\pm 16)^2$; $(53p\pm 15)^2$; $(61p\pm 25)^2$; $(73p\pm 23)^2$; $(89p\pm 17)^2$; $(97p\pm 11)^2$; $(101p\pm 5)^2$; $(109p\pm 38)^2$; $(113p\pm 49)^2$; $(137p\pm 50)^2$; $(149p\pm 22)^2$; $(157p\pm 14)^2$; $(173p\pm 40)^2$; $(181p\pm 81)^2$; $(193p\pm 56)^2$; $(197p\pm 7)^2$; $(229p\pm 61)^2$ *etc.*[9]

Diejenigen *Quadrata* aber, welche in keiner von diesen *Formul*n enthalten sind, sind allein diejenigen, welche Ewr. Wohlgeb. *Expression* nicht in sich begreifft. Es käme allso darauf an, wie man auf leichte Art alle diejenige Zahlen finden solle, welche in keiner der obigen *Formul*n begriffen sind, und da würde man freylich das *Problema de inveniendo numero primo, dato majore* leicht *solvi*ren können: Dann wann man setzt $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1=aa$ so wird $4m=-4n+3+\dfrac{4aa+1}{4n+1}$; wann allso $4aa+1$ ein *numerus primus* ist, so kan das *Quadratum aa* nicht in jener *Expression* enthalten seyn, und hinwiedrum [sind] alle *quadrata aa* welche nicht in $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ enthalten sind, von dieser Beschaffenheit, daß $4aa+1$ ein *numerus primus* ist. Da nun $4b^4+1$ nimmer ein *numerus primus* ist sondern allzeit zwey oder mehr *divisores formae* $4n+1$ hat, so sind auch alle *numeri biquadrati* in Ewr. Wohlgeb. *Expression* enthalten. Ich erinnere mich daß ich einmal eine *Tabelle* gemacht von allen Zahlen biß auf 1000, deren *Quadrata unitate aucta numeri primi* sind, wovon der H. *Prof. Krafft* Ewr. Wohlgb. eine Abschrifft gemacht.[10] Dieselbe *Tabelle* habe ich fast aus einem gleichen Grund verfertiget, als Ewr. Wohlgeb. bey Dero *Formul* ohne Zweifel vor Augen gehabt haben.

Wann $4n+1$ ein *numerus primus* ist, so ist derselbe immer eine *summa duorum quadratorum*, *idque unico modo*; es gibt aber allzeit unendlich viel *quadrata quae unitate aucta sint per* $4n+1$ *divisibilia.* Alle diese *Quadrata* können nun leicht in einer *Formula generali exprimi*rt werden folgender gestalt:[11] *sit* $4n+1=r^2+s^2$, *erunt utique* $\underline{r}$ *et* $\underline{s}$ *numeri inter se primi; formetur fractio* $\dfrac{r}{s}$ *et quaeratur in minoribus numeris fractio proxime accedens* $\dfrac{p}{q}$, *ita ut* $ps-qr$ *sit* ± 1 (der Bruch $\dfrac{p}{q}$ kan aber durch eine von mir gegebene *Methode* allzeit leicht gefunden werden). *Tum ponatur* $pr+qs=k$, *atque dico omnes numeros, quorum quadrata unitate aucta sint per* $4n+1$ *divisibilia, contineri in hac forma* $(4n+1)\,m\pm k$. *Sic*

1. *Omnes numeri quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per* 5 *continentur in formula* $5m\pm 2$
2. *Si sit* $aa+1$ *divisibile per* 13 *erit* $a=13m\pm 5$
3. *Si sit* $aa+1$ *divisibile per* 17 *erit* $a=17m\pm 4$
4. *Si sit* $aa+1$ *divisibile per* 29 *erit* $a=29m\pm 12$

etc.

Ex[emplum]. Quaerantur omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sint divisibilia per numerum primum 1381. *Cum sit* $1381 = 15^2 + 34^2$ *quaeratur fractio* $\frac{p}{q}$ *tam prope accedens ad* $\frac{15}{34}$ *ut differentiae numerator fiat* $= 1$. *Ad hoc cum duobus numeris* 15 *et* 34 *instituatur operatio, qua maximus communis divisor quaeri solet; hoc modo*

$$\begin{array}{rrrrrr}
15) & 34 & (2 & & & \\
 & \underline{30} & & & & \\
 & 4) & 15 & (3 & & \\
 & & \underline{12} & & & \\
 & & 3) & 4 & (1 & \\
 & & & \underline{3} & & \\
 & & & 1) & 3 & (3 \\
 & & & & \underline{3} & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Ex quotis 2, 3, 1, 3, *formetur sequens fractionum series*

$$\begin{array}{ccccc}
2, & 3, & 1, & 3 & \\
\frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{7}, & \frac{4}{9}, & \frac{15}{34}
\end{array}$$

incipiendo ab $\frac{0}{1}$*; hac lege ut quisque numerator per indicem suprascriptum multiplicatus cum numeratore praecedente praebeat numeratorem sequentem, similique modo denominator quisque per indicem suprascriptum multiplicatus cum praecedente denominatore praebeat denominatorem sequentem. Hoc modo ultima fractio* $\frac{15}{34}$ *semper erit ipsa proposita, penultima vero erit ea proxime accedens* $\frac{p}{q}$, *quam quaero. Jam ergo erit* $k = 4\cdot 15 + 9\cdot 34 = 366$, *unde omnes numeri, quorum quadrata unitate aucta sunt per* 1381 *divisibilia, continentur in hac forma* $1381m \pm 366$.

Ewr. Wohlgeb. *Summatio*[12] *seriei*

$$\frac{1}{a} + \ldots + \frac{1}{A} + \frac{1}{A\,(A-1)+1}$$

ist so merkwürdig, daß ich anfänglich darüber erstaunet bin in dem diese *Series* so stark *convergir*t, und die grösten *Exponentes ipsius* $\underline{a}$ in den *Denominatoribus* nach der *progressione geometrica dupla* aufsteigen, dergleichen *Series summabiles* sehr *rar* sind. Ich habe aber nach einigem Nachsinnen bald diese *Demonstration* gefunden.

$$\begin{array}{llll}
\textit{Sit} & \dfrac{1}{a-1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b-1} & \textit{erit} & b = a\,(a-1)+1 \\
\textit{porro} & \dfrac{1}{b-1} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c-1} & \textit{erit} & c = b\,(b-1)+1 \\
 & \dfrac{1}{c-1} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d-1} & \textit{erit} & d = c\,(c-1)+1 \\
 & & \textit{etc.} &
\end{array}$$

Ergo fiet $\dfrac{1}{a-1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + etc.$ welches Ewr. Wohlgeb. *Series* ist.

Der H. *Hedlinger*[13] ist wieder nach der Schweitz zurük gereiset, nachdem er sich 10 Monath allhier aufgehalten ohne etwas zu arbeiten; die Ursach ist, weilen man ihn selbst hat *engagir*en wollen, und da er solches *refusirt*, auch nichts von seiner Arbeit verlangt. Man hat allso noch keine andere *Medaille*n von Ihro *Majestät*, als welche nicht dörfen aufgewiesen werden.

Vor einiger Zeit ist allhier der H. *Rasumoffski* nebst dem H. *Adjuncto Teploff* hier angekommen; Sie wohnen in meinem Hause, und gedenken einige Zeit bey uns zu bleiben.[14]

Ewr. Wohlgeb. lässt sich meine gantze *Famille* gehorsamst empfehlen, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonhard Euler

Berlin den 9ten *Jul.* 1743.

Auf der letsten Leipziger Meß ist das *Dictionnaire de Trevoux* noch nicht fertig gewesen, indem der Verleger H. *Christ* zu Basel gestorben.[15] Der H. *Prof. Strube*[16] lässt auch seine gehorsamste Empfehlung machen.

Einige *numeri primi*[17] so grösser sind als 1 000 000, welche ich durch obige *Methode* leicht gefunden, sind: 1 008 017; 1 020 101; 1 073 297; 1 110 917; 1 123 601; 1 136 357; 1 144 901; 1 196 837; 1 201 217; *hi enim numeri sunt formae* $aa+1$, *neque ullum habent divisorem primum formae* $4n+1$.

Catalogus numerorum <u>a</u>
ex quibus fit $4aa+1$ numerus primus.[18]

1; 2; 3; 5; 7; 8; 10; 12; 13; 18; 20; 27; 28; 33; 37; 42; 45; 47; 55; 58; 60; 62; 63; 65; 67; 73; 75; 78; 80; 85; 88; 90; 92; 102; 103; 105; 112; 115; 118; 120; 125; 128; 130; 132; 135; 140; 142; 150; 153; 157; 163; 170; 175; 192; 193; 198; 200; 203; 210; 215; 218; 220; 222; 232; 233; 235; 237; 245; 248; 268; 272; 278; 285; 288; 292; 297; 317; 318; 322; 323; 327; 337; 340; 343; 345; 348; 350; 352; 357; 358; 370; 375; 380; 382;

390; 392; 408; 413; 422; 430; 432; 445; 453; 455; 460; 465; 468; 473; 475; 480; 483; 493; 502; 505; 518; 527; 530; 533; 535; 547; 548;

Sollte in diesen Zahlen eine *Series regularis* enthalten seyn, so wäre das *Problema de inveniendo numero primo datum numerum excedente* leicht *solvir*t; es kommt mir aber diese *series* eben so *confus* vor als die *series numerorum primorum ipsa.*

R 784 Reply to nº 69
Berlin, July 9th, 1743
Original, 5 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 66–67v, 69–70v, 68r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 237–245; *Euler-Goldbach* (1965), p. 168–173

71
Goldbach to Euler
Petersburg, July (19th) 30th, 1743

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Nachfolgende *demonstration*[1] habe ich zu dem Ende in unterschiedene kleine *propositiones* abgetheilet, damit E. Hochedelgeb. die jenige bey welcher Sie einigen Anstand finden möchten, desto bequemer anzeigen könnten.

1. In aequatione $4mn - m - 1 = a^2$ *pono* a^2 *quadratum integrum minimum omnium eorum quae aequationi satisfacere possunt (si quae possunt).*

2. Utrique aequationis parti addo $-4ma + 4m^2$, *fiet* $4m(n - a + m) - m - 1 = (a - 2m)^2$.

3. In hac aequatione non potest fieri $a = m$ (*posset enim altera pars aequationis dividi per* m, *altera non posset*).

4. Neque potest fieri $a > m$, *esset enim* $n - a + m < n$ *adeoque* $(a - 2m)^2 < a^2$, *quod est contra hypothesin, cum* a^2 *sit omnium possibilium minimum.*

5. Restat ergo ut sit $a < m$.[2]

6. Similiter si ad aequationem $4mn - m - 1 = a^2$ *ex utraque parte addatur* $-4an + 4n^2$, *fiet* $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$.

7. In hac aequatione non potest fieri $a = n$, *propterea quod foret* $4mn - m - 1 = n^2$ *seu* $n = 2m + \sqrt{4m^2 - m - 1}$ *qui numerus nequit esse rationalis.*

8. Sed nec potest fieri $a > n$, *quia* $(m - a + n)$ *fieret* $< m$ *et* $(a - 2n)^2 < a^2$ *quod est contra hypothesin.*

9. Restat igitur ut a *sit* $< n$, *et quia iam supra prop*[*ositione*] *5 ostensum est* $a < m$, *sequitur* $a^2 < mn$.

10. Erit igitur $4mn - m - 1 < mn$, *quod est absurdum.*

11. Ergo inter omnia quadrata (si quae sunt) huius formae $4mn - m - 1$ *non datur minimum in integris; ergo datur nullum.*[3]

Was die von Ew. Hochedelg. angeführte *aequation*

$$\frac{1}{m\,(m-a)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right)$$

für eine *influence* in die *series* B, C, D, *&c.* habe, sehe ich noch nicht.[4]

Mir ist es wahrscheinlich, daß eine solche *series*:

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \&c. = \pi$$

gefunden werden könne, darin die *numeratores* a, b, c, *&c.* (entweder *integri* oder *fracti*) allezeit grösser werden, ob gleich die *methode* selbige *numeratores* zu *determini*ren vieleicht niemahls bekannt werden wird, denn durch *formulas algebraicas* diese *numeratores* zu bestimmen ist in so fern eine vergebliche Mühe, als man *persuadi*ret seyn kan, daß die *ratio diametri ad periph*[*eriam*] nicht *in numeris rationalibus* bestehet, doch giebt es einige merckwürdige *approximationes.* Es ist zum Exempel eine sehr leichte *progressio numerorum secundum hanc formulam* $\dfrac{2x^2-4x+12}{10^x}$ und wann ich 7 solcher *terminorum* zu 2 *addi*re, so wird die *summa* $3,141\,592\,2$.[5]

Ew. Hochedelg. dancke ich dienstl[ich] für die *communication* der Zahlen a, welche $4a^2+1$ *numerum primum* geben; den Aufsatz von dergl[eichen] Zahlen biß 1000 habe ich zwar schon, ich weiß aber denselben jetzo unter meinen andern Schrifften nicht hervor zu finden.[6] Daß aus solchen Zahlen eine ordentliche *series* herauß gebracht werden solte zweiffele ich sehr. Es haben aber nicht allein alle *quadrati* a^2, welche in der *formula* $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ nicht vorkommen,[7] diese Eigenschafft, daß sie in $4a^2+1$ einen *numerum primum* geben, sondern alle *trigonales in illa formula non extantes* geben gleichfalls $4\triangle+1$ *numerum primum*, und die formul $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ kommt dermassen mit dieser $4MN+M+N$ überein,[8] daß kein *casus* in der einen ist, welcher nicht in der andern *assignabilis* wäre (wie denn auch alle *casus* $4n^2+2\,(2m-3)\,n-(m-1)$ in dieser Formul $4MN-M-N$, *et contra*, enthalten sind); wann man also nach der Formul $4MN+M+N$ folgende Tabelle formiren wolte:[9]

6,	11,	16,	21,	26,	31,	36,	41	...
	11,	20,	29,	38,	47,	56,	65	...
		16,	29,	42,	55,	68,	81	...
			21,	38,	55,	72,	89	...
				26,	47,	68,	89	...
					31,	56,	81	...
						36,	65	...
							41	...

so könnte man festsetzen daß alle in dieser Tabelle nicht enthaltene sowohl *trigonales* als *quadrati per* 4 *multiplicati addita unitate numeri primi* sind.

Ich erinnere mich in den *Götting*[*ischen*] *Gel*[*ehrten*] *Zeitungen* gelesen zu haben, daß wann $4m + 1$ ein *numerus primus* ist, selbiger allezeit eine *summa duorum quadratorum* sey, welche *observation* ohne Zweiffel von Ew. H. kommt,[10] und mir schon vorher bekannt war; gleichwie aber auf diese Weise in den *numeris primis huius formae* $4m + 1$ allezeit wird[11] $m = a^2 + b^2 \dotplus b$, *hoc est* <u>*duplo trigonali + quadrato*</u>, so halte ich davor daß in den *numeris primis* $4m - 1$ allezeit seyn wird $m = 2\,(a-1)^2 + \dfrac{b^2 - b}{2}$, *hoc est* <u>*duplo quadrato + trigonali*</u>.[12] *Sit ex*[*empli*] *grat*[*ia*] $m = 1$, *erit* $a = b = 1$; $m = 2$, *erit* $a = 2$, $b = 1$; $m = 3$, *erit* $a = b = 2$, *&c.*

Als ich vor einigen Wochen in einem Buche schon *A*[*nno*] 1718 von mir *noti*ret fand

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \&c. = 1$$

nebst der *lege denominatorum* $2 + 1 = 3$; $2 \cdot 3 + 1 = 7$; $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$; $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807$ *&c.*, schrieb ich gleich dabey: *si terminus primus fuerit* $\dfrac{1}{a}$, *lex progressionis ut dato termino quocunque* $\dfrac{1}{A}$ *fiat terminus sequens* $\dfrac{1}{A\,(A-1)+1}$, *erit summa seriei* $\dfrac{1}{a-1}$; ich erinnere mich aber nicht mehr worin meine *demonstration* bestanden und dancke Eurer HochEdelg. desfalls um soviel mehr daß Sie mir die ihrige *communici*ren wollen, welche gantz *evident* ist. Sonst halte ich auch bey dieser *serie* die leichte Art *dato termino quocunque* die *summam ipsius seriei usque ad hunc terminum* zu finden, für merckwürdig. *Sit terminus quicunque datus* $\dfrac{1}{A}$, *erit summa eiusdem et omnium sequentium terminorum* $= \dfrac{1}{A-1}$, *summa vero ipsius seriei usque ad hunc terminum* $\dfrac{1}{A}$ *exclusive erit* $\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{A-1}$.[13]

Daß sich H. *Prof. Strube* meiner noch erinnert erkenne ich mit schuldigstem Danck, und wünschete dem selben allhie worinnen nützlich zu seyn. Daß H. Hedlinger bey seiner langen Anwesenheit in Berlin nicht etwas, so wie in andern *Residentz*en von ihm geschehen, *proprio motu* verfertiget, ist zu bedauren. Den Auszug von des Hn *D*[*octor*] *Kuhn*en *pièce sur l'origine des Fontaines* werden Ew. HochE. vermuthlich schon in den *Act*[*is*] *Erud*[*itorum*] gesehen haben, allwo selbige, wie ich aus den *Zeitungen von Gel*[*ehrten*] *Sachen* vernommen, *recensi*ret ist.[14] Sollten E. H. bey Gelegenheit die Mühe nehmen wollen durch einen Dero guten Freunde in Dantzig vernehmen zu lassen ob der dortige H. *Doctor Joh*[*ann*] *Adam Kulmus* das *artificium steganographicum* davon er in den Breßlauischen Natur- und *Medicin* Geschichten *A*[*nno*] 1724 zwey *specimina* herausgegeben, bekannt gemacht, oder auch nur den verborgenen Inhalt selbiger zwey Brieffe entdecket hat,[15] würden Sie mich dadurch sehr *obligi*ren. Ich erinnere mich daß wir ehemahls in der neuesten *edition* des *Diction*[*aire*] *de Richelet* die Worte *discernement*, *disciple &c.* nicht finden können[16] und dieselben gar ausgelassen zu seyn vermeinet, sie stehen aber würcklich darin unter den Titeln *dicernement*, *diciple &c.*, worin ich den *editorem* nicht *imiti*ren wollte. Daß H. *Rasumowski* und H. *Teplew* bey E. H. *logi*ren und sich noch eine Zeit lang in Berlin aufhalten werden,[17] ist mir sehr lieb; E. H. werden hiedurch nicht allein Gelegenheit haben die Russische Sprache ferner zu *excoli*ren, sondern auch die hiesigen *nova Academica* von denselben recht frisch erhalten können. Ihr Hauß wird vermuthlich in der gegend liegen wo vormahls *M.*r *Dangicourt Membre de la Societé des Sciences* gewohnet, welchen ich *A*[*nno*] 1718 daselbst gesprochen habe.[18] Für die *attention* wegen des *Diction*[*aire*] *de Trevoux*[19] statte ich schuldigsten Danck ab und bitte mir davon zu gelegener Zeit nähere Nachricht aus. Ubrigens verbleibe nechst schuldigster Empfehlung an Dero Frau Liebste und sämmtliche *Familie*

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

*S.*t *Petersbourg*
den 30. *Julii st. n.* 1743.

R 785 Reply to nº 70
Petersburg, July (19th) 30th, 1743
Original, 4 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 72–75v
Partial copy, 8 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 12r–15v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 246–250; *Euler-Goldbach* (1965), p. 174–176

72
Euler to Goldbach
Berlin, August 24th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Wann $4mn - m - 1$ in einem Fall ein *Quadratum* wäre, so würde man gleich unendlich viel andere *Casus* daraus finden können. Wann nun Ewr. Wohlgeb. annehmen,[1] daß $\underline{aa}$ das kleinste *Quadratum* sey, welches *in formula* $4mn - m - 1$ enthalten ist, so muß nothwendig $\underline{a}$ kleiner seyn als $\underline{m}$, und daher haben die 5 ersten *Propositiones* ihre völlige Richtigkeit. Wann aber Ewr. Wohlgeb. ferner zu dieser *Aequation* fortgehen $4n(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2$; weilen dieselbe nicht in der vorgelegten *Form* $4mn - m - 1$ enthalten ist, so folgt auch nicht daß $(a - 2n)^2$ kleiner seyn müsse als a^2; dann $4mn - m - 1$ könnte das kleinste mögliche *Quadratum* geben, ungeacht $4n(m - a + n) - m - 1$ einem noch kleinern *Quadrato* gleich wäre, und allso kommt mir die 8te *Proposition* verdächtig vor, weilen *non obstante hypothesi aa* grösser seyn kan als $(a - 2n)^2$.

Bey diesem *Tentamine* fällt mir ein, ob man dieses *Theorema* nicht etwan auf eine gleiche Art *demonstri*ren könnte wie man zu erweisen pflegt, daß $a^4 + b^4$

oder $a^4 - b^4$ kein *quadratum* seyn könne. Man nimmt nehmlich an *dari casum quo* $a^4 + b^4$ *sit numerus quadratus puta* $= mm$, und leitet daher einen andern $c^4 + d^4 = nn$ dergestalt daß $n < m$. Auf diese Weise zeigt man, daß wann ein *quadratum quantumvis magnum mm* eine *summa duorum biquadratorum* wäre, man daraus sogleich ein kleineres, nn, und daher ferner ein kleineres und so fort finden könnte:[2] man nimmt aber als ein *Postulatum* an, daß *in numeris parvis* kein *casus satisfaciens* begriffen sey. Weil nun ebenfalls gewiß ist, daß *in numeris parvis* $4mn - m - 1$ kein *Quadrat* seyn könne, so würde die *Demonstration* auf folgende Art vollkommen richtig seyn:

I. *Ponamus dari quadratum aa qui in forma* $4mn - m - 1$ *contineatur.*

II. *Inde inveniri posset alius quadratus bb minor quam aa qui pariter in forma* $4mn - m - 1$ *esset contentus.*

III. *Continuo ergo ad numeros quadratos minores perveniretur, quod foret absurdum.*

Die gantze *Demonstration* würde allso auf dem II. Satz ankommen, *an concesso quadrato* $\underline{aa}$ *aliud minus* $\underline{bb}$ *ex eo inveniri possit, quod in forma* $4mn - m - 1$ *contineatur.*

Ewr. Wohlgeb. bin für die *Communication* Dero *Idée* über die *seriem* $\frac{a}{1} + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + etc.$ sehr verbunden, dann auf solche Art werden öfters grosse und beschwehrliche Zahlen leicht ausgedrückt werden können. Um diese Zahl 1, 141 592 durch 7 *Terminos* zu bekommen, brauchen Ewr. Wohlgb. diesen *Terminum generalem* $\frac{2xx - 4x + 12}{10^x}$; ich glaube aber Dieselben haben sich verschrieben, indem 7 *Termini hujus seriei* nicht mehr geben als 1, 141 288 2; die verlangte Zahl kommt aber heraus wann man diesen *Terminum generalem* $\frac{10 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x^3}{10^x}$ annimmt.[3]

Ich habe neulich eine *expressionem indefinitam* gefunden, wodurch der *valor ipsius* π ausgedrückt wird. *In circulo cujus radius* $= 1$, *capiatur arcus quicunque* $\underline{u}$, *cujus cosinus* $= \underline{a}$, *et sinus* $= \alpha$, *sit autem sinus arcus* $2u = \beta$, $\sin\, 3u = \gamma$, $\sin\, 4u = \delta$, $\sin\, 5u = \varepsilon$, *etc.; his positis dico fore*

$$\frac{\pi}{2} = u + a\alpha + \frac{1}{2}a^2\beta + \frac{1}{3}a^3\gamma + \frac{1}{4}a^4\delta + \frac{1}{5}a^5\varepsilon + etc.;$$

setzt man $u = \frac{\pi}{4}$ *ob* $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ *etc.* findet man folgende *seriem*

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{1}{6\cdot 2^3} - \frac{1}{7\cdot 2^4} + \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{1}{10\cdot 2^5} + \frac{1}{11\cdot 2^6} - etc.$$

welche ziemlich stark *convergirt*.[4]

Diese *Aequation* $\dfrac{1}{m\,(m-a)^2} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{(m-a)^2} - \dfrac{1}{aa}\left(\dfrac{1}{m-a} - \dfrac{1}{m}\right)$ hatte ich wo ich nicht irre zu diesem Ende angeführet,[5] um die *summam hujus seriei*

$$\frac{1}{(a+1)\,1^2} + \frac{1}{(a+2)\,2^2} + \frac{1}{(a+3)\,3^2} + \frac{1}{(a+4)\,4^2} + etc.$$

desto leichter zu finden, dann im 1^{sten} *termino* ist $m = a+1$, im 2^{ten}, $m = a+2$, im 3^{ten} ist $m = a+3$, und so fort, dahero diese *series* sogleich in diese *resolvir*t wird

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + etc. \quad \ldots\right) = \frac{\pi^2}{6a}$$

$$-\frac{1}{aa}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{a+3} + etc.\right) = -\frac{1}{aa}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{a}\right),$$

welche *summas* Ewr. Wohlgeb. in Dero letsten Schreiben allem Ansehen nach auf eine andere Art gefunden haben.

Daß alle *numeri quadrati aa* welche in dieser *Formul* $4nn + 2\,(2m-1)\,n + m - 1$ oder in dieser $4MN + M + N$ (welche mit jener übereinkommt *ponendo* $N = n$ *et* $M = n + m - 1$) nicht enthalten sind, einen *numerum primum* für $4aa + 1$ geben ist klar; dann wann $aa = 4n^2 + 2\,(2m-1)\,n + m - 1 = 4MN + M + N$, so wird

$$4aa + 1 = (4n + 4m - 3)\,(4n + 1) = (4M + 1)\,(4N + 1)\,,$$

und hat folglich *Factores*;[6] wann allso $4aa+1$ ein *numerus primus* ist, so kan aa in obgedachten *Formulis* nicht enthalten seyn. Ich zweifle aber sehr ob durch solche *Formulas exclusivas* jemals etwas herausgebracht werden wird, indem darinn die gantze Kenntnüß, welche wir von den *numeris primis* haben gegründet ist; dann auf gleiche Art kan man sagen, daß alle *numeri* welche nicht in dieser *Formul* $mn + m + n + 1$ enthalten sind, *numeri primi* seyen.

Ich zweifle auch sehr ob die *Valores* von $\underline{m}$, wann $4m - 1$ ein *numerus primus* ist, eine solche gewisse Eigenschaft haben, dergleichen statt findet wann $4m+1$ ein *numerus primus* ist. Dann daß $\underline{m}$ nicht immer sey ein *duplum quadratum* + *numero trigonali*, wann $4m-1$ ein *numerus primus* ist, erhellet aus dem *casu* $4m-1 = 79$; dann hier wird $m = 20$, welche Zahl die vermuthete Eigenschafft nicht hat.[7]

Der H. *Doctor Kühn* hat die Güte gehabt mir seine *Dissertation sur l'origine des Fontaines* zuzuschicken, welche ich mit *attention* gelesen, und verschiedene *dubia* darüber angemerkt, so ich Ihm zugeschickt.[8] Um seine wunderliche Meinung von der so sehr *irregulair*en *Figur* der Erde zu behaupten, so läugnet er die gewissesten *Experimenta*, als über die Verschiedenheit der Länge eines *Penduli*, welches *secund*en weiset, da er doch im gegentheil seine Meinungen auf die ungewissesten Muthmassungen gründet. Weil er von mir verlangt hat, daß ich ihm meine Gedanken darüber aufrichtig entdecken möchte, so habe ich solches jedoch mit aller Höfflichkeit gethan; es scheinet aber, daß so wohl der Herr Bürger Meister als der H. Kühn damit nicht wohl zu frieden gewesen, weilen ich darauf schon seit langer Zeit keine Antwort erhalten. Hiedurch ist allso meine *Correspondenz* nach Dantzig unterbrochen worden, weswegen ich mich nicht im Stande befinde, Ewr. Wohlgeb. Begehren, betreffend die *steganographi*sche *Piece* des H. *Dr. Kulmus* ein Genügen zu leisten.[9] Des H. *Rasumoffski* Vorsatz allhier in meinem Hause zu verbleiben, ist von Hofe auf eine überaus gnädige Art *approbir*t worden, und schreibe ich deswegen mit der heutigen *Post* an des H. Ober-Jäger Meisters *Excellenz*.[10] Der H. *Nartoff* hat mir die *Pension*, welche mir von der *Academie accordir*t, und von der *Commission* aufs nachdrücklichste *confirmir*t worden, aufgekündet; ein gleiches Schicksaal hat alle ausländische *Pensionnaires* betroffen, worüber der H. *Bernoulli inconsolabel* ist.[11] Weil ich nun auch von meiner *Obligation* gegen die *Academi*e frey gesprochen bin, so lasse meine *Scientiam navalem* bey *M.*^{r} *Bousquet* in *Lausanne* drucken.[12]

Ewr. Wohlgeb. werden ohne Zweifel schon vernommen haben, daß die neue *Societä*t der Wissenschafften allhier den 1$^{\text{sten}}$ dieses Monaths ihren Anfang genommen, und daß die beyden HH. *Cabinets Ministres* Graf von *Podewils* und von Bork, wie auch der H. *General*Feld*marschall* von Schmettau sich nicht nur zu Mitgliedern erklärt sondern auch den Versammlungen fleissig beywohnen. Wir haben einen *Directorem* und *Vice Directorem* welche alle halbe Jahre abgewechselt, und durch *balloti*ren besetzt werden sollen: für dieses erste halbe Jahr ist der Feld *Marschall* von Schmettau zum *director*en und der *Marquis d'Argens* zu *Vize Directori* erwählt worden. Ihro Königl[iche] *Majestä*t haben zu diesem neuen *Etablissement* 2 Zimmer auf dem Schloß Allergnädigst *accordir*t; weilen aber dieselben noch nicht zugerüstet sind so wurden die zwey ersten *Assemble*en bey dem H. *Directori*, die letsteren 2 aber bey dem H. *Cabinetsministre* von *Bork* gehalten, weilen der H. *General Feldmarschal* nach Achen verreiset. Die Versammlungen werden alle Donnerstage von 4 biß 6 Uhr gehalten, und in der letsten habe ich eine *Piece* vorgelesen.[13] Die Mitglieder sind entweder *honoraires* oder *ordinaires*, jener Zahl erstreckt sich auf 24, dieser aber auf 20; alle Jahre soll ein *Tomus* von den vorgelesenen *Piec*en herauskommen; es werden aber alle *pieces d'eloquence* und *Poesi*en ausgeschlossen. Ihro Königl[iche] *Majestä*t haben allergnädigst *declarir*t diese *Societä*t mit Dero allerhöchsten Gegenwart zu beehren, und *solenniter* zu *confirmi*ren. Vielleicht kan diese Nachricht der *Academi*e in *Petersburg* zur Aufnahme gereichen, als welche zu diesem Ende sogleich an den H. *Prof. Heinsium* überschrieben.[14] H. *Dangicourt*[15] hat auf der Neustadt neben der Neustadtischen Kirche gewohnet, mein Haus ist aber auf der Friedrichsstatt nächst an der Neustadt, wo vor dem der Stattgraben gewesen, und ist erst *A*[*nno*] 1731 diese Gegend bebauet worden. Von neuen Büchern habe ich seit der Zeit gelesen, *Maclaurin*s *Treatise of Fluxions* und *Jacquier*s *Commentarium* über die *Principia philosophiae naturalis*[16] *Neutoni*, welches gewiß zwey fürtreffliche Bücher sind.

Ich habe die Ehre Ewr. Wohlgeb. meiner vollkommensten Hochachtung zu versichern, und zu bleiben

Ewr. Wohlgebohrnen

gehorsamster Diener

Leonh. Euler

Berlin den 24ten *Aug.*
1743.

R 786 Reply to n° 71
Berlin, August 24th, 1743
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 74–76v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 251–254; *Euler-Goldbach* (1965), p. 177–179

73
Goldbach to Euler
Petersburg, September (17th) 28th, 1743

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Aus Eurer Hochedelgeb. Erinnerung gegen die vorige *demonstration* habe ich die *prop*[*ositionem*] *6. ipsius demonstrationis* allerdings unrichtig befunden, dahero ich dieselbe nebst den darauf folgenden in meinem letzteren Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu *substitui*ren bitte:[1]

6. Ad hanc aequationem $(4n-1)\,m-1=a^2$ *ex utraque parte addatur*

$$-\,2a\,(4n-1)+(4n-1)^2\,,$$

fiet[2]

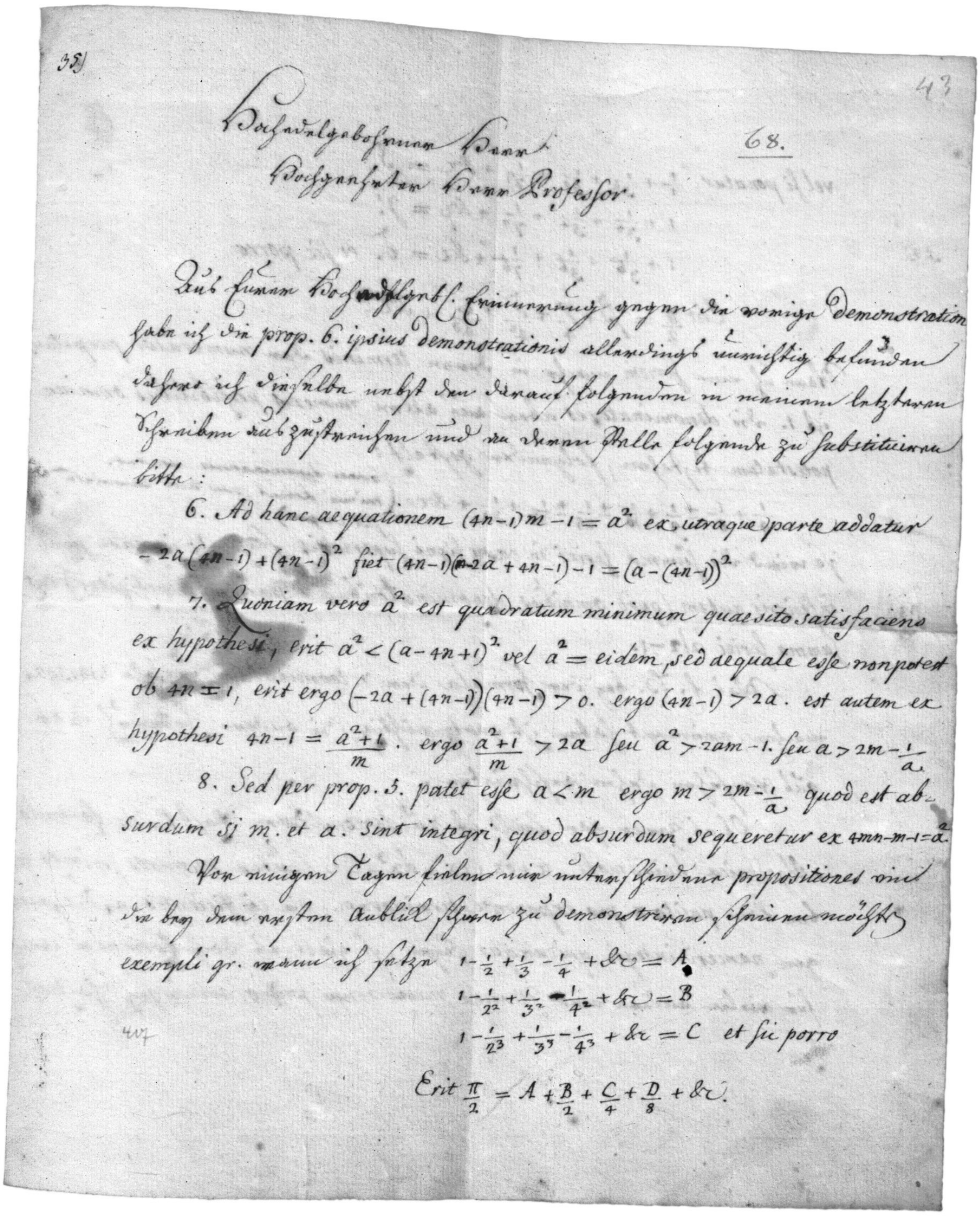
$$(4n-1)\,(m-2a+4n-1)-1=(a-(4n-1))^2\,.$$

7. Quoniam vero a^2 *est quadratum minimum quaesito satisfaciens ex hypothesi, erit* $a^2<(a-4n+1)^2$ *vel* $a^2=$ *eidem, sed aequale esse non potest ob* $4n\neq 1$*, erit ergo* $(-\,2a+(4n-1))\,(4n-1)>0$*, ergo* $(4n-1)>2a$*; est autem ex hypothesi* $4n-1=\dfrac{a^2+1}{m}$*, ergo* $\dfrac{a^2+1}{m}>2a$ *seu* $a^2>2am-1$ *seu* $a>2m-\dfrac{1}{a}$.

8. Sed per prop[*ositionem*] *5 patet esse* $a<m$*, ergo* $m>2m-\dfrac{1}{a}$ *quod est absurdum, si* m *et* a *sint integri, quod absurdum sequeretur ex* $4mn-m-1=a^2$.[3]

Vor einigen Tagen fielen mir unterschiedene *propositiones* ein, die bey dem ersten Anblick schwer zu *demonstri*ren scheinen möchten, *exempli gr*[*atia*] wann ich setze

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\&c. &= A\\ 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\&c. &= B\\ 1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\&c. &= C\end{aligned}$$



35) 43

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Professor.

68.

Auf Eurer Hochedelgeb. Erinnerung gegen die vorige demonstration habe ich die prop. 6. ipsius demonstrationis allerdings unrichtig befunden daher ich dieselbe nebst den daraus folgenden in meinem letzteren Schreiben auszustreichen und an deren Stelle folgende zu substituiren bitte:

6. Ad hanc aequationem $(4n-1)m-1=a^2$ ex utraque parte addatur $-2a(4n-1)+(4n-1)^2$ fiet $(4n-1)(m-2a+4n-1)-1=(a-(4n-1))^2$

7. Quoniam vero a^2 est quadratum minimum quaesito satisfaciens ex hypothesi, erit $a^2<(a-4n+1)^2$ vel $a^2=$ eidem, sed aequale esse non potest ob $4n\neq 1$, erit ergo $(-2a+(4n-1))(4n-1)>0$. ergo $(4n-1)>2a$. est autem ex hypothesi $4n-1=\frac{a^2+1}{m}$. ergo $\frac{a^2+1}{m}>2a$ seu $a^2>2am-1$. seu $a>2m-\frac{1}{a}$

8. Sed per prop. 5. patet esse $a<m$ ergo $m>2m-\frac{1}{a}$ quod est absurdum si m. et a. sint integri, quod absurdum sequeretur ex $4mn-m-1=a^2$.

Vor einigen Tagen fielen mir unterschiedene propositiones ein, die bey dem ersten anblick schwer zu demonstriren scheinen möchten, exempli gr. wenn ich setze

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\&c=A$$
$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\&c=B$$
$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\&c=C \quad \text{et sic porro}$$

407

$$\text{Erit } \frac{\pi}{2}=A+\frac{B}{2}+\frac{C}{4}+\frac{D}{8}+\&c.$$

Goldbach's letter n° 73 to Euler, September (17th) 28th, 1743: reproduction of the first page (PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 76r)

The paragraphs numbered 6–8 complete Goldbach's proof by infinite descent that there are no squares of the form $(4n-1)m-1$. In his reply (cf. n° 74, note 4), Euler will acknowledge his surprised satisfaction at Goldbach's "magnificent" proof.

et sic porro, erit

$$\frac{\pi}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{8} + \&c.$$

vel si ponatur

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \&c. &= \beta \\ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \&c. &= \gamma \\ 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \&c. &= \delta \end{aligned}$$

et sic porro, erit

$$\frac{\pi}{2} = \beta + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{4^2} + \frac{\varepsilon}{4^3} + \&c.^{[4]}.$$

Wann ich eine *seriem* mache in deren *terminis* der *numerator perpetuus* ist 1, die *denominatores* aber aus allen *numeris possibilibus omnium potestatum* bestehen, folgender gestalt:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \&c.,$$

so wird die *summa seriei in casu signi superioris* seyn 1, *in casu signi inferioris autem* (*quod omnibus denominatoribus imparibus praefigitur*) *erit summa seriei* $2\,\ell\,2 - 1$.[5]

Was E. H. bey der *Formula* der 7 terminorum welche 1,141 592 machen, erinnert haben ist gantz richtig, die andere Formul war aus versehen dahin geschrieben.[6]

Ob es zwar gar leicht ist zu *demonstri*ren daß keine *formula Algebraica huiusmodi* $a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$ lauter *numeros primos* geben kan *posita* x *pro exponente terminorum*, die *coëfficientes* a, b, c, *&c.* mögen *numeri integri quicunque* seyn,[7] so giebt es doch *formulas* welche für vielen andern eine Menge *numerorum primorum* in sich halten; dergleichen ist die *series* $x^2 + 19x - 19$ so in den ersten 47 *terminis* nur 4 *numeros non primos* hat.[8]

Gleichwie *in casu* $4m+1 =$ *numero primo*, m *est* $=$ *duobus triangularibus* $+ \square$, so könnte dennoch wohl seyn *in casu* $4m - 1 =$ *numero primo* daß $m =$ *duobus quadratis* $+ \triangle$ wäre[9] *uti* $20 = 1 + 4 + 15$, wie wohl ich es noch nicht *probi*ret, und fernerer Untersuchung anheim stelle.

Der H. *Prof. Knutzen*[10] hat mir geschrieben daß er auf Eurer Hochedelgeb. einrathen seine *pensées* von dem *Magnet*en an die *Acad*[*emie*] *des Sciences* in Pariß gesandt hat, ich weiß aber nicht ob Eurer H. schon bekannt ist wie selbige dort aufgenommen, in welchem fall ich mir es zu melden bitte. Vor die Nachricht von den glücklichen *progres*sen der Königl[ich] Pr[eußischen] *Societ*ät der Wissenschafften[11] dancke ich dienstl[ich]. Die *Situation* Dero jetzigen Hauses hat mir der H. *Brigadier de Baudan* deutlich beschrieben.[12]

Von dem H. *Poleni* bin ich ersuchet worden ihm Eurer H. *Musicam*, wie auch *Comment*[*ariorum*] *Petrop*[*olitanorum*] *vol.* X und andere Bücher so bey der hiesigen *Acad*[*emie*] nach *A*[*nno*] 1738 heraus kommen,[13] als vor welche das Geld an H. *Marinoni* in Wien ausgezahlet werden soll, zu übersenden;[14] da es aber vorjetzo unmöglich ist ihm selbige von hieraus zu *procuri*ren,[15] so wird vieleicht ein Buchhändler in Berlin sich mit dieser *commission* zu *chargi*ren und das Geld davor an einen Kaufman in Wien zu *assigni*ren gefallen lassen. Wann nun E. H. hiezu etwas betragen wollten, würden Sie auch mich dadurch sehr *obligi*ren.[16]

Was die bewuste *pension* betrifft so beklage ich zwar daß dieselbe Eurer H. theils abgesprochen worden, glaube aber daß davon nichts eher mit Gewißheit gemeldet werden kan biß der *Etat* der *Acad*[*emie*] auf einen beständigen Fuß gesetzet seyn wird.[17]

Diese beyden *propositiones*: daß $8n + 3$ allezeit *in* 3 *quadrata*, und n *in tres trigonales resolvi*ret werden kan, sind *aequivalentes* und *concessa una sequitur altera*.

Es scheinet mir sehr *probable*, daß wann in der obgedachten Formul $x^2 + 19x - 19$ vor x gesetzt wird 2^m, alsdann *posito m numero quocunque integro aff*[*irmativo*] allezeit ein *numerus primus* herauskommt; wann aber dieses auch wahr wäre, würde es doch schwer zu *demonstri*ren seyn, imgleichen daß dieselbe Formul $x^2 + 19x - 19$ keinen *divisorem huiusmodi* $10n + 1$ hat.[18]

Ich verbleibe mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 28. *Sept.* 1743.

R 787 Reply to nº 72
Petersburg, September (17th) 28th, 1743
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 76–77v
Partial copy, 4 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 18v–20r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 255–257; *Euler-Goldbach* (1965), p. 180–182

74
Euler to Goldbach
Berlin, October 15th, 1743

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Nunmehr hat Ewr. Wohlgb. *Demonstration*, daß $(4n - 1)\,m - 1 \neq aa$, ihre völlige Richtigkeit;[1] dann da Dieselben vorher erwiesen, daß *posito aa omnium quadra-*

torum, si quae darentur, minimo, seyn müße $m > a$, anjetzo aber *pro eodem casu*, daß $(4n-1) > 2a$, so muß folglich seyn $(4n-1)\,m > 2aa$; nun aber ist $(4n-1)\,m = aa+1$, und wäre allso $aa+1 > 2aa$, welches nicht seyn kan *nisi sit* $a = 0$, *vel* $a = 1$ (dann hier muß das Zeichen $>$ nicht *majus*, sondern *non minus* heissen). Wann man aber setzt *vel* $a = 0$, *vel* $a = 1$, so wird die *Aequation* $(4n-1)\,m-1 = aa$ unmöglich. Ich muß gestehen, daß ich nicht geglaubet hatte, daß dieses *Theorema* auf eine so leichte und schöne Art bewiesen werden könnte, und bin dahero versichert daß die meisten *Theoremata Fermatii* auf eine gleiche Art bewiesen werden können, weswegen ich Ewr. Wohlgeb. um so viel mehr für die *Communication* dieser Herrlichen *Demonstration* verbunden bin. Ungeacht nun daraus folget, daß auch diese *Formul* $4mn-m-n$ kein *Quadrat* seyn könne, so habe ich doch nach Ewr. Wohlgb. Anleitung darüber folgende *Demonstration* gemacht.

Qui negat veritatem propositionis $4mn-m-n \neq aa$, *is statuere debet dari quadratum aa minimum, cui formula* $4mn-m-n$ *aequari possit. Sit ergo aa hoc quadratum minimum, sitque* $4mn-m-n = aa$, *erit* $(4m-1)\,(4n-1)-1 = 4aa$. *Addatur utrinque* $-8a\,(4n-1)+4\,(4n-1)^2$, *erit*

$$(4m-1-8a+4\,(4n-1))\,(4n-1)-1 = 4\,(a-4n+1)^2 = \Box.$$

Quod cum praecedente minus esse nequeat, sequitur

$$(4m-1-8a+4\,(4n-1))\,(4n-1) > (4m-1)\,(4n-1)$$

ideoque $4n-1 > 2a$ *(ubi signum* $>$ *mihi significat non minus). Simili modo demonstrabitur esse* $4m-1 > 2a$. *Sit ergo* $4m-1 = 2a+p$ *et* $4n-1 = 2a+q$, *eritque* $p > 0$ *et* $q > 0$, *unde fiet* $(4m-1)\,(4n-1) = 4aa+2a\,(p+q)+pq$, *at est* $(4m-1)\,(4n-1) = 4aa+[1]$ *et ideo* $2a\,(p+q)+pq = 1$, *quod fieri nequit nisi sit* $a = 0$, *et* $p = [1]$ *et* $q = 1$. *Verum aliunde constat esse non posse* $a = 0$. *Quamobrem non datur quadratum minimum aa formulae* $4mn-m-n$ *aequale et consequenter haec formula quadratum nullo modo esse potest. Q.* [*E. D.*]

Ich habe noch einen grossen Vorrath von dergleichen *Theorematis*, welcher *Demonstration*, wann solche auf gleiche Art solte herausgebracht werden können, gewiß nicht wenig zu Erweiterung dieser Wis[sen]schafft bey tragen würde. Diese *Theoremata*, wie ich sie der Ordnung nach herausgebracht habe, sind folgende: nehmlich alle nachfolgende *Formulae* können *nullo modo numeros quadratos* geben:

I.	$4mn-1\,(m+n)$
II.	$4mn+3\,(m+n)$
III.	$8mn-1\,(m+n)$
IV.	$8mn-3\,(m+n)$
V.	$8mn\pm 3\,(m-n)$
VI.	$8mn\pm 5\,(m-n)$
VII.	$8mn+5\,(m+n)$
VIII.	$8mn+7\,(m+n)$

IX.	$12mn - 1\,(m+n)$
X.	$12mn + 5\,(m+n)$
XI.	$12mn \pm 5\,(m-n)$
XII.	$12mn \pm 7\,(m-n)$
XIII.	$12mn - 7\,(m+n)$
XIV.	$12mn + 11\,(m+n)$
XV.	$20mn - 1\,(m+n)$
XVI.	$20mn - 3\,(m+n)$
XVII.	$20mn \pm 3\,(m-n)$
XVIII.	$20mn - 7\,(m+n)$
XIX.	$20mn \pm 7\,(m-n)$
XX.	$20mn - 9\,(m+n)$
XXI.	$20mn + 11\,(m+n)$
XXII.	$20mn \pm 13\,(m-n)$
XXIII.	$20mn + 13\,(m+n)$
XXIV.	$20mn \pm 17\,(m-n)$
XXV.	$20mn + 17\,(m+n)$
XXVI.	$20mn + 19\,(m+n)$
XXVII.	$24mn - 1\,(m+n)$
XXVIII.	$24mn - 5\,(m+n)$
XXIX.	$24mn - 7\,(m+n)$
XXX.	$24mn \pm 7\,(m-n)$
XXXI.	$24mn - 11\,(m+n)$
XXXII.	$24mn \pm 11\,(m-n)$
XXXIII.	$24mn \pm 13\,(m-n)$
XXXIV.	$24mn + 13\,(m+n)$
XXXV.	$24mn \pm 17\,(m-n)$
XXXVI.	$24mn + 17\,(m+n)$
XXXVII.	$24mn + 19\,(m+n)$
XXXVIII.	$24mn + 23\,(m+n)$

etc.;

ferner ist auch $7mn - m - n \neq aa$.

Ausser diesen habe ich auch noch einige, welche *generaler* sind,[2] als $4kmn - m - n \neq \square$, oder auf folgende Art *exprimir*t:

Theorema. Existente <u>*mn*</u> *divisore quocunque numeri* N, *dico formulam* $4N - m - n$ *quadratum nunquam esse posse.*

Hernach kan auch diese *Formul* $4\,(4k+1)\,mn - (8k+1)\,(m+n)$ nimmer ein *Quadratum* geben.

Die *Theoremata*, welche Ewr. Wohlgeb. durch unendlich viel *series* den *valorem* $\frac{\pi}{2}$ zu *exprimi*ren gefunden,[3] waren mir schon längst bekant: dann da

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + etc.$$

so wird seyn

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{2-1} - \frac{2}{4-1} + \frac{2}{6-1} - \frac{2}{8-1} + etc.$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4-\frac{1}{2}}\ etc.;$$

wann nun ein jeglicher *terminus in progressionem geometricam resolvir*t wird, so kommt

$$\begin{array}{rcllllll}
\frac{\pi}{2} & = & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2^2} & +\frac{1}{2^3} & +\frac{1}{2^4} & etc. \\
& & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\cdot 4} & -\frac{1}{2^2\cdot 8} & -\frac{1}{2^3\cdot 16} & -\frac{1}{2^4\cdot 32} & etc. \\
& & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{2\cdot 9} & +\frac{1}{2^2\cdot 27} & +\frac{1}{2^3\cdot 81} & +\frac{1}{2^4\cdot 243} & etc. \\
& & & & & etc. & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 & & +1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ etc. \\
 & & +\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\ etc.\right) \\
 & = & -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\frac{1}{125}\ etc.\right) \\
 & & +\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{16}+\frac{1}{81}-\frac{1}{256}+\frac{1}{625}\ etc.\right) \\
 & & etc.
\end{array}$$

Gleicher gestalt, da $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{5\cdot 7} + \frac{4}{9\cdot 11}$ *etc.* so wird seyn

$$\frac{\pi}{2} = \frac{4}{2^2-1} + \frac{4}{6^2-1} + \frac{4}{10^2-1} + etc. = \frac{1}{1^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{5^2-\frac{1}{4}} + etc.;$$

wann nun ein jeglicher *terminus* in eine *seriem geometricam resolvir*t wird, so komt Ewr. Wohlgb. andere *Expression* heraus:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\pi}{2} & = & 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+etc. \\
 & & +\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+etc.\right) \\
 & & +\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+etc.\right) \\
 & & etc.
\end{array}$$

In der *Serie* $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\frac{1}{36}+etc.$ wovon Ewr. Wohlgeb. *casu signorum superiorum* die *summ* $=1$, *at casu signorum inferiorum* die *summ*

$= 2\,\ell\, 2 - 1$ angeben, wird ein Versehen seyn, indem alle *denominatores unitate minui debebant.* Alsdann aber kommen eben diejenigen *theoremata* heraus, welche Ewr. Wohlgeb. mir schon längst *communicir*et, und gütigst erlaubet, dieselben nebst Dero *Demonstration* im 9ten *Tomo* zu *publicir*en.[4]

Die *series* deren *terminus generalis* ist $xx + 19\,(x-1)$ ist in der That wegen der häuffigen *numerorum primorum*, so darinn vorkommen, sehr merkwürdig.[5] Inzwischen finden sich doch die *numeri compositi* um so viel häuffiger ein, je weiter man die *Seriem continuir*t; dann da in den ersten 47 *terminis* nur 4 *numeri non primi* kommen, so kommen in den ersten 75 *ter*[*minis*] schon 14 *numeri non primi* hervor: So weit habe ich diese *seriem continuir*t, und dieses war genug, um Ewr. Wohlgb. beyde Muthmassungen über die Beschaffenheit dieser *Progression* zu wiederlegen.[6] Dann erstlich habe ich gesehen, daß nicht immer ein *Numerus primus* herauskommt, wann vor x eine *potestas binarii* gesetzt wird: der 64ste *Terminus* ist $= 5293 = 67 \cdot 79$. Hernach weiset der 73ste *Terminus* $6697 = 37 \cdot 181$, daß die *divisores formae* $10n + 1$ nicht *excludirt* werden. Was im übrigen die *divisores terminorum hujus seriei* anlangt, so ist zu merken, daß keine andern Statt finden, als welche zugleich *divisores numerorum hujus formae* $19aa - 23bb$ sind und *vicissim.*[7]

Ewr. Wohlgb. *Observation*, daß, wann $4m - 1 =$ *numero primo*, auch m ein *numerus* sey *ex duobus quadratis et triangulari compositus*, kan ich weder *refuti*ren, noch *demonstri*ren, in dem ich noch nicht einmahl einen *numerum* habe finden können, der nicht *in duo quadrata et numerum trigonalem resolubilis* wäre:[8] zum wenigsten gibt es unter 100 keinen. Sollten nun alle *numeri* diese Eigenschafft haben, so hätte auch diese *Observation* ihre Richtigkeit, aber auf eine solche Art, als wann ich sagen wollte, daß m immer eine *summa trium trigonalium* oder 4 *quadratorum* wäre.

Daß diese beyden *Propositiones* $8m + 3 =$ *summae* $3\,\square$ *et* $m =$ *summae* $3\,\triangle$ *aequivalentes* sind, ist leicht einzusehen und *dependi*ret eben davon auch die *Demonstration*, daß *omnis numerus summa* 4 *quadratorum* sey. Dann *si* $m = \dfrac{aa+a}{2} + \dfrac{bb+b}{2} + \dfrac{cc+c}{2}$ *erit* $8m + 3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$, folglich ist immer $8m + 4$ eine *summa* 4 *quadratorum*; und ferner *ejus quadrans* $2m + 1$ folglich *omnis numerus impar et per consequens omnis omnino numerus erit in* 4 *quadrata resolubilis.* Bey dieser *form* $8m + 3$ ist zu merken, daß so offt dieselbe ein *numerus primus* ist, [sie] auch in dieser *form* $2aa + bb$ enthalten sey. Um dieses und andere dergleichen *theoremata* zu beweisen, kommt das meiste auf folgende *Lemmata* an, wovon ich noch keine rechte *Demonstration*en habe finden können.

I. *Si numerus integer* $\underline{n}$ *non sit summa duorum quadratorum integrorum, talis quoque non erit in fractis, seu nullus numerus npp in duo quadrata integra resolvi poterit. Atque vicissim si npp fuerit summa duorum quadratorum, etiam numerus* $\underline{n}$ *erit summa duorum quadratorum idque in integris.*

II. *Si numerus* $\underline{n}$ *non fuerit summa* 3 *quadratorum in integris, etiam talis non erit in fractis.*

III. *Si numerus npp fuerit summa quatuor quadratorum, erit quoque numerus* $\underline{n}$ *summa quatuor quadratorum integrorum cyphra non exclusa.*[9]

Ich kan mich nicht errinnern, ob Ewr. Wohlgeb. nachfolgende *Expression* bekannt ist:[10]

$$\begin{aligned} a^m \quad - \quad & \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a+2b)^m \\ - \quad & \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+3b)^m + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(a+4b)^m - etc.; \end{aligned}$$

wann $\underline{m}$ *et* $\underline{n}$ *numeri integri* sind und $m < n$ so ist die gantze *Expression* immer $= 0$.

Nachfolgendes *Theorema* scheint mir auch merkwürdig zu seyn: *Si fuerit* $aa+4n$ *numerus primus* $= p$, *atque d sit divisor quicunque numeri* $\underline{n}$, *erit p numerus in hac forma* $dxx+yy$ *contentus (idque unico modo). E[xempli] Gr[atia] Sit* $n = 30$, *sumto* $a = 11$ *fit* $4n + aa = 241 = p$. *Continetur ergo numerus* 241 *in sequentibus formis* $xx + yy$; $2xx + yy$; $3xx + yy$; $5xx + yy$; $6xx + yy$; $10xx + yy$; $15xx + yy$; *et* $30xx + yy$; *in unaquaque autem semel tantum continetur.*[11] Gleich wie eine *summa duorum quadratorum inter se primorum* $aa + bb$ keine andere *divisores* haben kan, als welche in dieser *form* $4n + 1$ enthalten sind, allso kan ich auch *demonstrir*en daß alle *divisores formae* $a^4 + b^4$ in dieser *formul* $8n + 1$ enthalten sind; gleicher gestalt, daß alle *divisores* von $a^8 + b^8$ *numeri hujus formae* $16n + 1$ seyn müssen.

Et generaliter:[12] *Numerorum in hac forma* $a^{2^m} + b^{2^m}$ *contentorum alii diviso[res] non dantur, nisi hujus naturae* $2^{m+1}n + 1$.

Wann diese *Factores in infinitum* würklich mit einander *multiplicir*t werden,

$$(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)\left(1-n^4\right)\left(1-n^5\right)\left(1-n^6\right)\ etc.$$

so kommt nachfolgende *series* heraus

$$1 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - n^{40} + n^{51} + n^{57} - etc.$$

wovon *per inductionem* leicht erhellt, daß *omnes termini in hac forma* begriffen sind $n^{\frac{3xx\pm x}{2}}$, und das *signum* + *praefixum* haben, wann x ein *numerus par*, das *signum* − aber, wann x ein *numerus impar* ist. Ich habe aber noch keine *methode* finden können, wodurch ich die *Identitaet* dieser 2 *Expression*en *demonstrir*en könnte; der H. *Prof. Nicolaus Bernoulli* hat auch *praeter inductionem* nichts darüber herausbringen können.[13]

Ich habe vor einigen Wochen von Ewr. Wohlgeb. *Corresponde[nten]* in Königsberg H. *Theg*en einen Brief bekommen, mit einem Einschluß von Denselben, davon die überschrifft war *A Mons[ieur] le Baron de Heimenthal à König*sberg: der H. Thegen schrieb mir dabey nichts anders, als weilen der H. Kammerherr von Korff schon durch Königsberg *passir*t wäre, daß ich diesen Brief bestellen möchte.[14] Diese *Commission* hat mich über die massen *embarassir*t, indem ich keine *Connexion* zwischen dem H. Kammerherrn Korff und dem H. *Baron* von *Heimenthal* daraus abnehmen konnte, und aus der überschrifft schliessen musste daß der letstere Sich in Königsberg aufhalten müsste, von wannen mir doch der Brief zugeschickt worden. Weil ich nun nicht wusste was dabey zu thun, so habe ich den H. *Prof. Strube* zu Rath gezogen, deßen Meinung dahin gegangen, daß, weilen H. Thegen *absolute* von dem H. *Cammer*herr Korff Erwehnung gethan, der Brief an Denselben (nach Stralsund) geschickt werden müsste, als welcher Zweifels ohne schon wissen würde, was damit anzufangen: und dieses ist auch durch den H. *Prof. Strube* geschehen. Inzwischen glaube ich doch fest, daß hierinn ein grosses Versehen muß begangen worden seyn. Daran ist aber der H. Thegen einig und allein Schuld, und ich glaube alle *Precaution*en genommen zu haben, um alle Schuld von mir abzulehnen. Ich wollte erstlich den Brief sogleich Ewr. Wohlgeb. wiedrum zusenden, ich musste aber beförchten daß Sachen von *Importanz* darinn enthalten welche keinen so langen Aufschub leiden könnten.

Was die *Academie* von *Paris* über des H. *Prof. Knutzen Piece de Magnete* urtheilen wird, solches wird erst künfftiges Jahr nach Ostern bekannt werden.[15]

Von H. *Poleni* habe ich seit langer Zeit keine Briefe gehabt. Die Bücher welche er verlangt, sind hier nicht zu haben, und das *Volumen X Comment*[*ariorum*] ist ja noch nicht einmal gedruckt, in dem das *V*[*olumen*] *IX* noch nicht herausgekommen. Was aber seit *A*[*nno*] 1738 *publicir*t worden, befindet sich in *Leipzic*, daher es verschrieben werden müsste. Durch diesen *Canal* könnte es aber der H. *Marinoni directe* kommen lassen, indem zwischen *Leipzic* und Wien ein beständiges *Commercium* ist. Allhier wüsste ich nicht einmal einen Buchhändler zu finden, welcher nach Wien etwas bestellen könnte.[16]

Die *Assemblées* der neuen *Societät* werden noch beständig fortgesetzet, und jederzeit wie in *Petersburg* eine *Piece* vorgelesen; die HH. Staats *Ministri* von *Podewils* und *Borck*, der H. *General* Feld *Mar*schall von *Schmettau* und andre Standes *Person*en wohnen denselben fleissig bey, letstens besuchte uns auch *M.*ʳ *de Voltaire*. Ihro *Majestät* der König aber haben darüber noch keine *positive resolution* ertheilet. Inzwischen versichern die Herren *Ministri* daß sol[ches] nicht ausbleiben werde.[17]

Verwichenen *Michaelis* haben wir endlich unser Hauß bezogen, nach dem ich für etliche 100 Rthl. darinn *repariren* lassen, und wohnen darinn nebst dem H. Kammer Junker *Rasumoffski* und H. *Teploff* vergnügt beysammen.[18] Wir erwarten aber sämmtlich mit dem grösten Verlangen die erfreuliche Nachricht von völliger Wiederherstellung der *Academie* in *Petersburg*, und *in specie* des H. Schumacher.[19]

Das betrübte Schicksaal des H. *Brigadier Baudan* beklage ich von Herzen, und wünsche Ihm ein baldiges erwünschtes *Engagement*.[20]

Der H. *Prof. Strube*, welchem H. *Nartoff* auch seine *Gage refusir*t, und meine gantze *Famille* empfehlen sich Ewr. Wohlgeb. gehorsamst, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Wohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler.

Berlin den 15$^{\text{ten}}$ *Octobr.*
1743.

R 788 Reply to n° 73
Berlin, October 15th, 1743
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 81–84v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 258–265; *Euler-Goldbach* (1965), p. 182–187

75
Goldbach to Euler
Petersburg, December (3rd) 14th, 1743[1]

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Aus Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 15. *Oct.* habe ich mit vergnügen ersehen, daß endlich aus meiner *demonstration* etwas geworden ist;[2] ob mir nun wohl meine andere *occupationes* fast keine Zeit übrig gelassen die von E. H. beygefügten andere *Theoremata* etwas genauer zu untersuchen, so hoffe ich doch daß man künfftig in dieser *generali aequatione impossibili* $emn - f\,(m+n) \neq a^2$ die *conditiones numerorum* e *et* f in unendlich vielen *casibus* wird bestimmen können.[3]

In der *serie* $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}$ *&c.* und den von mir angegebenen *summis* ist gar kein Fehler, wie solches Ew. Hochedelgeb. wann Sie selbige noch ein mal zu betrachten belieben, leicht ersehen werden.[4]

Daß die *divisores formae* $10n+1$ in der *serie cuius terminus generalis est* $x^2+19x-19$, nicht *excludi*ret werden, ist so offenbar, daß es mir des morgens nach abgang meines vorigen Briefes, als ich ohngefehr daran dachte selbst beyfiel, ich achtete aber die *gloriam* der ersten Entdeckung dieses *erroris* nicht so wichtig daß ich selbige durch ein besonderes nur bloß dazu gewidmetes Schreiben *notifici*ren sollte.[5]

Die *series* $a^m - n\,(a+b)^m + n\,(n-1)\,(a+2b)^m -$ *&c.* $= 0$ ist mir vorher gar nicht bekannt gewesen; um mich von der Wahrheit derselben zu *convinci*ren, wollte ich *gradatim* erst $m=1$, $m=2$, *&c.* setzen, und denn *successive* auch $n=1$, $n=2$, *&c.* nehmen, so würde es sich zeigen, daß auch in den grössern *valoribus* m *et* n die *series* sich allezeit *destrui*ren müsse.

Bey der *serie* $(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)$ (*&c.*) ist mir ein besonderes *problema* eingefallen: *Data serie A infinitorum terminorum, signis* $+$ *et* $-$ *dato ordine variantibus procedentium invenire seriem B huius naturae ut in producto AB signa* $+$ *et* $-$ *eodem ordine sibi succedant, quo ordine sibi succedebant in A.* Dieses *problema* kan sehr leicht *solvi*ret werden in dem *casu* $A = (1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)$ *&c.*, obgleich darin, wie E. Hochedelgeb. angemerckt haben, die *signa* $+, -$ auf eine gar ungewöhnliche Art abwechseln, dan wann ich setze

$$B = (1 - n^{\frac{1}{2}})(1 - n^{\frac{3}{2}})(1 - n^{\frac{5}{2}})\ \&c.$$

so wir[d] *A multiplicata per B* eine neue *series* welche dies[elbe] *variationem signorum* in sich hält.[6]

Es thut mir sehr leyd daß der Brief dessen E. H. Erwehnung thun, Deroselben einige Mühe verursachet.[7] Der H. *Leg[ations] Secretaire Strube* hat Eurer H. hierin einen guten Rath gegeben dafür ich demselben sehr verbunden bin. Ich *gratuli*re Eurer H. von hertzen zu Dero neuen Wohnung und wünsche Deroselben darin alles ersinnliche Vergnügen, wornechst ich mit vieler Hochachtung verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S. Petersbourg
den *Dec.* 1743.[8]

(*vert[e]*)

Dieses wird durch meinen *Correspondent*en in Königsberg[9] bestellet werden und dahero vieleicht einen Post-Tag später ankommen.

R 789 Reply to nº 74
Petersburg, December (3rd) 14th, 1743
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 78–79v
Address (fol. 79v): "*A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin.*"
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 20r–21r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 266–267; *Euler-Goldbach* (1965), p. 188–189

76
Euler to Goldbach
Berlin, January 21st, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Bey dem Antritt dieses neuen Jahrs habe zuvorderst die Ehre Ewr. Wohlgeb. meine gehorsamste *Gratulation* abzustatten, und mich sammt den meinigen Dero beständigen Wohlgewogenheit und Freundschafft ergebenst zu empfehlen.

Ausser den vorhergemeldten *Theorematibus* über die *formulas, quae quadratos numeros praebere nequeunt*,[1] habe ich seit der Zeit in dieser *Materie* nichts andres angemerkt, als daß diese *Formul* $2abc-b-c$ kein *Quadratum* seyn könne, *si vel b vel c fuerit numerus impar formae* $4n-1$.[2] Ferner kan auch diese *Formul* $2abc-b+c$ kein *quadrat* seyn, *si fuerit a numerus impar, et b numerus vel hujus* $4n+1$ *vel* $4n+2$ *formae.* Hernach kan auch $2abc+b\pm c$ nimmer ein *Quadratum* seyn, *si fuerit a numerus impar, et b vel hujus formae* $4n-1$ *vel hujus* $4n-2$. Ich kan aber von allen diesen *Proposition*en noch keine andere völlig *demonstri*ren, als diejenigen, welche aus $4mn-m-n \neq aa$ fliessen, und welche Ewr. Wohlgeb. folglich auch durch Dero letstgemeldte *Methode demonstri*ren können.

Ich kan noch nicht einsehen, daß kein Schreibfehler in der von Ewr. Wohlgb. letst angeführten *Serie*

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\mathit{etc.}$$

solte unterlauffen seyn.[3] Dann da Ewr. Wohlgeb. gefunden daß

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\mathit{etc.}$$

so muß diese *series* $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\mathit{etc.}$ nothwendig kleiner als 1 seyn, indem so gar der *Defectus* angegeben werden kan, welcher ist

$$\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{15\cdot 16}+\frac{1}{24\cdot 25}+\mathit{etc.}$$

Gleichergestalt da fest *demonstrir*t worden daß

$$2\,\ell\,2-1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}-\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\mathit{etc.}$$

so kan ja eben diese *series*, *si singuli denominatores unitate augeantur*, unmöglich eben diese *summ* $2\,\ell\,2-1$ haben: dahero noch mehr in meiner Meinung gestärket werde, daß Ewr. Wohlgeb. vergessen die *Denominatores* um 1 zu vermindern.

Daß diese *Series* $a^m - n\,(a+b)^m + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,(a+2b)^m - \mathit{etc.} = 0$ *si fuerit* $n > m$, erhellet *ex natura serierum recurrentium.* Dann da alle *progressiones algebraicae ad genus recurrentium* gehören, dergestalt daß ein jeder *terminus ex aliquot praecedentibus determinir*t werden kan, so muß auch diese *series* a^m, $(a+b)^m$, $(a+2b)^m$, *etc.* eine *series recurrens* seyn, und eine beständige Verhältnüß zwischen einem jeden *Termino* und einigen vorhergehenden statt finden. Dieses kan so gar *infinitis modis* geschehen, indem die *scala relationis* seyn kan

$$1-n+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\mathit{etc.}$$

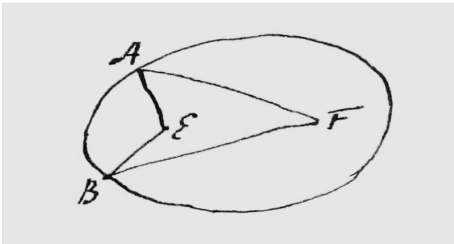
wann nur $n > m$.

Ich zweifle sehr ob man eine leichtere *Demonstration* davon wird finden können, als diese welche *ex natura serierum recurrentium* von selbsten folget, dann wann man sich schon *per Inductionem* von der Wahrheit davon überführet, so siht man doch nicht den Weg so dazu geführet, ein.

Ewr. Wohlgeb. *Reflexion* über die *Expression* $(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)$ *etc.* in Ansehung eines *factoris* $(1-n^{\frac{1}{2}})(1-n^{\frac{3}{2}})(1-n^{\frac{5}{2}})$ *etc.* also daß das *factum si evolvatur* eine gleiche Abwechslung der *signorum* + *et* − gebe,[4] könnte vielleicht bey andern Untersuchungen einigen Vortheil bringen; allein in der *serie*, welche ich daraus hergeleitet, habe ich daraus noch keinen Nutzen ziehen können.

Man siehet hier schon seit mehr als 8 Tagen einen ziemlich grossen *Cometen*, welcher da er *in Coelo* fast gar keinen *motum* zu haben, und doch immer grösser zu werden scheinet, allem ansehen nach gerad auf die Erde zu geht.[5]

In den *Act*[*is*] *Lips*[*iensibus*] *M*[*ensis*] *Nov.* ist ein *Problema proponir*t worden, solches Inhalts:



Circa data duo puncta E et F lineam curvam describere hujusmodi, ut si ex duobus ejus punctis quibusvis A et B ad illa puncta E et F ducantur rectae, area AEB futura sit semper proportionalis angulo AFB. Vel si corpus in peripheria hujus curvae revolvatur, ut areae, quas circa punctum E describit, proportionales sint angulis, quos circa alterum punctum F absolvit.[6]

Ich verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung
Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 21 *Jan.*
1744.

R 790 Reply to n° 75
Berlin, January 21st, 1744
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 88–89r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 268–270; *Euler-Goldbach* (1965), p. 189–190

77

GOLDBACH TO EULER

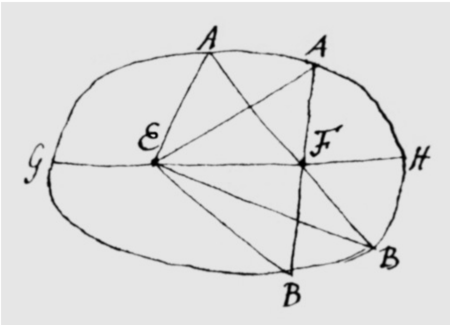
Moscow, March (1st) 12th, 1744

Hochedelgebohrner Herr

Hochgeehrter Herr *Professor*

Ohngeachtet meine Dancksagung für den von Eurer Hochedelgeb. an mich abgestatteten gütigen Neujahrswunsch[1] etwas spät kommet, so wünsche ich nichts desto weniger Deroselben aus aufrichtigem hertzen zu dem längst angefangenen Jahre alles ersinnliche Wohlergehen wovon es mir jederzeit sehr lieb seyn wird mehrere Nachrichten zu erhalten.

Das *Problema*[2] dessen Ew. Hochedelg. aus den *Actis Lips*[*iensibus*] Erwehnung thun werden Sie ohne zweiffel schon *solvi*ret haben.[3]



So viel ich sehe hat die *curva* unter andern diese Eigenschafft daß wann sie durch eine *rectam quamcunque per punctum F transeuntem* in zwey Theile getheilet, und von dem jenigen Theile in welchem das *punctum E* stehet das *triangulum rectilineum AEB* abgezogen wird, das *trilineum residuum AEB* allezeit eine *aream constantem areae dimidiae totius curvae aequalem* habe, oder daß die *pars curvae $EAGB$* allezeit = sey der *parti curvae $EAHB$*.

Die vermeinten *Summae Serierum* sind allerdings auß einem offenbaren Fehler entstanden.[4]

Die von Eurer HochE. angegebenen vielen *casus* wodurch die *quantitates e* und f in $emn - f(m+n) \neq a^2$ bestimmet werden,[5] geben mir ursach zu vermuthen daß selbige noch viel *general*er *determini*ret werden können ob mir gleich dazu bißhero keine *methode* bekannt ist, indessen scheinet doch auch diese kleine *observation* einigen Nutzen zu haben, daß die *aequatio impossibilis*, so wie sie angedeutet worden, allezeit ihre Richtigkeit hat wann $a^2 \leqslant 4(e-f)^2$, allwo das *signum* $\leqslant$ *minus* oder = bedeutet gleich wie ich seit E. H. vorigem Schreiben das *signum* $\geqslant$ vor *maius vel* = zu meinem eigenen Gebrauch angenommen.[6]

Den 12. *Febr.* ☿ *st. n.* bin ich um 11 uhr vor Mittage von *S.* Petersburg abgereiset und den 22. ♄ um Mittage in *Moscau* angekommen.

Ich habe zwar vernommen daß die *Societ*ät der Wissenschafften in Berlin eine sehr *solenn*e Zusammenkunfft gehalten, die gedruckte Beschreibung aber habe ich noch nicht gesehen.[7] Ich verbleibe mit vieler hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 12. *Mart. st. n.* 1744.

P. S. Ich wolte nicht daß Eurer Hochedelgeb. durch Einlage an Hn *Marinoni*[8] einige Beschwerde verursachet würde, sondern bitte nur den Brief bey vorfallender Gelegenheit *franco* nach Wien zu befördern und im fall sich dazu keine Gelegenheit innerhalb 2 biß 3 Monaten zeigen sollte mir selbigen alsdann wieder zurückzusenden.

In einer Gelehrten Zeitung habe ich, wo ich mich recht erinnere, gelesen, daß eines gewissen *Medici* Hn *D*[*octor*] Müllers Gedancken von der *causa gravitatis* eine fernere Untersuchung *meriti*rten; diese werden Eurer HochE. ohne Zweiffel schon bekannt seyn.[9]

Ich möchte wohl wissen ob nicht bey einem dortigen Buchhändler ein frantzösisches Reimbuch[10] darin die Reimwörter so man verlanget nach einander zu finden sind, als *ame*, *dame*, *lame*, *trame &c.* zu bekommen wäre?

Auf das *Couvert* bitte ich künfftig, damit mir die Briefe desto eher zugesandt werden, zu setzen: *Conseiller d'Etat au Departement des Affaires Etrangeres à Moscou.*

R 791 Reply to nº 76
Moscow, March (1st) 12th, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 80–81r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 21v–22r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 271–272; *Euler-Goldbach* (1965), p. 191–192

78
Euler to Goldbach
Berlin, April 25th, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

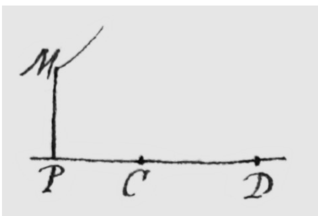
Ewr. Wohlgeb. Schreiben an H. *Marinoni*[1] habe ich dem hiesigen Buchhändler H. *Haude* abgegeben, welcher mir versprochen dasselbe ohne Verzug dergestalt zu bestellen, daß solches dem H. *Marinoni franco* eingehändiget werde: und kürzlich hat er mich versichert, daß das selbe schon würklich überliefert worden.

Keiner von den hiesigen Buchhändlern will etwas von einem Frantzösischen Reim-Register wissen;[2] der H. *Prof. Strube* aber, welcher Ewr. Wohlgeb. seine gehorsamste Empfehlung macht, meint, daß er einmal ein solches Buch gesehen, er konnte sich aber nicht recht erinnern, und hat mir auch bißher keine weitere Nachricht geben können.

Ich kan mich nicht besinnen, etwas von eines *D*[*octor*] Müllers Gedancken *de causa gravitatis* gelesen zu haben; die Gelehrten Zeitungen werden mir auch sehr unrichtig *communicir*t. Inzwischen kan ich mir doch nicht einbilden, daß dieser *Auctor* etwas merkwürdiges hierüber entdecket haben sollte, dann hiezu gehört eine solche tiefe Einsicht in die *sublim*ste *Mechanic*, dergleichen bey einem noch unbekannten Mann nicht leicht zu vermuthen ist. Und ohne diese Erkänntnüß verfällt man gemeiniglich auf blosse *Chimer*en, und *contradictor*ische *Hypotheses*, welche eben so wenig mit den wahren *Principiis* der *Physic* bestehen, als den *Phenomen*en ein Genügen leisten können.[3]

Ich bin in Verfertigung meiner *Piece*, welche ich über den *Magnet*en im vorigen Jahr nach *Paris* geschickt,[4] auf einen Einfall um die *Causam Gravitatis* zu erklären, gerathen, welcher mir je länger je gründlicher vorkommt; ungeacht ich mich noch nicht im Stande befinde denselben völlig auszuführen.[5] Anjetzo sollte man hier schon wissen können, wer dieses Jahr den Preiß bey der *Academie* zu *Paris* erhalten, weil mir nun der H. *Clairaut* noch nichts davon gemeldet, so kan ich gewiße Rechnung machen, daß ich dismal wieder leer ausgegangen. Ich kan auch die Ursach leicht errathen, dann da ich um meine Erklärung zu bekräftigen, die Meinung der Engelländer von der *Attraction* als einem *attributo essentiali corporum* ziemlich stark angegriffen und wiederleget, so wird dieses den Herrn *Commissariis*, welche, wie ich seit der Zeit erfahren, dieser Meinung völlig beystimmen, gar nicht gefallen haben.

Die Eigenschafft, welche Ewr. Wohlgeb. von den *curvis* dem in den *Actis Lipsiensibus proponir*ten *problemati satisfacientibus* entdecket haben[6] hat ihre völlige Richtigkeit, und ist allso allen den unendlich vielen krummen Linien wodurch das *problema solvir*t wird gemein. Ich habe vor etwas Zeit eine ausführliche *Solution* darüber nach Leipzig geschickt, darinn ich *ex quolibet curvarum algebraicarum ordine* eine angegeben. Aus den *Sectionibus conicis satisfacir*t der *Circul*, da ein *punctum* im *Centro* das andere in der *Peripheri*e angenommen wird.



*Ex lineis tertii ordinis satisfacir*t diese *Aequation* $yy = \dfrac{3axx - x^3}{x - a}$ *positis* C *et* D *duobus illis punctis, circa quorum illud* C *sint areae proportionales angulis ad* D *formatis, et vocatis* $CD = a$, $DP = x$, $PM = y$.

Ausser diesen *Curvis algebraicis* gibt es unendlich viel, deren *Construction a quadratura circuli dependir*t, die übrigen aber lassen sich durch keine *Quadratur construi*ren, ich habe aber eine *general-Construction per motum tractorium* gegeben.

Über die *Theoremata numerica* habe ich seit der Zeit nichts neues entdecket. Was die neuen Zeichen $\geqslant$ und $\leqslant$ betrifft,[7] dergleichen in diesen *Speculation*en öfters höchst nöthig sind, so wollte ich nach der *Analogi*e dieses Zeichens $\neq$, welches *non aequale* bedeutet, vielmehr diese $\not<$ und $\not>$ gebrauchen, deren jenes <u>*non minus*</u> das ist entweder *aequale* oder *majus* $\geqslant$, dieses aber $\not>$ *non majus*, das ist so viel als $\leqslant$ *minus* oder *aequale* bedeutet.

Nächstens wird bey dem H. *Bousquet* mein *Tractat de problemate Isoperimetrico* herauskommen; und darauf wird er ein andres Werk, *Introductio ad Analysin infinitorum*, drucken, worinn ich so wohl den *Partem sublimiorem Algebrae* als *Geometriae* abgehandelt.[8] Ich habe für nöthig befunden dieses vor der *Analysi infinitorum* selbst hergehen zu lassen, an welcher ich jetzt würklich arbeite.

Jetzt wird hier an einer *Dissertation de motu Planetarum et Cometarum* worinn ich die *Orbitam* des letsten *Comet*en bestimmet, gedruckt. Es ist bey diesem *Comet*en merkwürdig, daß derselbe den 4^ten^ *April* so nahe bey dem *Mercurio* vorbeygegangen, daß man daher eine *Perturbation* in dieses *Planet*en Lauf zu vermuthen Ursach hat. Bißher ist aber der *Mercurius* noch unsichtbar, daß man sich allso hierüber noch nicht hat *eclairci*ren können.[9]

Vorgestern wurde in den hiesigen Zeitungen die Einrichtung der neuen *Academi*e *publicir*t.[10]

Zu der glücklichen Ankunft in *Moscau gratuli*ren von Herzen, und empfehle mich zu Ewr. Wohlgeb. beständigen Gewogenheit, der ich mit der schuldigsten Hochachtung verharre

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler.

Berlin den 25ten *April*
1744.

Wegen meiner Großmuter Tod petschiere ich schwarz.[11]

R 792 Reply to n° 77
Berlin, April 25th, 1744
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 93–94r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 273–275; *Euler-Goldbach* (1965), p. 192–193

79

Goldbach to Euler

Moscow, (May 21st) June 1st, 1744

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Vor wenigen Tagen habe ich gantz unvermuthet gefunden, daß die *aequatio* $emn \pm fm + gn = a^2$ allezeit *possibilis* ist, nemlich, daß *datis numeris* e, f *&* g allezeit angegeben werden können m, n, *&* a. Die *demonstration* ist sehr leicht: *ponatur* $m = eg \pm f \pm 2g$, $n = g$, *erit* $a = eg \pm f \pm g$; wie aber bey solcher bewandniß der Sache 25 von den 38 *casibus* welche Ew. Hochedelgeb. in Dero Schreiben vom 15. *Oct.* als *aequationes impossibiles* anführen, sich werden *legitimi*ren können, lasse ich (nach der bewusten *phrasi*) gar sehr an seinen Ort gestellet seyn.[1]

Uber den Tod Dero Fr[au] Großmutter werden Sie sich vermuthlich in ansehung des hohen Alters so dieselbe erreichet hat, leicht *consoli*ren,[2] ich wünsche nur daß E. Hochedelg. in diesem Stücke in der selben Fußstapffen treten und dem Hn *Bousquet* in *Geneve* noch vielen Vortheil schaffen mögen.

Von H. *Prof. Strube* hoffe ich bey dessen Zurückkunfft[3] einige *particularia* von den dortigen *Savans* als *M.^{rs} Jordan*, *d'Argens*, *Algarotti* &c. zu vernehmen. Ew. H. werden auch ohne zweiffel einen gewissen *M.^{r} des Champs* kennen welcher einen, mir annoch unbekannten, *Cours de la Philosophie Wolfienne* geschrieben hat; in diesem Buche soll eine *passage* vorkommen da *ad marginem* stehet: *M.^{r} Huygens critiqué*;[4] wo sie so beschaffen ist, wie mir hinterbracht worden, wird es E. H. nicht gereuen selbige gelesen zu haben.

Dem Hn *Haude* bitte ich bei Gelegenheit für die Besorgung des Briefs an Hn *Marinoni*[5] von mir dienstlichen Danck abzustatten und denselben zu versichern, daß es mir sehr lieb seyn würde ihm dieser Orten wiederum einige Gefälligkeiten zu erweisen.

Weil ich die frantzösischen Zeitungen nicht ordentlich lese so weiß ich noch nicht wie es mit dem *praemio* welches verwichene Ostern bey der *Acad*[*emie*] *R*[*oyale*] *des Sciences* ausgetheilet werden sollen, endlich abgelauffen ist.[6]

Vor die *communication* der *aequationis ad curvam* dancke ich dienstlich und werde Eurer HochE. *dissertation*, so bald ich die *Acta Erud*[*itorum*] bekomme, mit vergnügen lesen.[7] Mit der angeführten Veränderung der *signorum* bin ich auch wohl zufrieden.[8]

Aus einem Stück der hamburgischen Nachrichten habe ein *favorable*s *judicium* von des Hn *Prof. Knutzen Tractat* von den *Comet*en ersehen; es wird daselbst bey dieser Gelegenheit gemeldet, daß zwar schon einige Gelehrte gewesen, die *Comet*en auf eine gewisse Zeit vorausprophezeyet haben, die *Comet*en hätten sich aber nicht eingefunden, so daß unter allen der Hr. *Pr*[*ofessor*] *Knutzen* der erste gewesen welcher einen *Comet*en, nehmlich den von *A*[*nno*] 1744, in einer öffentlichen Schrifft schon 7 Jahre voraus vermuthet hat.[9]

Aus dem was von der *Theorie de la figure de la Terre par M.^r Clairaut* in den *Leipz*[*iger*] *Gel*[*ehrten*] *Zeit*[*ungen*] gesagt wird, schliesse ich daß es ein sehr schönes Buch seyn muß.[10]

Wenn ein völliger *tomus* von Eurer HochE. *operibus* herausgekommen seyn wird, bitte ich mir *notice* davon zu geben.

Ich erinnere mich daß E. H. mir schon vor einigen Jahren gesagt haben auf was für art Sie ein *Capital* von 10 000 Rthl. imfall Sie es erwerben sollten, zu *employi*ren gesonnen wären, nemlich ein Landgut *in patria* zu kauffen und darauf zu leben; ohngeachtet nun vermuthlich der *casus in terminis* bald *existi*ren wird, so will ich doch nicht hoffen, daß Sie ihr damaliges *project* zur Erfüllung bringen werden.[11]

Ich verbleibe mit besonderer Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 1. *Junii st. n.* 1744.

R 793 Reply to n° 78
Moscow, (May 21st) June 1st, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 82–83r
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 22r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 276–277; *Euler-Goldbach* (1965), p. 194–195

80
Euler to Goldbach
Berlin, July 4th, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß diese *Formul* $emn \cdots fm \cdots gn$ *generaliter* ein *Quadratum* seyn könne wann nur entweder f oder g ein *numerus affirmativus* ist, wie Ewr. Wohlgb. angemerket haben, kan mit meinen vormals überschriebenen *Theorematibus* gar wohl bestehen.[1] Dieselben waren zweyerley entweder von dieser *Form* $4emn - pm - pn$ oder von dieser $4emn \pm pm \mp pn$; die erstere leidet nun durch Ewr. Wohlgeb. *Observation* keine Noth; die letstere aber würde umgestossen, wann nicht eine *Condition* hinzugethan werden müste, davon ich mich nicht mehr errinnere, ob ich in meinem Briefe damals Meldung gethan habe oder nicht:[2] nehmlich m und n *respectu* p *numeri primi* seyn. Wann ich allso sage daß $8mn - 3m + 3n$ nimmer ein *Quadrat* seyn könne, so muß diese *Condition* dabey gemeldet werden, daß n kein *multiplum* 3^{rii} sey. Dann wann man dörfte $n = 3$ oder überhaupt $n = 3hh$ setzen, so könnte diese *Formul* $8mn - 3m + 3n$ *infinitis modis* ein *Quadrat* seyn. Diese *Restriction* folget unmittelbar aus der Art, welche mich dazu geführet, und welche ich auch in der *Piec*e, so ich vor einiger Zeit über diese *Materi*e nach *S.^{t} Petersburg* geschickt habe, ausdrüklich angemerkt.[3] Dann $8mn - 3m + 3n$ kan deswegen kein *Quadrat* seyn weil diese *Formul* $aa - 2bb$ keinen *divisorem primum hujus formae* $8n \pm 3$ haben kan; dahero werden diejenigen *casus* ausgenommen, wann n ein *multiplum* von 3 ist, eben wie auch in jener $aa - 2bb$ diese *Condition* hinzugethan werden muß, daß a und b *numeri inter se primi* seyn sollen; dann ohne diese *restriction* könnte $aa - 2bb$ *per quemcunque numerum divisibilis* seyn.

Ich arbeite anjetzo an einem *Tractat* über den *Calculum differentialem*, in welchem ich verschiedene *curieuse Decouvert*en über die *Series* gemacht habe, wovon ich die Freyheit nehme Ewr. Wohlgebohrnen einige zu *communici*ren:

I. *Sumto in circulo arcu quocunque a, cujus sinus sit $= \alpha$, sinus arcus dupli $= \beta$, sinus arcus tripli $= \gamma$, sinus quadrupli $= \delta$, quintupli $= \varepsilon$, etc., dico hujus seriei infinitae*

$$\frac{1}{2}a + \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{5}\varepsilon + etc.$$

summam semper exprimere longitudinem arcus $90°$ *in eodem circulo.*[4]

II. *Posito radio circuli $= 1$, atque arcus cujuscunque a statuatur ut sequitur*

$$\begin{array}{lllll} sinus\ a=\alpha; & sinus\ 2a=\beta; & sinus\ 3a=\gamma; & sinus\ 4a=\delta; & sin.\,5a=\varepsilon\ \ etc. \\ cosinus\ a=A; & cosinus\ 2a=B; & cosinus\ 3a=C; & cosinus\ 4a=D; & cos.\,5a=E\ \ etc. \end{array}$$

sitque π longitudo semicircumferentiae, erit

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{2A^2} + \frac{\gamma}{3A^3} + \frac{\delta}{4A^4} + \frac{\varepsilon}{5A^5} + etc. \quad &= \quad \frac{\pi}{2} \\ 1 + \frac{A}{A} + \frac{B}{A^2} + \frac{C}{A^3} + \frac{D}{A^4} + \frac{E}{A^5} + etc. \quad &= \quad 0 \\ 1 + A + B + C + D + E + etc. \quad &= \quad \frac{1}{2}. \end{aligned}$$ [5]

III. Nachfolgende *Series* sind *ex divisione arcus* entsprungen.

Posito radio $= 1$, sumatur arcus quicunque $= s$, cujus sinus sit $= a$, cosinus dimidii arcus sit $= \alpha$; cosinus $\frac{1}{4}s = \beta$; cosinus $\frac{1}{8}s = \gamma$; cosinus $\frac{1}{16}s = \delta$ etc., erit $s = \dfrac{a}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ etc.}$.[6]

IV. *Si ponatur arcus cujuscunque s tangens $= A$; tangens $\frac{1}{2}s = B$; tangens $\frac{1}{4}s = C$; tangens $\frac{1}{8}s = D$; tangens $\frac{1}{16}s = E$, etc., erit*

$$\frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}D + \frac{1}{16}E + etc. = \frac{1}{s} - \frac{1}{A}.$$ [7]

V. *Si cognita fuerit summa hujus seriei $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + etc.$ quam ponam $= z$; dico semper assignari posse summam hujus seriei:*

$$Aa + Bbx + Ccx^2 + Ddx^3 + Eex^4 + Ffx^5\ +\ etc.$$

dummodo series horum coefficientium A, B, C, D, E *etc. tandem habeat differentias constantes.*[8] *Sit enim* $B-A=P$; $C-2B+A=Q$; $D-3C+3B-A=R$; *etc. Deinde quia* z *datur per* x, *statuatur* $\frac{dz}{dx}=p$; $\frac{dp}{dx}=q$; $\frac{dq}{dx}=r$; $\frac{dr}{dx}=s$ *etc. Hisque valoribus inventis erit seriei*

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+etc.$$

summa

$$=Az+Ppx+\frac{1}{2}Qqx^2+\frac{1}{6}Rrx^3+\frac{1}{24}Ssx^4+etc.$$

Sit exempli gratia $z=1+x+x^2+x^3+x^4+etc.=\frac{1}{1-x}$, *erit* $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{(1-x)^2}=p$; $\frac{dp}{dx}=\frac{2}{(1-x)^3}=q$; $\frac{dq}{dx}=\frac{6}{(1-x)^4}=r$; *etc., et pro* A, B, C, D, *etc. sumatur haec series*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1, & & 3, & & 7, & & 13, & & 21, & & 31, & & 43, & & etc. \\
 & 2, & & 4, & & 6, & & 8, & & 10, & & 12, & & & \\
 & & 2, & & 2, & & 2, & & 2, & & 2, & & & & \\
 & & & 0, & & 0, & & 0, & & 0, & & & & &
\end{array}$$

deren *formula generalis* ist $nn-n+1$; davon die *Differentz*en genommen wird $A=1$; $P=2$; $Q=2$; $R=0$; $S=0$ *etc.*, folglich ist die *Summa seriei*

$$1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+etc.=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$ [9]

Gleichwie man vermittelst der *Neutoneani*schen *Evolution* des *Binomii* alle *aequationum purarum* $x^n-A=0$ *radices per series infinitas exprimi*ren kan, so habe ich auf eine ähnliche *Methode* gedacht, um aller *Aequationum affectarum radices* gleichfalls *per series infinitas* zu *exprimi*ren: Es sey gegeben diese *Aequation*

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+etc.=0,$$

deren eine *radix* sey $x=f$, welche ich folgender gestalt *per seriem exprimi*re. Ich setze

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+etc.=y,$$

und suche *per differentiationem* die *Valores* folgender *quantitäten* $p=\frac{dx}{dy}$; $q=\frac{dp}{dy}$; $r=\frac{dq}{dy}$; $s=\frac{dr}{dy}$; *etc.* welche alle in x gegeben seyn werden. Nun nehme man nach Belieben für x einen *valorem determinatum* an, und bestimme daraus die *valores* von y, p, q, r, s, *etc.*, *quo facto summa hujus seriei*:

$$x-py+\frac{1}{2}qy^2-\frac{1}{6}ry^3+\frac{1}{24}sy^4-etc.$$

semper aequalis erit uni radici aequationis propositae $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + etc.$ $= 0$. Nimmt man nun für x einen solchen Werth an, welcher einer *radici* schon sehr nahe kommt, so wird die *series convergens*, und weiset die *radicem proxime.*

Man kan diese *Proposition* auch folgender Gestalt ausdrucken. *Si fuerit* $y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + etc.$ *hincque definiantur sequentes quantitates* $p = \dfrac{dx}{dy}$; $q = \dfrac{dp}{dy}$; $r = \dfrac{dq}{dy}$; $s = \dfrac{dr}{dy}$; *etc., ex quibus formetur haec series*

$$x - py + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - etc.,$$

dico hujus seriei summam, quicunque valor pro x ponatur, semper aequari uni radici hujus aequationis

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + etc. = 0.^{[10]}$$

Wann man sich eine *Lineam curvam* vorstellet von dieser *Natur*

die *Abscissae* sind:	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	*etc.*
die *Applicatae*:	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	*etc.*

dergestalt daß wann die *A[b]scissa* gesetzt wird $= x$, die *applicata* wird $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots x$, so kan diese *Curva per infinita puncta* leicht beschrieben werden. Wann ich mich recht errinnere, so haben Ew. Wohlgeb. mir einmal Anlaß gegeben auf diese *Curvam* zu denken: Unlängst da mir diese *Materie* wiedrum vorkam, so habe ich die *Naturam* dieser krummen Linie durch folgende *Aequationem differentialem exprimir*t:

Man setze

$$\begin{array}{lll}
A = & 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + etc. & = 1,644\,934\,066\,848 \\
B = & 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + etc. & = 1,202\,056\,903\,159 \\
C = & 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + etc. & = 1,082\,323\,233\,711 \\
D = & 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + etc. & = 1,036\,927\,755\,106 \\
E = & 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^5} + etc. & = 1,017\,343\,061\,984 \\
F = & 1 + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + etc. & = 1,008\,349\,277\,386 \\
 & \quad etc. &
\end{array}$$

und ferner sey $n = 0,577\,215\,664\,9$; so wird seyn: $\dfrac{dy}{y\,dx} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{x} - n$, woraus die *positio tangentis* so offt x ein *numerus integer* ist erkannt wird; wann aber x ein *numerus fractus* oder *irrationalis* ist, so dienet diese *Aequatio infinita*:

$$\frac{dy}{y\,dx} = Ax - Bx^2 + Cx^3 - Dx^4 + Ex^5 - etc. - n;$$

oder auch diese

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{4+2x} + \frac{x}{9+3x} + \frac{x}{16+4x} + \frac{x}{25+5x} + etc. - n.$$

Aus der *Figur* dieser *Curvae* ist leicht zu sehen, daß dieselbe eine *Applicatam minimam inter abscissas* 0 *et* 1 haben muß; wann man nun setzt $dy = 0$, so kommt *proxime* heraus $x = 0,460\,96$ oder $x = \frac{6}{13}$. Um aber aus einer jeden *abscissa* x die gehörige *applicatam* y zu finden, so habe ich diese *logarithmi*sche *aequation* herausgebracht:

$$\begin{aligned}\ell\, y = \frac{1}{2}\ell\, 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\ell\, x - x \quad &+ \quad \frac{1}{12x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\, x^3} \\ &+ \quad \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\, x^5} - \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\, x^7} + \mathit{etc.};\end{aligned}$$

wann allso x eine sehr grosse Zahl ist, so ist *proxime* $y = \dfrac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^x}$ *posito* $\mathrm{e} = 2,718\,281\,8$; setzt man aber

$$x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2x} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^3} - \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\, x^5} + \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\, x^7} - \mathit{etc.} = z,$$

so ist *accurat* $y = \dfrac{x^x\sqrt{2\pi x}}{\mathrm{e}^z} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots x$.[11]

Der H. *Prof. Strube* läst Ewr. Wohlgeb. seine gehorsamste Empfehlung vermelden; er weiß noch nicht wann, oder wohin er von hier verreisen wird.[12] Was diejenigen hiesigen Gelehrten betrifft, von welchen Ewr. Wohlgeb. einige Nachricht erwarten, so habe die Ehre zu melden, daß *M.ʳ Jordan* welcher vormals ein Frantzösischer Prediger gewesen, sich hauptsächlich auf die *Litteratur applici*ret, und eine schöne *Bibliothec* sammelt, indem ihm der König alle Bücher, welche Ihro *Majestät* gesandt werden, darein schenkt. Daß der *Marquis d'Argens* bloß von den *Belles lettres fait* macht, wird Ewr. Wohlgeb. genugsam bekannt seyn, und ungeacht er jetz anfängt auch *Physicali*sche *Materi*en mit unter seine Schrifften zu mengen, so ist doch nichts gründliches davon anzutreffen. Der Graf *Algarotti* ist schon lange Zeit nicht mehr hier, und hat nach den letsten Zeitungen Dienste bey dem König von Polen genommen. *M.ʳ Deschamps* ist ein *pur*er *Wolfianer*, und weilen ich weder mit ihm in genauer Bekantschafft stehe, noch seine Schrifften gelesen habe, so habe ich ihn durch einen Freund fragen lassen, worinn er *praetendi*re den *Hugenium critiquir*t zu haben. Hierauf hat er nun geantwortet, daß solches über sein *Ratiocinium sur la probabilité* gewesen sey, weilen er vermeint hätte, der H. Wolf hätte solches auch schon *critisir*t; da er aber seit der Zeit gesehen, daß des H. Wolfs Worte anders verstanden werden müssten, so ziehe er seine *Critic* wieder zurück.[13]

Die *Academi*e in *Paris* hat dieses Jahr das *Praemium* gar nicht ausgegeben, sondern eben dieselbe *Quaestion* vom *Magnet*en wiedrum auf *A*[*nnum*] 1746 *proponir*t, mit einem 3 fachen Preiß von 7500 *Livres.* Ich habe mir aber vorgenommen nicht ferner darüber zu *concurri*ren, sondern meine *Dissertation* nächstens allhier drucken zu lassen.[14]

So *favorable* das *Judicium* in den *Hamburg*ischen Zeitungen über des H. *Prof. Knutzen* Meinung von dem letsten *Comet*en ist,[15] so ist doch so wohl der Grund, als seine Ausführung völlig falsch. Er nimmt erstlich an daß dieser *Comet* ein *Tempus periodicum* von $45\frac{3}{4}$ Jahren habe, weil er aus dem *Catalogo Heveliano* gesehen, daß fast immer nach Verfliessung dieses *Intervalli* ein *Comet* erschienen. Ferner glaubt er daß der *Comet* von 1698 eben derselbe gewesen, der *A*[*nno*] 1652 gesehen worden, da man doch wann man die Sach genau untersuchet kaum zwey *Comet*en finden wird welche so viel von einander *differi*ren als diese zwey. Hernach ist auch der letste *Comet* von diesen beyden so stark unterschieden, daß man mit eben der *Raison* den *Mercurium* für den *Saturnum* halten könnte, wann man nicht öffters beyde zugleich am Himmel sähe. Ich habe auch dem H. *Prof. Knutzen* alle diese Gründe überschrieben, wogegen er nichts anders einzuwenden findet, als daß gleichwohl seine Meinung oder *Prophez*eyung eingetroffen, und daß er fast nicht glauben könne daß solches *par hazard* geschehen.[16] Ich habe über diesen *Comet*en eine weitläuffige *Dissertation* geschrieben, welche jetzt bald wird gedruckt seyn,[17] darinn ich den Lauf dieses *Comet*en auf das genauste bestimmet, und gantz deutlich gewiesen, daß sein *Tempus periodicum* sich über etliche *Saecula* erstrecke: wie sich dann auch unter allen *Comet*en, so seit 300 Jahren *observir*t worden keiner findet, dessen Lauf nur im geringsten mit dem letsten übereinkäme.

Die *Theorie de la figure de la Terre par M^r Clairaut* ist in der That ein unvergleichliches Werk,[18] so wohl in Ansehung der *profund*en und schwehren *Quaestion*en welche darinn abgehandelt werden, als der angenehmen und leichten *Methode* nach welcher er die *sublim*sten Sachen gantz klar und deutlich vorzubringen weiß.

Ob mein *Tractat de problemate isoperimetrico*[19] in *Lausanne* schon völlig gedruckt ist, habe ich noch keine Nachricht erhalten. Ich habe inzwischen ein neues Werk dahin geschickt unter dem *Titul Introductio ad Analysin infinitorum*,[20] worinn ich so wohl den *partem sublimiorem* der *Algeber* als der *Geometri*e abgehandelt, und eine grosse Menge schwehrer *Problematum* ohne den *Calculum infinitesimalem resolvir*t, wovon fast nichts anderswo anzutreffen. Nachdem ich mir einen *Plan* von einem vollständigen *Tractat* über die *Analysin infinitorum formir*et hatte, so habe ich bemerkt, daß sehr viele Sachen welche dazu eigentlich nicht gehören, und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müssten, und aus denselben ist dieses Werk als ein *Prodromus ad Analysin infinitorum* entstanden.

Die neue *Academi*e allhier wird nächstens einen *Tomum* von den darinn abgelesenen *Piecen* herausgeben. Es wird darinn eine große Anzahl *Piecen* von mir kommen:[21] Weilen nun die H. Staats *Ministri* fleissig zugegen sind, so habe um diesen Herren keinen Ekel zu erwecken, meine *Dissertation*en *frantzös*isch abgelesen, nachdem solche von dem H. *Prof. Naudé corrigir*t worden; ich habe auch um dieser Ursach willen *pure Mathemati*sche *Speculation*en und *Calculos* zu *eviti*ren gesucht, und mehrentheils *physicali*sche *materien* abgehandelt: Darunter befindet sich eine neue *Theorie* von dem Licht und Farben, wodurch ich alle *phaenomena* auf das deutlichste erkläre, und alle Schwierigkeiten, welchen andere *Theori*en unterworfen sind, vermeide. Hernach habe ich *demonstrir*t daß die *forcen*, welche von einem Stoß oder Schlag herkommen, jederzeit mit einer blossen *Pression comparir*t werden können, oder daß die *Vires vivae* und *mortuae* unter sich *homogeneae* seyen. Ich habe auch *ex natura Gravitatis* dargethan, daß die *ultimae moleculae omnium corporum* unter sich alle gleich dicht, oder *eandem gravitatem specificam* haben müssen, wodurch das *Principium indiscernibilium* einiger keinen geringen Stoß zu leiden scheinet.[22]

So bald ich von *Lausanne Exemplaria* von demjenigen was dort gedruckt wird, bekommen werde, und so bald meine *Theoria Cometarum* alhier gedruckt seyn wird, so werde ich nicht ermangeln mit der ersten Gelegenheit Ewr. Wohlgeb. damit aufzuwarten.

Ich habe die *Opera Jacobi Bernoulli* welche in *Geneve* in 2 *Tomis cum annotationibus* des H. *Cramers* herausgekommen, noch nicht gesehen, ich bin aber versichert, daß so wohl das Werk selbst als insonderheit die *Annotationes* sehr herrlich seyn werden. Ferner sind auch daselbst herausgekommen die *Principia Philos*[*ophiae*] *Nat*[*uralis*] *Newtoni* in 3 *Voluminibus cum commentariis P*[*atrum*] *le Sœur* und *Jacquier*, und auch die übrigen *Opuscula Newtoni* gleichfalls in 3 *Voluminibus*, welche beyde Werke alles Lob verdienen.[23]

Meine Umstände haben sich jetzt dergestalt geändert, daß ich thöricht seyn müsste, wann ich mir eine andere Lebens Art wünschen sollte. Wann aber auch dieses nicht wäre, so fehlte doch noch so viel an derjenigen *Summ* von 10 000 Rthl., welche ich vormals zu Erkauffung eines Land-Guts *in Patria* anwenden wollte, daß ich kaum Hoffnung haben kan, zu derselben jemals zu gelangen.[24]

Ich habe vor einiger Zeit nachfolgenden *logogryphum* entworfen, worinn alle *Characteres* Buchstaben bedeuten, und der *Text* latein ist:

1 Pxqswlznjdvynstiddkqxhleebfpxdfgtlzbccfbksodxokfnglqxn
2 schejmlckzxhrfwjgfhxvzjnbgyxcdgixkoxjmlncoigdxvzflmesnf
3 yjqfangvnylrcxfonbfjalrkwsnbfpjoizoxqknubrofadgiaxwkcbr
4 bcklofrnjwngszfhgjfcbcfvqjtxeevtbzfyjsbzhfmlnbgfsqjwglnx
5 vzfkonbcoigdxvrkfjalzxtsnilenfgvcboofcfxnnfgnkbcjnnjyn
6 xvplgnbfzfoxeejdgxbcjcnsdyvdbhzlnvyxmbcblobbcyfekonbcei
7 obfplwsxzxfjcndbhrlzqxssonbcoljfsyqfmjeevhleexoiexmgi
8 cfdnktvoldxnfbxofcktvpxrnv.

Ungeacht hier die Bedeutung der *Characterum* nicht veränderlich ist, so deucht mich doch, daß dergleichen Schrifft nicht leicht *dechiffrir*t werden kan.[25]

Allhier wird stark *Schach* gespielt: es befindet sich unter andern ein Jud hier welcher ungemein gut spielt, ich habe einige Zeit bey ihm *Lectiones* genommen, und es jetz so weit gebracht, daß ich ihm die meisten *Parti*en abgewinne.[26]

Mit der vorigen *Post* hat mir der H. Rath *Schumacher* die erfreuliche Zeitung überschrieben daß Ihro Kaiserl[iche] *Majestä*t Allergnädigst befohlen allen auswärtigen Mitgliedern ihre *Pension*en auszuzahlen.[27]

Die hiesige *Academi*e wird auch nächstens ein *Praemium* von 140 Rthl. aussetzen, womit jährlich *continuir*t werden soll; für das künftige Jahr wird die *causa physica electricitatis* das *sujet* der *Question* seyn.[28]

Hiemit habe die Ehre Ewr. Wohlgeb. mich gehorsamst zu empfehlen, der ich mit der vollkommensten Hochachtung verharre

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4$^{\text{ten}}$ *Julii*
1744.

R 794 Reply to n° 79
Berlin, July 4th, 1744
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 95–98v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 278–293; *Euler-Goldbach* (1965), p. 195–200

81
Goldbach to Euler
Moscow, July (5th) 16th, 1744

Hochedelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Nachdem *Tit*[*ulo*] H. *Prof. Krafft* mir durch ein Schreiben aus Petersburg vom 28. *Jun. st. v.* zu wissen gethan daß er im begriff sey die Reise zur See biß Stetin anzutreten so habe, weil meine Antwort denselben vermuthlich in Petersburg nicht mehr antreffen dörffte, solche an Ew. Hochedelgeb. zu *adressi*ren die Freyheit genommen in der Hofnung daß sie (dafern der H. *Prof. Krafft* nicht einen *excellent voilier* biß Stetin bekommet) noch vor dessen Ankunfft in Berlin eintreffen werde.[1]

Daß die Austheilung des Preißes bey der *Ac*[*ademie*] der Wiss[enschaften] in Pariß abermal verschoben worden habe ich aus den Zeitungen ersehen, ich vermuthe aber, daß es Eurer Hochedelg. nur eine kleine *addition* zu Dero *piece* kosten wird um den künfftigen Preiß zu erhalten.[2]

Das neulich erwehnte Reimbuch ist, wie ich es nachgehends *allegui*ret gefunden, unter diesem Titel herauskommen: *Dictionnaire des Rimes par Richelet*.[3]

Ich möchte wohl wissen ob Ew. HochE. ein Buch gelesen haben davon mir nur der folgende Titel bekannt ist: *La methode des Fluxions par M.^{r} Newton, à Paris* 1740.[4]

Im übrigen beziehe ich mich auf mein letztes Schreiben vom 1. *Jun.* und verbleibe mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 16. *Jul. st. n.* 1744.

P. S. Ich halte diese *proposition* für gewiß ohngeachtet ich glaube daß die *demonstration* davon nicht leicht zu finden sey: *dato numero primo huius formae* $4n + 1$

datur alius numerus huius formae a^2+1 *quem ille dividat*[5] (daß aber *invento uno* a^2+1 noch *innumeri alii* von dieser Eigenschafft gefunden werden können ist an sich offenbar). In gewissen Fällen ist die *solution* gar leicht, als zum Exempel wann in dem gegebenen *numero primo* $4n+1$ der *numerus* n *quadratus* oder *triangularis* ist.[6]

R 795 Sequel to n° 79
Moscow, July (5th) 16th, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 84–85r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 294; *Euler-Goldbach* (1965), p. 201–202

82
Goldbach to Euler
Moscow, August (6th) 17th, 1744

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Am letztverwichenen 16. *Jul. st. n.* habe ich an Ew. HochEdelg. ein Schreiben nebst einem Einschluß an Hn *Prof. Krafft* abgesandt welches vermuthlich schon abgegeben seyn wird.[1]

Wann die *numeri* m & n in den bißherigen *theorematibus* nicht jederzeit *numeros integros affirmativos* angedeutet und Eur. HochEdelgeb. nicht in Dero damaligem Schreiben ausdrücklich gesaget hätten daß die 38 *formulae* in welchen diese *numeri* m & n vorkommen *nullo modo quadrata* seyn könnten, würde ich einige derselben nicht so leicht in zweiffel gezogen haben und glaube nunmehro gern daß sie nach der von Ew. HochE. angeführten *restriction* alle richtig sind.[2] Vieleicht wäre es aber besser wann man bemeldte *numeros* allezeit in ihrer *general*en Bedeutung liesse, und zum Exempel an statt der *formula* $8mn-3m+3n \neq a^2$ (so einer *restriction* nöthig hat) *generaliter* sagte

$$8\,(3m\mp 1)\,(3n\pm 1)-3\,(3m\mp 1)+3\,(3n\pm 1)\neq a^2,$$

worin dasjenige so bey dem *theoremate essentiel* ist, bestehet. Ich habe ferner *observi*ret daß wann $emn-m-n$ kein *quadratum* seyn kan, auch $emn-n-e\neq\square$ oder wann e ein *numerus integer huius conditionis* ist daß $\dfrac{a^2+n}{en-1}$ niemals ein *numerus integer* seyn kan alsdenn auch $\dfrac{a^2+e}{en-1}$ kein *numerus integer* ist.

Vor die mir *communici*rten fürtrefflichen *Theoremata* dancke ich verbundenst und verbleibe mit besonderer hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 17. *Aug.* 1744.

P. S. Unlängst haben I[hro] Kays[erliche] *M*[*ajestä*]^t mich (wiederum *praeter meritum et petitum*) zum würckl[ichen] *E*[*tat*s] R[at][3] nebst dem *appointement* von 2000 R. ernennet.

R 796 Reply to n° 80
Moscow, August (6th) 17th, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 86–87r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 23v–24r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 295–296; *Euler-Goldbach* (1965), p. 202–203

83
Euler to Goldbach
Berlin, September 19th, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgebohrnen würde ich nicht ermangelt haben zu Dero bey dem letsten Feste neuerhaltenen Würde[1] meine gehorsamste *Gratulation* so gleich abzustatten, wann mich nicht die Ankunft und Anwesenheit der HH. *Prof. Heinsius* und Krafft[2] dermassen *distrahi*ret hätten, daß ich seit einigen Wochen sehr wenig Zeit auf Nachdenken dergleichen Ewr. Wohlgeb. mir letst überschickte Blätter erfordern, habe anwenden können. Ewr. Wohlgeb. *gratuli*re ich allso zu diesem neuen *Avancement* von Grund meines Herzens; und da Ihro Kaiserl[iche] *Majestät* hiedurch ein so deutliches Merkmaal Dero Allerhöchsten Gnade gegen Ewr. Wohlgeb. an den Tag geleget, so wünsche ich, daß sowohl diese als alle künftige Gnaden Bezeugungen zu Ewr. Wohlgeb. wahrem Vergnügen und beständigem Wohlseyn gereichen mögen. Hiebey nehme ich aber auch die Freyheit mich sammt den meinigen zu Ewr. Wohlgeb. gegen mich bißher bezeugten gantz besonderen Gewogenheit fernerhin gehorsamst zu empfehlen.

Der H. *Prof. Heinsius* ist nebst dem H. *Mag*[*ister*] *Gellert* schon vor einigen Wochen, nachdem er sich acht Tage hier aufgehalten, weiter nach Dresden fortgereiset. Bald darauf ist endlich auch der H. *Prof. Krafft* allhier glückl[ich] angekommen, nachdem er durch den *contrair*en Wind wiedrum nach *Cronstatt* zurückgetrieben, und erst den 2$^{\text{ten}}$ *Aug.* von neuem in die See zu gehen genöthiget worden. Ich habe demselben sogleich bey seiner Ankunfft Ewr. Wohlgeb. Schreiben eingehändiget,[3] welcher sich hierdurch gehorsamst bedancken und zu Dero Wohlgewogenheit empfehlen lässt.

M.^{r} *Clairaut* hat mich von neuem versichert, daß bey der letsten Untersuchung der eingeschickten *Pieces* über den *Magnet*en die meinige die gröste *Approbation* gefunden, daß aber drey von den fünf dazu ernannten *Commissariis*, welche *Neutonianis*che *Attractionist*en seyn, in dem Gedanken stehen, daß diese Frage nimmer auf eine *Mechani*sche Art erklärt werden könne; nach 2 Jahren müsse aber nach den Gesetzen der *Academie* der Preiß nothwendig ausgetheilet werden.[4] Unterdessen deucht mich, daß wann die Herren die Auflösung dieser Frage für unmöglich halten, dieselben die von neuem darauf gesetzten 2500 *Livres* auf eine ihrem Urtheil nach mögliche und nützlichere Frage hätten setzen sollen.

Ich bekomme allhier selten neue Bücher zu sehen; dahero ist mir auch dasjenige dessen Ewr. Wohlgeb. unter dem *Titul La methode des fluxions* Meldung thun nicht bekannt, ich zweifle aber nicht, eben dieser *Tractat* werde sich in der *Collectione Omnium Opusculorum Newtoni*, welche kürzlich zu *Lausanne* herausgekommen, befinden.[5]

Ewr. Wohlgeb. *Observation*,[6] daß, wann $emn - m - n \neq \square$ auch $emn - m - e \neq [\square]$, kan zu Entdeckung vieler neuer *Theorematum* Anlaß geben; dann wann $emn - m - n \neq \square$ so wird auch wann man setzt $n = pmm - m$, seyn $epm^3 - emm - pmm \neq \square$ oder $emp - p - e \neq \square$.

Ewr. Wohlgeb. thun in Dero Briefe nicht die geringste Meldung, warum Dieselben die aus Dero Reiße *Journal* ausgeschnittenen Blätter bey gefüget haben.[7] Ich vermuthe aber daß hiezu die *Series* $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{216} + etc.$ deren *summ* von dem *Hugenio* $= \frac{1}{4}$ soll angegeben worden seyn, mag Anlaß gegeben haben;[8] ich kan aber die *legem progressionis* der *seriei* nicht einsehen: wann 256 an statt 216 stehen sollte, so würde ich glauben, daß von dieser *serie*

$$\frac{1}{8 \cdot 1} + \frac{1}{8 \cdot \frac{4}{1}} + \frac{1}{8 \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{2}} + \frac{1}{8 \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{8}{3}} + etc.$$

die Rede wäre, deren *summ*

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16 \cdot 2} + \frac{1}{32 \cdot 3} + \frac{1}{64 \cdot 4} + etc. = \frac{1}{4}\,\ell\, 2,$$

und folglich kleiner als $\frac{1}{4}$. Die übrigen *summas*, welche Ewr. Wohlgeb. in diesen Blättern aufgezeichnet, habe ich bald *demonstri*ren können. Die *Formula generalis*

$$\frac{anxh^{x+1} - (anx + an)\,h^x}{m^2h^{2x+1} + mnxh^{x+1} + (mnx + mn)\,h^x + nnxx + nnx}$$

*resolvir*t sich in

$$\frac{\frac{an}{m}x}{mh^x + nx} - \frac{\frac{an}{m}(x+1)}{mh^{x+1} + n\,(x+1)}.$$

Wann nun die *series*, so aus dem ersten Glied entspringt, ist $A + B + C + D + etc.$ so gibt das andere Glied diese *seriem* $B + C + D + etc.$; folglich ist die *Summa* $= A = \dfrac{an}{mmh + mn}$.

Was Ewr. Woh[l]geb. in den folgenden Blättern von den *Imaginariis* und *negativis negativorum* schon vor so vielen Jahren *meditir*t haben, ist der Wahrheit dergestalt gemäß, daß man dadurch alle Schwierigkeiten, welche über diese Materie gemacht zu werden pflegen, aus dem Grunde heben kan.[9]

Übrigens, damit Ewr. Wohlgeb. geführte *Correspondenz* nicht unvollständig werde, so schicke hiemit die mir gütigst zugesandten Blätter wiedrum zurück, und bedanke mich zugleich für die *Communication* derselben gehorsamst, der ich mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang verharre

Eurer Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 19^{ten} *Sept.*
1744.

P. S. Daß *dato numero primo hujus formae* $4n+1$ allezeit eine Zahl von dieser Form $aa+1$ gefunden werden könne, welche sich durch $4n+1$ theilen lasse, ist deswegen gewiß, weilen der *numerus primus* $4n+1$ allzeit eine *summa duorum quadratorum* ist.[10] Dann wann $4n+1 = pp+qq$ so können immer solche Zahlen f und g gefunden werden, daß $gp - fq = \pm 1$, oder daß der Bruch $\frac{f}{g}$ dem Bruch $\frac{p}{q}$ so nahe kommt, daß wann man einen von dem andern *subtrahir*t, im Zehler nur 1 überbleibt. Wann nun solchergestalt der Bruch $\frac{f}{g}$ gefunden worden, so ist $a = fp + gq$ oder *generaliter* $a = (4n+1)\,m \pm (fp+gq)$. Der Bruch $\frac{f}{g}$ kan aber allzeit durch meine *methode* die Brüche in kleinern Zahlen *proxime* auszudrücken, lei[cht] gefunden werden. Als wann $4n+1 = 853$ so ist $4n+1 = 18^2 + 23^2$; und folglich $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$. Nun stelle ich zwischen den Zahlen 23 und 18 die *Operation* an, welche zu Findung des *maximi communis divisoris* gebraucht wird, als

$$\begin{array}{rrrrrrr}
18) & 23 & (1 & & & & \\
 & \underline{18} & & & & & \\
 & 5) & 18 & (3 & & & \\
 & & \underline{15} & & & & \\
 & & 3) & 5 & (1 & & \\
 & & & \underline{3} & & & \\
 & & & 2) & 3 & (1 & \\
 & & & & \underline{2} & & \\
 & & & & 1) & 2 & (2 \\
 & & & & & \underline{2} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Diese *Quotos* schreibe ich hinter einander, und *formi*re daraus folgende Brü[che]

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 3, & 1, & 1, & 2 \\
\frac{1}{0}, & \frac{1}{1}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{4}, & \frac{9}{7}
\end{array}$$

nehmlich ein jeder *Numerator* oder *Denominator* mit der obgeschriebenen Zahl *multiplicir*t gibt nebst dem vorhergehenden *Num.* oder *Denom.* *addir*t den folgenden *Num.* oder *Denom.*; allso ist $9 = 1 \cdot 5 + 4$; $7 = 1 \cdot 4 + 3$, *etc.* Der letste Bruch $\frac{9}{7}$ kommt nun dem $\frac{23}{18}$ so nahe daß die *Differentz* $\frac{1}{7 \cdot 18}$ durch einen Bruch *exprimir*t wird, dessen Nenner[!] = 1. Da allso $\frac{p}{q} = \frac{23}{18}$ so ist $\frac{f}{g} = \frac{9}{7}$ und allso $a = 9 \cdot 23 + 7 \cdot 18 = 333$: folglich $333^2 + 1$ *divisibel* durch 853.

Exempl[*um*] 2. Es sey $4n + 1 = 178\,481 = 391^2 + 160^2$; so *operi*re ich allso:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
160) & 391 & (2 & & & & \\
 & \underline{320} & & & & & \\
 & 71) & 160 & (2 & & & \\
 & & \underline{142} & & & & \\
 & & 18) & 71 & (3 & & \\
 & & & \underline{54} & & & \\
 & & & 17) & 18 & (1 & \\
 & & & & \underline{17} & & \\
 & & & & 1) & 17 & (17 \\
 & & & & & \underline{17} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
2, & 2, & 3, & 1, & 17 & \\
\frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{17}{7}, & \frac{22}{9} & \ldots\ \frac{391}{160}:
\end{array}$$

dahero ist $a = 22 \cdot 391 + 9 \cdot 160 = 10\,042$, welches die kleinste Zahl ist deren *Quadrat* $+\,1$ theilbar ist durch 178 481, da[nn] $aa + 1 = 100\,841\,765 = 178\,481 \cdot 565$.

P. S.[11] Diesen Augenblick wird durch einen Königl[ichen] *Officier* die erfreuliche Nachricht überbracht, daß sich die Statt Prag an Unsern Allergnädigsten König ergeben, und die aus 16 000 Mann bestehende Besatzung zu Kriegs Gefangnen gemacht worden.[12]

R 797 Reply to n° 82
Berlin, September 19th, 1744
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 105–106v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 297–301; *Euler-Goldbach* (1965), p. 203–206

84
Goldbach to Euler
Moscow, October (1st) 12th, 1744[1]

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer Hochedelgebohrnen bin ich für die an mich abgestattete *gratulation*[2] dienstlich verbunden, und würde mich sehr freuen wann ich Deroselben so wohl als Dero werthesten Angehörigen einige Gefälligkeiten zu erweisen Gelegenheit hätte. Ich bitte mir künfftig zu melden was mein lieber Pathe *Johannes Albertus* bißhero für *Progressen* gemachet und ob er eine *inclination* zur *Mathematic* bezeiget, in welchem Fall ich nicht zweiffele daß er es in wenig Jahren sehr weit bringen werde.

Ich lasse dahin gestellet seyn ob bey jetzigen Zeitläufften nicht *independamment de toute attraction Newtonienne, trente raisons* mögen gewesen seyn wodurch man die austheilung des Preises zu *differi*ren genöthiget worden.[3]

Mein voriger Brief wurde in solcher Eyle geschrieben, daß ich gar vergessen zu melden, warum ich die eingeschlossenen Blätter beygefüget.[4] Ich habe in vorigen Jahren von unterschiedenen Briefen die es nicht werth gewesen *copi*en behalten, wovon, als ich dieselbe unlängst durchgeblättert, ein gutes Theil *cassi*ret worden, weil aber doch in den übersandten Blättern einige Anmerckungen über die *numeros negativos* waren, so sich wohl möchten behaupten lassen, habe ich selbige Eurer HochEdelg. gleichsam vor die lange weile *communici*ren wollen; was sonsten von *Seriebus* darinnen enthalten seyn mag, hat mir damals neu geschienen und ist nunmehro von keiner Erheblichkeit.

Eurer HochEdelgeb. *methode*[5] die *numeros* a^2+1, so durch den *numerum primum* $4n+1$ *divisibiles* sind, zu finden gefället mir sehr, ich glaube kaum daß ein anderer *processus* in diesem Falle möglich sey und daß der selbe wohl niemanden vor Eurer HochEdlen bekannt gewesen seyn mag.

Es ist mir[6] unlängst bey der *formula* $emn \cdots fm \cdots gn$ folgendes eingefallen: *Innumerabiles sunt numeri qui ad hanc formulam* $10mn \pm (m+7n)$ *redigi non possunt ut* 1, 3, 4, 6, 9, 10, *&c. sed nulla potest dari formula generalis algebraica* $a+bx+cx^2+$ *&c.* (*ubi* x *designet numerum integrum variabilem,* a, b, c, *&c. constantes*) *ita comparata ut dici possit*

$$10mn \pm (m+7n) \neq a+bx+cx^2+ \&c.,$$

quem ad modum dici potest $4mn-m-n \neq x^2$. Man könnte zwar sagen daß auch mn für sich allein dieselbe Eigenschafft hat, es ist aber selbiges theils alsofort *evident*, theils gehöret mn nicht eigentlich zur *formula* $emn \cdots fm \cdots gn$ allwo durch e, f, *&* g *numeri integri* verstanden werden.

Ich möchte wohl wissen[7] ob Ew. Hochedelg. den *numerum* e in dieser *proposition* $A \ldots emn-m-n \neq a^2$, ausser dem *casu* da e ein *multiplus quaternarii* ist, auf vielerley Art *determini*ren können? Dieses kan ich indessen *demonstri*ren daß die *propos*[*ition*] A allezeit falsch ist wann e nicht diese Form hat $(4hk-h+1)$ so daß h und k *numeri integri affirmativi* seyen; dann wann e diese Form nicht hätte, so wäre A *evidenter* falsch *in casu* $n = 1$ und folglich nicht *universaliter negans.*[8]

Als mir neulich ein Theil von den *Memoires de l'Ac*[*ademie*] *pour l'année* 1734 *in* 8. in die hände gerathen, habe ich daselbst *p.* 268 *s*[*equentibus*] des Hn *Clairaut solution de plusieurs problemes &c.* angetroffen. Die *solution* so er giebt kan meines erachtens nicht *generalior* erdacht werden, und was er von dem *probleme troisieme* sagt scheinet mir auch sehr merckwürdig.[9] Der H. *Bouguer* brauchet vor das *signum* so E. HochE. schreiben $\nless$, dieses $\geqq$ welches zwar nicht *compendi*öß, aber sehr *expressif* ist.[10]

Die Nachricht von der Eroberung Prag[s] habe zu erst aus Ew. HochEd. Schreiben ersehen[11] und noch selbigen Tages die völlige *Confirmation* davon vernommen.

Ich verharre mit besonderer Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 1. *Oct. st. n.*[12]
1744.

R 798 Reply to n° 83
Moscow, October (1st) 12th, 1744
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 88–89v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 24v–25r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 302–304; *Euler-Goldbach* (1965), p. 206–207

85
Euler to Goldbach
Berlin, November 17th, 1744

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Eurer Wohlgebohrnen gantz besondere Gewogenheit gegen mich und die meinigen erkenne ich mit der gehorsamsten Verpflichtung, und habe wegen Dero Pathens[1] die Ehre zu berichten: daß ungeacht derselbe in den *Studiis* noch nicht so weit gekommen als ich wünsche, die Ursach davon doch weder einer Nachlässigkeit noch einem Mangel des *Ingenii* zugeschrieben werden könne. Er hatte in Petersburg die Schwindsucht schon in einem solchen Grad, daß die *Medici* fast alle Hoffnung zu seiner Genesung verlohren hatten, die See Lufft und See Krankheit bekam ihm aber so wohl, daß er allem Ansehen nach völlig gesund hieher gebracht worden; seit der Zeit ist er aber alle Winter mit einem *Recidiv* überfallen worden, daß er immer einige Monathe bettlägerig gewesen, in welchem Zustand er dann immer wiedrum einen guten Theil desjenigen, was er in den Sommer Monathen erlernet hatte, vergessen. Vergangenes Früh Jahr hat er nebst unsern übrigen Kindern die Poken gehabt, welche Gott sey Dank eine so gute Würkung gehabt, daß er von der vorigen Krankheit gäntzlich befreyet zu seyn scheinet, und sich noch bey der jetzigen *Saison*, welche für ihn sonst die gefährlichste gewesen, wohl auf befindet. Er ligt allso den *Studiis* mit allem Fleiß ob, und ist auch an seiner Fähigkeit nichts auszusetzen; die meiste Zeit bring ich mit ihm im lateinischen zu, und laße ihn täglich verschiedene *Exercitia* machen. über dieses aber *tracti*re ich die *Arithmetic* und *Geometri*e immer mit ihm, worinn er alles bald begreifft, und ich habe ihm auch schon die ersten Anfänge der *Algebra* beygebracht; dahero ich hoffe, daß ich ihn, wann er von keiner neuen Krankheit überfallen wird, mit Gottes Hülfe ziemlich weit bringen werde.

Daß Ewr. Wohlgeb. meine *Methode* die *numeros* $aa+1$ zu finden so durch den *Numerum primum* $4N+1$ theilbar sind, einiger *Attention* gewürdiget,[2] erfreuet mich sehr; der Beweiß davon ist dieser:

Wann $aa+bb$ *divisores* haben soll, so müßen die Buchstaben a und b allso beschaffen seyn, $a=mp+nq$ und $b=mq-np$: dann da[mit] wird $aa+bb=(mm+nn)\,(pp+qq)$,[3] und folglich ist $aa+bb$ *divisibel* du[rch] $pp+qq$. Da nun $4N+1$ immer auf die *Form* $pp+qq$ gebracht werden ka[n,] so müssen solche Zahlen für m und n gefunden werden, damit b gleich wird ± 1; oder $mq-np=\pm 1$. Wann ich allso aus der *Aequalität* $4N+1=pp+qq$ den Bruch $\frac{p}{q}$ *formi*re, so muß ein anderer Bruch $\frac{m}{n}$ gesucht werden dergestalt, daß wann diese brüche $\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}$ *per crucem multiplicir*t werden die *producta* mq und np nur *unitate differi*ren: oder der Bruch $\frac{m}{n}$ muß *in minoribus numeris* dem Bruch $\frac{p}{q}$ *proxime* gleich seyn. Wann ich nun mit den Zahlen p und q die *Operation* anstelle, welche man um den *maximum communem divisorem* davon zu finden, zu machen pflegt, und aus den *Quotis* auf vorher beschriebene Art *fractiones formi*re, so ist der letste Bruch $=\frac{p}{q}$; und da in einer solchen Reihe Brüche zwey neben einander stehende immer so beschaffen sind, daß die *producta ex multiplicatione per crucem orta* nur um 1 von einander *differi*ren, so kan die *fractio penultima* für $\frac{m}{n}$ angenommen werden, da dann herauskommt $a=mp+nq$.

So viel ich mich erinnere, so sind mir die in den jüngstens überschickten Briefen enthaltenen Begriffe von den *numeris imaginariis*[4] sehr gründlich vorgekommen.

Wann $emn+fm+gn\neq a+bx+cxx$, so würde auch

$$4cemn+4cfm+4cgn\neq 4ac+4bcx+4ccxx=4ac-bb+(b+2cx)^2:$$

und folglich würde $4cemn+4cfm+4cgn-4ac+bb\neq\square$. Ob es nun möglich ist dergleichen *formuln* zu finden, so kommt es darauf an ob es solche *Formuln* gebe, $emn\pm fm\pm gn\pm h$, welche nimmer ein *quadrat* werden können. Ich habe aber auf dergleichen *Formuln* vorher nicht gedacht, und darüber auch noch jetzt nichts entdeket, welches an Ewr. Wohlgebohrnen überschrieben zu werden verdiente.

Was die *Formul* $emn - m - n$ betrifft, so habe ich sehr weit hinaus alle Zahlen für e gesucht, in welchen diese *Formul* ein *Quadratum* wer[den] kan, und habe gefunden daß für e alle Zahlen gesetzt werden können, ausser diesen: 4, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 32, 36, 39, 40, 44, 47, 48, 52, 55, 56, 60, 63, 64, 68, 71, 72; so weit bin ich mit meiner Untersuchung gekommen;[5] da nun in diesen Zahlen keine andere, als welche in diesen beyden *Formuln* $4k$ und $8k - 1$ enthalten sind vorkommen, so deucht mich die *Induction* richtig zu seyn, wann ich sage, daß so wohl diese *Formul* $4kmn - m - n$ als diese $(8k - 1)\,mn - m - n$ kein *Quadrat* werden könne.[6] Ich habe noch nicht nur keine von diesen beyden *Formuln* falsch befunden, sondern wann auch für e irgend eine andere Zahl ausser $4k$ und $8k - 1$ angenommen wird, so habe ich noch immer die *Formul* $emn - m - n$ auf ein *Quadrat* bringen können.[7]

Auf Ewr. Wohlgeb. Veranlassung habe ich des H. *Clairaut Piece* in den *Memoires A*[*nni*] 1734 nachgelesen. Die *solution* der beyden erstern ist die *Newtoni-ani*sche, und kan freylich nicht allgemeiner seyn. Das dritte *Problema* ist in der That sehr merkwürdig; die *solution* ist aber so beschaff[en,] daß dieselbe auf keinen andern als einen rechten Winkel *applicir*t werden kan; da doch der *Casus* wann der *angulus* nicht *rectus* ist eben so möglich ist. Ich habe mit dem H. *Clairaut* viel darüber *correspondir*t, wir haben a[ber] beyde diesen letstern *Casum* nicht ins reine bringen können.[8]

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Wohlgeb. gehorsamst empfeh[len,] und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn

Eurer Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonhard Euler

Berlin den 17 *Nov.*
1744.

R 799 Reply to n° 84
Berlin, November 17th, 1744
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 107–108v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 305–307; *Euler-Goldbach* (1965), p. 207–208

86

Goldbach to Euler

Petersburg, January (15th) 26th, 1745

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen erstatte ich dienstlichen Danck für die mir auf mein Verlangen ertheilte Nachricht von den *Progress*en Dero ältesten Hn Sohnes;[1] bey des selben annoch zartem Alter und schwächlichen Gesundheit kan ich Eurer Hoched. Behutsamkeit, indem Sie ihn mit vielem *memori*ren und lernen verschonen, nicht gnugsam loben. Dasjenige welches bey so gar jungen Jahren versäumet oder ausgesetzet wird kan künfftiger zeit wann die Leibes und Gemüths kräffte zunehmen gar leicht nachgeholet werden da es hingegen bey anhaltender Kranckheit sehr unverantwortlich seyn würde selbigen durch vieles *mediti*ren noch mehr zu schwächen und bey *continui*render solcher Leibes *Constitution* viel rathsamer für ihn wäre ein solches *genus vitae* zu erwehlen welches kein grosses nachdencken oder besondere Gelehrsamkeit erfordert.

Aus Eurer HochEdelgeb. letzterem Schreiben[2] habe ich ersehen daß Sie zu der *aequatione* $emn - m - n$ keine andere *valores* vor e als die entweder *multipli quaternarii* oder $= 8k - 1$ sind, gefunden haben; weil Sie sich aber hierin bloß auf eine *induction* beziehen,[3] so habe hiebey anmercken wollen, daß wenigstens ausser diesen beyden *casibus* die *propositio* $emn - m - n \neq a^2$ allezeit falsch ist und die *quadrata* denen $emn - m - n$ gleich wird, sogar angegeben werden können so offt entweder e oder $e - 1$ ein *divisor* von einem *quadrato unitate aucto* seyn kan.[4] Denn *in casu primo ubi* $be = c^2 + 1$, *fiat* $n = b + 1$, $m = b + b^2$, *erit*

$$emn - m - n = eb\,(b+1)^2 - b\,(b+1) - (b+1) = (eb-1)\,(b+1)^2 = c^2\,(b+1)^2\,;$$

in casu secundo wann $e - 1$ ein *divisor* ist von $a^2 + 1$, *ponatur* $m = 1$, $n = \dfrac{a^2+1}{e-1}$. *Igitur nullae aliae sunt formulae possibiles pro e in propositione $emn - m - n \neq a^2$, nisi cum e est vel quaternarius (aut eius multiplus quicunque) vel cum e est $= 8k - 1$; utrovis enim casu tam e quam $e - 1$ nullo modo dividere possunt quadratum unitate auctum; hinc fit, ut quamvis $4k - 1$ non possit dividere quadratum unitate auctum, tamen ad exprimendum valorem e in propositione $emn - m - n \neq a^2$ ineptum sit, propterea quod $e - 1 = 4k - 2$ potest esse divisor quadrati unitate aucti; ex quibus sequitur praeter numeros in formula $4k$ et $8k - 1$ comprehensos alios nullos posse substitui pro e, quoniam scilicet nulli alii hac gaudent proprietate ut tam e, quam $e - 1$ dividere nequeat quadratum unitate auctum,*[5] *et si nondum demonstratum sit omnes numeros huius formae $8k - 1$ pro e positos satisfacere quod tamen verisimillimum arbitror, nec dubito quin aliqua ratione quae mihi nunc non suppetit, demonstrari possit.*

Auf meiner Rückreise von *Moscau* hieher ist mir eingefallen daß vieleicht die *propositio de numeris primis huius formae* $4n + 1$ *qui sunt summae duorum quadratorum* nur ein *corollarium huius theorematis* seyn möchte: *Omnes numeri huius formae* $4n + 1$*, qui dividi nequeunt per numerum huius formae*[6] $4m \mathbin{\overset{..}{\underset{..}{+}}} 1$*, tot modis sunt summa duorum quadratorum, quot modis dispesci possunt in duos factores;*[7] *exempli gratia*

65 *est numerus huius formae* $4n + 1$ *nec dividi potest per numerum ullum huius formae* $4m - 1$, *ergo* 65 *tot modis est summa duorum quadratorum quot modis dispesci potest in duos factores, nempe duobus modis* (1.) $1 \cdot 65$ (2.) $5 \cdot 13$; *est igitur aggregatum duorum quadratorum* (1.) $1 + 64$, (2.) $16 + 49$.

Similiter 25 *est numerus huius formae* $4n+1$ *nec dividi potest per numerum huius formae* $4m-1$; *igitur cum dupliciter resolvi possit in duos factores nempe* (1.) *in* 1 *et* 25, (2.) *in* 5 *et* 5, *erit dupliciter summa duorum quadratorum nempe* (1.) $0+25$, (2.) $9+16$.

Similiter numerus 625 *eiusdem naturae tripliciter resolvitur in duos factores* (1.) $1\cdot 625$, (2.) $5\cdot 125$, (3.) $25\cdot 25$; *ergo tripliciter est summa duorum quadratorum* (1.) 0^2+25^2, (2.) 7^2+24^2, (3.) 15^2+20^2.

Numerus 493 *eiusdem naturae duobus modis resolvi potest in duos factores* (1.) $1\cdot 493$, (2.) $17\cdot 29$; *ergo duobus modis est summa duorum quadratorum* (1.) 3^2+22^2, (2.) 13^2+18^2 *&c.*

Übrigens habe ich zwey *method*en wann die *aequatio* $emq-q-m=a^2$ in einem *casu* q *possibilis* ist *innumeros alios casus pro aequatione* $emn-m-n=b^2$ zu finden, nemlich *si fiat*

(I.) $\left(q-2ak+(em-1)\,k^2\right)=n$,

(II.) $((em-1)\,h+1)^2\,q-hm\,((em-1)\,h+2)=n$,

ubi h *et* k *sint numeri quicunque modo* n *fiat integer*; deren Wahrheit *per ipsam substitutionem* alsofort *demonstri*ret wird.

Ich verharre mit vieler hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg[8]
den 26. *Jan. st. n.* 1745.

R 800 Reply to n° 85
Petersburg, January (15th) 26th, 1745
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 90–91v
Partial copy, 5 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 25v–27v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 308–310; *Euler-Goldbach* (1965), p. 209–210

87
Euler to Goldbach
Berlin, February 16th, 1745

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgeb. erkenne ich mich gehorsamst verbunden für Dero gantz besondere Wohlgewogenheit gegen unseren *Albrecht*. Weilen derselbe nun diesen Winter meistens ohne Krankheit überstanden, so haben wir das gute Vertrauen, daß sich sein bißheriger kränklicher Zustand nach und nach verlieren, und er dadurch noch in Stand kommen werde, mit Gottes Hülfe etwas rechts zu erlernen. Er kan schon ziemlich fertig alle *algebrai*schen Aufgaben, welche auf *Aequationes simplices* führen, *solvi*ren, und seit etlichen Tagen führe ich ihn zu *quadrati*schen *Aequation*en an, worein er sich gleichfalls wohl findet. Das Latein geht auch ziemlich von statten, ungeacht ich ihn mit vielem Auswendiglernen nicht beschwehre.

Daß diese *Formul* $emn-m-n$ nimmer ein *Quadrat* seyn könne wann e entweder eine solche Zahl $4k$ oder eine solche $8k-1$ ist, habe ich nur aus einer *Induction* geschlossen. Diese *Observation* erhält aber durch Ewr. Wohlgeb. Entdeckung einen weit grösseren Grad der Gewißheit.[1] Dann dadurch wird unwiedersprechlich dargethan, daß so offt entweder e oder $e-1$ ein *Divisor* ist von $cc+1$ für *m et n* allzeit solche Zahlen gefunden werden können, daß $emn-m-n$ ein *Quadrat* wird; weil nun weder $4k$ noch $8k-1$ immer hierinn Platz finden können, so kan auf diese Art weder für $e=4k$ noch für $e=8k-1$ die *Formul* $emn-m-n$ zu einem *Quadrat* gebracht werden. Um aber die *Demonstration* vollkommen zu machen, so müsste man auch die *Propositionem conversam* beweisen können, daß so offt $emn-m-n$ ein *Quadrat* seyn kan, auch entweder e oder $e-1$ ein *divisor* sey von einer solchen Zahl $cc+1$. So lang allso dieses nicht erwiesen ist, so lang kan man auch nicht behaupten, daß der obige Satz völlig bewiesen worden, ob man gleich daran gar keine Ursach zu zweifeln hat.[2] Es gibt in der *Arithmetic* eine grosse Menge solcher Sätze, an welchen niemand zweifelt, ungeacht man dieselben nicht *demonstri*ren kan: Ich habe zum *Exemp*el diesen Satz noch nirgend bewiesen gefunden: *qui numerus in integris non est summa duorum quadratorum, eundem ne in fractis quidem esse posse summam duorum quadratorum.*[3] Um dieses zu beweisen, müsste man zeigen daß wann ann einer *summae duorum quadratorum* gleich ist, auch allzeit a eine *summa duorum integrorum quadratorum* seyn müsse. Gleicher Gestalt ist leicht zu *demonstrir*en, daß das *Product ex binis summis duorum quadratorum* auch eine *summa duorum quadratorum* sey: hieraus erhellet aber noch nicht, daß wann eine *summa duorum quadratorum per summam duorum quadratorum dividir*t wird, der *Quotus* auch eine *summa duorum quadratorum* seyn müsse: woran doch niemand zweifelt. Es ist auch meines Bedünkens noch nicht erwiesen, daß eine *summa duorum quadratorum inter se primorum* keine andere *Divisores* haben könne, *nisi qui sint ipsi duorum quadratorum summae*. Eine gleich[e] Bewandtnüß hat es auch mit dieser *Prop*[*osition*]: *Omnem numerum primum hujus formae* $4n+1$ *semper esse summam duorum quadratorum idque unico modo.*[4] Wann man nun dieses voraussetzt, so lassen sich Ewr. Wohlgeb. *Theoremata* leicht erweisen. Dann wann $4n+1$ keinen *divisorem* hat *formae* $4m-1$ so müssen alle *factores* von dieser *Form* $4m+1$ und folglich *summae duorum quadratorum* seyn: es ist aber *generaliter*

$$(aa+bb)\,(cc+dd)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

und allso *duplici modo in duo quadrata resolubile.*[5] Hernach lässt sich auch leicht erweisen, *quod, si quis numerus duplici modo in duo quadrata fuerit resolubilis, eum non esse primum; sit enim* $N=aa+bb=cc+dd$ *erit*

$$N=\frac{\Big((a-c)^2+(b-d)^2\Big)\Big((a+c)^2+(b-d)^2\Big)}{4\,(b-d)^2}.$$

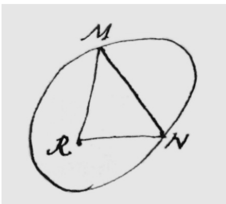
Ferner hat auch dieser Satz seine Richtigkeit: *Si numerus* $4n+1$ *unico modo in duo quadrata resolvi possit, tum certo erit numerus primus*;[6] *sin autem* $4n+1$ *nullo modo fuerit summa duorum quadratorum, tum non erit primus, sed factores habebit formae* $4m-1$ *vel duos vel* 4, *vel* 6, *etc. At si* $4n+1$ *pluribus modis fuerit summa duorum quadratorum tum quoque binos pluresve habebit factores formae* $4m+1$. Und aus diesem Grunde ist nicht schwehr, sehr grosse Zahlen $4n+1$ zu untersuchen ob dieselben *primi* sind oder nicht?[7]

Gleich wie ich bewiesen habe daß alle *divisores primi hujus formae* a^2+b^2 in dieser *Expression* $4n+1$ enthalten sind, allso kan ich auch *demonstri*ren daß alle *divisores* von a^4+b^4 in dieser *Form* $8n+1$, und *generaliter*, daß alle *divisores* von $a^{2^m}+b^{2^m}$ in dieser *Form* $2^{m+1}n+1$ enthalten sind. Folgende *Theoremata* kan ich auch *rigorose* beweisen:

I. *Si* a^m-b^m *fuerit divisibilis per numerum primum* $2n+1$ *atque* p *sit maximus communis divisor numerorum* m *et* $2n$ *tum quoque* a^p-b^p *per* $2n+1$ *divisibilis erit.*

II. *Si haec formula* af^n-bg^n *fuerit divisibilis per numerum primum* $mn+1$, *tum quoque* a^m-b^m *per* $mn+1$ *erit divisibile. Si ergo pro* f *et* g *ejusmodi numeros invenire liceat, ut* af^n-bg^n *sit divis*[*ibilis*] *per* $mn+1$, *tum formula* a^m-b^m *necessario erit per* $mn+1$ *divisibilis.*[8]

Ich bin letstens auf dieses *Problema* gefallen:[9]



Circa datum punctum radians R curvam describere ejusmodi, ut singuli radii ex R egressi post duplicem reflexionem in M et N in ipsum punctum R revertantur. Es gibt ausser der *Ellipsi alterum focum in R habente* noch unendlich viel andere Linien *Quaesito satisfacientes* so wohl *algebraicae* als *transcendentes*: und dieses *Problema* deucht mich eines von den schwehrsten *in hoc genere* zu seyn.

Haec aequatio $ay\,dy+y\,dx\,(3ax+b)+dx\,\big(ax^3+bxx+cx+f\big)=0$ *potest separari et integrari.*[10]

Hiemit habe die Ehre Ewr. Wohlgeb. mich auf das gehorsamste zu empfehlen, und mit der vollkommensten Hochachtung lebenslang zu verharren

Ewr. Wohlgebohrnen

gehorsamster Diener

Leonh. Euler

Berlin den 16 *Febr.*

1745.

R 801 Reply to n° 86
Berlin, February 16th, 1745
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 111–112v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 311–314; *Euler-Goldbach* (1965), p. 211–212

88
Goldbach to Euler
Petersburg, May (18th) 29th, 1745

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgeb. Schreiben vom 16. *Febr.* habe ich zwar schon längst erhalten, bin aber bißhero durch unvermeidliche Geschäffte darauf zu antworten verhindert worden.

Die *integrationem aequationis*[1]

$$ay\,dy + y\,(3ax+b)\,dx + \left(ax^3+bx^2+cx+f\right)\,dx = 0$$

halte ich vor sehr leicht indem ich alsofort gefunden

$$y = -\,x^2 + \beta x + \gamma,$$

ubi

$$a^2\beta^3 + 2ab\beta^2 + \left(ac+b^2\right)\beta + bc = af$$

et[2]

$$\gamma = \frac{-\,a\beta^2 \overset{..}{\underset{..}{+}} b\beta - c}{a}.$$

Was das andere *problema* betrifft[3] so wird die *curva* nachfolgende *proprietates* haben:

1. muß *posita* $AB = x$, $BC = y$, $HA = a$, $AG = b$,[4] y eine solche *functio ipsius* x seyn, daß *positis* $x = -\,a$ *et* $x = b$, $y = 0$ werde.

2. weil die *pars axis inter radium incidentem AC et radium reflexum CD intercepta*, nemlich AD, *per* x *et* y *ope normalis* CN bekannt wird, folglich *posita* $AD = u$, u *per* x *et* y *data* ist so muß auch *positis* $AF = x'$, $FE = y'$ die *inter radios AE et ED intercepta eadem pars axis AD per* x' *et* y' gegeben seyn, durch welche *aequation* y' *elimini*ret wird.

3. *Fiat*

$$\begin{array}{ccccccc} CB & & BD & & DF & & EF \\ y & : & u-x & :: & x'-u & : & \dfrac{(u-x)\,(x'-u)}{y} \end{array} = y',$$

wodurch x' *elimini*ret wird; wann endlich auch

4. die *summa radiorum incidentis et reflexi usque ad axem* entweder *constans* (wie in der *ellipsi*) oder *certae cuidam functioni ipsius x* gleich gesetzt wird, so kan dadurch auch *y per x determini*ret werden, wie wohl ich dieses alles jetzo nicht gnugsam einsehe und Eurer Hochedelg. besseren Beurtheilung überlasse.[5]

Den inliegenden Brief an Hn *Pr*[*ofessor*] *Gesner recommandi*r[e] ich bestens;[6] ich habe den selben ersuchet, wann er etwas an mich schreiben wollte, es an E. H. zu *adressi*ren, in der hofnung es werde ohne Deroselben *incommodi*tät um so viel mehr geschehen können weil der *casus* vermuthlich nicht mehr als einmal im Jahr *existi*ren wird.

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 29. *Maii st. n.* 1745.

R 802 Reply to n° 87
Petersburg, May (18th) 29th, 1745
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 92rv
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 27v–28v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 315–316; *Euler-Goldbach* (1965), p. 213–214

89
Euler to Goldbach
Berlin, June 19th, 1745

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgeb. Briefe an die HH. *Gesner* und *Heinsius*[1] habe ich noch den selben Tag, als ich sie bekommen, fortgeschickt; ich gedachte anfänglich diese meine Antwort aufzuschieben, biß aus Göttingen etwas an Ewr. Wohlgeb. einlauffen würde; da aber dieses noch einige Zeit anstehen dürfte, so habe ich mit meiner schuldigsten Antwort nicht länger warten wollen.

Ich habe letstens in des *Neaulme*s Buchladen allhier das *Dictionnaire de Trevoux*[2] in 6 starken *Folianten magnific* gebunden angetroffen, man forderte aber darfür 60 Rthl. Wegen eines *Dictionnaire de Rimes*[3] habe noch keine zuverlässige Antwort erhalten können. Jetzo habe ich auch das *Commercium Epistolicum Leibnizii et Bernoullii* in 2 *Vol.* 4to bekommen, worinn sehr viel schöne und wichtige Sachen enthalten sind. Die *Opera Joh*[*annis*] *Bernoullii* sind in 4 *Vol.* 4to, und *Jacobi Bernoullii* in 2 *Vol.* gedruckt; ingleichem ist jetzt auch die *Edition Princip*[*iorum*] *Math*[*ematicorum*] *Phil*[*osophiae*] *Nat*[*uralis*] *Newtoni, cum*

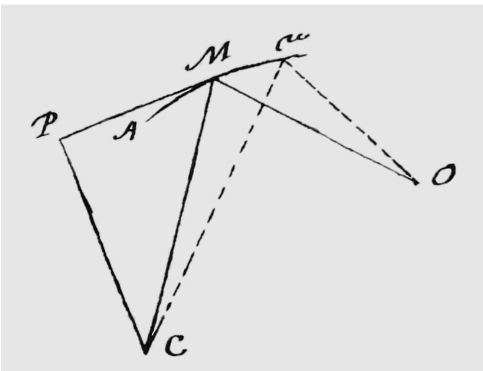
Notis P[*atrum*] *Le Sœur et ...* völlig herausgekommen, welches Werk sehr wohl gerathen.[4] Sollten Ewr. Wohlgeb. etwas von diesen neuen Werken verlangen, so würde von dieser Gelegenheit *profiti*ren Denselben zugleich *Exemplaria* von meinen bißher herausgekommenen Schrifften gehorsamst zu *praesenti*ren, welche allein zu schicken der Mühe nicht werth sind.

Da ein jegliches *Integrale* wann es vollständig seyn soll, eine neue *Quantitatem constantem* in sich enthalten muß, welche in dem *Differentiali* nicht gewesen, so ist die *formula* $y = -xx + \beta x + \gamma$ nicht das vollständige *Integrale* der *Aequation*[5]

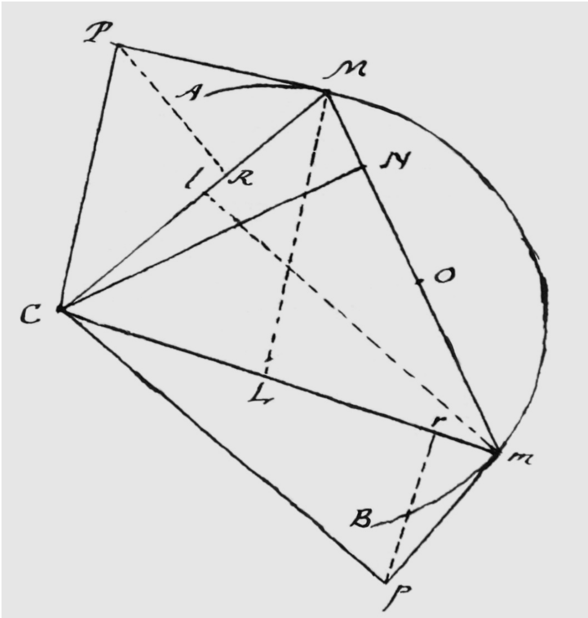
$$ay\,dy + y\ (3ax + b)\ dx + \left(ax^3 + bxx + cx + f\right)\ dx = 0;$$

solches kan aber aus dem *Integrali particulari* leicht gefunden werden, wann man setzt $y = z - xx + \beta x + \gamma$.

Was das andere *Problema* anlangt, welches jetz in den *Actis Lipsiensibus* herauskommen,[6] da die *Radii ex puncto dato emanantes post duplicem reflexionem* in eben dasselbe *Punct* zurükkommen sollen: so hat das *Tentamen* Ewr. Wohlgeb. seine völlige Richtigkeit, und dienet um die *Curvam infra axem constitutam* zu finden, wann die obere als bekannt angenommen wird. Die gröste Schwierigkeit aber beruhet darauf, daß beyde *Curvae eandem curvam continuam* ausmachen;[7] welcher Umstand von Ewr. Wohlgebohrnen nicht in Betrachtung gezogen worden. Ich habe anfänglich die *solution* auch auf eben diese Art *tentir*et; die *Formulae* werden aber allzu weitläuffig und verwirrt, als daß ich dieser letst gedachten Bedingung hätte ein Genügen leisten können. Ich glaubte daß die Annehmung einer Axe daran schuldig wäre, in dem man wenig hinreichenden Grund hat, warum man vielmehr diese als eine andere Linie für die Axe annehmen sollte. Dahero habe ich diese Betrachtung völlig bey seits gesetzt, und meine *solution* folgender gestalt vorgenommen:



Lemma. Si ex foco C in curvam AM radii CM incidant, atque ex C in tangentem MP demittatur perpendiculum CP: vocatis $CM = y$, $CP = p$; *erit longitudo radii reflexi* $MO = \dfrac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy}$.



Probl[ema]. Circa datum punctum C describere curvam $AMmB$, ut radii ex C egressi post duplicem reflexionem in M et m in idem punctum C revertantur.

Solutio: Ad M et m ducantur tangentes MP, mp, in easque ex C demittantur perpendicula CP, Cp. Vocentur $CM = y$; $CP = p$; $MP = q = \surd(yy - pp)$, item $Cm = Y$; $Cp = P$; $mp = -Q = -\surd(YY - PP)$. Sit MO radius reflexus incidenti CM respondens et mO radius reflexus incidenti Cm respondens, erit per lemma: $MO = \dfrac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy}$ et $mO = \dfrac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}$, et

$$Mm = \frac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy} + \frac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}\,.$$

Bisecentur anguli CMm, CmM rectis ML, ml, quae erunt normales ad curvam ac propterea perpendiculis CP, Cp parallelae. Jam cum anguli MCP vel CML sit sinus $= \dfrac{q}{y}$, et cosinus $= \dfrac{p}{y}$, erit anguli dupli CMm sinus $= \dfrac{2pq}{yy}$, cosinus $= \dfrac{pp - qq}{yy} = \dfrac{2pp - yy}{yy}$ et anguli CmM sinus $= -\dfrac{2PQ}{YY}$ et cosinus $= \dfrac{PP - QQ}{YY} = \dfrac{2PP - YY}{YY}$. Ergo perpendiculum $CN = \dfrac{2pq}{y} = -\dfrac{2PQ}{Y}$: et $MN = \dfrac{2pp}{y} - y$, atque $mN = \dfrac{2PP}{Y} - Y$: unde nascuntur hae duae aequationes

I. $\dfrac{pq}{y} + \dfrac{PQ}{Y} = 0$; *et*

II. $\dfrac{2pp}{y} - y + \dfrac{2PP}{Y} - Y = \dfrac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy} + \dfrac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}$

seu $\dfrac{pp}{y} + \dfrac{PP}{Y} = \dfrac{yy\,dp}{2y\,dp - p\,dy} + \dfrac{YY\,dP}{2Y\,dP - P\,dY}$.

Ad has aequationes simpliciores reddendas ex P et p in CM et Cm demittantur perpendicula PR et pr, et vocentur $CR = r$; $PR = s$; $Cr = R$ et $pr = -S$ quia in plagam oppositam vergit, eritque $r = \dfrac{pp}{y}$; $s = \dfrac{pq}{y}$, et ob $y = \dfrac{pp}{r}$ et $dy = \dfrac{2p\,dp}{r} - \dfrac{pp\,dr}{rr}$ erit $2y\,dp - p\,dy = \dfrac{p^3dr}{rr}$ ideoque

$$\frac{yy\,dp}{2y\,dp - p\,dy} = \frac{p\,dp}{dr} = r + \frac{s\,ds}{dr}$$

ob $pp = rr + ss$; simili modo erit $R = \dfrac{PP}{Y}$; $S = \dfrac{PQ}{Y}$;

$$\frac{YY\,dP}{2Y\,dP - P\,dY} = \frac{P\,dP}{dR} = R + \frac{S\,dS}{dR}\,.$$

Quibus valoribus substitutis binae aequationes solutionem continentes abeunt in has:

I. $s + S = 0$,

II. $r + R = r + \dfrac{s\,ds}{dr} + R + \dfrac{S\,dS}{dR}$

seu II. $\dfrac{s\,ds}{dr} + \dfrac{S\,dS}{dR} = 0$.

Quodsi jam ponatur $s = t$ et $\dfrac{s\,ds}{dr} = u$ erit $S = -t$ et $\dfrac{S\,dS}{dR} = -u$; quare cum puncta M et m ad eandem curvam pertinere debeant, eandem relationem inter t et u atque inter $-t$ et $-u$ esse oportet; et quia s exprimitur per radicale $\sqrt{(pp - rr)}$, necesse est ut aequatio inter t et u ita sit comparata, ut non mutetur sive t et u capiantur negative sive affirmative; si itaque pro relatione inter t et u assumatur hujusmodi aequatio

$$\alpha tt + \beta uu = aa, \quad \textit{seu} \quad aa = \alpha tt + \beta uu + \gamma t^4 + \delta ttuu + \varepsilon u^4 \textit{ etc.},$$

semper prodibit curva quaesito satisfaciens. Assumta autem hujusmodi idonea aequatione inter t et u: erit $s = t$; et $\dfrac{s\,ds}{dr} = \dfrac{t\,dt}{dr} = u$, unde fit $r = \int \dfrac{t\,dt}{u}$; $p = \sqrt{(rr + ss)}$, et $y = r + \dfrac{ss}{r}$; sicque obtinetur relatio inter quemvis radium CM et respondens perpendiculum in tangentem CP, ex qua relatione curva construi potest.

Si pro aequatione inter t et u assumatur $tt + uu = aa$ erit $u\,du = -t\,dt$ et $r = b - u$; existente $s = t = \sqrt{(aa - uu)}$, unde $p = \sqrt{(aa + bb - 2bu)}$ et

$$y = \frac{pp}{r} = \frac{aa + bb - 2bu}{b - u},$$

seu ob $u = \dfrac{aa+bb-pp}{2b}$, *erit*

$$r = \frac{bb-aa+pp}{2b}$$

et

$$y = \frac{2bpp}{bb-aa+pp}$$

seu

$$pp = \frac{(bb-aa)\,y}{2b-y},$$

quae aequatio praebet omnes ellipses alterum focum in C habentes. Sumtis igitur aliis aequationibus inter t et u supra descriptam indolem habentes, infinitae aliae curvae satisfacientes prodibunt, inter quas quoque curvae algebraicae reperientur: wie ich dann unter andern auch eine *ordinis sexti* gefunden habe.[8]

Hiemit empfehle ich mich zu Ewr. Wohlgeb. beständigen Gewogenheit und verbleibe mit der vollkommensten Hochachtung

Ewr. Wohlgeb.
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 19 *Jun.*
1745.

Daß mein Vater gestorben,[9] glaube ich Ewr. Wohlgeb. schon berichtet zu haben.

R 803 Reply to n° 88
Berlin, June 19th, 1745
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 117–118v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 317–320; *Euler-Goldbach* (1965), p. 214–216

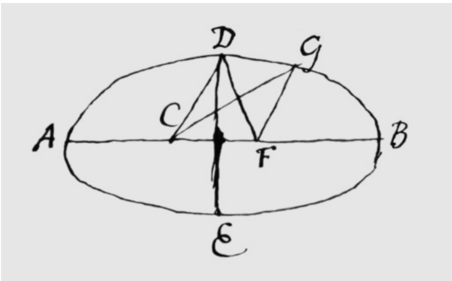
90
Goldbach to Euler
Petersburg, July 1745

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ich weiß nicht eigentlich ob mir bey abgang meines letzteren Schreibens schon bekannt gewesen daß Ew. Hochedelg. das *Directorium* der *Mathemati*schen *Classe* in der Königl[ichen] *Academie* der Wissenschafften erhalten,[1] in welchem fall ich Deroselben (dieses *relativum* gehet so wohl auf Ew. H. als auf die *Acad*[*emie*] selbst) schon damahls, wie ich es jetzo thue, dazu hätte *gratuli*ren sollen. Das absterben

Dero Hn Vaters habe zu allererst aus dem letzten Briefe vernommen,[2] und wie den Verlust so Sie hiedurch erlitten von hertzen bedaure so wünsche hingegen daß Ew. Hochedelg. ein gleiches Alter bey guter Gesundheit und allem Vergnügen erreichen mögen.

Für die mir *communicir*te *Solution*[3] dancke ich dienstl[ich]; ich zweiffele nicht daß die selbe so kurtz sey als nur möglich, allein sie erfordert doch eine besondere *application* um alles recht einzusehen; ohngeachtet nun zur *solution* die *consideratio unius puncti C*: aus welchem die *radii* ausgehen und wohin sie *post duplicem reflexionem* zurückkehren, gnugsam ist, so halte ich doch davor daß ausser diesem noch ein anderes *punctum* in allen dergleichen *curvis*, *in eadem a centro distantia* zugegen seyn muß welches eben dieselbe *propriet*ät als das *punctum C* haben wird dahero, wann das *problema* folgender gestalt *concipi*ret würde:



Datis diametris curvae AB & DE, invenire in axe AB punctum C, ex quo omnes radii &c. so möchte ich gern sehen wie dergleichen *curva non-ellipsis* von einer *ellipsi differi*ren würde denn ich zweiffele sehr ob eine *curva* deren 4 *quadrantes* nicht *similes et aequales* sind (wie in der *ellipsi*) zur *solution* geschickt seyn könne;[4] ist aber die *curva* solcher gestalt beschaffen, so kan man die Probe ob eine *aequatio data satisfaci*ret, auch folgender massen, nach Eurer HochEdelg. Anleitung anstellen: *Sit radius quicunque ex puncto C in curvam incidens* $CD=y$, *radius a curva reflexus (in axem)* $DF = y'$, *radius ab axe reflexus (ita ut* $ang.\,CFD = ang.\,BFG$) $FG = y''$, *radius a curva reflexus* $GC = y'''$. *Requiritur ut spatium in axe interceptum* CF *inter* y *et* y', *item inter* y'' *et* y''' *sit idem.*

Meine Bücher liegen, ausser sehr wenigen die ich auch fast gar nicht lese, schon seit mehr als 3 Jahren[5] in 7 grossen Kisten vernagelt und sind mir solchergestalt mehr zur Last als nützlich dahero ich denn auch die vormahls verlangten Bücher deren Ew. H. Erwehnung thun bey meiner jetzigen *Situation* (mit welcher ich jedoch höchst vergnüget bin) nicht verlange,[6] sondern nur bitte Dero eigenen Schrifften die *Epistolas Lacrosi*, so viel derselben herausgekommen, *in duplo* beyzufügen und wann sich eine bequeme Gelegenheit findet anhero zu senden,[7] das davor ausgelegte soll alsofort auf Dero Anweisung allhie bezahlet werden und ich verharre mit besonderer Hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den [8] *Julii st. n.* 1745.

vert[e]

P. S. H. *Prof. Gretsch*[9] hat mich schon längst ersuchet ihn bey Eurer HochEdelg. aufs beste zu empfehlen.

R 804 Reply to n° 89
Petersburg, July 1745
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 93–94v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 321–322; *Euler-Goldbach* (1965), p. 217–218

91
Euler to Goldbach
Berlin, August 7th, 1745

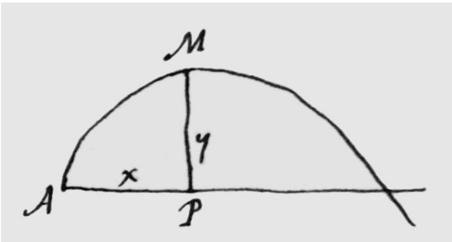
Wohlgebohrner Herr *Etats*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Diesen Augenblick erhalte ich den beygeschlossenen Brief aus Göttingen,[1] welchen mit diesen Zeilen zu begleiten nicht habe ermangeln können. Inzwischen werden Ewr. Wohlgebohrnen meine Schuldigste Antwort auf Dero letstere geehrteste Zuschrifft richtig erhalten haben; welche wie ich vermuthet hatte, allzulang hätte aufschieben müssen, wann ich damit auf die Antwort des Herrn *Prof. Gesners* aus Göttingen hätte warten wollen.[2]

Ich habe seit einiger Zeit mit dem H. *Prof. Nicolao Bernoulli* zu Basel eine kleine *Dispute* über die *series divergentes*,[3] dergleichen diese ist $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - etc.$ gehabt; indem Derselbe geläugnet, daß alle dergleichen *series* eine *determinir*te *summ* haben, ich aber das gegentheil behauptet; weilen ich glaube daß eine jegliche *series* einen bestimmten Werth haben müsse. Um aber allen Schwürigkeiten, welche dagegen gemacht worden, zu begegnen, so sollte dieser Werth nicht mit dem Nahmen der *Summ* beleget werden, weil man mit diesem Wort gemeiniglich einen solchen Begriff zu verknüpfen pflegt, als wann die *summ* durch eine würkliche *Summi*rung herausgebracht würde: welche *Idée* bey den *seriebus divergentibus* nicht statt findet. Da nun eine jegliche *series* aus der *Evolution* einer *expressionis finitae* entstehet, so habe ich diese neue *Definition* von der *summ* einer jeglichen *seriei* gegeben:

Summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.

Der H. *Bernoulli* hat diese *Definition* vollkommen *approbir*t, zweifelt aber noch, ob nicht öffters eben dieselbe *series divergens* aus verschiedener *expressionum finitarum evolutione* entstehen könne, allso daß man nach dieser *Definition* verschiedene Werthe zugeben müsste. Darüber hat er zwar kein *Exempel* gegeben, ich glaube aber Gewiß zu seyn, daß nimmer eben dieselbe *series* aus der *evolution* zweyer würklich verschiedener *expressionum finitarum* entstehen könne. Und hieraus folget dann unstreitig, daß eine jegliche *series* so wohl *divergens* als *convergens* einen *determi*[*ni*]*r*ten Werth oder *summam* haben müsse: dahero wann die *summ* dieser *seriei* $1-1+2-6+24-120+etc.$ gefunden werden soll, so muß man den *Valorem* derjenigen *Formul* anzeigen, aus deren *Evolution* diese *series* entsteht.[4] Um diese zu finden, so stelle man sich eine krumme Linie vor, deren *abscissa* $= x$ und *applicata* $y = \dfrac{1}{1-\ell\, x}$.



Da nun $\ell\, 0 = -\infty$ und $\ell\, 1 = 0$, so wird diese *Curva* eine solche *Form* haben, und die *Area* derselben $APM = \int y\, dx = \int \dfrac{dx}{1-\ell\, x}$ wird

$$= xy - 1xy^2 + 2xy^3 - 6xy^4 + 24xy^5\ etc.$$

Setzt man nun $AP = x = 1$, so wird auch $y = 1$, und die *Area* APM wird seyn $1-1+2-6+24-120+etc.$; dahero der Werth dieser *Seriei* der *Areae* APM gleich seyn muß, welche nicht nur *determi*[*ni*]*r*t, sondern auch wie aus der *Figur* erhellt etwas grösser ist als $\frac{1}{2}$. Einen solchen Werth habe ich auch durch verschiedene *Method*en, wodurch ich dieselbe *series* in *convergentes* verwandelt habe, herausgebracht. Anjetzo aber kan ich beweisen daß diese *series* gleich sey dieser *expression*

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+etc.}}}}}}}}}}}$$

welche nicht nur stark *convergir*t, sondern auch *limites continuo propiores* angibt, *intra quos valor contineatur.* Dann wann die *summa seriei* $1-1+2-6+24-120+etc.$ gesetzt wird $=s$, so ist

$$s<1;$$
$$s>\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2};$$
$$s<\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}=\frac{2}{3};$$
$$s>\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}}=\frac{4}{7},\ etc.$$

Hieraus habe ich nun gefunden, daß *proxime* sey $s=0{,}596\,347\,592\,2$.[5] Es wäre allso zu untersuchen, ob dieser Werth nicht etwa durch die *Quadraturam circuli*, oder *logarithmos* angegeben werden könnte. Auf gleiche Weise kan ich auch diese *Seriem generalem*

$$s=1-ma+m\,(m+n)\,a^2-m\,(m+n)\,(m+2n)\,a^3+etc.$$

*summi*ren, dann es ist

$$s=\cfrac{1}{1+\cfrac{ma}{1+\cfrac{na}{1+\cfrac{(m+n)\,a}{1+\cfrac{2na}{1+\cfrac{(m+2n)\,a}{1+\cfrac{3na}{1+\cfrac{(m+3n)\,a}{1+\cfrac{4na}{etc.}}}}}}}}}$$

allso ist

$$s<1;$$
$$s>\frac{1}{1+ma};$$
$$s<\frac{1+na}{1+(m+n)\,a};$$
$$s>\frac{1+(m+2n)\,a}{1+2\,(m+n)\,a+m\,(m+n)\,a^2}\qquad etc.$$

Ewr. Wohlgeb. wird zur Gnüge bekannt seyn, wie ein großes Unglük durch die *Glor*reiche *Victori*e bey Friedberg von unserer Statt abgewendet worden, als welcher von den Feinden der gäntzliche Untergang geschworen gewesen. Anjetzo leben wir in Furcht und Hoffnung, und einer Erwartung der wichtigsten Dinge, welche sich allem Ansehen nach in kurzer Zeit äussern müßen. Ich habe aber die feste Zuversicht, daß durch die Göttliche Vorsehung wie bißher allso auch hinführo alles zu unserem Besten *dirigir*t werden werde.[6]

Nachdem bey unserer *Academi*e das jährlich festgesetzte *Praemium* von 50 *Ducat*en dieses Jahr dem H. Waitz in *Cassel*, als dessen *Piece* über die *Causam electricitatis* am besten befunden worden, erhalten,[7] so ist auf das künftige Jahr die hier beyligende Frage *proponir*t worden.[8]

Die *Academi*e zu *Paris* hat für dieses Jahr das *Praemium* wieder zurükgehalten, und die vorgelegte Frage nochmals auf das Jahr 1747 mit einem doppelten *Praemio* verleget.[9] Auf das künftige Jahr *concurri*re ich wiedrum über die *Quaestion* vom *Magnet*en;[10] alsdann muß nach den *statutis* der *Academi*e das *Praemium* unumgänglich ausgegeben werden.

Ungeacht der H. *Maupertuis* schon vor geraumer Zeit von *Paris* abgereiset, so ist Er doch hier noch nicht angekommen, um das *Praesidium* anzutretten: nach den Holländischen Zeitungen soll er grades Wegs nach Böhmen zur Königl[ichen] *Armée* gegangen seyn.[11]

Hiemit empfehle ich mich zu Ewr. Wohlgeb. beständigen Wohlgewogenheit, und habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

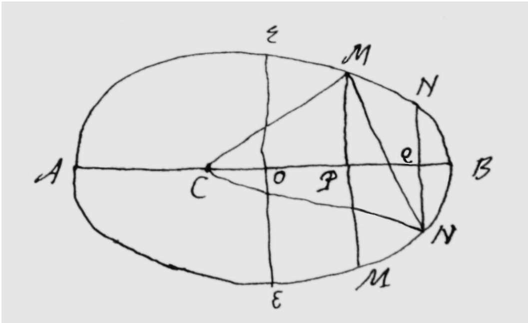
Berlin den 7 *Aug.* 1745.

P. S.

Indem ich den obigen Brief schliessen will, so erhalte Ewr. Wohlgeb. vom … *Julio*,[12] und statte Denselben für Dero gütige *Condolenz* wegen des Absterbens meines sel[igen] Vaters allen gehorsamsten Dank ab.[13]

Ich bin noch bey der alten *societät* zum *Director* der *mathemati*schen *Classe* gemacht worden, ohne vorher ein Mitglied davon gewesen zu seyn, und in dieser *Qualität* bin ich auch von Ihro Königl[ichen] *Majestät* bey der neuen *Academi*e *confirmir*t worden; und ziehe darfür jährlich 100 Rthl. Ich habe aber diese Sach noch niemals mit solchen Augen angesehen, daß ich davon an irgend jemand meiner Freunde Nachricht gegeben hätte; auch so gar in meinem Haus weiß niemand etwas davon. Inzwischen bin ich Ewr. Wohlgeb. für Dero *Gratulation* dazu gehorsamst verbunden.[14]

Meine vormals überschriebene *Solution* des *Problematis catoptrici*[15] habe seit der Zeit kürzer zusammen gezogen, und zum Gebrauch dergestalt eingerichtet, daß alle *satisfaci*rende krumme Linien nicht nur leicht erkannt, sondern auch alle, welche *algebra*ische sind, leicht angezeigt werden können. Ewr. Wohlgebohrnen haben gantz recht, daß alle diese Linien einen *Diameter* nothwendig haben müssen, als AB; es folget aber nicht, daß ausser diesem noch eine andere Linie als EE die *Curvam in duas partes similes et aequales* schneide.[16]



Um alle mögliche *Curvas* zu finden und durch *generalformul*n auszudrücken, so nehme man für v eine solche *Function* von u, welche verwandelt werde in $-v$, wann für u gesetzt wird $-u$: dergleichen *function*en sind u, u^3, u^5, u^7, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^3}$ *etc.* und so daraus zusammen gesetzt werden als $\alpha u + \beta u^3 + \frac{\gamma}{u} + \frac{\delta}{u^3}$ *etc.* Wann nun für v eine solche *functio ipsius* u angenommen worden, so suche man $p = \frac{dv}{du}$: und daraus wird die *curva* folgender Gestalt bestimmt werden: man nehme die *abscissam*

$$CP = x = \frac{up^2\,(cc-uu)}{c\,(a+v)} - \frac{2p\,(cc-uu)}{c} - \frac{u\,(a+v)}{c}$$

so wird die *applicata*

$$PM = y = \pm\left(\frac{pp\,(cc-uu)}{c\,(a+v)} + \frac{2up}{c} - \frac{a-v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)}\,.$$

Setzt man nun $v = u$, so kommt die *Ellipsis* heraus, deren *Focus* in C. Dann da $v = u$, so wird $p = \frac{dv}{du} = 1$, und

$$x = -\,\frac{(aa+cc)\;u - 2acc}{c\,(a+u)}$$

und

$$y = \frac{(cc-aa)\sqrt{(cc-uu)}}{c\,(a+u)}.$$

Wenn man nun u *eliminir*t, so bekommt man

$$aa\,(xx+yy) = (aa-cc-cx)^2\,.$$

Setzt man aber $v = \frac{cc}{u}$ und $c = a$, so wird $p = \frac{dv}{du} = -\,\frac{cc}{uu}$, und folglich

$$x = \frac{3a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{uu}$$

und

$$y = \frac{a^3 - a^2u - 3auu - u^3}{u^3}\sqrt{(aa - uu)}\,,$$

woraus sich die *Figur* der krummen Linie leicht bestimmen lässt; wollte man aber u *elimini*ren und eine *Aequation* zwischen x und y suchen, so würde dieselbe, wofern sich nichts *destruir*t, auf 12 *dimension*en steigen.

Übrigens ist bey den vorgegebenen *general Formul*n zu merken daß daraus die Länge des *Radii* $CM = \dfrac{pp\,(cc-uu)}{a+v} + a + v$; wodurch die *Construction* nicht wenig erleichtert wird. Wann ferner auf diese Art das *Punctum primae reflexionis* M bestimmt wird, so darf man nur, um das *Punctum alterius reflexionis* N zu finden, setzen $u = -u$, da dann v in $-v$ verwandelt wird, p aber den vorigen Werth behält. Es wird nehmlich:

$$CQ = -\frac{upp\,(cc-uu)}{c\,(a-v)} - \frac{2p\,(cc-uu)}{c} - \frac{u\,(a-v)}{c}$$

und

$$QN = \pm\left(\frac{pp\,(cc-uu)}{c\,(a-v)} - \frac{2up}{c} - \frac{a+v}{c}\right)\sqrt{(cc-uu)}\,;$$

$$CN = \frac{pp\,(cc-uu)}{a-v} + a - v.$$

Endlich werde die erste bequeme Gelegenheit nicht versäumen, um Ewr. Wohlgeb. mit meinen geringen Schrifften aufzuwarten, und denselben die *Epistolas La Crosi in Duplo* beyzulegen,[17] von welchen meines Wissens erst ein Theil herausgekommen. Inzwischen wünsche, daß Ewr. Wohlgeb. gegenwärtige obgleich höchst vergnügte *Situation* sich dergestalt ändern möchte, daß Denselben zu noch grösserem Vergnügen auch Dero *Bibliothec* nicht mehr vernagelt zur Last seyn möge.[18]

An den H. *Prof. Gret*sch bitte gleichfalls mein *Compliment* zu vermelden.[19] In *Halle* ist die *Professio Juris publici* noch [*vacant*], wozu ich schon längst den H. *Prof. Gret*sch vorgeschlagen; weil aber meine Unwissenheit in diesem *Studio* weltbekannt, so zweifle sehr, daß meine *Recommendation* so wie in *Mathem*[*aticis*] in Betrachtung gezogen werde. Ich möchte aber wünschen etwas von dem H. *Gret*sch allhier aufweisen zu können.

R 805 Reply to nº 90
Berlin, August 7th, 1745
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 119–121v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 323–328; *Euler-Goldbach* (1965), p. 218–221

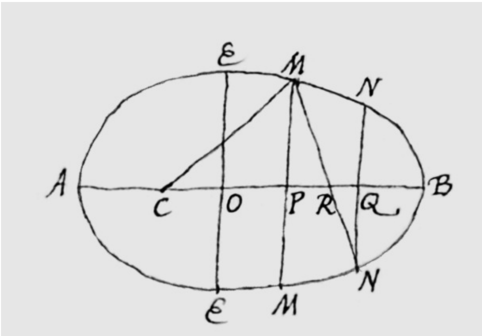
92

Goldbach to Euler

Petersburg, September (14th) 25th, 1745[1]

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer Hochedelgebohrnen habe ich zuforderst im Nahmen des Hn *Pr*[*ofessor*] *Gretsch* schuldigsten Danck für Dero geneigte *intention* gegen denselben abzustatten und zugleich zu berichten daß derselbe vorjetzo an kein auswärtiges *établissement* gedencket indem er mit seinen Umständen so sich täglich verbessern zu frieden ist.[2]



Wann[3] ich in der hiebey gefügten *Figur* das *spatium quod inter radium incidentem et reflexum in diametro intercipitur* CR nach Eurer Hochedelg. *formulis exprimi*re, so wird selbiges in der *ellipsi constans* seyn, in den andern *curvis* aber jederzeit solche *limites* haben, daß wann CO die *abscissa respondens applicatae maximae* OE ist, das *spatium interceptum* $CR = 2CO$ zwischen diesen *limitibus* begriffen sey; es lässet sich zwar dieses *spatium interceptum* durch die *aequation* $CR = \dfrac{CP \cdot NQ + MP \cdot CQ}{MP + NQ}$ *generaliter* leicht bestimmen, aber in der *application* auf Eurer Hochedelg. *formulas* scheinet sie mir etwas weitläufftig zu werden.[4]

In demjenigen was Ew. Hochedelgeb. von den *Seriebus divergentibus* schreiben bin ich völlig Dero Meinung.[5] So viel ich mich erinnere sind dergleichen *Series* von einigen *Mathematicis* darum verworffen worden, weil sie aus einer *divisione praepostera* entstehen, allein zu geschweigen daß man selbige nach belieben ohne einige *division formi*ren kan, so lassen sich auch die *Summae* auf unterschiedene Arten finden wann man diese *Series terminorum signis alternantium* in *series terminorum mere affirmativorum* verwandelt. Ich erinnere mich nicht ob etwa schon in den *Comment*[*ariis*] *Petr*[*opolitanis*] einer *methode* Erwehnung geschehen die in folgendem bestehet:[6] *Datae seriei*

$$A \;\ldots\; \alpha - \beta + \gamma - \delta + \&c.$$

singuli termini fiant aequales singulis terminis seriei

$$B \;\ldots\; a - \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(c-2b+a) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(d-3c+3b-a) + \&c.$$

hoc est $a=\alpha$, $b=\alpha+2\beta$, $c=\dfrac{3\alpha+12\beta+8\gamma}{1\cdot 3}$, *erit series A aequalis termino qui respondet exponenti* $\frac{1}{2}$*in serie*

$$C \;\ldots\; a+b+c+d+\&c.;$$

sumantur termini reciproci seriei C et fiat series

$$D \;\ldots\; \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\&c.;$$

erit terminus respondens exponenti $\frac{1}{2}$ *in serie D aequalis seriei*

$$E \;\ldots\; \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{d}-\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{1}{a}\right) + \&c.;$$

quodsi iam summa seriei E ponatur $=p$, *dico summam seriei A esse* $=\dfrac{1}{p}$ *unde sequitur summam seriei* $2-6+24-120+\&c.$ *esse* $=1:\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{14}+\dfrac{29}{210}+\&c.\right)$.

Es ist aber auch die *Series* $2-6+24-120+\&c.$ gleich dieser $1-2+9-48+300-2160+\&c.$ in welcher alle *termini affirmative considerati* diese *legem progressionis* haben: *Sit exponens terminorum* $n-2$, *terminus illi exponenti respondens A, summa omnium terminorum usque ad terminum A exclusive* $=S$, *erit terminus sequens* $B=nA+S$. *Si verbi gratia dato termino tertio* $=9$ *quaeratur quartus, erit exponens termini dati* $n-2=3$, $n=5$, *et summa omnium terminorum praecedentium* $1+2=3=S$, *ergo terminus quartus* $=nA+S=5\cdot 9+3=48$. Die *summa* dieser *Seriei* aber wird nach voriger *methode* also *exprimi*ret $1:\left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{13}{55}+\&c.\right)$ allwo die ersten drey *termini* des *numeratoris* viel weiter gehen als in der vorher angegebenen *Summa*, ohngeachtet beyde *Summae* einander gleich seyn müssen.[7]

Vor die Beforderung des Briefes von Hn *Pr[ofessor] Gesner* dancke ich Eurer Hochedelgeb. dienstl[ich].[8] Es ist mir nachgehends eingefallen daß ich meine Briefe an denselben künfftig fast gantz biß nach Göttingen nemlich biß *Duderstadt* werde *franqui*ren können, dahero ich nur bitte diejenigen so er etwa an Ew. H. *adressi*ren möchte, welches auch sehr selten geschehen wird, anzunehmen und mir nach Dero Bequemlichkeit, weil gar kein *periculum in mora* ist, zuzusenden.

Da E. H. des Hn *Maupertuis* Erwehnung thun[9] erinnere ich mich desjenigen Briefes davon Ew. Hoched. etwa schon vor 5 Jahren zugeschrieben wurde: *man* *könne nichts gnädigers erdencken*; der eigentliche *concipient* desselben ist mir sehr wohl bekannt.[10] Ich verharre mit besonderer Hochachtung Eurer Hochedelgebohrnen

ergebenster Diener

Goldbach.

R 806 Reply to n° 91
[Petersburg, September (14th) 25th, 1745]
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 4–5r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 31v–32v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 329–331; *Euler-Goldbach* (1965), p. 222–223

93
Euler to Goldbach
Berlin, October 23rd, 1745

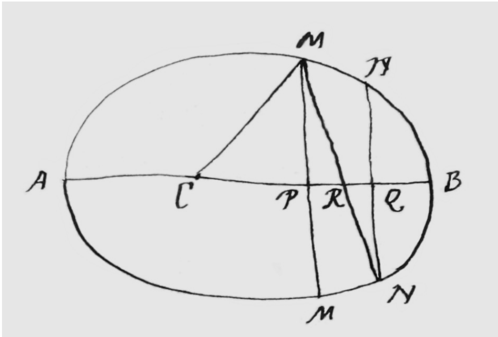
Wohlgebohrner Herr

Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Wohlgeb. hatten vergessen in Dero letstem Schreiben das *Datum* beyzusetzen,[1] dahero ich eigentlich nicht weiß, wie lang ich dasselbe unbeantwortet gelassen; dann da ich anjetzo endlich neue *Tabulas Astronomicas pro Sole et Luna* zu Stande gebracht,[2] so habe ich seit einiger Zeit so viel mit Rechnungen zu thun gehabt, daß ich an kein Brief schreiben gedenken konnte. Nunmehro bin ich zwar fertig, allein wann ich der HH. *Paris*er *Astronomorum* Gutachten und *Observationes* darüber werde erhalten haben, so dürfte darinn noch hin und wieder etwas zu ändern vorfallen.

Ich habe schon vor einiger Zeit ein kleines Päcklein Bücher für Ewr. Wohlgeb. an den H. *Hainchelin* nach *Petersburg* abgeschickt,[3] welches vielleicht schon mag angekommen seyn; wann Dieselben Sich darnach zu erkundigen belieben wollten: es sind darinn, ausser den von mir herausgegebenen Sachen, welche Ewr. Wohlgeb. gehorsamst zu *praesentir*en die Ehre habe, noch die 2 *Volumina* von *La Croze*s *Commercio litterario*[4] enthalten, welche nicht mehr als 20 groschen kosten. Diese *summ* möchte nun viel zu gering seyn, als daß ich zu Empfang derselben den H. *Hainchelin* vorschlagen dörfte.

Aus meinen *Formulis* für die *curvas, quae radios e foco emissos eodem reflectant*, wird das *spatium CR* sehr leicht und kurz ausgedruckt, ungeacht der *Calculus* um solches zu finden, wie Ewr. Wohlgeb. angemerket haben, ziemlich weitläuffig wird.[5]



Dann wann v eine solche *function* von u andeutet, *quae posito* $-u$ *loco* $+u$ *ipsa in sui negativam* $-v$ *abeat*, so ist

$$\begin{aligned} CP &= \frac{u\,(a+v)}{c} + \frac{2\,dv\ (cc-uu)}{c\,du} - \frac{u\,dv^2\,(cc-uu)}{c\,du^2\,(a+v)} \\ PM &= \left(\frac{dv^2\,(cc-uu)}{du^2\,(a+v)} + \frac{2u\,dv}{du} - a - v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c} \end{aligned}$$

und für das *punctum* N

$$\begin{aligned} CQ &= -\frac{u\,(a-v)}{c} + \frac{2\,dv\ (cc-uu)}{c\,du} + \frac{u\,dv^2\,(cc-uu)}{c\,du^2\,(a-v)} \\ QN &= \left(\frac{dv^2\,(cc-uu)}{du^2\,(a-v)} - \frac{2u\,dv}{du} - a + v\right)\frac{\sqrt{(cc-uu)}}{c}. \end{aligned}$$

Wann man nun diese *Expression*en *in aequatione* $CR = \dfrac{CP\cdot NQ + MP\cdot CQ}{MP+NQ}$ *substituir*t, so findet man $CR = \dfrac{2c\,dv}{du}$, woraus erhellet, daß dieses *spatium* in keinem andern Fall *constans* sey, als wann $v = \alpha u$, woraus die *Ellipsis* entspringt. Wo aber die *applicata maxima* sey lässt sich *generaliter* nicht bestimmen, noch zwischen dem Ort derselben und dem *spatio* CR eine Verhältnüß entdecken.

Ewr. Wohlgeb. höchst sinnreiche *Methode* alle *series divergentes in convergentes* zu verwandeln, indem Dieselben *demonstrir*t daß wann

$$\begin{aligned} s = a \quad &+ \quad n\,(b-a) + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,(c-2b+a) \\ &+ \quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,(d-3c+3b-a) + etc. \end{aligned}$$

so sey

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} = \frac{1}{a} \quad &+ \quad n\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right) \\ &+ \quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{d}-\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{1}{a}\right) + etc., \end{aligned}$$

ist mir sehr wohl bekannt gewesen;[6] und dieselbe weiset freylich gantz klar, daß keine *series* so *divergens* seyn könne, deren *summa* nicht immer durch eine *seriem convergentem* ausgedruckt werden könne. Diejenigen aber welche die *Divisionem praeposteram* nicht zulassen wollen werden hier ebenfalls Einwendungen machen, daß man *supponir*e, man komme zu letst auf *differentias constantes* oder *evanescentes*; allein alle dergleichen Einwürfe werden durch meine obgemeldte *Definitionem summae cujusque seriei* leicht gehoben. Für die *seriem* $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + etc.$ findet man auch auf diese Art bald den *valorem prope verum*; ich glaube aber daß es sehr schwehr seyn würde auf diese Art den *Valorem summae* nur auf $\frac{1}{1000}$ genau zu bestimmen; dann ungeacht anfänglich die *Termini seriei conversae affirmativi* werden, so kommen doch auch bald *negativi* zum Vorschein, und alsdann nehmen auch die *termini* nicht mehr merklich ab. Auf die von mir letst überschriebene Art[7] aber hat man die *Approximation* in seiner Gewalt, und kan die *summ* in *Decimalfraction*en so weit genau finden als man will.

Künftigen Donnerstag wird der H. *de Maupertuis* Hochzeit halten, und nach der Zurükkunft Ihro Königl[ichen] *Majestä*t Seine *Praesidente*n Stelle antretten.[8] Wegen der *Expression*: *man könne nichts gnädigers erdenken*, kan ich mich nichts anders erinnern, daß mir dieselbe der H. *Bernoulli* zugeschrieben, als er mich berichtete, wie Gnädig Ihro *Majestä*t Unser König dem *M.^{r} de Maupertuis* zugeschrieben habe.[9]

Ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren
Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

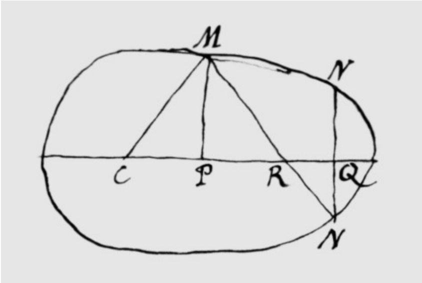
Berlin den 23$^{\text{ten}}$ *Octobr.*
1745.

R 807 Reply to n° 92
Berlin, October 23rd, 1745
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 137–138r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 332-334; *Euler-Goldbach* (1965), p. 224–225

94
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 29th) November 9th, 1745

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 23. *Oct.* habe ich sehr zeitig, nemlich den 4. *Nov.* allhie erhalten.



Aus dem *spatio* CR, so Sie $= \dfrac{2c\,dv}{du}$ gefunden lässet sich die *applicata maxima* ohne Schwierigkeit bestimmen wann man setzet $CP = \dfrac{CR}{2}$ und den *valorem* u *per* a *et* c *expressum* in der *formula* PM *substitui*ret; wobey denn merckwürdig ist, daß die *quantitas* u, wann das *differentiale ipsius* $PM = 0$ gesetzet wird, denselben *valorem* haben muß den es *ex aequatione* $CP = \dfrac{CR}{2}$ bekömmt; imgleichen wann man den *radium* MR suchen wollte welcher *perpendiculariter ad axem reflecti*ret wird, so müste (weil alsdann die *puncta* P, Q *&* R in eines zusammen fallen) die *quantitas* u in diesen dreyen *aequationibus* $CP = CR$, $PM = QN$ und $CP = CQ$ einerley *valorem* haben. In dem *casu* wo $v = u^3$ finde ich aus der *aequatione* $PM = \dfrac{CR}{2}$ $\quad 2u^3 - 3c^2u - a = 0$, und in demselben *casu* wann $v = u^3$ finde ich *pro radio perpendiculariter ad axem reflexo* aus der *aequatione* $CP = CR$ $u = \left(\dfrac{a+3c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, welcher *valor* von u dann auch aus den andern beyden *aequationibus* $PM = QN$ und $CP = CQ$ herauß kommen muß, so ich aber lieber glauben als mich durch die Erfahrung davon *convinci*ren will. Ich werde auch von diesem *genere curvarum* einen besseren Begriff bekommen wann Ew. HochEdelg. mir melden wollen durch was für Linien die *quantitates constantes* a *et* c, *item* die *variabilis* u, *seorsim consideratae* in der *curva exprimi*ret werden; indessen[1] kan ich beweisen daß die *curva* in allen Fällen *contradictoria* wird wo v eine solche *functionem ipsius* u andeutet daß $\dfrac{dv}{a+v}$ grösser wird als $\dfrac{du}{c^2+u}$.

Weil kein Zweiffel ist daß in dem *numero* $\dfrac{31\,415\,\ldots}{10\,000\,\ldots}$ so die *circumferentiam circ*[*uli*] *data diametro* 1 *exprimi*ret eine jede von den Ziffern des *numeratoris* ihre Plätze nach einer gewissen, ob wohl sehr schweren und undeutlichen Ordnung einnimmt und ein grosses Theil dieser Schwierigkeit aus der Abwechselung von zehnerley Ziffern entstehet, so könnte man wenigstens diese letztere sehr erleichteren wann man setzte

$$circumf[erentia] = m + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} + \frac{d}{10\,000} + \&c.$$

allwo m *pro lubitu* so angenommen werden kan daß $circumf[erentia] - m < \dfrac{1}{9}$, hernach aber ein jeder von den *numeratoribus* a, b, c, *&c.* entweder 0 oder 1 würde, welches allezeit möglich ist.[2] Wann nun solchergestalt die *Series*, deren *numeratores* alle entweder 0 oder 1 sind, auf eine gewisse Anzahl von *terminis continui*ret worden so stünde zu versuchen ob sich nicht unter diesen 0 und 1 eine gewisse Ordnung zeigen möchte? Daß ein *ordo numerorum circulantium* herauskommen sollte ist zwar nicht zu vermuthen, weil sonst der gantze *numerus rationalis* seyn müste, es kan aber nichtsdestoweniger *progressiones non circulantes* geben die eine offenbare Ordnung halten als

$$0+1+0+0+1+0+0+0+1+\ \&c.$$

und unzehliche andere; wann nun *in praesenti casu* ein *ordo certa lege variabilis* entdecket würde so glaubte ich daß die *quadratura circuli in numeris decimalibus* noc[h] vi[el bess]er[3] gefunden wäre als es nach der gewöhnlichen *extractione radicis* möglich ist $\sqrt{2}$ zu finden; man könnte auch $\sqrt{2}$ so *exprimi*ren $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{d}{8}+\ \&c.$, daß a, b, c, *&c.* allezeit 0 oder 1 würden und hie sollte ich fast glauben daß sich bald eine Ordnung zeigen möchte.[4]

Nachfolgende *series* scheinet einige *attention* zu *meriti*ren:[5]

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \quad &+ \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{6}\pi^4+\frac{1}{1\cdot 2\cdots 6\cdot 7\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^6\\ &+ \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdots 8\cdot 9\cdot 2^6}\cdot\frac{5}{6}\pi^8+\frac{1}{1\cdot 2\cdots 10\cdot 11\cdot 2^8}\cdot\frac{691}{210}\pi^{10}\ +\ \&c.\\ &= \quad 4-\pi.\end{aligned}$$

Vor das übersandte *paquet* dancke ich dienstl[ich].[6] Den mir annoch gantz unbekannten Hn *Hainchelin* werde suchen ausfragen zu lassen und das ausgelegte auf eine bequeme art zu *restitui*ren.

Ich verharre mit besonderer Hochachtung Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersbourg
den 9. *Nov.* 1745.

P. S. Der Brief an *M.^{r} Maupertuis*[7] ist nicht aus Berlin, sondern aus Petersb[urg], schon einige Zeit vor Eurer Hochedelg. Abreise von hier, geschrieben worden.

R 808 Reply to n° 93
Petersburg, (October 29th) November 9th, 1745
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 95–96r
Address (fol. 96v): "*A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin.*"
Partial copy, 4 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 33r–34v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 335–337; *Euler-Goldbach* (1965), p. 225–227

95
Goldbach to Euler
[Petersburg], November (1st) 12th, 1745

Gegenwärtiges *P. S.* zu machen nöthiget mich ein in meinem letzten Schreiben eingeschliechener Fehler,[1] da ich c^2 anstatt c gesetzet, und es heissen sollte, daß die *curva* allezeit *impossibilis* wird wann $\frac{dv}{a+v} > \frac{du}{c+u}$. Den Grund hievon werden Ew. HochEdelgeb. bald einsehen, weil CR nicht grösser seyn kan als $CM + MR$. Das übrige so ich daselbst geschrieben wird hoffentlich seine Richtigkeit haben.

Den 12. *Nov. st. n.* 1745.

R 809 Supplement to nº 94
[Petersburg], November (1st) 12th, 1745
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 98r
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 35r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 227

96
Euler to Goldbach
Berlin, November 30th, 1745

Wohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Vor einiger Zeit ist allhier das Gerücht gegangen, als wann Ewr. Wohlgeb. von dem Sächsischen Hofe in den *Baron*en Stand wären erhoben worden;[1] weil aber Ewr. Wohlgeb. Selbst davon keine Erwehnung thun, so darf ich mich nach dieser Nachricht nicht richten; ich habe aber den H. *Dr. Gmelin* ersuchet,[2] Ewr. Wohlgeb. in meinem Nahmen auf das gehorsamste zu *gratulir*en, im Fall diese Zeitung, wie ich wünsche, gegründet seyn sollte.

Über das *Problema Catoptricum* nehme die Freyheit Ewr. Wohlgeb. meine *Solution* hiemit zu übersenden,[3] deren *Analysis* alle Umstände hinlänglich erläutern wird. Ewr. Wohlgeb. Vorschlag die *expression* $3,141\,592\,653\,5$ *etc.* auf eine bequeme Art vorzustellen,[4] daß daraus zugleich die *Lex progressionis* erhelle, läufft darauf hinaus, daß man eine bekannte Zahl m ausfündig machen soll, deren *Cyph*ren *in infinitum* mit den obigen entweder einerley oder nur um 1 kleiner wären: dann solcher gestalt würde der Rest $\pi - m$ durch eine solche *decimal Fraction* ausgedrückt werden, deren alle Figuren entweder 0 oder 1 seyn würden. Ich sehe aber noch keine *Methode* ein, wie man nur zur Erfindung der gemeldten Zahl m gelangen könnte. Ich wollte allso vielmehr die *Differentz* $\pi - m$ als bekannt annehmen, als zum *Exempel* $\pi - m = 0,01\,001\,0001\,00001$ *etc.* so würde $m = 3,131\,582\,652\,589\,78$, und nun müsste man sehen, ob diese Zahl durch eine *expressionem irrationalem finitam* ausgedruckt werden könnte.

Ich erinnere mich auch schon einmal einer gewissen leichten *operation* Meldung gethan zu haben,[5] wodurch man Zahlen bekommt, deren Werth vielleicht *nullo modo in finitis* ausgedruckt werden kan. Ich verfahre nehmlich wie in der *ordinair*en *Division*, nur daß ich bey jeder *operat*[*ion*] den *Divisorem* um 1 vermehre: wie aus folgendem *Exempel* zu ersehen:

```
 1)   100 000 000 000 000 000 000   ( 0 464 782 743 907 639
      0
 2)   10
       8
 3)    20
       18
 4)     20
        16
 5)      40
         35
 6)       50
          48
 7)        20
           14
 8)         60
            56
 9)          40
             36
10)           40
              30
11)           100
               99
12)             10
                 0
13)             100
                 91
14)               90
                  84
15)                60
                   45
16)                150
                     etc.
```

Wann nun diese Zahl $0,464\,782\,743\,907\,639$ *etc.* zur *peripherie* des Zirkuls eine bekannte Verhältnuß hätte, so hielte ich die *peripherie* so gut als gefunden, indem dieselbe mit leichter Müh, auf so viel Figuren als man immer verlangt, gefunden werden könnte. Man kan auch hierinn auf unendlich vielerley Weise *varii*ren und die *Divisores* nach Belieben verändern.

Nach der *Arithmetica dyadica* wird $\sqrt{2}$ folgender Gestalt ausgedruckt gefunden: da $\sqrt{2} = 1,414\,213\,562\,36$ so *operi*re man *continuo duplando* hinter der *ver-*

tical Linie folgender gestalt[6]

1	41 421 356 236
0	82 842 712 472
1	65 685 424 944
1	31 370 849 888
0	62 741 699 776
1	25 483 399 552
0	50 966 799 104
1	01 933 598 208
0	03 867 196 416
0	07 734 392 832
0	15 468 785 664
	etc.

die vor der *vertical* Linie herausgekommenen Zahlen 0 *et* 1 geben die gesuchte *fractionem dyadicam*, nehmlich

$$\sqrt{2} = 1,011\,010\,100\,000\,100\,111\,100\,110\,011\,001\,111\,110\,01$$

worinn sich aber keine *Lex* wahrnehmen lässt.[7]

Die von Ewr. Wohlgeb. überschriebene *series*[8] ist allerdings sehr merkwürdig: dieselbe kan folgender gestalt *generaler* ausgedruckt werden. Es sey die *tangens* dieses Winkels $\frac{1}{n}\,90^\circ = t$ so wird

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\pi}{2nt} \quad &= \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\,n^2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{1\cdot 2\,\cdots\,5\,n^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^4 + \frac{1}{1\,\cdots\,7\,n^6}\cdot\frac{1}{6}\pi^6 \\ &\quad + \frac{1}{1\,\cdots\,9\,n^8}\cdot\frac{3}{10}\pi^8 + etc.; \end{aligned}$$

setzt man nun $n = 2$ so kommt Ewr. Wohlgeb. *series* heraus.

Wegen des erwehnten Briefs den *M.*ʳ *De Maupertuis*[9] betreffend kan ich mich nichts recht erinnern; ich habe darüber den H. *de Maupertuis* selbst befraget, welcher mir nicht nur keine Erläuterung geben könnte, sondern er hat mich auch sehr gebeten bey Ewr. Wohlgeb. um eine deutlichere Erklärung zu bitten, und Denselben hiemit sein ergebenstes *Compliment* abzustatten.

H. *Hainchelin* hat in *Petersburg* des H. Kühns *Negotium* übernommen,[10] und wird nicht ermangeln sich, so bald die gemeldten Bücher angekommen seyn werden, bey Ewr. Wohlgeb. zu melden.

Seit einiger Zeit ist allhier eine solche Bestürzung und Furcht unter den Leuten gewesen, daß sich sehr viel von hier *retirir*t haben. Der Anschlag welchen die Königin von Unga[rn] und Sachsen gegen uns geschmiedet, war allzu grausam als daß er von jemand gebilliget werden könnte. Allein unser *Glor*würdigster *Monarch* hat diesen Anschlag dergestalt zernichtet, daß wir hier vor dieser grausamen Feinde Boßheit durch Gottes Gnade jetz ruhig seyn können.[11]

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Wohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verbleiben

Ewr. Wohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

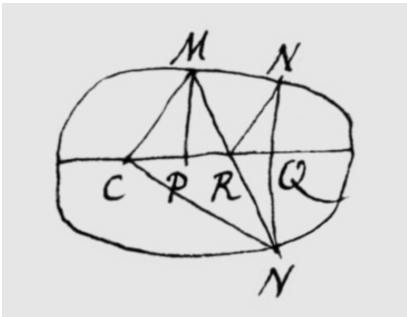
Berlin den 30 *Nov.*
1745.

R 810 Reply to n° 94
Berlin, November 30th, 1745
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 143–144v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 338–341; *Euler-Goldbach* (1965), p. 227–229

97
Goldbach to Euler
Petersburg, December (17th) 28th, 1745

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen sage ich für die mir übersandte ausführliche *solution*[1] des *problematis in act*[*is*] *Lips*[*iensibus*] *propositi* schuldigsten Danck.



Ehe selbige noch ankam hatte ich schon vor mich *observi*ret, daß[2] $CM + MR = 2\,(a+v) - \dfrac{2u\,dv}{du}$ und $CN + NR = 2\,(a-v) + \dfrac{2u\,dv}{du}$ (woraus denn folget daß die 3 *latera* $\triangle\ CM + MN + NC = 4a$) und daß $MR = \dfrac{c\,PM}{\sqrt{c^2-u^2}}$ folglich MR nur in dem einigen *casu* $= PM$, wann $u = 0$, ob zwar *generaliter* wahr ist daß MR *normalis ad axem* wird wann nur $y = \dfrac{4a^2-x^2}{4a}$ (*abstrahendo a valore ipsius* x). Ich habe auch nicht gefunden daß Ew. HochE. den *casum determini*ret wann das *spatium interceptum* CR ein *maximum* wird. Die *solution* selbst soll, so bald es Ew. H. verlangen, zurückgesandt werden.

Was ich von dem *numero* 31415... so durch 0 und 1 zu *exprimi*ren wäre geschrieben, ist allerdings unrichtig[3] und müste nur von der *Arithmetica dyadica* verstanden werden, welches aber auch allem ansehen nach eine vergebliche Mühe seyn würde.

Aus der Zahl so $\sqrt{2}$ *in arithmetica dyad*[*ica*] vorstellet erhellet zwar noch keine Ordnung,[4] es ist aber doch zu *consideriren* daß ein *numerus ex lege non circulante constans per additionem alterius numeri circulantis* so verstellet werden kan, daß man nicht leicht eine *legem* darin entdecken wird.

Den *modum* durch *divisores continue auctos* einen *quotum non circulantem* herauszubringen haben mir Ew. H. schon sonst *communici*ret,[5] wann aber der Endzweck nur bloß seyn soll *numeros certa lege non-circulantes* zu finden so halte ich diese *methode* für etwas weitläufftig.

Um zu sagen daß jemand die *quadraturam circuli in numeris* gefunden habe, müste man, meines erachtens, zuvorderst den *gradum facilitatis qua ille numerus ab inventore exprimendus sit determini*ren, denn ohne dergleichen *determination* dürffte man nur die *Seriem Leibnitii* oder eine andere *actu addi*ren, und ich glaube daß man in dieser *Supposition* nach der Billigkeit die *inventionem quadr*[*aturae*] *circ*[*uli*] dem jenigen nicht absprechen könnte welcher den *numerum* 31415... eben so leicht als man $\sqrt{2}$ durch eine würckliche *extractionem rad*[*icis*] *quadr*[*atae*] findet, hervorzubringen vermögend wäre.

Die in meinem vorigen Schreiben enthaltene *Series* scheinet Eurer Hochedelgeb. schon vorher bekannt gewesen zu seyn.[6]

Wann x den *exponentem terminorum* andeutet, [so ist] *posito termino generali* $xa^{\pm x}$ die *summa generalis*[7]

$$\frac{a}{(a \mp 1)^2}\left(xa^{\pm(x+1)} - (x+1)\,a^{\pm x} + 1\right)$$

wie wohl hierin ausser dem *arrangement* der *formulae Summatricis* nichts neues ist.[8]

Zu dem dortigen *établissement* des Hn *de Maupertuis*[9] welches ich aus den Zeitungen mit besonderer Freude vernommen, bitte ich dem selben meine schuldigste *gratulation* abzustatten und wünsche hertzlich das die *consideration* welche der König für dessen *merit*en hat noch viel gutes zum Aufnehmen der Wissenschafften nach sich ziehen möge.

Ich bitte der Fr[au] *Professor*in und Dero sämmtl[ichen] *familie* mich bestens zu empfehlen und verharre mit vieler Hochachtung Eurer HochEdelgebohrnen

ergebenster Diener

Goldbach.

S.^{t} Petersburg

den 28. *Dec.* 1745.

·/·

P. S.[10] Der Brief ist von dem gewesenen Gr[oß] *Admiral* an den Hn *Maupertuis* zu der Zeit da Ew. HochEdelg. noch in Petersburg waren, geschrieben worden.[11]

Das Gerücht dessen Sie Erwehnung thun ist ohne grund, es kan aber dazu das bereits den 23. *Aug. dati*rte und mir ohne mein Ansuchen und ohne alle meine Unkosten verliehene *diploma*, so ein *renouvellement de noblesse* enthält, gelegenheit gegeben haben.[12]

R 811 Reply to nº 96
Petersburg, December (17th) 28th, 1745
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 99–100r, 97r
Address (fol. 100v): "*A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin*"
Partial copy, 4 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 35r–36v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 355–357; *Euler-Goldbach* (1965), p. 238–239

98
Euler to Goldbach
Berlin, January 25th, 1746

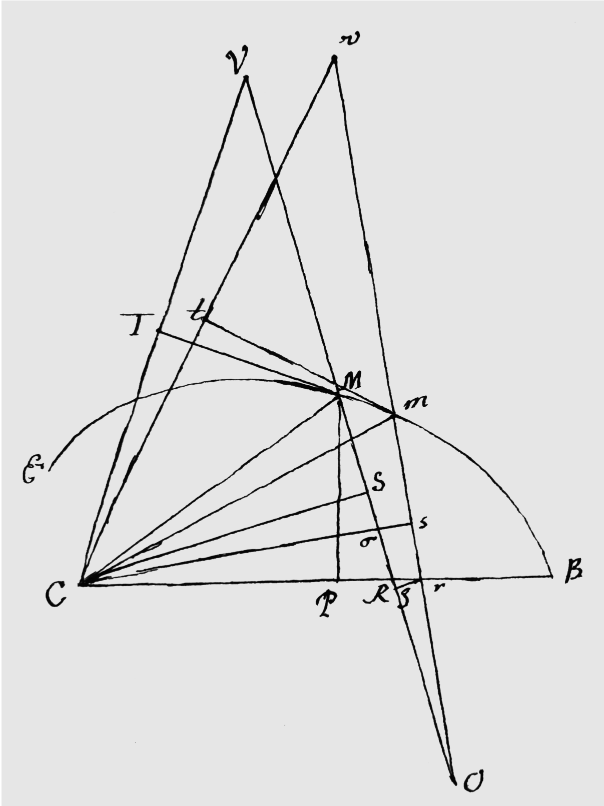
Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Wie Ewr. Hochwohlgeb. zu dem Antritt dieses Jahrs von Herzen alles Wohlseyn anwünsche, allso *gratuli*re gleichfalls zu dem so Gnädig ertheilten *Diplomate* über das *Renouvellement de Noblesse*;[1] und empfehle mich sammt den meinigen zu Ewr. Hochwohlgeb. ferneren Gewogenheit und Gnade.

Aus Ewr. Hochwohlgeb. Stillschweigen wegen der von mir übersandten Bücher schliesse ich daß dieselben noch nicht angekommen; dahero ich mich allhier bey dem H. *Hain*schelin *informi*ren werde, wo dieselben etwan unter Wegs ligen geblieben.[2] Die *Solution* meines *Problematis Catoptrici*, welches Ewr. Hochwohlgeb. zu übersenden die Ehre gehabt,[3] ist vorher hier *copir*t worden; ich habe aber seit der Zeit eine weit kürzere *solution* gefunden, wobey alle in der vorigen befindlichen Weitläuffigkeiten nicht nöthig sind.

In beygefügter *Figur*,[4] da C das *Punctum radians* und EMB eine *curva reflectens quaecunque* ist, welche die *radios* CM und Cm nach MO und mO *reflectir*t; wann die *curva* EMB gegeben ist, so kan für ein jegliches *Punctum* M das *intervallum respondens* CR[5] *in axe* CB nebst dem Winkel CRM gefunden werden: Nun kehre ich die Frage um, und suche die *curvam* EMB zu bestimmen, wann eine *Aequatio quaecunque inter spatium* CR *et angulum* CRM gegeben wird. Dann wann dieses *Problema resolvir*t worden, so ist es hernach sehr leicht das Haupt*problema* zu *solvi*ren.

Es sey demnach das *spatium* $CR = r$, der Winkel $CRM = \varphi$, sein *sinus* $= s$ und *cosinus* $= u$, *posito sinu toto* $= c$[6] so daß $ss + uu = cc$ und $d\varphi = \dfrac{c\,ds}{u} =$ ang. O.



Wann nun O der *concursus duorum radiorum reflexorum proximorum* ist, so ist klar daß die *particula curvae* Mm zu einer *Ellipsi* gehören müße, deren beyde *Foci* in C und O befindlich, und folglich wird seyn: $CM + MO = Cm + mO$. Man verlängere allso OM und Om in V und v so daß $MV = CM$ und $mv = Cm$, so wird seyn $OV = Ov$, und die *tangentes* in M und m werden die *rectas* CV und Cv *bifariam perpendiculariter* schneiden. Man lasse ferner aus C *perpendicula* CS und Cs auf OV und Ov: so wird der *angulus* $SCs = O = d\varphi = \dfrac{c\,ds}{u}$. Es ist aber in dem $\triangle\ CSR$:

$$\mathit{sin\,tot.}\,(c)\ : CR\,(r) = \mathit{sin}\,CRS\,(s)\ : CS = \frac{rs}{c}$$

und $RS = \dfrac{ru}{c}$. Allso ist $S\sigma : CS = d\varphi\,\left(\dfrac{c\,ds}{u}\right) : \mathit{sin\,toto}\,(c)$ oder $S\sigma = \dfrac{rs\,d\varphi}{cc} = \dfrac{rs\,ds}{cu}$; da aber $s\,ds + u\,du = 0$ so wird $S\sigma = -\dfrac{r\,du}{c}$. Nun setze man $SV = t$, so ist $sv = t + dt$ und $vs - VS = dt$: da nun $vs = V\sigma$ so wird $dt = S\sigma = -\dfrac{r\,du}{c}$: und allso $t = a - \int \dfrac{r\,du}{c}$. Aus der zwischen r und u gegebenen Verhältnüß wird allso die Linie $VS = t$ bestimmt, zu welcher wann man *addir*t $RS = \dfrac{ru}{c}$ so bekommt man die Linie $RV = a + \frac{ru}{c} - \int \frac{r\,du}{c} = a + \int \frac{u\,dr}{c}$, welches noch viel kürzer hätte gezeigt werden können, da $rv - RV = d.\,RV = R\rho = \frac{u\,dr}{c}$, weil $Rr = dr$. Hat man allso $RV = a + \int \frac{u\,dr}{c}$ gefunden, so ziehe man CV, schneide dieselbe in zwey gleiche Theile in T, und richte darauf die *perpendicular* Linie TM auf, welche in M nicht nur ein *Punctum in curva quaesita* sondern auch die *positionem tangentis* geben wird; dahero aus einer jeden gegebenen *Aequation inter* $CR = r$ *et cosinum ang*[*uli*] $CRM = u$ die *curva quaesita* EMB *determinir*t und leicht *construir*t werden kan: indem man nur immer zu nehmen hat $RV = a + \int \frac{u\,dr}{c}$.

Hieraus ist es nun leicht das *proponir*te *problema catoptricum* zu *solvir*en, dann da muß aus dem *Angulo* CRM das *spatium* $CR = r$ dergestalt bestimmet werden, daß wann man den Winkel CRO anstatt des Winkels CRM setzt, für CR einerley Werth herauskomme. Da nun des Winkels CRO *sinus* ist $= -s$ und der *cosinus* $= -u$, so muß r eine solche *functio* seyn von s und u welche einerley Werth behalte, wann gleich für s und u ihre *negativa* $-s$ und $-u$ gesetzt werden: folglich muß r eine *functio parium dimensionum* seyn von s und u, als zum *exempel* $r = b + \frac{\alpha ss + \beta su + \gamma uu}{c}$. Hat man nun r solcher gestalt angenommen so kan daraus die *curva problemati satisfaciens* folgender gestalt bestimmt werden. Man setze $MR = z$, so wird

$$CM = \sqrt{\left(rr + zz - \frac{2urz}{c}\right)} = RV - z = a + \int \frac{u\,dr}{c} - z;$$

folglich wird

$$rr - \frac{2urz}{c} = \left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right)^2 - 2\left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right) z,$$

und allso

$$z = \frac{\left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right)^2 - rr}{2\left(a + \int \frac{u\,dr}{c} - \frac{ur}{c}\right)}.$$

Aus z findet man ferner $PM = y = \frac{sz}{c}$; und $PR = \frac{uz}{c}$; dahero wird $CP = x = r - \frac{uz}{c}$, und wie schon gefunden ist $CM = a + \int \frac{u\,dr}{c} - z$. Will man nun *curvas algebraicas* haben, so muß für r eine solche *functionem*[!] von s und u, jedoch nach der obigen Vorschrifft angenommen werden, daß sich die *formula* $\int \frac{u\,dr}{c}$ *integrir*en lasse.

Um aber *formulas generales* für alle mögliche *curvas algebrai*[*cas*] zu finden, so setze ich

$$\int \frac{u\,dr}{c} = \frac{ur}{c} - \int \frac{r\,du}{c} = \frac{ur}{c} - v;$$

oder $\int \frac{r\,du}{c} = [v.]$ Weil nun r eine *functio parium dimensionum ipsarum s et u* [seyn] muß, so wird $v = \int \frac{r\,du}{c}$ eine *functio imparium dimensionum*. Man nehme allso für v eine solche *functionem quamcunque* an, so wird $r = \frac{c\,dv}{du}$; und $\int \frac{u\,dr}{c} = \frac{u\,dv}{du} - v$. Hieraus wird ferner

$$RM = z = \frac{\left(a - v + \frac{u\,dv}{du}\right)^2 - \frac{cc\,dv^2}{du^2}}{2\,(a-v)};$$

das ist

$$MR = z = \frac{a-v}{2} + \frac{u\,dv}{du} - \frac{(cc-uu)\ dv^2}{2\,(a-v)\ du^2} = \frac{a-v}{2} + \frac{u\,dv}{du} - \frac{ss\ dv^2}{2\,(a-v)\ du^2}$$

wegen $ss = [cc - uu;]$

$$PM = y = \frac{(a-v)\ s}{2c} + \frac{su\,dv}{c\,du} - \frac{s^3\ dv^2}{2\,(a-v)\ c\,du^2}$$

$$CP = x = \frac{ss\,dv}{c\,du} - \frac{u\,(a-v)}{2c} + \frac{uss\ dv^2}{2\,(a-v)\ c\,du^2}$$

$$CM = \frac{a-v}{2} + \frac{ss\ dv^2}{2\,(a-v)\ du^2}\,.$$

Hieraus ist $CM + MR = a - v + \frac{u\,dv}{du}$ und *positis u, s negativis*, in wel[chem] Fall auch v *negativum* wird, so bekommt man die *summam radiorum in*[*fra*] *axem* $= a + v - \frac{u\,dv}{du}$; dahero klar ist daß die *summa omnium radiorum*, das ist der Weg, welchen ein jeglicher *radius ex C egressus*, *donec eodem post geminam reflexionem revertatur*, seyn wird $= 2a$. Welche Eigenschafft, ungeacht sie unmittelbar aus der Betrachtung, daß $CM + MO = Cm + m[O,]$ folget, so haben doch Ewr. Hochwohlgeb. mir dieselbe zu erst entdecke[t.] Im übrigen kommen diese *formul*n mit meinen vorhergehenden völlig über ein, nur daß diese 2mal kleiner sind als jene. Wann das *spatium CR maximum* wird, ist aus der *formul* $CR = \frac{c\,dv}{du}$ leicht zu sehen, nehmlich wann $ddv = 0$. Es ist aber hiebey zu merken daß s und u immer kleiner seyn müßen als c, indem sonst die *formulae imaginariae* werden. Es sey zum *exempel* $v = u^3 : cc$ so wird $CR = \frac{3uu}{c}$, dessen Werth am grösten wird, wann $u = \pm c$; allso ist in diesem Fall der gröste *Valor* $CR = 3c$, und der kleinste $CR = 0$. Man bekommt allso die völlige *curvam*, wann man *successive* dem u alle mögliche *Valores* gibt von -1 biß zum $+1$.

Es ist gantz richtig, daß der auf die *Quadraturam Circuli* gesetzte Preiß demjenigen mit Recht gebührte, welcher eine der *Extractioni radicis quadratae* ähnliche *Operation* erfünde, um die Zahl $3,14159$ *etc.* nach Belieben immer weiter fort zu setzen. In dieser Absicht bin ich auf den Gedanken gekommen, ob es nicht möglich *divisores certa lege progredientes* zu finden, aus welchen nach der letst beschriebenen *Divisionsregul*[7] eben diese Zahl $3,14159$ herausgebracht würde; dann diese Art schien mir eben den *gradum facilitatis*, welchen Ewr. Hochwohlgeb. verlangen, noch vor der *extractioni radicis* zu haben.

M.r de Maupertuis läst Sich Ewr. Hochwohlgeb. schönstens empfehlen, und für die Erläuterung wegen des erwehnten Briefs ergebenst bedanken.[8] Da nunmehr der Friede auf eine so *glorieuse* Art wiedrum hergestellt, so ist kein Zweifel, die hiesige *Academie* werde bald in einen herrlichen Zustand gesetzet werden.[9]

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. auf das gehorsamste Empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 25ten *Jan.*
1746.

R 812 Reply to nº 97
Berlin, January 25th, 1746
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 145–147r, 145a
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 358–362; *Euler-Goldbach* (1965), p. 239–241

99
Euler to Goldbach
Berlin, February 5th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. bitte nicht ungütig zu deuten, daß ich die Freyheit nehme Denselben nachfolgende *Problemata* betreffend einige *Medailles*, welche I[hro] K[önigliche] *M[ajestät]* prägen zu lassen Allergnädigst befohlen haben, vorzulegen: dann als nach dem ersten Schlesischen Krieg Ewr. Hochwohlgb. die Güte gehabt mir einige *Invention*en zu den damals *projectir*ten *Medailles* zu überschicken,[1] so haben dieselben bey dem Staats *Ministerio* allhier eine völlige *Approbation* erhalten, obgleich wegen anderer Umstände keine *Medailles* zum Vorschein gekommen.

Anjetzo ist mir nun wiedrum eine *Ordre* aus dem *Ministerio* zugeschickt worden, in welcher 5 *Invention*en zu *Medailles* verlangt werden.[2]

I. Auf die *Bataille* bey *Sorr.*
II. Auf die *Expedition* nach Sachsen
da Ihro Königl[iche] *Majestät* Sich so schnell gegen Görlitz gewendet und allda den Feind bis in Böhmen zurükgetrieben.
III. Auf die *Bataille* bey Kesselsdorf
IV. Auf die Einnahm von Dresden
diese beyden könnten wohl in eine gebracht werden.
V. Auf den doppelten Frieden mit Östreich und Sachsen.

Ewr. Hochwohlgeb. werden Sich wundern, daß über solche Sachen von mir Vorschläge gefordert werden, allein ausser dem daß ich das vorige mal die besten geliefert, so befinden sich hier in der That sehr wenige, welche es besser machen könnten als ich, wann ich auch mich unterstehen sollte selbst etwas darauf zu ersinnen. Sinnbilder weiß ich gar nicht zu finden, aber folgende *Inscription*en sind mir darüber eingef[allen,] welche ich aber nicht im Stande bin auszu*polir*en.

I. *Gravissimus hostium impetus*
summa fortitudine a Rege reprim[*itur.*]
II. *Hostes ferrum flammamque minitantes*
repentino Regis adventu perculsi aufugiunt.
III. IV. *Hostibus ad Kesselsdorff ingenti proelio profligatis*
Metropolis Dre[*sda*] *occupatur.*
V. *Rex pace non minus quam Bello invictus*
hostibus ad incitas redactis pacem largitur;

bey dem letsten wollte ich nehmlich diesen Gedanken anbringen, *Rex pace non minus quam bello hostes devicit*, aber ich gestehe daß derselbe mit dem übrigen nicht recht zusammen passt.

Sollte der Gute Freund, von welchem Ewr. Hochwohlgeb. mir das vo[rige] mal *Invention*en zuzusenden die Güte gehabt,[3] auch auf diese *Punct*en ein[ige] Aufmerksamkeit wenden, so ersuche Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst mir d[es]selben Gedancken darüber zu *communicir*en, der ich mit der schuldig[sten] Hochachtung bin

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 5 *Febr.*
1746

R 813 February 5th, 1746
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 148rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 363–364; *Euler-Goldbach* (1965), p. 242

100
Goldbach to Euler
Petersburg, February (15th) 26th, 1746

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*

Da ich mich nach reiffer überlegung nicht getraue solche *inscriptiones* die der Hoheit des *Sujet*s einiger massen *conform* wären[1] zu erfinden, und vielmehr davor halte, daß der berühmte H. *Baron* von *Stosch*, als welcher *in re numaria* eine ungemeine *connoissance* hat, zu diesem Endzwecke für vielen andern geschickt wäre, so habe solches zur schuldigen Antwort zu melden nicht unterlassen wollen.[2]

Die Bücher[3] sind mir wie wohl mit einigem *defect* in der *theoria motus cometarum*[4] und in den *epistol*[*is*] *Wolffii*[5] den 20. *Januar.* abgeliefert worden.

Dero Schreiben vom 25. *Jan.* habe ich auch erhalten und werde darauf ehestens antworten. Indessen verharre mit besonderer Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 26. *Febr. st. n.* 1746.

R 814 Reply to n° 99
Petersburg, February (15th) 26th, 1746
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 101r
Address (fol. 102r): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin."
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 365; *Euler-Goldbach* (1965), p. 243

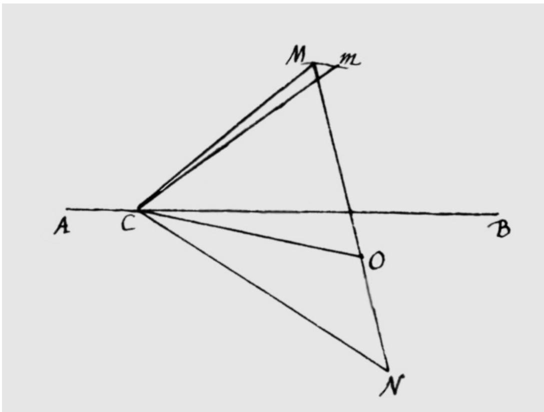
101
Goldbach to Euler
Petersburg, March (1st) 12th, 1746

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen dancke ich zuvorderst vor Dero wohlgemeinten Neujahrswunsch,[1] und wie ich dergleichen von meiner Seite an Ew. Hochedelg. schon längst *mentaliter* abgestattet habe, so wünsche ich von der Erfüllung desselben und Dero eigenem, wie auch Dero sämmtlichen *Familie*, welcher ich mich bestens zu empfehlen bitte, ferneren Wohlergehen in diesem und folgenden Jahren viele angenehme Nachrichten zu erhalten. Hiernechst bin ich auch Eurer Hochedelg. für die mir übersandten Bücher gar sehr verbunden. Der in meinem vorigen Schreiben bereits erwehnte *defect*[2] ist nicht in dem *tomo II. epist*[*olarum*] *Lacrosei*[3] sondern *in tomo I.* allwo alles von *p.* 368 biß ins Register *ad verba*: *Lycaonum ingenium* fehlet, und in der *theoria mot*[*us*] *comet*[*arum*][4] fehlen 6 Bogen von *p.* 96 biß *p.* 145. Die Bücher waren aber als ich sie empfing so nachlässig zusammen gebunden, daß die fehlenden Bogen wohl erst hie verlohren seyn könten; das ausgelegte werde zu *restitui*ren bedacht seyn. Ich bitte mir künfftig zu melden wer der H. *Uhlen* ist welcher diese Briefe heraußgegeben, und demselben die hiebeyliegende *note*, wann sich dazu eine Gelegenheit findet, zukommen zu lassen.[5]

Die Fragen nebst den Antworten von den *Comete*n[6] habe ich alsofort durchgelesen und zweiffele nicht es werden die selben wegen ihrer deutlichkeit und richtigkeit eine *general*e *approbation* erhalten haben. Wenn man annimmt daß der *Comet* ein entzündeter Cörper ist so lasset es sich vieleicht am besten darthun (1.) daß er keine solche *phases* als der Mond oder die *Venus* zeigen kan, (2.) daß er sein eigenes Licht *quaquaversus* von sich wirfft, ohngeachtet selbiges vor den Sonnenstralen nicht anders als *in parte a sole aversa* unter dem Namen der *comae* oder *caudae* kenntbar wird, (3.) daß diese *cauda cometae* desto grösser werden muß je länger sich der *Comet* in der nähe der Sonnen aufhält und je mehr er von derselben entzündet wird.

Ich glaube[7] daß man das *problema catoptricum* auch ohne *consideration* einiges *anguli* folgender massen *solvi*ren kan:



Sit axis curvae $AB = a$, *radius incidens* $CM = \dfrac{a \pm p}{2}$, *radius reflexus* $MO = \dfrac{a \mp p}{2}$, *ita ut* $CM + MO = CN + NO = a$. *Sit* CO (*functio quaecunque ipsius* p, *sed maior quam* p) $= q$, *erit elementum curvae quaesitae* $\dfrac{dp\sqrt{a^2 - p^2}}{2\sqrt{q^2 - p^2}} = Mm.$

Wann der H. *Uhlius* welcher den *Thesaurum epist*[*olicum*] *Lacroz*[*ei*] heraus gegeben in Berlin ist bitte ich dem selben nach Gelegenheit die hiebeyliegende *Note communici*ren zu lassen.[8]

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 12. *Mart. st. n.* 1746.

vert[*e*]

P. S. Ich habe schon längst *observi*ret, daß die *series* deren *lex progressionis* ist $A^2 + 4A = B$, *designante A terminum quemcunque, et B terminum proxime sequentem*, diesen *terminum generalem* hat $a^{-2^x} - 2 + a^{2^x}$, und hieraus läst sich auch der *terminus generalis huius seriei* $1+1\cdot3+1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot5\cdot17+1\cdot3\cdot5\cdot17\cdot257+$ *&c.* finden[9] davon die *factores terminorum* lauter Zahlen sind welche *Fermatius pro numeris primis* gehalten.[10]

R 815 Reply to n° 98
Petersburg, March (1st) 12th, 1746
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 103–104v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 40rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 366–367; *Euler-Goldbach* (1965), p. 243–244

102
Euler to Goldbach
Berlin, April 5th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß sich in den Ewr. Hochwohlgeb. zugesandten Büchern so grosse *Defect*e befunden,[1] darüber hat sich H. *Haude* nicht wenig geärgert; weil er aber mit der ersten Gelegenheit eine *Parti*e Bücher an den H. *D*[*octo*]^r *Sanches* überschicken soll, so wird er für Ewr. Hochwohlgeb. nicht nur diese *Defecte*, sondern auch den dritten *Tomum Epist*[*olarum*] *La Croz*[*ei*][2] beylegen. H. Uhle war vormals immer bey dem sel[igen] H. Geh[eimen] Rath *Jordan*, und hatte die Aufsicht über seine *Bibliothec*; durch dessen Hülfe er in Frankfurt an der Oder *Professor* worden; er ist noch ein junger Mann und *passir*t für sehr gelehrt. Ich habe mit ihm keine sonderbare Bekanntschafft, werde ihm aber das beygelegte Blättlein durch einen guten Freund zustellen lassen.[3]

Daß Ewr. Hochwohlgeb. meine ziemlich in Eyl aufgesetzte Fragen über die *Comet*en einiger Aufmerksamkeit gewürdiget,[4] erkenne ich als ein Zeichen Dero gantz besonderen Gewogenheit. Ich habe aber noch starke Zweifel, ob sich die *Phaenomena Cometarum eorumque Caudarum* bloß allein dadurch erklären lassen, daß man annimmt, ihre Cörper seyen würklich entzündet. Dann ausser dem daß eine blosse Erleuchtung nicht hinlänglich ist, in dem *Aethere* eine Helle hervorzubringen, sondern dazu noch in derselben Gegend solche Cörperlein erfordert werden, welche die Erleuchtung empfangen, und daher einen Schein zu uns zurük werfen; so ist auch die Abweichung des *Caudae* eines *Comet*en *ab Oppositione solis* ein solches *Phaenomenon*, welches eine besondere Erklärung zu erfordern scheinet. Die *Idée* welche ich in diesen Fragen kürtzlich entworfen, und darinn besteht, daß die durch die grosse *Atmosphaer* eines *Comet*en durchstreichenden Sonnen Straalen einige *subtil*e *particulas* daraus mit sich fort reissen, habe ich letstens weitläuffiger ausgeführt[5] und ziemlich deutlich dargethan, daß auf solche Art nicht nur die *Comet*en Schweife, sondern auf unsrer Erde die *Lumina borealia*, und um die Sonne selbst das *Lumen Cassinianum* entstehen. Diese Ausführung hat auch dem H. *De Maupertuis* so wohl gefallen, daß Er derselben völlig beypflichtet.

Ewr. Hochwohlgeb. *Idée* das *Problema Catoptricum* zu *solvi*ren, gibt zwar leichte *Formul*n; allein da die *Positio Lineae CO* nicht bestimmet wird, und das *Elementum Curvae Mm* wenig zu Bestimmung der krummen Linien, insonderheit wann *Algebra*ische verlangt werden, beyträgt, so sehe ich noch nicht ab, wie die *natura functionis q determinir*t werden müsste, daß die beyden *reflexions puncta M et N in eandem lineam curvam continuam* zu ligen kämen.

Über die *Seriem* $1+1\cdot3+1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot5\cdot17+$ *etc.* erstaunte ich anfänglich,[6] als ich aber dieselbe genauer betrachtete, sahe ich bald daß ich den *Terminum generalem* davon schon vor einiger Zeit unter andern Umständen ausgedruckt hatte. Dann ich fand daß wann

$$(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\left(1+a^{16}\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)=s$$

so ist $(1-a)\ s=1-a^{2^{n+1}}$; und allso $s=\dfrac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1}$. Dahero wann $a=2$, so ist

$$1\cdot3\cdot5\cdot17\cdots\left(2^{2^n}+1\right)=2^{2^{n+1}}-1.$$

Dieses hatte ich schon angemerkt als ich suchte was für eine *series* heraus komme wann man dieses *Productum infin*[*itum*]

$$(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\left(1+a^{16}\right)\ etc.$$

würklich *evolvir*te: da ich dann gefunden, daß diese *series geometrica*

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\ etc.=\frac{1}{1-a}$$

herauskomme. *Evolvir*t man aber dieses *Product*

$$(1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^4\right)\left(1-a^8\right)\left(1-a^{16}\right)\ etc.$$

so bekommt man

$$1-a-a^2+a^3-a^4+a^5+a^6-a^7-a^8+a^9+a^{10}-a^{11}+a^{12}-a^{13}-a^{14}+a^{15}-a^{16}+a^{17}\,etc.$$

wo die[!] *Ordo signorum* merkwürdig ist.[7] Von dieser Art habe ich noch nachfolgende *Theoremata* gefunden:

Th[*eorema*]. *Si sit*

$$s = (1-na)\left(1-n^2a\right)\left(1-n^3a\right)\left(1-n^4a\right)\left(1-n^5a\right) \textit{ etc. in infin[itum]}$$

er[*it*]

$$\begin{aligned} s = 1 \quad & - \quad \frac{na}{1-n} + \frac{n^3a^2}{(1-n)(1-n^2)} - \frac{n^6a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} \\ & + \quad \frac{n^{10}a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)} - \textit{ etc.} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} = 1 \quad & + \quad \frac{na}{1-n} + \frac{n^2a^2}{(1-n)(1-n^2)} + \frac{n^3a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} \\ & + \quad \frac{n^4a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)} + \textit{ etc.} \end{aligned}$$

Ewr. Hochwohlgeb. glaube ich auch schon geschrieben zu haben,[8] daß wann man dieses *Productum infinitum*

$$(1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^3\right)\left(1-a^4\right)\left(1-a^5\right) \textit{ etc.}$$

*evolvir*t, diese *series* heraus komme:

$$1 - a^1 - a^2 + a^5 + a^7 - a^{12} - a^{15} + a^{22} + a^{26} - a^{35} - a^{40} + \textit{ etc.}$$

wo der *Ordo exponentium* sehr merkwürdig ist, und sich *per inductionem* allso bestimmen lässt, daß alle *in hac formula* $\dfrac{3xx \pm x}{2}$ enthalten sind, ungeacht ich diese *Legem observatam* noch nicht *ex rei natura* habe her[aus] bringen können.

Th[*eorema*]: *Si fuerit in serie* $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$:

$$Q = mP^2 + nP + \frac{nn - 2n\,[-8]}{4m},$$

ubi m *et* n *sunt numeri constantes; quaerantur numeri* F *et* G *ut sit* $F + G = mA + \frac{1}{2}n$ *et* $FG = 1$ *eritque*

$$P = \frac{F^{2^{x-1}} + G^{2^{x-1}}}{m} - \frac{n}{2m}.$$

Th[*eorema*]: *Si fuerit in serie* $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \ldots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$:

$$Q = mP^2 + nP + \frac{nn - 2n}{4m},$$

erit

$$P = \frac{\left(mA + \frac{1}{2}n\right)^{2^{x-1}}}{m} - \frac{n}{2m},$$

welches Ewr. Hochwohlgb. *Theoremata* sind.

Folgende *Theoremata* scheinen auch einiger Aufmerksamkeit werth zu seyn:

Th[*eorema*]: *Si n sit numerus integer affirmativus quicunque erit:*

$$\frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)\left(1-a^{n-1}\right)}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)\left(1-a^{n-1}\right)\left(1-a^{n-2}\right)}{1-a^3} + \text{ etc.} = n.$$

Theor[*ema*] *Si n sit numerus integer affirmativus quicunque erit:*

$$1 - a^{n-1} + a^{2n-3} - a^{3n-6} + a^{4n-10} - a^{5n-15} + a^{6n-21} - \text{ etc.} = 0$$

exclusis scilicet terminis, qui exponentes habent negativos.

Theor[*ema*]:[9] *Sit in circulo arcus* $90° = q$; *sumaturque arcus quicunque* s, *cujus sinus sit* $= a$; *sinus* $A.\,2s = b$; *sinus* $A.\,3s = c$; *sinus* $A.\,4s = d$; *etc. erit semper*

$$q = \frac{1}{2}s + a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{4}d + \frac{1}{5}e + \text{ etc.}$$

Th[*eorema*]: *In Circulo radii* $= 1$ *capiatur arcus quicunque* s, *cujus tangens sit* $= a$; *tang* $A\,\frac{1}{2}s = b$; *tang* $A\,\frac{1}{4}s = c$; *tang* $A\,\frac{1}{8}s = d$; *tang* $A\,\frac{1}{16}s = e$ *etc. erit*

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{8}d + \frac{1}{16}e + \text{ etc.}$$

Ich bin jetzund mit Durchlesung derjenigen *Piecen*, welche über die von der *Academie* aufgegebene Frage von der Ursach und der Ordnung der Winde sind eingesandt worden, beschäfftiget: Es sind darüber 10 eingelauffen, unter welchen sich eine, so vor allen anderen in Betrachtung gezogen zu werden verdienet, befindet.[10] Die *Devise* so sich zu Ende derselben befindet ist auch schön, sie lautet allso:

Haec ego de ventis: dum ventorum ocyor alis
Palantes pellit populos Fridericus, et orbi
Insignis Lauro ramum praetendit Olivae.

Neulich kam mir der *Address Calender* von Schlesien in die Hände; darinn ich im Durchblättern Ewr. Hochwohlgeb. Nahmen verschiedene mal antraff; ein Bürger Meister von Breslau, wo ich nicht irre, nennet sich von Goldbach.[11]

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgebohrnen gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 5 *April.*
1746.

R 816 Reply to n° 101
Berlin, April 5th, 1746
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 160–162r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 368–372; *Euler-Goldbach* (1965), p. 244–246

103
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 22nd) May 3rd, 1746

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Die Nachricht daß der Herr Haude einige Bücher an den Hn Leib-*Medicum Sanches* übersendet, ist mir sehr lieb; sollten selbige Bücher noch nicht abgegangen seyn so ersuche ich Ew. Hochedelgeb. dienstlich inliegenden Zettel dem Hn *Haude* nebst meiner Empfehlung zu zusenden und den selben ersuchen zu lassen daß er das jenige so von solchen Büchern vorhanden seyn möchte, beyfügen wolle.

Den[1] *terminum gener[alem] seriei* $1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 +$ *&c.*[2] hatte ich, als mein letztes Schreiben abgieng, nur *in potestate* und dachte nicht daß selbiger so leicht seyn sollte, in dem ich dessen sonst gar keine Erwehnung gethan haben würde.

Ich weiß nicht ob man *methode*n hat[3] von dergleichen *seriebus* als diese ist

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 8} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 14} + \&c. = 2^{-\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{2}} - 2,$$

cuius lex progressionis est $\dfrac{-A\,(2x+5)\,(x+3)}{2\,(x+2)\,(x+4)} = B$, die *Summas* zu finden.

Die in meinem vorigen angeführte *idée* einer *solution*[4] gehet noch weiter wann man vor q eine *functionem quamcunque ipsius* p annimmt nur mit der *limitation* daß $q > p$ und $q < a$ (denn ich sehe zum wenigsten nicht daß *ex natura problematis* mehrere *limitationes* erfordert werden) und ferner

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{(a \pm p)^2}{4}; \\ dx^2 + dy^2 &= \frac{\left(a^2 - p^2\right)\, dp}{4\,(q^2 - p^2)}, \end{aligned}$$

so wird die *abscissa ad applicatam in curva quaesita* seyn wie x zu y.[5]

Inliegendes an Hn *Schuster* in Leipzig[6] wird bestens *recommandi*ret und ich verharre mit besonderer Hochachtung

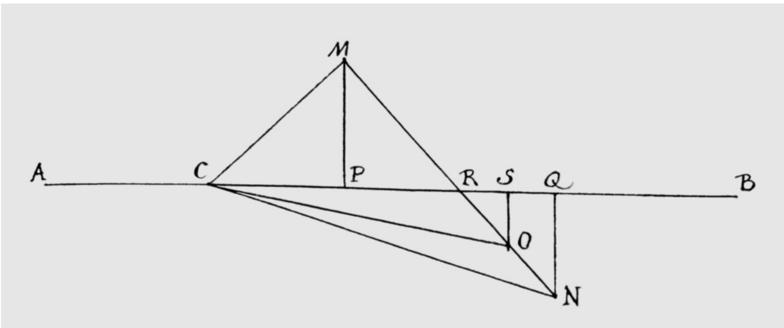
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 3. *Maii* 1746.

R 817 Reply to n° 102
Petersburg, (April 22nd) May 3rd, 1746
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 105r
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 43r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 373–374; *Euler-Goldbach* (1965), p. 247

104
Goldbach to Euler
Petersburg, May (10th) 21st, 1746

P. S. Es ist mir gestern eingefallen daß sich das *Problema catoptricum* auch folgender massen *solvi*ren lässet:



Sit AB axis curvae $= a$; punctum radians C. Sint CM et CN radii in curvam incidentes; MR et NR radii ad idem punctum axis R reflexi; capiatur in MN punctum O ita ut sint $CM + MO = CN + NO = a$, et ponatur recta $CO = q$, $CM = \frac{a-p}{2}$, $MO = \frac{a+p}{2}$, $CN = \frac{a+v}{2}$, $NO = \frac{a-v}{2}$ (ubi v iam datur per p et q; est enim[1] $v = \frac{(2a+p)\,q^2 + a^2 p}{a^2 + 2ap + q^2}$*); ponatur porro $RO = z$, $RS = uz$, invenietur spatium quod inter radium incidentem et reflexum in axe intercipitur*

$$\begin{aligned} CR &= CS - RS = \sqrt{q^2 - z^2\,(1-u^2)} - uz \\ &= CQ - RQ = \frac{1}{2}\sqrt{(a+v)^2 - (a-v+2z)^2\,(1-u^2)} - \frac{(a-v+2z)\,u}{2} \\ &= CP + PR = \frac{1}{2}\sqrt{(a-p)^2 - (a+p-2z)^2\,(1-u^2)} + \frac{(a+p-2z)\,u}{2}. \end{aligned}$$

Sed cum v iam supra data sit in p et q; per has aequationes pro CR inventas dari etiam poterunt u et z in p et q, qui valores deinde substituendi sunt in applicata

$$MP = \left(\frac{a+p-2z}{2}\right)\sqrt{1-u^2}$$

et in abscissa

$$CP = \sqrt{\frac{(a-p)^2}{4} - \overline{MP}^2}.$$

vert[*e*].

Ob nun zwar die würckliche *determination* der *quantitatum* u und z durch p und q etwas weitläufftig seyn möchte, so ist doch hingegen zu *consideri*ren daß in dieser *solution* keine *differentialia* vorkommen.

S.^{t} Petersburg den 21. *Maii st. n.* 1746.[2]

R 818 Postscript to n° 103
Petersburg, May (10th) 21st, 1746
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 106rv
Copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 43v–44r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 374–375; *Euler-Goldbach* (1965), p. 247–248

105
Euler to Goldbach
Berlin, May 28th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ungeacht die Bücher und *Defect*en, so Ewr. Hochwohlgebohrnen das vorige mal verlanget[1] schon vor geraumer Zeit an den H. Leib-*Medicum Sanches* (oder den H. *D*[*octo*]*^{r}* Schreiber) abgegangen, so wird doch nächstens wiedrum an Denselben eine *Partie* Bücher versendet werden, bey welcher Gelegenheit der H. Haude nicht ermangeln wird die letstens verlangten, so schon bereits der gegebenen Ordre gemäß theils gehefftet theils gebunden sind, an Ewr. Hochwohlgeb. zu überschicken.

Die von Ewr. Hochwohlgeb. gemeldte *Series*[2]

$$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{9}{12} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{11}{14} + etc.$$

kan durch meine *Methode* leicht gefunden werden. Dann wann ich nach der *Lege progressionis* noch die 2 vorhergehenden *Terminos* dazu setze so kommt:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{9}{12} - etc.$$

Diese ist in der folgenden enthalten, wann man setzt $x = 1$,

$$s = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}x^6 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8}x^8 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10}x^{10} + etc.$$

Man *differentir*e diese *Seriem* und theile allenthalben durch dx so bekommt man:

$$\frac{ds}{dx} = 1x^3 - \frac{1}{2}\cdot 3x^5 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 5x^7 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 7x^9 + etc.$$

Man *multiplicir*e durch $\frac{dx}{x^3}$, so wird:

$$\frac{ds}{x^3} = 1\,dx - \frac{1}{2}\cdot 3xx\,dx + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 5x^4dx - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 7x^6dx + etc.;$$

wann man nun *integrir*t so bekommt man:

$$\int\frac{ds}{x^3} = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^7 + etc.$$

Hier sieht man leicht daß diese *Series* ist $= x\ (1+xx)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$; folglich ist $\displaystyle\int\frac{ds}{x^3} = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ und $\displaystyle\frac{ds}{x^3} = \frac{dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}}$; allso

$$s = \int\frac{x^3dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}} - \int\frac{x\,dx}{(1+xx)^{\frac{3}{2}}} = (1+xx)^{\frac{1}{2}} + (1+xx)^{-\frac{1}{2}} - 2,$$

dann hier muß die *quantitas constans* 2 *subtrahir*t werden, weil *posito* $x = 0$ werden muß $s = 0$. Setzt man nun $x = 1$ so bekommt man:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{9}{12} - etc. = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} - 2.$$

Letstens bin ich auf nachfolgende *Seriem* gekommen, deren *summ* ob sie gleich so leicht ausgedruckt wird, dennoch durch diese *Methode* nicht wohl gefunden werden kan, dann ich komme auf eine *differentio-differential aequation*, welche sich *generaliter* nicht *integrir*en lässt. Die *Series* ist diese:

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + etc. = 2^n;$$

wann allso $n = 1$ so ist:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 4}{4\cdot 8} + \frac{1\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{1\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + \frac{1\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20} + etc. = 2;$$

diese wird leicht in diese Form verwandelt:[3]

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + etc. = 2\left(1 - (1-1)^{\frac{1}{2}}\right) = 2,$$

in welchem Fall die Richtigkeit leicht zu ersehen.

Ich glaube kaum daß die *ratio diametri ad peripheriam* $1 : \pi$ leichter *per approximationem* gefunden werden könne als durch Hülfe beyder folgenden *serierum*:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} - \frac{1}{11\cdot 5^{11}} + etc. \\ q &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \frac{1}{9\cdot 239^9} - \frac{1}{11\cdot 239^{11}} + etc. \end{aligned}$$

Dann wann hieraus die Werthe von p und q gefunden werden so ist $\pi = 16p - 4q$.[4]

Nach dem letst ergangenen Urtheil der *Academi*e zu *Paris* über den *Magnet*en ist meiner *Piece* der dritte Theil des dreyfachen Preißes zuerkannt worden,[5] wie Ewr. Hochwohlgeb. schon aus unseren Zeitungen werden ersehen haben. H. *Bernoulli* hat auch einen Drittel bekommen. Hingegen haben wir den Preiß der hiesigen *Academi*e von 50 *Ducat*en über die Winde der *Piece*: *Haec ego de ventis: dum etc.* zuerkannt, davon der *Auctor* H. *D'Alembert* aus *Paris* ist.[6]

Der Brief nach Leipzig an H. Schuster[7] ist denselben Tag abgegangen, von H. *Haude* werde vielleicht eine Rechnung vorläuffig hier beylegen,[8] damit Ewr. Hochwohlgeb. sehen, was für Bücher gesandt werden, und wie hoch sich dieselben belauffen.

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verbleiben

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 28 *Maij*
1746.

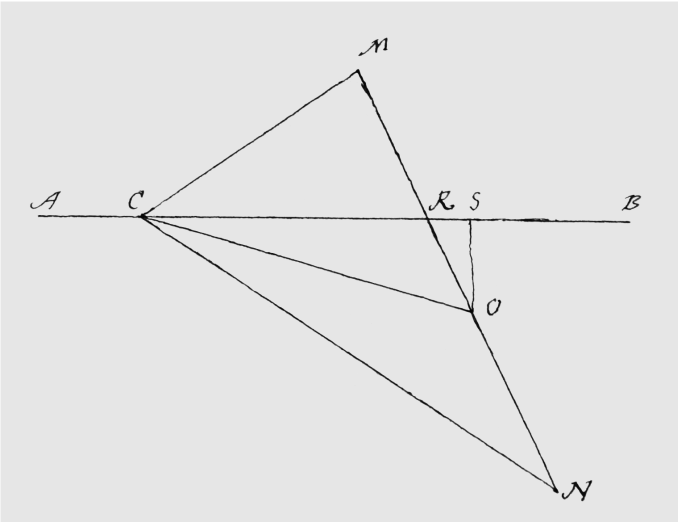
Die beyligende Rechnung ist ursach daß die Absendung dieses Briefes biß den 4$^{\text{ten}}$ *Junii* verschoben worden.

R 819 Reply to n° 103
Berlin, May 28th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 171–172r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 376–378; *Euler-Goldbach* (1965), p. 249–251

106
Euler to Goldbach
Berlin, June 14th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Ewr. Hochwohlgeb. letst überschriebene *Solution* des *Problematis Catoptrici*[1] hat mich anfänglich nicht wenig *frappir*t, da dieselbe keine *Differentialia* in sich enthält, und ich doch versichert bin, daß die Betrachtung der *Reflexion* nothwendig *differentialia* erfordere. Als ich aber die Sach genauer erwogen, habe ich bald gesehen, daß die drey gefundenen *Formul*n für die Linie CR unmöglich zwey *Quantitates incognitas determinir*en können, sondern nachdem man eine bestimmet, eine *Aequatio identica* herauskommen müsse.



Dann in einem jeglichen *Triangulo* CMN kan eine Seite MN allzeit in O dergestalt geschnitten werden, daß $CM + MO = CN + NO$: wodurch allso keine besondere Beschaffenheit bestimmet wird. Wann man nun setzt $CM+MO = CN+NO = a$; $CM = \frac{a-p}{2}$; $MO = \frac{a+p}{2}$; $CN = \frac{a+v}{2}$ und $NO = \frac{a-v}{2}$: so kan daraus die Linie $CO = q$ bestimmt werden, dann es wird $qq = \frac{aa\,(v-p)+2apv}{2a-v+p}$ oder $qq + aa = \frac{2a\,(aa+pv)}{2a-v+p}$. Setzt man nun ferner $RO = z$, und den *Cosinum* des Winkels $BRO = u$, so kan *per* p, v, z und a der Werth von u gefunden werden. Das *Intervallum* z aber bleibet willkührig, weil noch kein Umstand in Betrachtung gezogen worden, wodurch z bestimmt werden könnte. Sollen aber die Linien CM und MO, *item* CN und NO *lege reflexionis aequaliter ad curvam inclinir*t seyn, so müste *in situ proximo* das *punctum* O unverändert bleiben und folglich so wohl *diff.* $CS = 0$ als *diff.* $SO = 0$, wodurch das *problema plusquam determinatum* würde oder vielmehr nur eine einzige *Lineam satisfacientem* nehmlich die *Ellipsin* geben würde. Die Ursach davon ist diese, daß man ohne Nothwendigkeit angenommen $CM + MO = CN + NO$: da diese beyden *Valores* auch ungleich seyn können wann nur ihre *summ* $CM + MN + NC$[2] *constans* bleibt. Endlich ist auch hier nicht der Haupt Umstand in Betrachtung gezogen worden, daß die beyden *Puncta* M und N *in eadem linea curva continua* seyn müssen. Übrigens glaube ich kaum daß von diesem *Problemate* eine kürzere und leichtere *solution* gefunden werden könne als diese:[3]

Sit $CMNC$ radius post geminam reflexionem ad C reversus, sumtaque pro lubitu recta CB pro axe, ad quem curvae quaesitae aequatio referatur; vocetur $CR = r$, angulus $CRM = \varphi$; ejus sinus $= s$ et cosinus $= u$, posito radio $= 1$ ita ut sit $ss + uu = 1$ et $d\varphi = \frac{ds}{u} = -\frac{du}{s}$. Hic angulum φ consideravi, quatenus ad punctum M spectat, pro puncto N autem is abibit in CRO, et quia in partem contrariam cadit erit is $= -180^\circ + \varphi$; ejusque ergo sinus $= -s$ et cosinus $= -u$. Quia jam punctum R ad utrumque punctum M et N aequaliter pertinere debet, quantitatem $CR = r$ ita per s et u exprimi oportet, ut eundem valorem retineat, etiamsi pro s et u ponantur $-s$ et $-u$. Unde hujusmodi erit relatio inter r et s, u:

$$r = \alpha + \beta ss + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u \textit{ etc.}$$

vel in fractionibus:

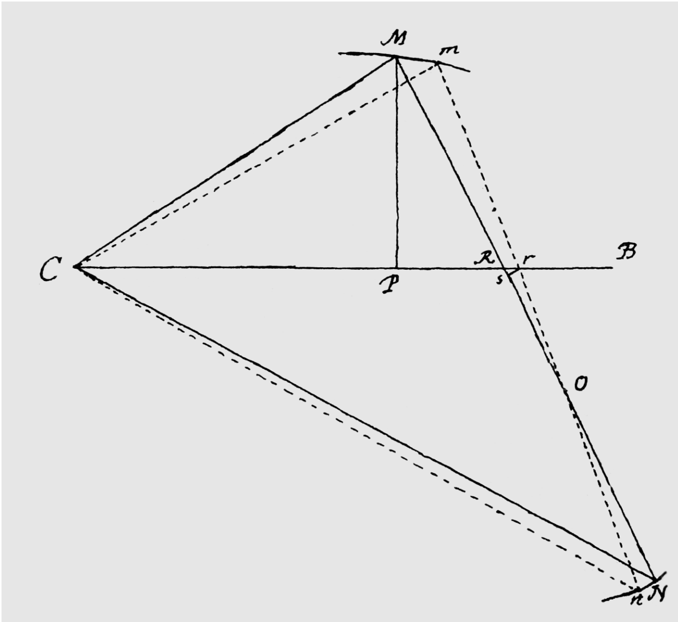
$$r = \frac{\alpha + \beta ss + \gamma su + \delta uu + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \eta s^2 u^2 + \vartheta su^3 + \textit{etc.}}{A + Bss + Csu + Duu + Es^4 + Fs^3 u + Gs^2 u^2 + Hsu^3 + \textit{etc.}}$$

vel etiam

$$r = \frac{\alpha s + \beta u + \gamma s^3 + \delta s^2 u + \varepsilon su^2 + \zeta u^3 + \eta s^5 + \vartheta s^4 u + \textit{etc.}}{As + Bu + Cs^3 + Ds^2 u + Esu^2 + Fu^3 + Gs^5 + Hs^4 u + \textit{etc.}}$$

Quaecunque ergo hujus generis aequatio pro r definiendo assumitur, punctum R aeque respiciet utrumque punctum M et N, ac propterea puncta M et N in una eademque linea curva continua erunt sita. Superest ergo ut ex hujusmodi aequatione inter r, s et u assumta, ipsa curva definiatur, et aequatio inter coordinatas $CP = x$ et $PM = y$ eliciatur. In hunc finem consideretur reflexio proxima $CmnC$, sitque O intersectio rectarum MN et mn: atque ex natura reflexionis manifestum est, fore particulam curvae Mm elementum ellipseos focis C et O atque Nn elementum ellipseos iisdem focis C et O descriptae: Hinc ergo habebimus $CM + MO = Cm + mO$, et $CN + NO = Cn + nO$: sed sufficit alteram tantum conditionem $CM + MO = Cm + mO$ spectasse, quia per determinationem ipsius r alterius ratio jam simul involvitur.

Cum igitur sit $CR = r$, erit $Rr = dr$, et ex r in OM demisso perpendiculo rs fiet $rs = s\,dr$ et $Rs = u\,dr$. Appelletur $CM + MR = q$; erit $Cm + mr = q + dq$; ideoque ob $CM + MO = Cm + mO$ fiet $q + OR = q + dq + Or$ seu $OR - Or = Rs = dq = u\,dr$; ita ut hinc prodeat $q = a + \int u\,dr = CM + MR$. Sit



jam $MR = z$, *erit* $PM = y = sz$; $PR = uz$; *et* $CP = x = r - uz$, *unde fit* $CM = \sqrt{(rr - 2urz + zz)}$ *ob* $ss+uu = 1$. *At est* $CM = q-z$, *ergo* $\sqrt{(rr - 2urz + zz)} = q - z$ *sumtisque quadratis:* $rr - 2urz = qq - 2qz$; *qua fit* $z = \dfrac{qq - rr}{2q - 2ur}$. *Assumto ergo valore quocunque idoneo pro* r *in* s *et* u *expresso, hinc quaeratur* $q = a + \int u\,dr$; *porroque* $z = \dfrac{qq - rr}{2q - 2ur}$; *quibus inventis erit* $x = r - uz$ *et* $y = sz$, *sicque habebitur curva problemati satisfaciens: quae quidem erit transcendens, si formula* $\int u\,dr$ *algebraice exprimi nequeat. Ad curvas ergo algebraicas inveniendas ejusmodi functionem pro* r *eligi oportet, ut formula* $\int u\,dr$ *fiat integrabilis; quod quidem hoc modo generaliter praestari potest: cum sit* $\int u\,dr = ur - \int r\,du$ *ponatur* $\int r\,du = v$; *fietque* $r = \dfrac{dv}{du}$. *Quo igitur* r *fiat functio parium dimensionum ipsarum* s *et* u, *ut supra requirebatur, necesse est ut* v *sit functio imparium dimensionum ipsarum* s *et* u *seu talis, quae abeat in* $-v$, *si pro* s *et* u *ponantur* $-s$ *et* $-u$. *Hujusmodi ergo functione pro* v *assumta, erit* $r = \dfrac{dv}{du}$; *ubi ob* $ds = -\dfrac{u\,du}{s}$ *differentialia destruentur, ita ut* r *fiat quantitas finita algebraica. Inventa autem* r *erit* $\int u\,dr = ur - v$ *et* $q = a + ur - v$ *atque* $z = \dfrac{qq - rr}{2q - 2ur}$; *ex quibus denique elicientur coordinatae* $CP = x = r - uz$ *et* $PM = y = sz$, *ambae per* s *et* u *expressae: unde curva construi, et aequatio inter* x *et* y *eliminandis* s *et* u *ope* $ss + uu = 1$, *erui poterit.*

Ex[*empli*] *gr*[*atia*]. *Cum* v *debeat esse functio imparium dimensionum ipsarum* s *et* u, *assumatur* $v = bs + cu$ *erit* $dv = b\,ds + c\,du = -\dfrac{bu\,du}{s} + c\,du$ *atque*

$r = -\dfrac{bu}{s} + c$: *tum*

$$q = a - \frac{buu}{s} + cu - bs - cu = a - \frac{b}{s}:$$

porro ob $qq = aa - \dfrac{2ab}{s} + \dfrac{bb}{ss}$ *et* $rr = \dfrac{bbuu}{ss} - \dfrac{2bcu}{s} + cc$ *erit*

$$z = \frac{aa - \dfrac{2ab}{s} + bb + \dfrac{2bcu}{s} - cc}{2a - 2bs - 2cu}$$

seu

$$z = \frac{(aa + bb - cc)\ s - 2ab + 2bcu}{2s\,(a - bs - cu)}:$$

Unde fiunt coordinatae:

$$\begin{aligned} CP &= x = \frac{2ac - 2bcs - (aa - bb + cc)\ u}{2\,(a - bs - cu)}; \\ PM &= y = \frac{-\,2ab + 2bcu + (aa + bb - cc)\ s}{2\,(a - bs - cu)}, \end{aligned}$$

unde eliminandis s et u aequatio resultat inter x et y duarum tantum dimensionum, qua natura ellipsis ad rectam quamcunque per focum C tanquam axem relata exprimitur: si sit $b = 0$, *recta CB per alterum quoque focum transibit.*

Letstens habe gefunden daß diese *Expressio* $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ einen *valorem realem* habe, welcher *in fractionibus decimalibus* $= 0{,}207\,879\,576\,3$, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet.[4] Übrigens beziehe mich auf mein voriges Schreiben, der ich mit der vollkommensten Hochachtung und *Veneration* verharre

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 14ten *Junii*
1746

Auf künftiges Jahr ist von der Hiesigen *Academie* die Frage: *de natura elementorum corporum seu monadum* aufgegeben worden.[5]

R 820 Reply to nº 104
Berlin, June 14th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 173–174v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 379–383; *Euler-Goldbach* (1965), p. 251–253

107
Goldbach to Euler
Petersburg, (June 24th) July 5th, 1746

HochEdelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen Schreiben vom 28. *Maii* habe ich den 16. *Jun.* und das vom 14. *Jun.* ungewöhnlich zeitig, nemlich den 25. *eiusd*[*em*] erhalten.[1] In der *Specification* von Büchern,[2] vor deren übersendung ich Eurer Hochedelgeb. dienstlichen Danck erstatte, ist zwar nicht gemeldet an wen das Geld bezahlet werden soll, ich hoffe aber, wann die Bücher selbst ankommen werden, eine *assignation* dabey zu finden. Daß Ew. Hochedelg. einen Theil des neulich *distribui*rten Preises von Pariß bekommen würden, hatte ich zwar fest vermuthet, habe aber die eigentliche Nachricht davon nicht eher als aus Dero letztem Schreiben bekommen, wie mir denn auch die dritte Person so an diesem Preise Theil gehabt biß *dato* unbekannt ist.[3] Die zum künfftigen *praemio* bey der Parisischen *Acad*[*emie*] *des Sciences* ausgesetzte Frage[4] giebt mir auch vor Ew. H. sehr gute Hofnung. Ich bitte mir bey gelegenheit zu melden wie viel male Dero *pieces* schon bey selbiger *Acad*[*emie*] *victorieuses* gewesen sind?

Es gehöret meines erachtens schon eine ziemliche Fertigkeit dazu daß man aus der *serie*

$$x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5 - \text{\&c.}$$

die *summam*

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{[8]} - \text{\&c.}$$

nach Eurer HochE. *methode* finde,[5] und von der *Serie*[6]

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \text{\&c.}$$

habe ich folgendes angemercket: Wann man setzet

$$2^n = 1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \text{\&c.}$$

so ist kein Zweiffel daß die *quantitates* β, γ, δ, *&c.* ihre *determinatos valores* haben, wie denn *exempli gr*[*atia*] β = ist $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$ *&c.*; machet man aber *series* in deren *terminis* immer mehr *potestates ipsius* n vorkommen, so werden zwar die *series* aus welchen die *quantitates* β, γ, δ, *&c.* bestehen (wie solches in der *serie* $1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8} + \text{\&c.} = 2^n$ geschiehet) gleichsam mit einander verwickelt, aber diese *quantitates* an sich selbst bleiben nichts desto weniger *invariabiles*. So offt also dergleichen *Series* wo die *quantitas indeterminata* n in jedem *termino ad diversas potestates evecta* ist, vorkommen, so meyne ich der sicherste Weg die *summam* zu finden wäre, daß man zuforderst die *coefficientes* β, γ, δ, *&c.* suchte.[7]

Bey Gelegenheit des von E. H. gefundenen *valoris*[8] vor $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$ ist mir etwas eingefallen an dessen möglichkeit ich noch den Tag zuvor sehr würde gezweifelt haben, nemlich daß auch diese *Series*

$$A \ldots \ \alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + \&c.$$

und *generatim* alle, wo die *exponentes numeri a ad formulam generalem reduci*ret werden können,[9] *summabiles* sind, nachdem die *coefficientes* α, β, γ, *&c. determini*ret werden, dann wann gesetzet wird

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \&c.\\
\beta &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + 4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \&c.\\
\gamma &= 1 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + 3 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + 10 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} + \&c.\\
\delta &= 1 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + 4 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + 10 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}\\
&\qquad + 20 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} + \&c.\\
&+ \ \&c.,
\end{aligned}$$

so ist die *Series* $A = a^{\frac{1}{4}}$, und nach eben den selben *valoribus pro* α, β, γ, δ, *&c.* wird[10]

$$B \ldots \ \alpha a^a - \beta a^{2a^2} + \gamma a^{3a^3} \mathbin{:\!+\!:} \delta a^{4a^4} + \&c. = \sqrt{a^{\sqrt{a}}} = a^{\frac{a}{2}^{\frac{1}{2}}}.$$

Meine *continui*rliche *distractions* sind zum theil daran schuld daß sich in meine Briefe manche Fehler einschleichen, die ich wohl verhüten könnte, und so ist es auch mit meinem letzten *P. S.* ergangen[11] indem ich bey genauerer Betrachtung desselben noch vor ankunfft Eurer HochE. Schreibens bemercket daß beyde *quantitates u et z* auf solche art nicht *elimini*ret werden können, sondern eine davon übrig bleibet,[12] wie denn die 3 *valores* von u so durch selbige 3 *aequationes* gefunden werden nichts anders sind, als (*posito* $m = 2a + p - v$)

$$\frac{(av + ap - mz)^2}{m^2q^2 - 2a\,(p + v)\;mz + m^2z^2} = u^2.$$

Die *Solution* welche E. H. in Dero letztem Schreiben anführen,[13] hat wegen ihrer Kürtze und Deutlichkeit für den vorigen, in meinen Augen, einen grossen Vorzug; nur dieses scheinet mir noch bedencklich: daß weil das *differentiale* von $RO \quad = -\,dq$ und folglich $CM + MO = Constanti$, wann dieses *constans a* gesetzt wird nicht nur Mm ein *elementum ellipseos*, sondern die gantze *curva quaesita* eine *ellipsis* seyn wird deren *axis* durch die *focos* C und O gehet und $= a$ ist, nur mit dem Unterscheide daß die *abscissae* CP und die *applicatae* MP (wie sie von E. H.

durch r und u bestimmet sind) nicht *ad ipsum axem curvae*, sondern *ad rectam positione datam et per focum C productam* genommen werden müssen, es mag im übrigen r eine *functionem quamcunque ipsius u* andeuten.

Wann man von nachfolgender *Serie*

$$1+\frac{5}{3}+\frac{43}{3\cdot 5}+\frac{531}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{8601}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\&c.$$

deren *lex progressionis* diese ist, daß *dato termino quocunque A et exponente eius x* der *terminus sequens* sey $B=\dfrac{4xA+1}{2x+1}$, die *formulam generalem* geben könnte, dörffte man nur in dem *termino generali* setzen $x=\frac{1}{2}$, so würde die *area circuli cuius diameter* $=1$ heraus kommen.[14]

Dem Hn *Pr[ofessor] Uhle* bitte ich nechst meiner schuldigsten Empfehlung zu melden daß der kürtzeste Weg das verlangte *Carmen* des Hn *Prof.* Gesners zu erhalten meines erachtens seyn würde den Hn *D[octor] Lilienthal* darum zu ersuchen welcher von vielen Jahren her des Seel[igen] Hn Bayers guter Freund gewesen und das *Carmen*, so vermuthlich in Königsberg gedruckt ist, leicht zu finden wissen wird.[15]

Ich verharre übrigens mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S. Petersburg
den 5. *Jul.* 1746.

R 821 Reply to n° 105 and n° 106
Petersburg, (June 24th) July 5th, 1746
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 107–108v
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 44r–45r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 384–387; *Euler-Goldbach* (1965), p. 254–255

108
Euler to Goldbach
Berlin, July 26th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Die Bücher, welche Ewr. Hochwohlgeb. von hier verlangt haben[1] werden wie ich von dem H. *Haude* gehört nächstens von hier weggeschickt werden, weil sich dazu bißher keine bequeme Gelegenheit gefunden: und die Bezahlung wird alsdann am füglichsten durch den H. *Hainchelin* geschehen können. Für Dero hochgeneigte

Gratulation zu dem erhaltenen Theil des Pariser Preises statte allen gehorsamsten Dank ab; dieses war das vierte mal, daß ich etwas von diesem Preiß bekommen:[2] auf das künftige Jahr, da die Frage von Findung der Zeit durch himmlische Beobachtungen zur See vorgelegt ist, habe ich auch schon eine *Piece* hingeschickt;[3] die Frage aber für 1748 ist meines Erachtens so schwehr, daß ich noch nicht weiß, ob ich im Stande seyn werde, etwas darüber zu verfertigen; indessen wollte ich mir von Ewr. Hochwohlgeb. dazu eine schöne *Devise* gehorsamst ausgebeten haben.[4]

Daß die *Summ* dieser *Seriei*

$$1+\frac{n}{4}+\frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}+etc.$$

gleich ist 2^n hatte ich auf eine sehr weitläuffige Art herausgebracht, und kam mir um so viel merkwürdiger vor, weil ich solches durch keine mir bekannte *Methode* füglich beweisen konnte. Auf eine ähnliche Weise habe ich seit der Zeit gefunden, daß diese *Series*:

$$\begin{aligned}1 \quad + \quad & \frac{n}{4}x^2+\frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}x^4+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^6+\frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^8\\ + \quad etc. \quad = \quad & 2^n\left(\frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{xx}\right)^n\end{aligned}$$

welche *Series* wann $x=1$ in die vorige verwandelt wird.[5] Setzt man $xx=\frac{1}{2}$ so wird

$$\begin{aligned}1 \quad + \quad & \frac{n}{8}+\frac{n\,(n+3)}{8\cdot 16}+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{8\cdot 16\cdot 24}+\frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}+etc.\\ = \quad & \left(4-2\sqrt{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Wollte man aber um die *Summ* dieser *Seriei* zu finden, alle *coëfficientes evolvir*en, und die *Seriem* nach den *Potestät*en des *n rangir*en, so würde man auf so sehr verwirrte *Series* kommen, daß schwehrlich daraus etwas zu finden seyn würde. Dann wann man zum *Exemp*el setzt,

$$\begin{aligned}A \quad \ldots \quad 1 \quad + \quad & \frac{n}{4}+\frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}+etc.\\ = \quad & 1+\beta n+\gamma n^2+\delta n^3+\varepsilon n^4+etc.\end{aligned}$$

so wird

$$\beta=\frac{1}{4}+\frac{3}{4\cdot 8}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\frac{5\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}+\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}+etc.$$

welche *Series negative sumta* $(-\beta)$ den *Terminum exponentis* $\frac{1}{2}$ in dieser *Serie* ausdrückt:[6]

$$\begin{array}{ccccccc}\frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ -\beta; & 0; & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}; & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}; & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}; & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}; \; etc.\end{array}$$

folglich ist der *terminus indicis* $\frac{3}{2} = -\beta + 1$; der *terminus indicis* $\frac{5}{2} = -\beta + 1 + \dfrac{1}{3}$; und der *terminus indicis* $\left(\infty + \frac{1}{2}\right)$

$$= -\beta + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \textit{etc.};$$

der *Terminus indicis* ∞ aber ist

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \textit{etc.}$$

Da nun *lege seriei* die *termini infinitesimi* einander gleich seyn müssen,[7] so wird $\beta = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{7} - \textit{etc.}$ wie Ewr. Hochwohlgeb. angemerket. Dieses gibt sich aber aus der *summ* der *seriei* A, welche ist $= 2^n$: dann wann $\ell\, 2$ oder $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \textit{etc.}$ gesetzt wird $= \beta$ so ist:

$$2^n = 1 + \beta n + \frac{\beta^2 n^2}{1\cdot 2} + \frac{\beta^3 n^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\beta^4 n^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \textit{etc.};$$

folglich ist in der angenommenen *Form* $1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \varepsilon n^4 + \textit{etc.}$: $\gamma = \dfrac{1}{2}\beta^2$; $\delta = \dfrac{1}{6}\beta^3$; *etc.*, welches aus der *serie* A selbst schwehrlich würde herausgebracht werden können.

Gleiche Schwierigkeit würde man finden, wann man auf diese Art die *summ* dieser *seriei* suchen wollte,

$$[B] \quad \ldots \quad 1 \; + \; \frac{n^2}{1\cdot 2} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)\left(n^2+16\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)\left(n^2+16\right)\left(n^2+36\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \textit{etc.}$$

Wann $\pi = 3{,}141\,59\,\textit{etc.}$ und $\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}[!] + \textit{etc.}$ so ist die *summ* dieser *seriei* $B = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}n\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n\pi}$.

Hingegen ist diese *series*:

$$[C] \quad \ldots \quad 1 \; + \; \frac{n^2}{1\cdot 2} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)\left(n^2+4\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)\left(n^2+4\right)\left(n^2+9\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \textit{etc.} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}n\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}n\pi}$$

oder es ist

$$C = 1 + \frac{n^2\pi^2}{3\cdot 6} + \frac{n^4\pi^4}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \frac{n^6\pi^6}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15\cdot 18} + \textit{etc.};$$

folglich hat man

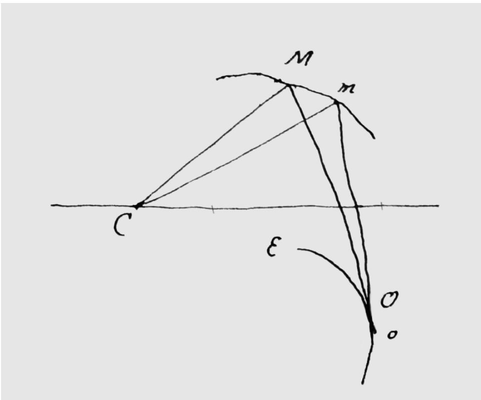
$$\frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} + etc.$$

und

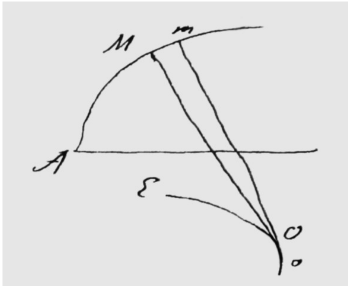
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot\frac{1}{10} + etc.$$ [8]

Ewr. Hochwohlgeb. Erfindung von der *summ* solcher *Serierum*: $\alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + etc.$ wann α, β, γ, δ *etc.* gewisse Werthe haben,[9] ist ungemein sinnreich. Ich habe zwar bald gesehen, daß solche *Series* herauskommen, wann man den *Terminum exponentis* $\frac{1}{2}$ in dieser *Serie* a^1, a^4, a^9, a^{16} , *etc.* welcher ist $\sqrt[4]{a}$ auf gewöhnliche Art suchet: allein es ist zu bedauren, daß alle diese *coëfficientes* α, β, γ, δ, *etc.* unendlich werden, indem $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$; $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$; $\gamma = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(1-1)^{-\frac{5}{2}}$; $\delta = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(1-1)^{-\frac{7}{2}}$; *etc.* werden.

Der Zweifel, welchen Ewr. Hochwohlgeb. gegen meine *Solution* des bekannten *Problematis Catoptrici* zu machen belieben,[10] als wann dieselbe nur allein die *Ellipsin* gäbe, wird dadurch leicht gehoben, wann man betrachtet, daß das *punctum* O nicht *constans* sondern *variabile* angenommen wird, indem es ein *punctum in caustica EOo* ist.



Dann ungeacht *ex natura reflexionis* ist $CM + MO = Cm + mO$ so ist doch nicht *diff.* $(CM + MO) = 0$ sondern $= Oo$, und allso $CM + MO = Const. +$ *arcu causticae EO*: welche Eigenschafft allen *Causticis* gemein ist. Übrigens geben meine *Formul*n solche *Curvas*, welche offenbar keine *Ellipses* sind. Es eräugnet sich hier nehmlich eben der Fall, als bey Untersuchung des *radii osculi MO* einer krummen Linie *AM*.



Dann ungeacht $MO = mO$, so folgt doch nicht daß *diff.* $MO = 0$, noch daß $MO =$ *const.*: sondern weil das *punctum O variabile* nehmlich *in Evoluta* so ist *diff.* $MO = mo - MO = [Oo]$ und allso $MO =$ *Const.* + *arcu evolutae EO*.

Wann von der *Serie*

$$1+\frac{5}{3}+\frac{43}{3\cdot 5}+\frac{531}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{8601}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\textit{etc.}$$

der *terminus ordine* $\frac{1}{2}$ gesucht wird,[11] so wird derselbe $= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\textit{etc.}$ Aus welcher Betrachtung Ewr. Hochwohlgeb. ohne Zweifel jene *seriem* gefun[den.] Es ist aber merkwürdig, daß die *Lex progressionis* sich so bequem ausdrücken lässt.

Stirling hat angemerkt[12] daß die *summ* von dieser *serie*:

$$\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+1)}+\frac{u\,(u+1)}{t\,(t+1)\,(t+2)}+\frac{u\,(u+1)\,(u+2)}{t\,(t+1)\,(t+2)\,(t+3)}+\textit{etc.}$$

sey $= \dfrac{1}{t-u}$; ich habe aber gefunden, daß diese *series* noch weit *generaler* gemacht werden kan:

$$\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+\frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)}+\textit{etc.}=\frac{1}{t-u}$$

wann nur a, b, c, d, *etc.* dergestalt fort gehen, daß $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+[\textit{etc.}]$ eine *summam infinitam* aus machen: Da nun solches geschieht wann a, b, c, d, [*etc.*] die *numeri primi* sind,[13] so kan man sagen, daß zum *Exempel*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\textit{etc.}=1$$

oder daß

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4\cdot 5}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 7}+\frac{3\cdot 4\cdot 6}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\frac{3\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}+\textit{etc.}=1$$

wo die *factores* der Zehler sind *numeri primi* $+1$, die *factores* der Nenner aber *numeri primi* $+2$.

Hiemit empfehle ich mich zu Ewr. Hochwohlgebohrnen ferneren beständigen Wohlgewogenheit und verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 26 *Julii* 1746.

R 822 Reply to nº 107
Berlin, July 26th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 181–182v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 388–393; *Euler-Goldbach* (1965), p. 256–258

109
Goldbach to Euler
Petersburg, August (16th) 27th, 1746

Hochedelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Ich erinnere mich nicht ob ich in meinem vorigen Schreiben bereits erwehnet, daß mir die bewusten *defect*e nebst dem *Tomo III. Thes*[*auri*] *epist*[*olici*] *Lacroz*[*iani*][1] von dem Hn Leib-*Medico Ribeyro* zugesandt worden, für deren Besorgung ich Eurer Hochedelg. dienstlich dancke; es stehet zwar auf dem Titel: *praefationem praemisit &c.*, daß aber diese *praefation* dabey nicht zu finden halte ich noch zur zeit für keinen *defect*, sondern glaube vielmehr daß selbige damahls noch nicht fertig gewesen. Wann H. *Haude* künfftig einige Bücher hieher senden wird, solte es mir sehr lieb seyn die auf inliegendem Zettel *notir*te mit selbiger Gelegenheit zu erhalten.[2]

So offt in den *Summis Serierum* selbst *quantitates per series infinitas exprimendae* vorkommen, mögen die *coefficientes ipsius n* wohl aus sehr schweren *seriebus* bestehen, daß aber die *series*

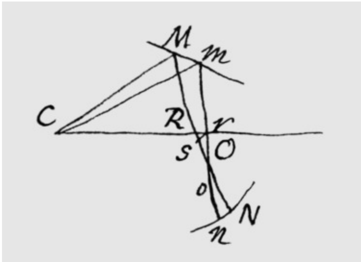
$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4\cdot 8} + \frac{4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12} + \&c. = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \&c.,$$

hatte ich auf eine von Eurer Hochedelg. *methode* sehr unterschiedene art und so gar ohne die *terminos* $\frac{1}{4} + \frac{3}{4\cdot 8} + \&c.$ zu *evolvi*ren aus diesem einigen *raisonnement* gefunden: weil

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$$

und in dieser *serie* der *coefficiens ipsius n* ist[3] $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mathbin{\overset{\cdot\,\cdot}{\underset{\cdot\,\cdot}{+}}} \frac{1}{4} + \&c.$, so muß er auch in allen *seriebus* welche = sind 2^n eben denselben *valorem* haben; nun zweiffelte ich im geringsten nicht daß die von Eurer Hochedelg. angeführte *Series* nicht recht sollte *summi*ret seyn, und konnte dahero den *valorem* β mit grosser Gewißheit angeben.

Daß die in meinem vorigen angenommenen *quantitates* α, β, γ, *&c.* unendliche *valores* andeuten habe ich wohl gewust[4] und zweiffele sehr ob es möglich ist an deren Stelle *valores finitos* zu *substitui*ren; warum aber $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$ *&c.*, sehe ich noch nicht ein.



Daß das *punctum* O nicht anders als in der *ellipsi fixum* seyn könnte[5] hatte ich zwar gesehen, aber ohne gnugsame Betrachtung vermeinet daß weil OR *in situ proximo* in Or verwandelt würde, auch $RS = dq$ das *differentiale* von OR wäre, folglich $CM + MO$ eine *constans* und die gantze *curva* eine *ellipsis* seyn müste; nach dem von Eurer H. gegebenen *éclaircissement* aber ist es deutlich daß Oo das *diff*[*erentiale*] von $CM+MO$ sey und dahero RO *in situ proximo* ro werde so daß wann $RO = w$, $ro = w - dq + Oo$ seyn muß. Es ergiebet sich auch aus dieser *figur*, daß wann CR ein *maximum* ist, die *puncta* O und R *in axe* zusammen kommen und so offt dieses geschiehet $CM = CN$ seyn müsse.

Die *summa*[6] *seriei*

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)} + \&c. = A$$

lässet sich folgender gestalt finden: *Sit* $b = c = d = \&c. = 0$, *erit ipsa series*

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)}\left(\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \&c.\right)$$

(*hoc est, ob* $\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \&c. = \frac{1}{t-u}$) *erit*

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t-u)} = \frac{1}{t-u}.$$

Sit $c = d = e = \&c. = 0$, *erit ipsa series*

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)}\left(\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \&c.\right)$$

seu

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t-u)} = \frac{1}{t-u}.$$ [7]

Eben diese Eigenschafft haben *c*, *d*, *e*, *et alii* *lusus naturae* wann sie so weit als man will *reales*, alle übrige aber = 0 gesetzt werden.

Ich verharre mit sonderbarer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.[t] *Petersbourg*
den 27. *Aug. st. n.* 1746.

R 823 Reply to n° 108
Petersburg, August (16th) 27th, 1746
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 109–110r
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 45v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 394–396; *Euler-Goldbach* (1965), p. 259–260

110
Euler to Goldbach
Petersburg, September 20th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Es ist mir aus *S.*[t] *Petersburg* geschrieben worden, daß I[hro] K[aiserliche] *M*[*ajestät*] Ewr. Hochwohlgeb. mit ansehnlichen Gütern in Liefland begnadiget[1] wozu ich allso gehorsamst *gratuli*re: ungeacht mir dadurch alle Hoffnung gäntzlich benommen wird, Ewr. Hochwohlgeb. jemals wieder zu sehen. Man hat mir auch geschrieben, daß in *Petersburg* ein Gerücht ausgesprenget worden, als wann ich die *Proposition*en, welche mir von des H. *Praesident*en Grafen von *Rasumoffski Excell*[*enz*] zu einem neuen *Engagement* bey der *Academi*e gemacht worden, angenommen hätte, und würklich bald wiedrum dahin kommen würde. Allein ich kan Ewr. Hochwohlgeb. versichern: daß ich diesen Antrag gäntzlich von mir abgelehnet,[2] und mich hier so wohl befinde, daß es die gröste Verwegenheit seyn würde, wann ich mir den geringsten Gedanken zu einer Verändrung einkommen liesse. Der H. *Prof.* Krafft hat mir auch geschrieben, daß ihm ein gleicher Antrag gemacht worden, mit der Versicherung, daß ich mich schon entschlossen hätte, wiederum dahin zu gehen.[3] Ich stehe wegen dieses falschen Gerüchts nicht wenig in Sorgen, wann solches etwa vor Ihro Königl[ichen] *Majestät* Ohren kommen sollte.

Die *Praefation* zu dem *III Tomo Thes*[*auri*] *Epist*[*olici*] *La Croz*[*ei*] ist würklich noch nicht zum Vorschein gekommen. Seit der Zeit sind noch die in beyligender Rechnung *specificir*ten Bücher von dem H. *Haude* an Ewr. Hochwohlgeb. geschickt worden;[4] wann solche angekommen, so ersuchet H. *Haude*, das Geld darfür nur an H. *Hainchelin* in *S.*[t] *Petersburg* zu bezahlen.

Für die mir Gütigst überschickten *Devis*en zu meiner künftigen *Piece* über die Verwirrungen der Bewegungen des ♄ und ♃ statte allen gehorsamsten Dank ab; solche schicken sich vollkommen auf die Art meiner Abhandlung; ich habe davon die mittlere erwehlet, als welche mir mit meinem Vortrag auf das genauste überein zu kommen schien.[5] Ich habe dabey jetz alle Schwierigkeiten fast gäntzlich überwunden, welche von einer gantz andern Art sind als die so ich bey dem Mond angetroffen; dann der *Saturnus* behalt bey nahe eben die Bewegung, als wann er von der Sonne allein angezogen würde; und wird nur von dem *Jupiter* etwas wenig verwirrt, dahingegen die Bewegung des Monds grösten Theils nach der Krafft der Erde richtet, und von der Krafft der Sonne etwas geändert wird. Beyde Fälle haben dieses gemein daß die Verwirrungen sehr klein sind: und eben dieses ist das einige Mittel die Schwierigkeiten der Rechnung zu überwinden, indem die gantze Sach auf *Approximation*en ankommt. Es wären aber *Casus* möglich, wo man auf keine Art die Bewegung eines *Planet*en würde bestimmen können. Es ist klar, wann der Mond sehr viel weiter von der Erde entfernet wäre, derselbe alsdann kein *Satelles* der Erde mehr seyn, sondern als ein *Planeta primarius* seinen Lauf um die Sonne verrichten, dabey aber von der Erde einige Verwirrung, wie der *Saturnus* vom *Jupiter*, leiden würde: welche Bewegung noch könnte bestimmt werden: Wann aber der Mond von der Erde nur so weit entfernet wäre daß die beyden Kräffte der Sonne und der Erde einander beynahe gleich würden, und der Mond allso weder ein *Planeta primarius* noch ein *Satelles* der Erde seyn könnte: so würde seine Bewegung so *irreguliere* seyn, daß dieselbe auf keinerley Art und Weise bestimmt werden könnte. Es ist demnach ein grosses Glück für die *Astronomi*e, daß sich kein solcher Fall in unserem *Systemate planetario* befindet. Wann der Mond, anstatt daß er jetzt ungefehr 60 *radios telluris* von uns entfernt ist, etwan 300 *radios* weit weg wäre: so würde sich der erwehnte Fall eräugnen. Hernach habe ich auch angemerkt, daß wann der Mond bey seiner gegenwärtigen Entfernung nur entweder eine grössere *Excentricität* hätte, oder seine *Orbita* nach einem weit grösseren Winkel auf die *Ecliptic inclinir*t wäre, auch alle bisherige Kunstgriffe nicht hinreichend seyn würden, seinen Ort nur ungefehr voraus zu bestimmen. Da sich nun auch dieser Fall nicht in unserem *Systemate* befindet, so scheinet es allerdings, daß die Einrichtung dieses *Systematis* nach den Gräntzen unsrer Erkänntnüß gemacht worden: und daß sich vielleicht solche Fälle nur in andern *Systematibus*, wo die Einwohner einen höheren Verstand, und eine tiefere Einsicht in die *Analysin* besitzen, befinden.[6] Dann nach der *lege mutuae gravitationis*, wornach sich alle Bewegungen in der Welt zu richten scheinen, beruhet die Bestimmung der Bewegung solcher Körper auf der *Integration* einiger *Differentio-differential Aequation*en, und kommt allso die gantze Sach auf unsere Fähigkeit in der *Analysi* an.

Daß die *Coefficientes* α, β, γ, *etc.* bey Ewr. Hochwohlgeb. neulich überschriebenen *Formul* nicht nur alle *infiniti* werden, sondern auch *per potestates negativas* des *binomii* $1-1$ ausgedruckt werden können, habe ich allso gefunden:[7] es sey vorgelegt diese *Series*: a^A, a^B, a^C, a^D, a^E, a^F *etc.* wovon der *Terminus indici* x

respondens seyn soll a^X, so wird:

$$\begin{aligned} a^X &= a^A + \frac{x-1}{1}\left(a^B - a^A\right) + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}\left(a^C - 2a^B + a^A\right) \\ &\quad + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(a^D - 3a^C + 3a^B - a^A\right) \text{ [+ } etc.\text{]} \end{aligned}$$

Es sey $\dfrac{x-1}{1} = \mathfrak{A}$; $\dfrac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} = \dfrac{x-2}{2}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$; $\dfrac{x-3}{3}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$; $\dfrac{x-4}{4}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$, *etc.* so wird

$$\begin{aligned} a^X = \quad & a^A\,(1 - \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D} - etc.) \\ & + a^B\,(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 5\mathfrak{E} - etc.) \\ & + a^C\,(\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} - 10\mathfrak{E} + 15\mathfrak{F} - etc.) \\ & + a^D\,(\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 10\mathfrak{E}\,[-]\,20\mathfrak{F}\,[+]\,35\mathfrak{G} - etc.)\,. \end{aligned}$$

Wann allso gesetzt wird $a^X = \alpha a^A + \beta a^B + \gamma a^C + \delta a^D +$ *etc.* so wird:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{(x-1)}{1} + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + etc. \\ &= (1-1)^{x-1} \end{aligned}$$

wie aus der *Evolution* erh[ellt.]

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(x-1)}{1} - \frac{2(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} + \frac{3(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} - etc. \\ &= (x-1)\left(1 - \frac{(x-2)}{1} + \frac{(x-2)(x-3)}{1\cdot 2} - etc.\right) = (x-1)(1-1)^{[x-2]} \\ \gamma &= \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}\left(1 - \tfrac{3(x-3)}{3} + \tfrac{6(x-3)(x-4)}{3\cdot 4} - \tfrac{10(x-3)(x-4)(x-5)}{3\cdot 4\cdot 5} + etc.\right) \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}(1-1)^{x-3} \\ \delta &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}(1-1)^{x-4} \end{aligned}$$

etc.

man darf allso nur jetz setzen $x = \frac{1}{2}$.

Ewr. Hochwohlgeb. *Demonstration*[8] daß

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t(t+a)} + \frac{u(u+a)}{t(t+a)(t+b)} + etc. = \frac{1}{t-u}$$

ist meines Erachtens die einige wodurch dieser *Lusus naturae* bewiesen werden kan: Inzwischen wann für a, b, c, *etc.*, t und u *determinir*te Zahlen angenommen werden, so bekommt man öffters *Series*, deren *Summation* man nicht vermuthen sollte.

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre, mit der vollkommensten Hochachtung zu seyn

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 20$^{\text{ten}}$ *Sept.* 1746.

P. S.[9] Die letstens verlangten Bücher[10] werden mit der nächsten Gelegenheit abgeschickt werden.

R 824 Reply to n° 109
Berlin, September 20th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 183–184v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 397–400; *Euler-Goldbach* (1965), p. 260–262

111
Goldbach to Euler
Petersburg, October (14th) 25th, 1746

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Die Nachricht so Ew. Hochedelg. aus Petersburg bekommen, daß Ihre Kayserl[iche] M[ajestä]$^{\text{t}}$ mich mit ansehnlichen Gütern in Liefland begnadiget, ist in so weit gegründet daß Höchstdieselbe mir das Gut *Wolmarshoff* welches jährl[ich] 1400 R. *arende* traget *ad dies vitae* allergnädigst geschencket haben;[1] was aber die *Academi*schen Angelegenheiten betrifft so habe ich mich derselben schon seit *A*[*nno*] 1742 gäntzlich entschlagen.

Die bewusten Bücher[2] sind mir noch nicht abgegeben, sie mögen aber wohl schon angekommen seyn, wie denn bereits einige an Hn *D*[*octor*] *Ribeyro adressi*ret worden so weder ihm noch mir gehören.

In der *serie*[3]

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \&c.$$

finden sich zwey Eigenschafften (1.) daß man dadurch *data summa et datis quibuscunque terminis ab initio* die *seriem cuius summa data est* finden kan (2.) daß man von unzehlichen *seriebus demonstri*ren kan daß ihre *summae* unendlich groß sind, welches ohne dieses *adminiculum* sehr schwer seyn würde; zum Exempel wann ich *singulos terminos seriei*

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \&c.$$

aequales setze *singulis terminis huius*:[4]

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\&c.=\pi$$

und alsdann alle *quantitates* a, b, c, *&c.* durch u *& constantes determini*re, so muß folgen daß die *series*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\&c.$$

nur in dem einen *casu* unendlich groß werde wann $u=\dfrac{t\pi-1}{\pi}$.[5]

Ubrigens wird es mir jederzeit eine Freude seyn zu vernehmen daß Ew. Hochedelg. sich nebst Dero werthen Familie vergnügt befinden, und ich verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} *Petersbourg*
den 25. *Octobr.* 1746.

P. S. Eben jetzo vernehme ich daß die vorerwehnten Bücher[6] dennoch dem Hn *D*[*octor*] *Ribeyro* gehören, von den meinigen aber habe noch keine Nachricht erhalten.

R 825 Reply to n° 110
Petersburg, October (14th) 25th, 1746
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 111rv
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 49r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 401–402; *Euler-Goldbach* (1965), p. 263

112
Euler to Goldbach
Berlin, November 29th, 1746

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Wegen der an Ewr. Hochwohlgeb. von hier abgeschickten Bücher ist der H. *Haude* nicht wenig bekümmert,[1] und H. *Hainchelin* allhier hat auf sich genommen sich deswegen zu erkundigen. Inzwischen ligen hier wiedrum einige Bücher fertig um an Ewr. Hochwohlgeb. mit der ersten Gelegenheit versandt zu werden; darunter befindet sich die *Analyse des infiniment petits*,[2] so der H. *Haude* erst nach Versendung der ersteren *Partie* bekommen; wozu ich auch ein *Exemplar* von meinen hier besonders gedruckten *Pieces*[3] habe legen lassen. Wenn der Knäß *Tscherbattoff* hierdurch reiset,[4] werden wir trachten Demselben diese Bücher mit zu geben. H. *Bousque*t hat mir versprochen, daß diesen Winter meine *Introductio in Analysin infinitorum* auch gewiß fertig werden soll.[5] Sonsten sind dieses Jahr in Frankreich einige herrliche Bücher herausgekommen, als *Traité du Navire par M.^r Bouguer*, worinn das meiste was ich über diese *Materi*e zuerst entdecket zu haben geglaubet, befindet.[6] Hernach *Introduction dans l'Astronomie par M.^r le Monnier*, worinn die neuesten Merkwürdigen Entdekungen in dieser Wissenschafft ausgeführet sind.[7] Ich hoffe auch nächstens allhier meine neue *Theoriam motus Lunae* unter die Presse geben zu können,[8] und glaube dieselbe so weit gebracht zu haben daß man durch Hülfe meiner daraus verfertigten *Tabularum* den *Locum Lunae* jederzeit so genau bestimmen kan, daß der Fehler niemals über 100 *Secunden* austrägt; da nach den *Cassiniani*schen *Tabell*en der Fehler sich bißweilen auf $15'$, nach den besten englischen aber auf $6'$ belauffen kan.[9]

Ich werde jetz auch anfangen neue *Tabulas motus Saturni* zu verfertigen, nachdem ich die *perturbationem a Jove oriundam* bestimmet:[10] dieses ist um so viel nöthiger, da *M.^r le Monnier* in dem obangeführten Werk beme[rket] daß der *locus* ♄ *computatus* nach den besten *Tabell*en bißweilen um einen halben *Grad a loco observato differi*re.

Der H. *Baron* von *Mar*denfeld[11] ist hier glücklich angekommen, und Ihro *Majestä*t der König hat Ihm eine jährliche *Pension* von 5000 Rthl. *accordir*t.

Daß man vermittelst der *Seriei*

$$\frac{1}{t-u}=\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+etc.$$

eine *seriem* angeben kan, deren *summa data*, und *termini quotvis ab initio* gleichfalls *dati* sind,[12] scheinet freylich dem ersten Anblick nach sehr merkwürdig zu seyn: wann man aber bedenket, daß die daher entstehende *series* nicht *regulär* seyn werde, so lässt sich eben dieses auf unendlich viel andere manieren gleichfalls bewerkstelligen. Als ich wollte eine *seriem* geben deren *summ* $= S$, und deren 6 erste *Termini* seyn sollen $a+b+c+d+e+f$; so suche ich eine *seriem quamcunque*, deren *summ* $= S$; solche sey $S = A+B+C+D+E+$ *etc.*: her[nach] wird seyn

$$\begin{aligned} S \;=\; & \overset{1}{a}+\overset{2}{b}+\overset{3}{c}+\overset{4}{d}+\overset{5}{e}+\overset{6}{f}+\overset{7}{(A-a)}+\overset{8}{(B-b)}+\overset{9}{(C-c)}+\overset{10}{(D-d)}\\ & +\overset{11}{(E-e)}+\overset{12}{(F-f)}+\overset{13}{G}+\overset{14}{H}+[etc.]\end{aligned}$$

Was die andere Eigenschafft der angeführten *Seriei* betrifft, daß man aus derselben von unzehlich viel *seriebus* beweisen kan, daß ihre *summ* unendlich groß sey, scheint ebenfalls sehr merkwürdig zu seyn; allein bey der Würklichen *Application* kommt man immer auf solche *Series*, wo die Sach vor sich selbst klar vor Augen ligt. Dann wann die *series*

$$\frac{1}{t-u}=\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+etc.$$

wahr ist, so muß der *Terminus infinitesimus*

$$\frac{u\,(u+a)\,(u+b)\,(u+c)\,(u+d)\ \ etc.}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)\,(t+d)\ \ etc.}$$

gleich 0 seyn, welches geschieht wann

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+etc.=\infty.$$

Vergleicht man nun diese *seriem* mit einer vorgelegten *serie*

$$S=A+B+C+D+E+F\ +\ etc.$$

so wird $t=\frac{1}{A}$; $u=\frac{S-A}{AS}$; und ferner

$$a=\frac{1}{B}-\frac{1}{A}-\frac{A}{BS};\quad b=\frac{1}{C}-\frac{1}{A}-\frac{(A+B)}{CS};\quad c=\frac{1}{D}-\frac{1}{A}-\frac{(A+B+C)}{DS},\quad etc.;$$

folglich wird $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+etc.$

$$=\frac{ABS}{A\,(S-A)-BS}+\frac{ACS}{A\,(S-A-B)-CS}+\frac{ADS}{A\,(S-A-B-C)-DS}+\frac{AES}{A\,(S-A-B-C-D)-ES}+\ etc.$$

Wann nun die *summa seriei vera* so ist $S-A-B-C-D-etc.=0$ und werden folglich hier alle *termini infinitesimi*[13] $=\frac{AZS}{A\cdot 0-ZS}=-A$ folglich alle *finitae magnitudinis.* Dieses erhellet noch deutlicher aus der *form*

$$\frac{u\,(u+a)\,(u+b)\,(u+c)\ \ etc.}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)\ \ etc.}$$

welche bey dieser *Application* wird

$$\frac{S-A}{S}\cdot\frac{S-A-B}{S-A}\cdot\frac{S-A-B-C}{S-A-B}\cdot\frac{S-A-B-C-D}{S-A-B-C}\cdot\ etc.$$

und folglich wird der Werth *continuatione in infinitum instituta*

$$=\frac{S-A-B-C-D-E-\ etc.}{S}$$

welcher augenscheinlich im Fall die *summa* wahr ist, gleich wird $=0$.

Es ist ein *Mathematicus* in Ost Frießland Nahmens *Jacobus Adami* welcher mich neulich um die *Interpolationem hujus seriei* gefraget[14]

$$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+etc.=s$$

welche *series* die *tangentem arcui x respondentem exprimit*, und entsteht *ex conversione hujus seriei*

$$x = s - \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5}s^5 - \frac{1}{7}s^7 + \frac{1}{9}s^9 - etc.$$

Ich habe ihm darauf geantwortet daß der *Terminus medius inter primum* x *et secundum* $\frac{1}{3}x^3$ sey

$$= \frac{16}{\pi^3}x^2\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + etc.\right).$$

Hernach ist der *terminus medius inter secundum* $\frac{1}{3}x^3$ *et tertium* $\frac{2}{15}x^5$

$$= \frac{64}{\pi^5}x^4\left(1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} + etc.\right).$$

Ferner ist der *terminus medius inter tertium* $\frac{2}{15}x^5$ *et quartum* $\frac{17}{315}x^{[7]}$

$$= \frac{256}{\pi^7}x^6\left(1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} + etc.\right).$$

Meine gantze *Famille* empfehlet sich nebst mir zu Ewr. Hochwohlgeb. beständiger Gewogenheit, und ich verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 29$^{\text{ten}}$ *Nov.*
1746.

R 826 Reply to n° 111
Berlin, November 29th, 1746
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 187–188r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 403–406; *Euler-Goldbach* (1965), p. 263–265

113
Euler to Goldbach
Berlin, April 1st, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Daß Ewr. Hochwohlgeb. mich schon so geraume Zeit mit Dero Zuschrifft nicht beehret, schreibe ich vielmehr Dero überhäufften Geschäfften als einem von mir unwissend begangenen Versehen zu, wodurch ich mich Dero Gewogenheit unwürdig gemachet hätte. Zum wenigsten wünsche ich von Grund meines Herzens, daß Ew. Hochwohlgeb. durch keine Unpäßlichkeit davon möchten abgehalten worden seyn.

Ich nehme allso die Freyheit Ewr. Hochwohlgb. zu berichten, daß sich endlich bey der Abreise des H. Grafen von Finkenstein[1] die schon längst gesuchte Gelegenheit gefunden, Denselben die bißher noch zurückgebliebenen zwey Bücher, nach beyligender *Specification* zu überschicken,[2] welche Ewr. Hochwohlgeb. entweder schon werden empfangen haben, oder doch nächstens empfangen werden.

Letstens habe ich eine sehr wunderbahre Ordnung in den Zahlen, welche die *summas divisorum* der *numerorum naturalium* darstellen entdecket, welche mir um so viel merkwürdiger vorkam, da hierinn eine grosse Verknüpfung mit der Ordnung der *numerorum primorum* zu steken scheint.[3] Dahero bitte Ewr. Hochwohlgb. diesen Einfall einiger Aufmerksamkeit zu würdigen.

Wann n einen *numerum quemcunque integrum affirmativum* bedeutet, so soll $\mathbf{S}\,n$ die *summam omnium divisorum hujus numeri* n anzeigen. Allso wird seyn

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{S}\,1 = 1 & \mathbf{S}\,9 = 1+3+9 = 13 \\
\mathbf{S}\,2 = 1+2 = 3 & \mathbf{S}\,10 = 1+2+5+10 = 18 \\
\mathbf{S}\,3 = 1+3 = 4 & \mathbf{S}\,11 = 1+11 = 12 \\
\mathbf{S}\,4 = 1+2+4 = 7 & \mathbf{S}\,12 = 1+2+3+4+6+12 = 28 \\
\mathbf{S}\,5 = 1+5 = 6 & \mathbf{S}\,13 = 1+13 = 14 \\
\mathbf{S}\,6 = 1+2+3+6 = 12 & \mathbf{S}\,14 = 1+2+7+14 = 24 \\
\mathbf{S}\,7 = 1+7 = 8 & \mathbf{S}\,15 = 1+3+5+15 = 24 \\
\mathbf{S}\,8 = 1+2+4+8 = 15 & \mathbf{S}\,16 = 1+2+4+8+16 = 31 \\
 & \qquad\qquad \textit{etc.}
\end{array}$$

Diese Bedeutung des Zeichens **S** vorausgesetzt, so habe ich gefunden daß

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}\,n = \mathbf{S}\,(n-1) \quad &+ \quad \mathbf{S}\,(n-2) - \mathbf{S}\,(n-5) - \mathbf{S}\,(n-7) + \mathbf{S}\,(n-12) \\
&+ \quad \mathbf{S}\,(n-15) - \mathbf{S}\,(n-22) - \mathbf{S}\,(n-26)\ \ [+\,\textit{etc.}]
\end{aligned}$$

wo immer 2 Zeichen + und − auf einander folgen. Die Ordnung der abzuziehenden Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 *etc.* fällt aus ihren *Differentz*en wann dieselben *alternatim* betrachtet werden so gleich in die Augen, als

	1,		2,		5,		7,		12,		15,		22,		26,		35,		
diff [*erentiae*]		1,		3,		2,		5,		3,		7,		4,		9,			

	40,		51,		57,		70,		77,		92,		100,		117,		126,		[*etc.*]
5,		11,		6,		13,		7,		15,		8,		17,		9,			

Ferner ist zu merken, daß man in einem jeglichen Fall nicht mehr *terminos* nehmen müsse, als biß man *ad numeros negativos* komme; und wann ein solcher *terminus* $\mathbf{S}\,0$ vorkommt, so muß darfür die vorgegebene Zahl n selbst geschrieben werden: allso daß *in quovis casu* $\mathbf{S}\,0 = n$. Folgende *Exempel* werden zu Erläuterung der Wahrheit dieses *Theorematis* dienen:

Wann		so wird		
1. $n = 1$;	$\mathbf{S}\,1 =$	$\mathbf{S}\,0$		$= 1$
2. $n = 2$;	$\mathbf{S}\,2 =$	$\mathbf{S}\,1 + \mathbf{S}\,0$	$= 1 + 2$	$= 3$
3. $n = 3$;	$\mathbf{S}\,3 =$	$\mathbf{S}\,2 + \mathbf{S}\,1$	$= 3 + 1$	$= 4$
4. $n = 4$;	$\mathbf{S}\,4 =$	$\mathbf{S}\,3 + \mathbf{S}\,2$	$= 4 + 3$	$= 7$
5. $n = 5$;	$\mathbf{S}\,5 =$	$\mathbf{S}\,4 + \mathbf{S}\,3 - \mathbf{S}\,0$	$= 7 + 4 - 5$	$= 6$
6. $n = 6$;	$\mathbf{S}\,6 =$	$\mathbf{S}\,5 + \mathbf{S}\,4 - \mathbf{S}\,1$	$= 6 + 7 - 1$	$= 12$
7. $n = 7$;	$\mathbf{S}\,7 =$	$\mathbf{S}\,6 + \mathbf{S}\,5 - \mathbf{S}\,2 - \mathbf{S}\,0$	$= 12 + 6 - 3 - 7$	$= 8$
8. $n = 8$;	$\mathbf{S}\,8 =$	$\mathbf{S}\,7 + \mathbf{S}\,6 - \mathbf{S}\,3 - \mathbf{S}\,1$	$= 8 + 12 - 4 - 1$	$= 15$
9. $n = 9$;	$\mathbf{S}\,9 =$	$\mathbf{S}\,8 + \mathbf{S}\,7 - \mathbf{S}\,4 - \mathbf{S}\,2$	$= 15 + 8 - 7 - 3$	$= 13$
10. $n = 10$;	$\mathbf{S}\,10 =$	$\mathbf{S}\,9 + \mathbf{S}\,8 - \mathbf{S}\,5 - \mathbf{S}\,3$	$= 13 + 15 - 6 - 4$	$= 18$
11. $n = 11$;	$\mathbf{S}\,11 =$	$\mathbf{S}\,10 + \mathbf{S}\,9 - \mathbf{S}\,6 - \mathbf{S}\,4$	$= 18 + 13 - 12 - 7$	$= 12$
12. $n = 12$;	$\mathbf{S}\,12 =$	$\mathbf{S}\,11 + \mathbf{S}\,10 - \mathbf{S}\,7 - \mathbf{S}\,5 + \mathbf{S}\,0$	$= 12 + 18 - 8 - 6 + 12$	$= 28$
		etc.		

Der Grund dieser Ordnung fällt um so viel weniger in die Augen, da man nicht sieht, was die Zahlen 1, 2, 5, 7, 12, 15 *etc.* für eine Verwandtschafft mit der *natura divisorum* haben. Ich kan mich auch nicht rühmen, daß ich davon eine *demonstrationem rigorosam* hätte; wann ich aber auch gar keine hätte, so würde man an der Wahrheit doch nicht zweifeln können, weil biß über 300 diese Regel immer eingetroffen. Inzwischen habe ich doch dieses *theorema* aus folgendem Satz richtig hergeleitet: Wann

$$s = (1 - x)\left(1 - x^2\right)\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right)\left(1 - x^6\right)\left(1 - x^7\right) \textit{ etc. in infinitum}$$

so ist auch

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \textit{etc.}$$

wo die *exponentes* des x eben diejenigen Zahlen sind, welche oben vorgekommen; und wann dieser Satz seine Richtigkeit hat, wie ich nicht zweifle, ungeacht mir hier eine *demonstratio rigorosa* fehlt, so ist auch das angeführte *Theorema* völlig gegründet. Dann aus dem doppelten Werth von s bekomme ich erstlich

$$\frac{ds}{s} = -\frac{dx}{1-x} - \frac{2x\,dx}{1-x^2} - \frac{3x^2dx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} - \textit{etc.}$$

und dann

$$\frac{ds}{s} = \frac{-\,dx - 2x\,dx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + etc.};$$

folglich ist

$$\begin{aligned} &\frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + etc.} \\ = \; &\frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \frac{5x^4}{1-x^5} + \frac{6x^5}{1-x^6} + etc. \end{aligned}$$

Wann aber alle diese letsten Brüche *in progressiones geometricas* verwandelt werden, so bekommt man für dieselben

$$\begin{array}{llllllllllllll}
1+ & x+ & x^2+ & x^3+ & x^4+ & x^5+ & x^6+ & x^7+ & x^8+ & x^9+ & x^{10}+ & x^{11}+ & x^{12} & +\; etc. \\
 & +2x & & +2x^3 & & +2x^5 & & +2x^7 & & +\;2x^9 & & +\;2x^{11} & & \\
 & & +3x^2 & & & +3x^5 & & & +3x^8 & & & +\;3x^{11} & & \\
 & & & +4x^3 & & & & +4x^7 & & & & +\;4x^{11} & & \\
 & & & & +5x^4 & & & & & +\;5x^9 & & & & \\
 & & & & & +6x^5 & & & & & & +\;6x^{11} & & \\
 & & & & & & +7x^6 & & & & & & & \\
 & & & & & & & +8x^7 & +9x^8 & +10x^9 & +11x^{10} & +12x^{11} & +13x^{12} & +\;[etc.] \\
\hline
\end{array}$$

das ist:

$$\begin{aligned} &1 + \mathbf{S}\,2 \cdot x + \mathbf{S}\,3 \cdot x^2 + \mathbf{S}\,4 \cdot x^3 + \mathbf{S}\,5 \cdot x^4 + \mathbf{S}\,6 \cdot x^5 + \mathbf{S}\,7 \cdot x^6 + \mathbf{S}\,8 \cdot x^7 + \mathbf{S}\,9 \cdot x^8 + etc. \\ &= \frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - 22x^{21} - 26x^{25} + 35x^{34} + etc.}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - etc.}, \end{aligned}$$

woraus das gegebene *Theorema* leicht fliesst; man sieht aber zugleich daß dasselbe nicht so *obvium* ist, und daß zweifels ohne darinn noch schöne Sachen verborgen liegen müssen.

Hiemit empfehle ich mich nun gehorsamst in Ewr. Hochwohlgeb. beständige hochgeschätzte Gunst und Gewogenheit, der ich mit der vollkommensten Hochachtung bin

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
Leonh. Euler

Berlin den 1 *April*
1747.

R 827 Berlin, April 1st, 1747
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 199–200v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 407–410; *Euler-Goldbach* (1965), p. 266–268

114
Goldbach to Euler
Petersburg, April (4th) 15th, 1747

Hochedelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Die einige Ursache warum ich in etlichen Monaten an Ew. HochEdelg. nicht geschrieben habe, ist diese, daß mir binnen solcherZeit nichts eingefallen so ich Deroselben zu berichten werth geachtet hätte. Indessen bin ich Eurer Hochedelg. so wohl für Dero an mich abgelassenes damaliges Schreiben als für das letzte vom 1. *April.* höchst verbunden und dancke dienstl[ich] für die übersandten zwey Bücher,[1] das Geld soll an denjenigen welcher mir dieselbe abgeben wird, alsofort ausgezahlet werden; die *observation*, welche Ew. H. mir *communici*ret haben[2] scheinet mir bereits durch die angeführte *induction* dermassen erwiesen, daß man auf deren Wahrheit hundert gegen eins halten könnte. Sonst haben E. H. schon längst angemercket[3] daß

$$\begin{array}{rll} & A & \ldots\ (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\ \&c. \\ = & B & \ldots\ 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\&c. \end{array}$$

und ich erinnere mich daß ich daraus die an sich selbst sehr leichte *consequence* gezogen, daß wann die *potestates ipsius* x in B verdoppelt werden, und

$$C = 1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\&c.$$

gesetzt wird, alsdann[4]

$$\frac{C}{B} = (1-x)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^7\right)\ \&c.$$

seyn muß.

Von der Wahrheit eines andern *Theorematis* bin ich bey weitem nicht so *persuadi*ret, nemlich daß eine jede Zahl aus dreyen *trigonalibus* bestehet oder daß ein jeder *numerus huius formae* $8m+3$ eine *summa trium quadratorum* sey.[5] E. H. haben mir schon vor einigen Jahren, wann ich mich recht erinnere, gesaget, daß *Fermatius* selbiges seinem Berichte nach, *demonstri*ren können; zu dergleichen *demonstration* aber halte ich die *inductiones* für unzulänglich weil man unzehliche Exempel *pro valoribus m* angeben kan die zwar zutreffen, allein zur *generali*tät des Satzes nichts *contribui*ren (als *e*[*xempli*] *gr*[*atia*] wann m diese form hat: b^2+bc+c^2);[6] wann man aber nur beweisen könnte daß $(2p-1)^2+42$ allezeit eine *summa trium quadratorum* sey (ich habe es nur biß auf den *casum* $p=17$ *probi*ret) so hielte ich davor daß zur völligen *demonstration* des *Theorematis* ein guter Anfang gemacht seyn würde; indessen sehe ich nicht wie man es *demonstri*ren will ohne zugleich eine *methode* zu finden wodurch die *tria quadrata* selbst angegeben werden können. Aber zu beweisen daß ein jeder *numerus* aus dreyen *trigonalibus uno affirmativo et duobus negativis* bestehet, ist bey weitem nicht so schwer.[7]

Beyliegenden Aufsatz von einigen *Tractät*chen habe die freyheit genommen Eurer HochEdelg. zu ubersenden[8] mit Bitte solchen an Hn *Haude* zu schicken wann es demselben nicht zuwider ist dergleichen Kleinigkeiten zu besorgen. Das *paquet* kan, im fall sich sonst keine bequeme Gelegenheit ereignet, künfftigen Sommer mit den Schiffen von Lübeck anhero gesandt werden.

Aus den Zeitungen von Gel[ehrten] S[achen] ist zu ersehen daß ein gewisser H. Mizler über Eurer HochEdelg. Buch von der Musick anmerckungen gemacht,[9] weil mir dieselben gantz unbekannt sind, so bitte mir nur mit ein paar Worten zu melden was Sie davon halten. Die neue *Logic* des Hn *Knutzen*, die ich auch noch nicht gesehen habe, wird in den Gel[ehrten] Z[eitungen] sehr gerühmet.[10] Ich verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersbourg
den 15. *Apr.* 1747.

R 828 Reply to n° 112 and n° 113
Petersburg, April (4th) 15th, 1747
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 112–113v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 411–412; *Euler-Goldbach* (1965), p. 269

115
Euler to Goldbach
Berlin, May 6th, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Die Bücher welche Ewr. Hochwohlgeb. verlangen, wird der H. *Haude* mit nächstem zu übersenden nicht ermangeln.[1] Der Anmerkung welche Ew. Hochwohlgeb. über die Gleichheit

$$A \ldots\ (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\ etc. = B\ \ldots\ 1-x-x^2+x^5+x^7-etc.$$

gemachet,[2] daß wann

$$C = 1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+etc.$$

alsdann sey:[3]

$$\frac{C}{B} = (1-x)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\ etc.$$

erinnere ich mich noch wohl; ich habe aber weder daraus noch aus andern Betrachtungen die Gleichheit zwischen den *Formul*n A und B richtig darthun können; dann daß $A = B$, und daß in B die *exponent*en von x just nach dieser *serie* 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40 *etc.* fortgehen, habe ich auch nur *per inductionem* geschlossen, welche ich zwar so weit fortgesetzet, daß ich die Sach für völlig wahr halten kan. Allein ich wäre sehr begierig davon eine *demonstrationem directam* zu sehen, welche gewiß zu Entdeckung vieler andern herrlichen Eigenschafften der Zahlen den Weg bahnen würde: bißher ist aber alle meine darauf angewandte Mühe umsonst gewesen.[4] Gleichfalls habe ich bißher auch nicht das gemeldte *Theorema Fermatianum*,[5] daß eine jede Zahl eine *summa trium trigonalium* sey, *demonstri*ren können, welches freylich darauf beruhet, daß eine jede Zahl von dieser *Form* $8m+3$ in drey *quadrata* zertheilet werden könne. Ich habe aber dieses *Theorema* auf folgendes gebracht:

Proposito numero quocunque m, ab eo semper ejusmodi numerum trigonalem subtrahere licet, ut residui quadruplum unitate auctum sit numerus primus.[6]

Wenn dieses bewiesen werden könnte, so wäre auch jenes ausser Zweifel gesetzt. Von diesem aber will ich der Deutlichkeit halben etliche *Exemp*el hersetzen.

$m - trig[onali]$	$resid[uum]$	$4 \cdot Res[iduum] + 1$	
$1 - 0$	1	5	*pr[imus]*
$1 - 1$	0	1	*pr[imus]*
$2 - 0$	2	9	*n[on] pr[imus]*
$2 - 1$	1	5	*pr[imus]*
$3 - 0$	3	13	*pr[imus]*
$3 - 1$	2	9	*n[on] pr[imus]*
$3 - 3$	0	1	*pr[imus]*
$4 - 0$	4	17	*pr[imus]*
$4 - 1$	3	13	*pr[imus]*
$4 - 3$	1	5	*pr[imus]*
$5 - 0$	5	21	*n[on] pr[imus]*
$5 - 1$	4	17	*pr[imus]*
$5 - 3$	2	9	*n[on] pr[imus]*
$6 - 0$	6	25	*n[on] pr[imus]*
$6 - 1$	5	21	*n[on] pr[imus]*
$6 - 3$	3	13	*pr[imus]*
$6 - 6$	0	1	*pr[imus]*
$7 - 0$	7	29	*pr[imus]*
$7 - 1$	6	25	*n[on] pr[imus]*
$7 - 3$	4	17	*pr[imus]*
$7 - 6$	1	5	*pr[imus]*

$m-$ *trig*[*onali*]	*resid*[*uum*]	$4\cdot$ *Res*[*iduum*] $+1$	
$8-0$	8	33	*n*[*on*] *pr*[*imus*]
$8-1$	7	29	*pr*[*imus*]
$8-3$	5	21	*n*[*on*] *pr*[*imus*]
$8-6$	2	9	*n*[*on*] *pr*[*imus*]
$9-0$	9	37	*pr*[*imus*]
$9-1$	8	33	*n*[*on*] *pr*[*imus*]
$9-3$	6	25	*n*[*on*] *pr*[*imus*]
$9-6$	3	13	*pr*[*imus*]

Bißher triffts immer zu, daß zum wenigsten ein *numerus primus* heraus kommt: und da in grössern Zahlen immer mehr *casus* vorkommen, so ist sehr wahrscheinlich, daß sich unter denselben immer zum wenigsten 1 *primus* befinde, oder doch ein solcher *compositus*, der ein *quadrat*, oder in 2 *quadrata resolubel* ist.[7]

Es ist auch eben zur *Demonstration* des ersteren nicht nöthig daß bey dem letsteren sich unter den 4 *resid.* $+1$ ein *numerus primus* befinde; wann darunter nur entweder ein *quadratum* vorkommt, oder eine Zahl *per nullum hujusmodi numerum* $4p-1$ *divisibilis*, so kan daraus die *Demonstration* des erstern hergeleitet werden. Der Grund davon beruhet hierauf: ich kan nun beweisen daß:

I. *omnem numerum primum hujus formae* $4n+1$ *esse summam duorum quadratorum.*

II. *Omnem quoque numerum non primum formae* $4n+1$, *dummodo nullum habeat divisorem formae* $4p-1$, *esse summam duorum quadratorum.*

Es sey allso $4n+1$ *vel primus, vel saltem non habens divisorem formae* $4p-1$, so ist $4n+1$ und folglich auch *ejus duplum* $8n+2$ *summa duorum quadratorum.* Wann allso $8m+3=8n+2+aa$, so ist $8m+3$ *in tria quadrata resolubel*; es wird allso $8m+1=8n+aa$; man setze $a=2x+1$ so wird $8m=8n+4xx+4x$ und $n=m-\frac{1}{2}(xx+x)$. *Denotante ergo m numerum quemcunque*, wann man nur immer von m einen solchen *numerum trigonalem subtrahi*ren kan, daß der *rest* 4 mal genommen $+1$ keinen *divisorem formae* $4p-1$ hat, so kan $8m+3$ in 3 *quadrata resolvir*t werden. Daß aber eine jede *Prim*Zahl von dieser *Form* $4n+1$ allzeit eine *summa duorum quadratorum* sey: darfür habe nach langer Mühe endlich folgende *Demonstration* gefunden, welche sich auf verschiedene *praeliminar* Sätz gründet, so zwar gemeiniglich für wahr angenommen werden, wovon ich doch gleichwohl noch keine gültige *Demonstration* gesehen, und allso diese zu suchen nöthig gehabt habe.[8]

Theor[*ema*] *1. Productum ex duobus numeris, quorum uterque est summa duorum quadratorum, est quoque summa duorum quadratorum.*

Dem[*onstratio*]: *Sint* $aa+bb$ *et* $cc+dd$ *duo numeri propositi erit productum*

$$\begin{aligned} aacc+aadd+bbcc+bbdd &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2, \end{aligned}$$

ergo duplici modo summa duorum quadratorum.

Diese Demonstration ist zwar gemein, nicht aber die folgenden.

Theor[ema] 2. Si summa duorum quadratorum $aa + bb$ (*existentibus* a *et* b *numeris inter se primis*) *fuerit divisibilis per numerum primum formae* $pp + qq$, *tum etiam quotus ex divisione resultans erit summa duorum quadratorum.*

(Dieses *Theor[ema]* folget nicht aus dem vorigen nothwendig, dann man würde sich betrügen wann man hieraus: *productum ex duobus numeris paribus est numerus par*, schliessen wollte: *Ergo si numerus par fuerit divisibilis per numerum parem, quotus quoque erit numerus par.* Wie kan man nun wissen, daß diese Art zu schliessen hier richtig ist? Daher ist meines Erachtens folgende *Demonstration* nöthig.)

Dem[onstratio]: *Quia* $aa + bb$ *est divis[ibile] per* $pp + qq$, *erit quoque* $(aa + bb)\,pp = aapp + bbpp$ *divisibile, at* $aa\,(pp + qq)$ *quoque est divisib[ile] per* $pp + qq$, *ergo etiam differentia* $bbpp - aaqq$ *hoc est* $(bp + aq)\,(bp - aq)$ *erit per* $pp + qq$ *divisib[ile]. Hinc ob* $pp + qq$ *numerum primum, erit vel* $bp + aq$ *vel* $bp - aq$ *divisibile per* $pp + qq$; *sit ergo* $bp \mp aq = mpp + mqq$, *fietque* $b = mp + \dfrac{mqq \pm aq}{p}$.

Cum igitur $mqq \pm aq$ *per* p *divisibile esse debeat, at* q *et* p *sint necessario numeri inter se primi* (*alioquin* $pp + qq$ *non foret primus*), *necesse est ut* $mq \pm a$ *divis[ibile] sit per* p: *fiat ergo* $mq \pm a = np$ *erit* $\pm a = np - mq$ *et* $b = mp + nq$. *His autem valoribus substitutis prodit* $aa + bb = (mm + nn)\,(pp + qq)$ *et* $\dfrac{aa + bb}{pp + qq} = mm + nn$. *Q. E. D.*

Theor[ema] 3. Si summa duorum quadratorum $aa + bb$ (a *et* b *existentibus perpetuo numeris inter se primis*) *divisibilis esset per numerum* x, *qui non sit summa duorum quadratorum, tum quotus vel non erit summa duorum quadratorum vel certe factorem haberet, qui non erit summa duorum quadratorum.*

Dem[onstratio]: *Sit quotus* z *et ob* $\dfrac{aa + bb}{x} = z$ *erit* $\dfrac{aa + bb}{z} = x$. *Jam si* z *esset primus formae* $pp + qq$, *tum quoque* x *foret ejusdem formae contra hyp[othesin]; si* z *esset productum ex pluribus hujusmodi primis* $(pp + qq)\,(rr + ss)\,(tt + uu)$, *tum ob* $\dfrac{aa + bb}{pp + qq} = cc + dd$; $\dfrac{cc + dd}{rr + ss} = ee + ff$; *et* $\dfrac{ee + ff}{tt + uu} = gg + hh = \dfrac{aa + bb}{z}$ *foret quoque* $x = gg + hh$ *contra hyp[othesin]: Quare quotus* z *neque primus erit formae* $pp+qq$, *neque productum ex aliquot ejusmodi primis; ideoque necessario vel* z *non erit summa duorum quadratorum vel factorem habebit, qui non erit summa duorum quadratorum. Q. E. D.*

Theor[ema] 4. Summa duorum quadratorum inter se primorum $aa + bb$ *dividi nequit per ullum* x *qui non ipse sit summa duorum quadratorum.*

Dem[onstratio]: *Ponamus* x *non esse summam duorum quadratorum, sitque* $a = mx \pm c$; $b = nx \pm d$, *semperque* m *et* n *ita capi poterunt ut fiat* $c < \frac{1}{2}x$ *et* $d < \frac{1}{2}x$. *Cum autem* $aa + bb$ *ponatur divisibile per* x *erit quoque* $cc + dd$ *per* x *divisibile: et quia* $cc + dd < \frac{1}{2}xx$, *quotus erit* $< \frac{1}{2}x$ *ideoque dabitur numerus* z *non summa* $2\,\square$, *per quem* $cc + dd$ *quoque erit divisibilis* (*Theor[ema] 3*). *Sit* *iterum* $c = mz \pm e$ *et* $d = nz \pm f$, *erit* $e < \frac{1}{2}z$ *et* $f < \frac{1}{2}z$: *ideoque* $ee + ff < \frac{1}{2}zz$ *divisib*[*ile*] *per* z: *unde quotus (per quem* $ee + ff$ *itidem divisibile existit)* $< \frac{1}{2}z$, *qui vel ipse erit* <u>*non-summa*</u> *duorum quadratorum vel ejusmodi habebit factorem. Dabitur ergo* <u>*non-summa* $2\,\square$</u> $< \frac{1}{2}z$ *divisor ipsius* $ee + ff < \frac{1}{2}zz$, *sicque tandem deveniretur ad numerum* <u>*non-summam* $2\,\square$</u> *minimum puta* 3, *qui foret divisor summae duorum quadratorum* $gg + hh < \frac{1}{2}g$: *quod cum sit absurdum, sequitur summam duorum quadratorum* $aa + bb$ *nullum admittere divisorem* x, *qui non sit ipse summa duorum quadratorum. Q. E. D.*

Coroll[*arium*] *1. Omnis ergo divisor summae duorum quadratorum inter se primorum ipse est summa duorum quadratorum: loquor autem de ejusmodi summis duorum quadratorum* $aa + bb$, *quorum radices* a *et* b *sunt numeri inter se primi, nam si esset v*[*erbi*] *gr*[*atia*] $a = mx$ *et* $b = nx$, *tum* $aa + bb$ *utique per quemvis numerum* x *divisibilis esse posset.*

Coroll[*arium*] *2. Qui ergo numerus* x *in integris non est summa duorum quadratorum, idem n*[*eque*] *in fractis poterit esse summa duorum quadratorum; sit enim* $x = \dfrac{pp}{qq} + \dfrac{rr}{ss} = \dfrac{ppss + qq[rr]}{qqss}$, *foret* $qqss = \dfrac{ppss + qqrr}{x}$: *ideoque* x *divisor summae duorum quadratorum* $ppss + qqrr$, [*ergo*] x *quoque esse debet summa duorum quadratorum in integris.*

Hievon hatte ich lange Zeit eine *demonstration* umsonst gesucht, aber diese erst neulich gef[unden,] welche wie ich glaube zu vielen andern Sachen führen kan.

Theor[*ema*] *5. Si* $4n+1$ *fuerit numerus primus, tum certo erit summa duorum quadra*[*torum.*]

Demonst[*ratio*]: *Si enim* $4n + 1$ *sit numerus primus, demonstravi hanc formulam* $a^{4n} - b^{4n}$ *quicunque numeri pro* a *et* b *ponantur semper fore divisibilem per* $4n + 1$. *Erit ergo vel* $a^{2n} + b^{2n}$ *vel* $a^{2n} - b^{2n}$ *per* $4n + 1$ *divisib*[*ile*]. *At semper innumeri dantur casus quibus formula* $a^{2n} - b^{2n}$ *non est divisibilis per* $4n + 1$;[9] *iis ergo casibus haec formula* $a^{2n} + [b^{2n}]$ *erit per* $4n + 1$ *divisibilis. At* $a^{2n} + b^{2n}$ *est summa duorum quadratorum, ergo etiam quivis ejus divisor* $4n + 1$. *Q. E. D.*

Theor[*ema*] *6. Qui numerus a duplici modo est summa duorum quadratorum, ille non est prim*[*us.*]

Dem[*onstratio*]: *Sit enim* $a = pp+qq = rr+ss$, *ponatur* $p = r+x$ *et* $q = s-y$, *erit*

$$pp + qq = rr + 2rx + xx + ss - 2sy + yy = rr + ss$$

ergo $2sy = xx + yy + 2rx$ *et* $s = \dfrac{xx + yy + 2rx}{2y}$; *hinc*

$$\begin{aligned} a = rr + ss &= \frac{(xx + yy)^2 + 4rx\,(xx + yy) + 4rrxx}{4yy} + rr \\ &= \frac{(xx + yy)\,(xx + yy + 4rx + 4rr)}{4yy}. \end{aligned}$$

Consequenter numer[us] a necessario duos ad minimum habet factores, quorum uterque est summa duorum quadratorum. Q. E. D.

Das *Theorema*: *Omnem numerum in* 4 *quadrata esse resolubilem*, *dependi*rt hievon: *Omnem numerum hujus formae* $4m+2$ *semper discerpi posse in duas hujusmodi partes*: $4x+1$ *et* $4y+1$, *quarum neutra divisorem habeat formae* $4p-1$ (welches ich noch nicht *demonstri*ren k[an,] aber doch nicht schwehr scheint):[10] Dann alsdann ist so wohl $4x+1$ als $4y+1$ *summa* 2 □, und folglich $4m+2$ *summa* 4 □: dah[er] auch *ejus duplum* $8m+4$, und *hujus quadrans* $2m+1$, und allso *omnis numerus impar*: woraus die Folge leicht auf alle *numeros extendier*t wird.

Des H. Mitzlers *Critique* über meine *music* habe ich nicht gesehen, ausser was davon in den Gel[ehrten] Zeitungen steht, woraus ich geschlossen, daß dieselbe meistentheils übel gegründet ist, indem der *Auctor* meine Gedanken nicht genugsam eingesehen.[11] An des H. *Prof. Knutz*en *Logic* habe ich eben nicht viel sonderbares finden können;[12] zum wenigsten kommt sie derjenigen bey weitem nicht bey, welche der H. *Prof. Segner* in Göttingen herausgegeben.[13] Dieses Jahr hat mir die *Academi*e zu *Paris* wiedrum die Helfte des Preises zuerkannt, welche 2000 *Li[v]r*en beträgt.[14] Hiemit empfehle ich mich gehorsamst zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Wohlgewogenheit und verharre mit aller schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 6ten *Maji*
1747.

M.r Buffon in *Paris* hat eine neue Art von Brennspiegel erfunden vermittelst welcher er in einer *Distantz* von 200 Schu Holz in Brand gestecket; und diese *Distantz* kan nach Belieben noch vermehret werden.[15]

R 829 Reply to nº 114
Berlin, May 6th, 1747
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 208–209v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 413–420; *Euler-Goldbach* (1965), p. 270–273

116
Goldbach to Euler
Petersburg, (May 22nd) June 2nd, 1747

Ex litt[*eris*] *ad Cl*[*arissimum*] *Eulerum d*[*atis*] 2. *Jun.*[1]

Für die mir *communicir*ten *theoremata*[2] bin ich Eurer HochEdelg. sehr verbunden; das merckwürdigste darunter halte ich daß Sie meinen es sey nicht schwer $4m+2$ in zwey solche Theile $4x+1$ und $4y+1$ zu *resolvi*ren welche keinen *divisorem huius formae* $4p-1$ haben. Ich kan das *problema*: *numerum* $8m+3$ *in tria quadrata resolvere* auch auf dieses *reduci*ren: *Datis duobus numeris n et p*, *invenire tertium x huius naturae ut* $2+8n+8px-4x^2-4x$ *fiat summa duorum quadratorum*; da dann vor x eine solche *functio ex n et p composita* gefunden werden soll welche unter andern diese seltsame Eigenschafften habe daß sie in allen Fällen da $2+8n$ eine *summa duorum quadratorum* ist $=0$ werde, und in allen Fällen da $2+8n-8p$ eine *summa duorum quadratorum* ist, $=-1$ werde, in welchen beyden *conditionibus* allein ich eine solche Schwierigkeit[3] finde daß ich an der Wahrheit des gantzen *theorematis* zu zweiffeln anfange, ohngeachtet es leicht ist unzehliche *formulas* vor m anzugeben in welchen $8m+3$ *in tria quadrata* zertheilet werden kan als zum Exempel $m=b^2\pm bc+c^2$.[4]

Seit der Zeit da die *relation* von dem *perpetuo mobili* des Hn *Orffyrei*, in welcher der 6 wochen lange umlauf des Rades *attesti*ret war, herausgekommen, hat man, meines wissens keine öffentliche Meldung gethan daß diese *machine* weiter *perfectioni*ret oder zu einigem Gebrauch angewendet worden wäre, welches desto bedencklicher scheinet da der *Autor* derselben noch viele Jahre hernach gelebet und vieleicht biß *dato* am leben ist. Der Oberbaumeister in Wien, H. *Fischer* von *Erlach* (*ni fallor*) welcher dieselbe *machine* nebst dem Hn *Gravesande* in gegenwart des Hn LandGrafen von Hessen besehen, hat davon ehemals gegen mir mit vielem Ruhm gesprochen und dabey erwehnet daß er dem Rade als es still gestanden, mit Fleiß einen ganz schwachen Stoß gegeben, worauf es sich von selbsten immer geschwinder *usque ad certum celeritatis gradum* beweget, in welchem es hernach *aequabiliter* fortgegangen.[5]

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
dienstergebenster
Goldbach.

S.^{t} Petersbourg
den 2. *Jun. st. n.* 1747.

R 830 Reply to n° 115
Petersburg, (May 22nd) June 2nd, 1747
Partial original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 114r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 49v–50r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 421–422; *Euler-Goldbach* (1965), p. 274

117
Euler to Goldbach
Berlin, July 4th, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgebohrnen erkenne mich für die Bemühung, womit Dieselben meine geringe Schrifft von dem Vermögen zu gedenken in Erwägung zu ziehen gewürdiget, gehorsamst verbunden.[1] Es ist an dem, daß mein letster Schluß nur auf diejenigen geht, welche die Seele für eine besondere *Substantz* dabey aber doch für *materiell* halten, wobey ich insonderheit auf einige mir bekannte *Wolfianer* gesehen, welche glaubten daß die *Immaterialität* der Seele von ihrem Meister nicht genugsam erwiesen worden. Nach den Lehrsätzen dieses *Philosophi* haben dieselben auch gantz recht zu zweiflen, dann wann die *Cörp*er und ihre *Element*en mit so vielerley thätigen und auf die Veränderung ihres Zustandes abzielenden Kräfften begabet sind, so ist nicht abzusehen, wie die Krafft zu gedenken davon ausgeschlossen werden soll. Diese Leute geben allso ohne Schwierigkeit zu, daß zum Gedenken eine thätige Krafft seinen Zustand zu verändern erfordert werde, und in Ansehung derselben glaube ich daß mein Beweiß Stich hält; gegen diejenigen aber, welche glauben daß das Vermögen zu Gedenken ohne eine solche Krafft bestehen und bloß allein durch die *vim inertiae* bewerkstelliget werden könne, muß ich gestehen, daß mein Beweiß nicht gilt. Es deucht mich aber, so bald man zugibt, daß in der *Materi*e außer der *Vi inertiae* keine andere Krafft befindlich, das Vermögen zu gedenken nothwendig ausgeschlossen werden müsse. Dann ungeacht in dem menschlichen Körper und insonderheit in dem Gehirn die *subtil*sten Theilchen fast in einer unbegreifflichen Bewegung sind, worauf die *Materiali*sten insonderheit ihre Meynung grün[den,] so geht doch dabey nichts anders vor, als daß ein jegliches Theilchen so la[ng] in seinem Zustand verharret, als solcher mit dem Zustand der benachbar[ten] bestehen kan; wiedrigen Falls aber nach den *regulis mechanicis* eine Verändrung in ihrer Bewegung vorgehen muß. Hieraus kan auch kein anderes *Resulta*t entstehen als eine Änderung des Zustands bloß alle[in] in Absicht auf die Bewegung; und so bald man behaupten will, daß dam[it] vielleicht noch ein anderes *Resulta*t verknüpfet sey, indem uns das Wesen der Körper nicht genugsam bekannt, so ist man genöthiget zu behaupten, daß ausser der *inertia* noch andere Kräffte darinn vorhanden seyn müssen; und alsdann findet mein Beweiß wiedrum Platz.

H. *Haude* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen; er gibt sich alle Mühe die letst verlangten Bücher zusammen zu suchen, hat aber noch wenig Hoffnung alle zu finden; weil insonderheit die *Italiäni*schen schwehr aufzutreiben sind.[2]

Bey der *Academi*e in *Paris* werde ich auf künftiges Jahr wenig *Competent*en haben, dann der H. *Bernoulli*, welcher angefangen darauf zu arbeiten, ist wegen der allzu weitläuffigen und verdrüßlichen Rechnungen wiedrum davon abgestanden.[3] Die Bewegung des *Saturni* war bißher noch weit weniger bekannt als des Monds, dann noch biß jetzo haben die *loca observata* von den besten *Tabulis* biß auf 20 *Minut*en *differir*t; um diese *Irregularität*en zu bestimmen werden erstaunliche *Calculi* so wohl *theoretici* als *practici* erfordert, welche ich auch für ein dreyfaches *praemium* nicht noch einmal unternehmen wollte. Dann ich habe über 100 *Loca Saturni* mit dem *Jupiter* berechnet, und vermittelst der *Theori*e endlich solche *tabulas* heraus gebracht, welche von allen so wohl alten als neuen *observation*en nicht über 5 *Minut*en *differi*ren; eine grössere *accuratesse* ist wegen der Unrichtigkeit der älteren *observation*en nicht wohl zu hoffen; weil die neuen dazu nicht allein hinlänglich sind. Anjetzo stellt *M.^{r} le Monnier* zu *Paris* so *accurat*e *observation*en an daß man auf etliche *Secund*en sicher seyn kan; aus dergleichen *observation*en habe ich meine *Tabulas solares rectificir*t, und mit dem grösten Vergnügen befunden, daß dieselben anjetzo niemals über 5$''$ von den *observation*en *differi*ren.

Die *Piece de monadibus* welche bey uns das *Praemium* erhalten hat meine völlige *Approbation*, als welcher ich auch mein *votum* gegeben:[4] in derselben ist das gantze Lehrgebäude der *Monaden* völlig zerstöret. Wir haben über diese *Materi*e 30 *Piec*en bekommen, von welchen noch 6 der besten, so wohl *pro* als *contra monades*, gedruckt werden.[5] In denselben ist beyderseits zum wenigsten die Sach so deutlich ausgeführt, daß die bißherigen Klagen, als wann man einander nicht recht verstanden, ins künftige gäntzlich aufhören werden. Die gantze Sach beruhet auf der Auswicklung dieses *Raisonnement*s: die *Cörp*er sind *divisib*el; diese *divisibilität* gehet entweder immer ohne Ende weiter fort: oder nur biß zu einem gewissen Ziel, da man auf solche Dinge kommt, welche nicht weiter theilbar sind. Im letstern Fall hat man die *Monad*en, im erstern die *divisibilitatem in infinitum*: welche zwey Sätze einander so *e diametro* entgegengesetzt sind, daß davon nothwendig der eine wahr der andre aber falsch seyn muß. Alle *argumenta pro monadibus* gründen sich hauptsächlich auf scheinbaren *absurdität*en, womit die *Divisibilitas in infinitum* verknüpfet seyn soll; da man sich aber meistentheils von diesem *infinito* verkehrte *ide*en gemacht, so fallen auch dieselben *Absurdität*en weg. Die Meynung der *Monad*en zertheilet sich wieder in zwey *Part*eyen, wovon die eine den *Monad*en alle Ausdehnung gäntzlich abspricht, die andre aber dieselben für ausgedehnt hält, jedoch ohne daß sie *partes* hätten und folglich *divisib*el wären; welche letstere Meynung meines erachtens am leichtesten zu *refuti*ren ist. Diejenigen welche *monades magnitudinis expertes statui*ren müssen endlich zugeben, daß auch aus der Zusammensetzung derselben kein *extensum* entstehen könnte, und sind dahero genöthiget so wohl die *extension* als die *Cörp*er selbst für blosse *phaenomena* und *phantasmata* zu halten; ungeacht sie bey dem Anfang ihres *ra*[*tio*]*cinii* die *corpor*[*a*] als *réél* angesehen: dergestalt daß wann der Schluß wahr w[äre,] die *praemissae* nothwendig falsch seyn müssten.

Die Brennspiegel des H. *Buffons*[6] sind aus lauter kleinen *speculis planis* bey 200 an der Zahl zusammen gesetzt, welche alle leicht dergestalt gestellet werden können, daß von allen der Sch[ein] auf einen Platz geworfen wird: wodurch er diesen Vortheil erhält, daß er den *Focum* so weit und wohin er will, richten kan, die Sonne mag stehen wo sie will; welches bey den ordentlichen Brennspiegeln nicht möglich ist. Er hat dam[it] Holtz in einer Weite von 200 Schuen angezündet, und es ist kein Zweifel, daß, wann ein Vogel durch den *Focum* fliegen sollte, derselbe gesenget werden müsste.

Wann $2+8n+8px-4xx-4x$ eine *summa duorum quadratorum*,[7] als $= aa+bb$, so wird $3+8n+8px$ *seu* $3+8\,(n+px) = aa+bb+(2x+1)^2$ folglich eine *summa trium quadratorum*. Inzwischen kan ich nicht sehen, daß wann $2+8n$ schon für sich eine *summa duorum quadratorum* wäre, deswegen x nothwendig $= 0$ seyn müsste; indem ja zu einer *summa duorum quadratorum* noch solche Zahlen gesetzt werden können daß die *summe* diese Eigenschafft behält. Hernach da $3+8\,(n+[px])$ dieser *Formul* $8m+3$ gleich seyn soll, so wird $n+px = m$, und folglich darf nur x gefunden werden, daß $2+8m-4xx-4x$ eine *summa duorum quadratorum* werde; das ist man müsste sehn, ob man nicht von $8m+3$ ein solches *Quadrat subtrah*[*i*ren] könnte *ut residuum esset summa duorum quadratorum*: welches die Frage selbst ist. Nimmt man nun an $2+8m$ sey schon eine *summa duorum quadratorum* so kan freylich x entweder 0 oder -1 seyn; ausser diesen aber sind öffters noch mehrere Fälle möglich.

Als die vorgelegte Zahl $8m+3$ soll seyn $= 59$; da ist $8m+2 = 58 = 49+9$ eine *summa* 2 *quadratorum*. Soll nun $2+8m-4xx-4x$ das ist $58-4xx-4x$ eine *summa duorum quadratorum* seyn, so geschieht dieses wann x entweder 0 oder -1; ausser diesen Fällen aber kan x noch seyn $= 1$ oder 2 oder 3; dann

$$58-4\cdot 2 = 50 = 49+1 = 25+25;$$

ferner ist

$$58-4\cdot 6 = 34 = 25+9,$$

und wann $x=3$ ist

$$58-4\cdot 12 = 10 = 9+1.$$

Die Ursach hievon ist, weil dergleichen Zahlen $8m+3$ öffters auf mehr als eine Art können *summae* 3 *quadratorum* seyn als in diesem *Exemp*el ist

$$59 = 1+49+9 = 25+25+9.$$

In welchem Umstand ich nichts finde, welches mir die Gewißheit des Satzes $8m+3 = 3\,\Box$ verdächtig machen könnte.

Ich glaube daß *Orfyré* noch am Leben ist,[8] weil er vor einiger Zeit ein Schiff unter dem Wasser zu fahren erfunden haben wollte. Sein *Perpetuum mobile* hatte er in Stücken zerschlagen, und nach der Zeit nicht wieder verfertigen wollen, welches die Erfindung nicht wenig verdächtig macht. Der von Ewr. Hochwohlgeb. angeführte Umstand daß diese *Machin*e, als sie ein wenig in Bewegung gesetzt worden, sich hierauf immer geschwinder biß auf einen gewissen Grad beweget, in welchem sie fortgelauffen, befindet in einer jeden *Pendul*e. Dann wann die *Pendule* aufgezogen und das *Pendulum* still steht, so geht auch die Uhr nicht; gibt man aber dem *Pendulo* nur den geringsten Stoß, so kan das Gewicht würken, und die Bewegung kommt in ihren ordentlichen Gang. Statt des Gewichts möchte wohl in der *Orfyrei*schen *Maschin*e ein *Elastrum* angebracht worden seyn; und dergleichen wären wohl möglich die ein gantzes Jahr lang fortgiengen ohne von neuem aufgezogen zu werden. Auf diese Art sind alle erzehlten Umstände dieser *Machin* zu erklären, außer demjenigen welcher auch pflegt angeführet zu werden, daß *Orfyré* dem sel[igen] Landgrafen das gantze Geheimnüß entdecket, und dieser Herr die *Machine* für ein wahres *perpetuum mobile* gehalten haben soll, welches nicht zu vermuthen wäre, wann die Bewegung einen solchen Grund gehabt hätte: ich weiß aber nicht ob dieser letste Umstand seine völlige Richtigkeit hat.

Hiebey nehme die Freyheit Ewr. Hochwohlgeb. das *Programma* unsrer *Academi*e auf die beyden künftigen Jahre zuzusenden.[9]

In meiner *Familie* hat sich seit dem nichts Veränderliches zugetragen, als daß neulich meine Frau wiedrum mit einem Söhnlein niedergekommen; welches der H. Graf von Kaiserling aus der Tauf gehoben und *Herman Friedrich* genannt.[10] Sonsten habe ich jetz einen geschickten *praeceptorem domesticum* angenommen, und unser ältester Sohn, dessen kränklicher Zustand ihn verlassen zu haben sche[int,] kommt täglich weiter in der *Analysi* und *Astronomi*e. Alle die m[eini]gen insgesammt lassen sich Ewr. Hochwohlgeb. auf das gehorsam[ste] empfehlen und ich habe die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L Euler

Berlin den 4 *Jul.* 1747.

R 831 Reply to n° 116
Berlin, July 4th, 1747
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 201–203v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 423–428; *Euler-Goldbach* (1965), p. 274–277

118
Goldbach to Euler
Petersburg, August (1st) 12th, 1747

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Daß der Höchste Ew. Hochedelgebohrnen mit einem jungen Sohn erfreuet, habe ich aus Dero letzterem Schreiben mit vielem Vergnügen ersehen.[1] Ich *gratuli*re Deroselben so wohl als der Frau *Professo*rin zu dieser abermaligen Vermehrung ihrer *familie* von hertzen und wünsche noch ferner viele angenehme Nachrichten von Dero Wohlstande zu erhalten.

Für die mir *communici*rten unterschiedenen *éclaircissem*[*en*]*ts* dancke ich dienstl[ich]; in meinem vorigen Schreiben[2] aber soll es billig heissen: “daß in allen

Fällen da $2+8n$ eine *summa duorum quadratorum unico modo* ist ... und in allen Fällen da $2+8n-8p$ eine *summa duorum quadratorum unico modo* ist" *&c.*

In nachfolgender *Serie* 1, 3, 7, 17, 41, 99, *&c.* deren *lex progressionis* $A+2B=C$ oder $B = A + \sqrt{2A^2 \pm 2}$ und die *formula gen*[*eralis*] $\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)^x + \left(1-\sqrt{2}\right)^x}{2}$ siehet man alsofort daß die *termini locis paribus* nicht *quadrati* seyn können indem sie alle $\square \pm 1$ sind; ob aber alle *termini locis imparibus praeter primum* auch keine *quadrata* sind muß ich dahin gestellet seyn lassen weil ich die unmöglichkeit noch zur zeit nicht einsehe, im gleichen ob es unendlich viel *casus* giebt darin $2A^4-1$ ein *quadratum* werden kan wie in den *casibus* $A=1$ und $A=13$.[3]

Der H. *D*[*octor*] *Kaltschmied* welchen ich vor 4 Jahren allhie gesprochen hatte und der Eurer Hochedelg. vieleicht auch bekannt seyn wird, hat mir unlangst seine *Disput*[*atio*] *pro loco*[4] nebst einem sehr *obligeant*en Briefe zugesandt welchen ich zu beantworten nicht unterlassen können; ich bitte also Ew. Hochedelg. dienstlich den Einschluß nach *Jena* bey gelegenheit befordern zu lassen, sollte ich hingegen hiesiges Ortes Deroselben einige Gefälligkeiten zu erweisen vermögend seyn, so werde in der That bezeugen daß ich mit der aufrichtigsten Hochachtung bin

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S. Petersbourg
den 12. *Aug. st. n.* 1747.

R 832 Reply to nº 117
Petersburg, August (1st) 12th, 1747
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 115rv
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 50r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 429–430; *Euler-Goldbach* (1965), p. 277–278

119
Euler to Goldbach
Berlin, September 2nd, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Für Ewr. Hochwohlgeb. Hochgeneigte *Gratulation* zu Vermehrung meiner *Familie*[1] statte allen gehorsamsten Dank ab, und *recommendi*re mich samt den meinigen ferner zu Dero beständigen Wohlgewogenheit.

Daß in den *Seriebus recurrentibus*, wo ein jeder *Terminus* aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird, zugleich ein jeder *terminus* aus dem vorhergehenden allein angegeben werden kan vermittelst einer *quadrati*schen *Aequation*, ist eine sehr merkwürdige Eigenschafft. Dann wann in dieser *Serie*

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C}\ \ldots\ \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},\ \overset{x+2}{R}$$

ist $C = aB - bA$ und $R = aQ - bP$ so wird $QQ - aPQ + bPP$ *ad* b^x *in ratione constante* seyn, welche wann $x = 1$ ist wie $BB - aAB + bAA$ *ad* b, folglich ist:

$$QQ - aPQ + bPP = (BB - aAB + bAA)\, b^{x-1}.$$

Und in der von Ewr. Hochwohlgeb. angeführten *Serie*

$$\overset{1}{1},\ \overset{2}{3},\ \overset{3}{7},\ \overset{4}{17},\ \overset{5}{41},\ \overset{6}{99}\ \ldots\ \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},$$

wo $a = 2$ und $b = -1$; $A = 1$, $B = 3$ wird seyn $QQ - 2PQ - PP = 2 \cdot (-1)^{x-1}$ und allso $Q = P + \sqrt{\left(2PP + 2\,(-1)^{x-1}\right)}$ oder $Q = P + \sqrt{(2P^2 \pm 2)}$. Bey dieser Betrachtung bin ich auf die Gedanken gefallen, ob etwan in einer *Serie recurrente*, deren jeder *Terminus* aus den 3 vorhergehenden bestimmt wird, nicht auch ein jeder aus den zwey vorhergehenden vermittelst einer *aequat*[*ionis*] *cubicae* angegeben werden könnte. Es sey in

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{D}\ \ldots\ \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q},\ \overset{x+2}{R},\ \overset{x+3}{S}\ \textit{etc.}$$

$D = aC - bB + cA$ und $S = aR - bQ + cP$, so habe ich gefunden daß folgende *Ratio* immer *constans* seyn müsse:

$$\left.\begin{array}{llll} R^3 & -\,2aQR^2 & +\,(aa+b)\,Q^2R & -\,(ab-c)\,Q^3 \\ & +\,bPR^2 & -\,(ab+3c)\,PQR & +\,(ac+bb)\,PQ^2 \\ & & +\,acP^2R & -\,2bcP^2Q \\ & & & +\,ccP^3 \end{array}\right. : c^x$$

welche *ratio constans* aus den *terminis initialibus* A, B, C *posito* $x = 1$ erkannt wird.

Um aber wieder auf die von Ewr. Hochwohlgeb. gemeldte *seriem* 1, 3, 7, 17, 41 *etc.* wo $Q = P + \sqrt{(2P^2 \pm 2)}$ zu kommen, so ist allerdings gewiß daß kein *terminus* derselben ausser dem ersten 1 ein *quadrat* seyn könne. Dann es sey P als ein *terminus* derselben ein *quadrat* nehmlich $P = zz$ so müsste auch $2z^4 \pm 2$ ein *Quadrat* seyn, welches nicht seyn kan. Dann es sey *pro signo* $-$ erstlich $2z^4 - 2 = 4\,(zz-1)^2\,\dfrac{pp}{qq}$ so wird $zz + 1 = \dfrac{2ppzz}{qq} - \dfrac{2pp}{qq}$ und $zz = \dfrac{2pp+qq}{2pp-qq}$. Da nun p et q *numeri primi inter se* so kan zz kein *numerus integer* seyn, wann nicht $2pp - qq =$ [1 ;][2] daher aber wird $qq = 2pp - 1$ folglich $zz = 4pp - 1 = P$, allso ist

P um 1 immer kleiner als ein *Quadrat* und kan allso *in integris* kein *Quadrat* seyn. Wann aber das Zeichen + gilt, so ist $2z^4 + 2 = (zz+1)^2 + (zz-1)^2$; damit nun solches ein *Quadrat* werde, so setze man: $zz + 1 = aa - bb$ und $zz - 1 = 2ab$, wobey zu merken daß z ein *numerus impar* seyn müsse, dann sonsten würde $2z^4 + 2$ ein *numerus impariter par* folglich kein *Quadrat*. Es kan aber *generaliter* diese *Formul* $2z^4 + 2y^4$ kein *Quadratum* seyn ausser $y = z$, welches ich allso beweise: Da $2z^4 + 2y^4 = (zz+yy)^2 + (zz-yy)^2$ so sey $zz - yy = ab$, so wird $zz + yy = \dfrac{aa-bb}{2}$ und $2z^4 + 2y^4 = \left(\dfrac{aa+bb}{2}\right)^2$: Nun sey $a = pq$ und $b = rs$, daß $zz - yy = pqrs$ und $zz + yy = \dfrac{ppqq - rrss}{2}$: und man setze $z + y = pr$, $z - y = qs$, so wird $2zz + 2yy = pprr + qqss$ folglich $zz + yy = \dfrac{pprr + qqss}{2} = \dfrac{ppqq - rrss}{2}$ oder $ss = \dfrac{pp\,(qq - rr)}{qq + rr}$; dahero müste $\dfrac{qq - rr}{qq + rr}$ das ist $q^4 - r^4$ ein *quadratum* seyn welches unmöglich.

Die *Formul* $2A^4 - 1$ welche in den Fällen $A = 1$, und $A = 13$ ein *Quadrat* wird, kan noch in unendlich viel andern ebenfalls ein *Quadrat* werden, allein nicht *in numeris integris*. Dann wann $A = \dfrac{1525}{1343}$, oder $A = \dfrac{2\,165\,017}{2\,372\,159}$, so wird auch $2A^4 - 1$ ein *Quadrat*; ob aber *in numeris integris* keine andern Fälle als die beyden gemeldten möglich sind, bin ich nicht im Stande zu *decidi*ren.[3]

Mit des H. Grafen *Rasumoffski Carosse* habe ich an den H. Köppen diejenigen von den letst verlangten Büchern geschickt, welche hier zu bekommen gewesen,[4] und wann Ewr. Hochwohlgeb. dieselben nicht schon empfangen haben, so werden sie nächstens ankommen; der H. *Haude* bittet Ewr. Hochwohlgeb. den Preiß für dieselben nach beyligender Rechnung nur an den H. Köppen zu bezahlen.

Der Einschluß an den H. $D[octo]^r$ Kaltschmied[5] ist sogleich richtig bestellt worden.

Hiemit habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 2 *Sept.*

1747.

R 833 Reply to n° 118
Berlin, September 2nd, 1747
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 213–214r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 431–433; *Euler-Goldbach* (1965), p. 278–279

120
Goldbach to Euler
Petersburg, September (19th) 30th, 1747

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgeb. Schreiben vom 2. *Sept.* ist mir den 13. nebst der *Specification* von Büchern eingehändiget worden welche ich bald darauf empfangen und bezahlet habe.[1]

Die *aequation*[2] welche Sie bey den *Seriebus recurrentibus observi*ret haben wird vieleicht mit nachfolgender Anmerckung übereinkommen: Wann man in dem *casu* da die *lex progressionis* ist $C = aB - bA$ den *terminum generalem* setzet $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1}$ so wird der *terminus primus* $m + n$, der *secundus* $m\alpha + n\beta$, der *tertius* $m\alpha^2 + n\beta^2 = am\alpha + an\beta - bm - bn$ oder $\alpha^2 = a\alpha - b$ und $\beta^2 = a\beta - b$, woraus folget daß α und β zwey *radices eiusdem aequationis* sind, und wann $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ alsdann $\beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$. Auf gleiche weise wann $D = aC - bB + cA$, wird *posito termino generali* $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1} + p\gamma^{x-1}$, $\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c$, und wann von den dreyen *radicibus* dieser *aequation* die eine α, die andere β, die dritte γ genannt wird, so hat man den völligen *terminum generalem*, wobey doch als etwas seltsames anzusehen ist daß obgleich in den *aequationibus quintae, septimae &c. potestatum* diese *radices* sehr *complicatae* seyn müssen, die aus denen selben zusammengesetzten *termini generales* dennoch wann nur a, b, c, *&c.*, *item* m, n, p, *&c. integri* sind, auch allezeit *integri* werden und die in den *radicibus aequationis* enthaltenen *quantitates surdae* sich ein ander *destrui*ren.

Um zu *demonstri*ren daß $2z^4 - 2$ kein *quadrat* seyn kan setzen Ew. Hochedelg. $2z^4 - 2 = 4\left(z^2 - 1\right)^2 \dfrac{p^2}{q^2}$ und *suppon*iren daß p *&* q *numeri inter se primi* sind; wie ich nun den zureichenden Grund dieser *supposition* nicht einsehe, so finde an dem selben desto mehr ursach zu zweiffeln weil Sie endlich auf diesen Schluß kommen daß p immer um 1 kleiner seyn muß als ein $\square$ da doch die Zahl 17 und unzehliche andere zeigen daß p auch um 1 grösser als ein $\square$ seyn kan,[3] denn es sind

pro $\square - 1$ die *termini*
$$3 = 1^2 \cdot 2^2 - 1$$
$$99 = 5^2 \cdot 2^2 - 1$$
$$3363 = 29^2 \cdot 2^2 - 1$$
&c.

pro $\square + 1$ …
$$17 = 1^2 \cdot 4^2 + 1$$
$$577 = 6^2 \cdot 4^2 + 1$$
$$19\,601 = 35^2 \cdot 4^2 + 1$$
&c.

und alle die *numeri* 1, 5, 29 *&c.* sind *termini seriei cuius lex progressionis est* $6B - A = C$; 1, 6, 35 *&c.* aber sind die *summae* derselben *seriei.*

Die grossen *numeri in fractis* welche Ew. Hochedelg. für $\sqrt{2A^4 - 1}$ gefunden haben machen sehr wahrscheinlich daß ausser 1 und 13 keine *pro A substitui*ret werden können damit $2A^4-1$ ein *quadratum in integris* werde,[4] indessen sind doch solche *propositiones*, eben wegen der Schwierigkeit sie zu *demonstri*ren, merckwürdig.

Nachfolgendes *problema* kan ich *solvi*ren, weil ich aber ohngefehr darauf gefallen, so weiß ich nicht ob die *solution* schwer oder leicht zu finden seyn mag: *Datis duobus quadratis* 1 *et* b^2, *invenire infinitis modis tertium* c^2 *hac lege ut summa* $1+b^2+c^2$ *sit aequalis tribus aliis quadratis.*[5]

Von dem Hn *Doppelmayer* habe ich seit der Zeit des *fatal*en *experiment*s so in den Zeitungen erzehlet worden, nichts vernommen,[6] im fall E. H. wissen wie er sich befindet und ob er völlig wieder *restitui*ret worden, bitte ich mich davon zu benachrichtigen. Ich verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 30. *Sept.* 1747.

P. S.[7] Eurer Hochedelgeb. *exactitude* in *expedi*rung der Briefe welche an Sie *adressi*ret werden *admi*rire ich sehr und wünsche Deroselben hinwiederum einige Gefälligkeiten erweisen zu können.

R 834 Reply to n° 119
Petersburg, September (19th) 30th, 1747
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 116–117r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 50v–51v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 434–436; *Euler-Goldbach* (1965), p. 280–281

121
Euler to Goldbach
Berlin, October 24th, 1747

Hochwohlgebohrner Herr *Etats* Rath
Hochgeehrtester Herr und Gönner

Ewr. Hochwohlgeb. Bezahlung für die übersandten Bücher habe richtig erhalten, und dem H. *Haude* zugestellt,[1] welcher auch die letstverlangten mit der nächsten Gelegenheit zu überschicken nicht ermangeln wird.

Die letstens überschriebene *Aequation pro seriebus recurrentibus* beruhet allerdings auf der von Ewr. Hochwohlgb. gemeldten Eigenschafft dieser *Serierum.* Dann wann in der *Serie*:

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{B},\ \overset{3}{C},\ \overset{4}{D}\ \ldots\ \overset{x}{P},\ \overset{x+1}{Q}\ ,\ \overset{x+2}{R}\ ,\ \overset{x+3}{S}\ ,\ \overset{x+4}{T}\ ,\ etc.$$

ist $C = mB-nA$, und *generaliter* $R = mQ-nP$; und man *formir*t diese *aequation* $zz-mz+n = 0$, wovon die *Radices* seyn sollen a, b, so daß $a+b = m$ und $ab = n$, so wird der *Terminus generalis* diese *Form* haben $P = \alpha a^x + \beta\, b^x$, folglich ist $Q = \alpha a \cdot a^x + \beta b \cdot b^x$. Aus diesen zwey *aequation*en suche ich die *valores* a^x und b^x, und finde $\alpha a^x = \dfrac{bP-Q}{b-a}$; $\beta b^x = \dfrac{aP-Q}{a-b}$. Diese *multiplicir*e ich in einander

$$\alpha\beta a^x b^x = \frac{abPP - aPQ - bPQ + QQ}{-\,aa + 2ab - bb}.$$

Da nun $ab = n$, $a+b = m$,

$$-aa + 2ab - bb = -\ (a+b)^2 + 4ab = -\,m^2 + 4n$$

so wird

$$\alpha\beta n^x = \frac{nPP - mPQ + QQ}{4n - mm};$$

folglich

$$\frac{nPP - mPQ + QQ}{n^x} = \alpha\beta\,(4n - mm) = quantitati\ Constanti;$$

welche (*posito* $x = 1$) seyn muß $= \dfrac{nAA - mAB + BB}{n}$.

Wann aber *pro serie recurrente* ist $D = mC-nB+pA$, und $S = mR-nQ+pP$, so *formir*e ich diese *Aequation* $z^3 - mzz + nz - p = 0$, wovon die *Radices* seyn sollen a, b, c, so wird $P = \alpha a^x + \beta b^x + \gamma c^x$; $Q = \alpha a \cdot a^x + \beta b \cdot b^x + \gamma c \cdot c^x$; $R = \alpha a^2 \cdot a^x + \beta b^2 \cdot b^x + \gamma c^2 \cdot c^x$; aus diesen 3 *aequation*en suche ich die *valores* αa^x, βb^x, γc^x, welche in einander *multiplicir*t geben $\alpha\beta\gamma a^x b^x c^x = \alpha\beta\gamma p^x$, weil $a+b+c = m$; $ab+ac+bc = n$ und $abc = p$, und durch Hülfe dieser *Formul*n lassen sich in der *aequatione resultante* die Buchstaben a, b, c durch m, n *et* p bestimmen, und kommt die letst überschriebene *aequation inter* P, Q, R heraus.[2]

Den Zweifel, welchen Ewr. Hochwohlgb. gegen meine *demonstration*, daß $2z^4-2$ kein *Quadrat* seyn kan, machen, kan ich nicht recht einsehen und glaube daß ich mich entweder nicht deutlich genug ausgedruckt habe, oder daß Dieselben meine *Demonstration* auf einen anderen *Casum* gezogen. Wann $2z^4-2$ ein *Quadrat* wäre (*in integris*), so würde es grad; und folglich *per* 4 *divisibel* seyn. Ferner da $z^4-1 = (zz-1)\,(zz+1)$, muß dies *Quadrat* auch *per* $zz-1$ *divisibel* seyn, und auch *per* $(zz-1)^2$ wann $zz-1$ keine *factores quadratos* hat. Dahero wann $2z^4-2$ ein *Quadrat* wäre, so müste dasselbe eine solche *Form* haben $2z^4-2 = \dfrac{4\,(zz-1)^2\,pp}{qq}$, wo qq die etwan in $zz-1$ enthal[tenen] *factores quadratos* aufheben soll. Nun nehme ich billich an, daß pp [*et*] qq *numeri inter se primi* sind, oder daß die *fractio* $\frac{pp}{qq}$ schon *ad minimos terminos reducir*t seye. Dann wann pp *et* qq einen *divisorem communem* hätten, so würde solcher in der *fraction* $\frac{pp}{qq}$ *per divisionem* weggebracht werden können. Wann demnach $2z^4-2=\frac{4\,(zz-1)^2\,pp}{qq}$, so ist

$$2\,(zz+1)\,(zz-1)\,qq=4(zz-1)^2[pp]$$

und folglich $(zz+1)\,qq=2\,(zz-1)\,pp$, woraus entsteht $zz=\frac{2pp+qq}{2pp-qq}$. Da nun zz ein *numerus integer* ist, so muß $2pp-qq$ ein *Divisor* seyn von $2pp+qq$, folglich auch von $4pp$ oder von $2qq$. Da aber *pp et qq numeri inter se primi* sind, so kan solches nicht geschehen als entweder[3] wann $2pp-qq=1$ oder wann $2pp-qq=2$; dann da

$$\frac{2pp+qq}{2pp-qq}=1+\frac{2qq}{2pp-qq}=\frac{4pp}{2pp-qq}-1,$$

und *p et q numeri primi inter se*, so ist auf keine andere Art möglich, daß $\frac{2pp+qq}{2pp-qq}$ ein *numerus integer* werde.

Es sey allso I. (*si fieri possit*) $2pp-qq=1$, so wird $zz=2pp+qq=4pp-1$, welches *in numeris integris* unmöglich ist.

Wann II. $2pp-qq=2$, so wird $zz=\frac{2pp+qq}{2}=qq+1$, welches gleichfalls nicht möglich ist: allso kan auf keinerley Art $2z^4-2$ *in integris* ein *Quadrat* werden.

Setzt man z für zz um zu suchen in welchen Fällen $2zz-2$ ein *Quadrat* werden könne, so gibt es zweyerley Fälle: I. $z=4pp-1$; und II. $z=qq+1$, welches diejenigen sind so Ewr. Hochwohlgeb. anführen, die aber meine vorige *Demonstration* nicht entkräfften welche so viel ich mich erinnere *generaler* war, dann ich hatte bewiesen daß nicht nur $2z^4-2$ sondern auch $2z^4-2u^4$ kein *Quadrat* seyn könne. Wie ich sehe, so ist diese meine *Demonstration* nun im X$^{\text{ten}}$ *Tomo Comm*[*entariorum*] gedruckt.[4]

Das *Problema*: *Datis duobus quadratis aa et bb invenire tertium xx, ut summa aa+bb+xx alio quoque modo fiat resolubilis in* 3 *quadrata*[5] habe ich allso *solvir*t: *Sit*

$$aa+bb+xx=(a+2pr)^2+(b+2qr)^2+(x-2r)^2$$

erit

$$0=4apr+4pprr+4bqr+4qqrr-4rx+4rr,$$

unde per $4r$ *dividendo fit*[6]

$$x=ap+prr+bq+qrr+r,$$

wo *pro p, q, et r numeri quicunque integri tam affirmativi quam negativi accipi possunt.* Woraus unendlich viel *solutiones particulares* fliessen. Als es sey $p = 1$, $q = -1$; *erit* $x = a - b + r$ und

$$aa + bb + xx = (a + 2r)^2 + (b - 2r)^2 + (x - 2r)^2 .$$

H. *Doppelmayer* ist bald nach dem *fatal*en *experiment* würklich gestorben wie mich Leute so von Nürnberg gekommen, versichert.[7]

Meine *Piece* über den *Saturnum* ist in *Paris* nicht nur wohl angekommen, sondern ich höre auch, daß man mit derselben sehr wohl zufrieden ist, und sie allen andern, so eingelauffen, weit vorzieht.[8]

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich verharre mit der schuldigsten Hochachtung

Eurer Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 24 *Oct.*
1747.

R 835 Reply to n° 120
Berlin, October 24th, 1747
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 215–216r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 437–440; *Euler-Goldbach* (1965), p. 281–283

122
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 31st) November 11th, 1747

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen werthes Schreiben vom 24. *Oct.* habe ich den 4. *Nov.* erhalten, ich muß aber die Antwort darauf wegen unterschiedener vorgefallener Verhinderungen noch eine Zeitlang aussetzen; indessen würden Ew. Hochedelgeb. mich sehr *obligi*ren wann Sie mir, im fall unter den Büchern so vor mich in Berlin fertig liegen der *M.me Lambert* Ermahnung an ihre Kinder (welches Buch ich *in triplo* so wohl frantzösisch als deutsch verlanget hatte) schon vorhanden wäre, mir ein deutsches und ein frantzösisches *Exemplar*, beydes ungebunden und unbeschnitten auf der *ordinai*ren Post mit der überschrifft: *Gedruckte Sachen* je eher je lieber zusenden könnten.[1] Die *probabilité* zu dem *praemio* in Pariß[2] vor Ew. Hochedelg. halte ich wenigstens wie 10 zu 1. Der frau *Professorin* und Dero sämmtlichen *Famille* bitte ich meine schuldigste Empfehlung zu machen und verharre mit vieler hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S. Petersburg
den 11. *Nov.* 1747.

R 836 Reply to nº 121
Petersburg, (October 31st) November 11th, 1747
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 118r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 283

123
Euler to Goldbach
Berlin, December 14th, 1747

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Der H. *Prof. Braun* als ein neuangenommenes Mitglied der Kaiserl[ichen] *Academi*e der Wissenschaften wird die Ehre haben Ewr. Hochwohlgeb. diese Zeylen gehorsamst zu überreichen.[1] Ich habe Gelegenheit gehabt denselben seit vielen Jahren allhier kennen zu lernen, und da mir von des H. Grafen *Rasumoffski Excellenz* aufgetragen worden denselben als *Prof. Logicae et Moralium* bey der neuzuerrichtenden *Univer*sitet zu *engagir*en so glaubte ich demselben keinen wichtigern Dienst erweisen zu können, als wann ich ihn auch Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst *recommendir*te. Ich hoffe seine gute *Condui*te und Gründlichkeit in den *Studiis* werde diese meine Freyheit bey Ewr. Hochwohlgeb. vollkommen rechtfertigen, und Dieselben werden Ihm diejenige Wohlgewogenheit gütigst angedeyen lassen, deren Ewr. Hochwohlgeb. denselben würdig erachten werden.

Die Bücher, welche Ewr. Hochwohlgeb. von hier verlanget werden nunmehr richtig angekommen seyn.[2]

Da dieser Brief ungefehr um das neue Jahr Ewr. Hochwohlgeb. überreichet werden wird, so erinnere ich mich meiner schuldigsten Pflicht, Ewr. Hochwohlgeb. meine gehorsamste *Gratulation* abzustatten, und Denselben nächst vollkommner Gesundheit alles Hohe Wohlseyn und Vergnügen von Herzen anzuwünschen, wobey ich mich samt allen den meinigen zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Wohlgewogenheit und Gnade gehorsamst empfehle und mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang verharre

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 14$^{\text{ten}}$ *Dec.*
1747.

R 837 Letter of recommendation personally delivered by J.A. Braun
Berlin, December 14th, 1747
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 217rv
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 284

124
Goldbach to Euler
Petersburg, January (16th) 27th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer Hochedelgebohrnen werthes Schreiben vom 5. *Dec.* habe ich den 20. *Jan.* nebst dem *paquet* mit Büchern wohl erhalten wodurch Sie mich abermal sehr *obligi*ret haben;[1] ich wünschete hertzlich Deroselben hiesiges ortes hinwiederum einige Gefälligkeiten zu erweisen, als wozu Sie mich jederzeit bereit finden werden. Die erwehnte Rechnung würde ich alsofort bezahlet haben wann sie beygeleget worden wäre, sie muß aber in Berlin vergessen seyn, weil ich sie nach einer genauen *perquisition* in allen Büchern, nicht finden können.

Aus der Inlage, welche mir wieder zurückzusenden bitte, werden Ew. Hochedelg. am besten sehen worauf mein voriges *dubium* gegründet gewesen.[2]

Dero *solution* des *problematis datis duobus quadratis* a^2 *et* b^2 *invenire tertium* x^2*, hac lege ut* $a^2 + b^2 + x^2$ *plus quam uno modo sit summa trium quadratorum*, ist offenbar und *general*;[3] denn ob zwar die *aequatio*

$$0 = 4apr + 4p^2r^2 + 4bqr + 4q^2r^2 - 4rx + 4r^2$$

per $4r$ *divisa* nicht $x = ap + pr^2 + bq + qr^2 + r$, sondern $x = ap + p^2r + bq + q^2r + r$ giebet, so hat doch dieser kleine *error calculi* keine *influence* in die *methode* selbst.[4]

Indessen bleibet die *demonstration* daß eine *summa trium quadratorum imparium* vor $8m + 3$ *in quocunque casu ipsius* m angegeben werden könne, noch sehr dunckel.[5] Es ist mir eingefallen daß wann man die drey *radices quaesitas* setzen möchte A, B, C und

$$\begin{aligned} A &= 1 + am + bm^2 + cm^3 + dm^4 + \&c. \\ B &= 1 + am - bm^2 - cm^3 - dm^4 - \&c. \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{array}{llllllll} A^2 & = & 1 & +2am & +2b\,m^2 & +2c\,m^3 & +2d\,m^4 & +2e\,m^5 & + \&c. \\ & & & & +a^2 & +2ab & +2ac & +2ad & \\ & & & & & & +b^2 & +2bc & \\ B^2 & = & 1 & +2am & -2b\,m^2 & -2c\,m^3 & -2d\,m^4 & -2e\,m^5 & + \&c. \\ & & & & +a^2 & -2ab & -2ac & -2ad & \\ & & & & & & +b^2 & +2bc & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lllllllll} C^2 & = & 1 & +8\,m & -2a^2m^2 & * & -2b^2m^4 & -4bcm^5 & [+ \&c.] \\ & & & -4a & & & & & \end{array}$$

alsdann $A^2 + B^2 + C^2 = 8m + 3$ und alle *coefficientes* b, c, d *&c. per solam* a *determini*ret werden könnten so daß a eine *quantitas indeterminata* bliebe, denn es wird *posita*

$$C = 1 + \alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 + \delta m^4 + \&c.$$

$$\alpha = (4 - 2a)\,, \quad \beta = -2a^2 - \alpha^2, \quad \gamma = -2\alpha\beta \quad \&c.;$$

hierauß würde ferner folgen, daß, wann das *theorema* an sich selbst wahr ist, die *series* A, B, C allezeit *numeris integris* gleich seyn würden, man möchte auch vor a annehmen was man wolte.

Gestern hat mir der H. *Prof. Braun*[6] (mit welchem ich noch besser bekannt zu werden hoffe) Dero Schreiben vom 14. *Dec.* eingehändiget. Ich dancke Eurer Hochedelgeb. dienstl[ich] für Dero gütigen Neujahrswunsch, und wie ich vermuthe daß Sie dieses Jahr auch ihres ortes glücklich werden angefangen haben, so wünsche daß der Höchste Sie ferner nebst Dero werthesten *familie* bey allen ersinnlichen *prosperit*äten erhalten wolle, mir aber wünsche ich neue Gelegenheiten Sie so wohl von der vollkommenen hochachtung als auch von der wahren Dienstbegierde und Ergebenheit zu überzeugen mit welcher ich beständig verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
verbundenster
Goldbach.

Petersbourg den 27. *Jan.* 1748.

R 838 Reply to n° 123
Petersburg, January (16th) 27th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 119–120r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 441–442; *Euler-Goldbach* (1965), p. 284–285

125

Euler to Goldbach

Berlin, February 13th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr

Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. werden die Rechnung von H. *Haude*, welche bey dem Pack vergessen worden, hier beygelegt finden, welche nicht mehr als 3 Rthl. 15 g[roschen] 6 *d*[*eniers*] beträgt;[1] wann ich im Stand seyn sollte Ewr. Hochwohlgeb. noch ferner durch Übersendung dergleichen Bücher zu dienen, so würde solches nicht nur meiner Schuldigkeit gemäß mit dem grösten Vergnügen bewerkstelligen, sondern dasselbe würde auch hinführo auf der fahrenden Post mit der grösten Bequemlichkeit geschehen können, als durch welchen Weg ich von Zeit zu Zeit ziemliche *Paquet* an die *Academie* übersende.

Das über meinen vorigen Brief gehabte *Dubium* wird so gleich wegfallen, wann Ewr. Hochwohlgeb. Sich zu erinnern belieben werden, daß daselbst von *numeris integris* die Rede sey,[2] dann da $P = 4pp-1$, so kan in gantzen Zahlen P unmöglich ein *Quadrat* seyn; in Brüchen aber wäre solches auf unendliche Arten möglich.

Daß alle in dieser *Formul* $8m + 3$ enthaltene Zahlen in drey *Quadrata imparia resolvir*t werden können, bin ich noch keineswegs im Stand zu beweisen,[3] ungeacht ich mir darüber den Kopf schon ziemlich verbrochen habe. So offt $8m + 3$ ein *numerus primus* ist, so ist dieselbe allzeit in dieser *Form* $2aa + bb$ enthalten, als $3 = 2\cdot 1+1$; $11 = 2\cdot 1+9$; $19 = 2\cdot 9+1$; $43 = 2\cdot 9+25$ *etc.* und hievon getrauete ich mir noch die *Demonstration* zu finden.[4] Ich glaube auch nicht, daß man für diese *Proposition* daß $8m + 3 = aa + bb + cc$ eine solche *demonstration* finden könne, wodurch die 3 *Radices* a, b, c selbst bestimmt werden; sondern man wird nur die *possibilitatem resolutionis* anzuzeigen im Stande seyn: Aus diesem Grunde habe ich zu dem von Ewr. Hochwohlgeb. eingeschlagenen Weg kein grosses Vertrauen, weilen dadurch nicht nur die Möglichkeit gezeigt, sondern auch die *tria quadrata* selbst *in genere* angegeben werden könnten, welches letstere ich gleichwohl für unmöglich halte. Die *Demonstration* müsste ungefehr meines Erachtens derjenigen ähnlich seyn, wodurch ich bewiesen, daß *omnis numerus primus* $4n+1$ eine *summa duorum quadratorum* sey. Ich beweise erstlich, daß eine jede *summa duorum quadratorum* $aa + bb$ (wo a *et* b *numeri inter se primi* gesetzt werden) keine andern *divisores* haben könne, als welche gleichfalls *summae duorum quadratorum* sind. Hernach so offt $4n + 1$ ein *numerus primus* ist kan ich unendlich viel Zahlen *hujus formae* $p^{2n} + q^{2n}$ angeben, welche durch $4n + 1$ *divisibel* sind; da nun $p^{2n} + q^{2n}$ eine *summa duorum quadratorum* ist, so muß auch $4n + 1$ als ein *Divisor* derselben *formul*, gleichfalls eine *summa duorum quadratorum* seyn. Die *Resolutio autem ipsa in duo quadrata* wird hierdurch nicht offenbar, sondern nur die Möglichkeit derselben bewiesen.

Man kan aber diese *Proposition* daß $8m + 3$ allzeit eine *summa trium quadratorum* seye in vielerley andere *Form*en einkleiden, welche vielleicht leichter zu *demonstrir*en seyn dürften.

Als wann man beweisen könnte, daß *proposito numero quocunque integro* m, für p und q allzeit solche Werthe anzugeben möglich wären, so daß nachfolgende *aequatio cubica*

$$x^3 - (2p-1)\ xx + (2pp - 2p - 1 - 4m)\ x - q = 0$$

alle drey *radices rationales* überkäme, so wäre die Sach auch bewiesen. Dann wann a, b, c die *Radices* dieser *aequation* wären, so würde $2p - 1 = a + b + c$; *et* $2pp - 2p - 1 - 4m = ab + ac + bc$; weil nun

$$4pp - 4p + 1 = aa + bb + cc + 2ab + 2ac + 2bc$$

so *subtrahire* man davon

$$\underline{4pp - 4p - 2 - 8m = 2ab + 2ac + 2bc}$$

so bleibt übrig

$$8m + 3 = aa + bb + cc.$$

Ich habe aber hiezu schlechte Hoffnung, weil die *Demonstration* nur auf *valores integros ipsius* m gehen müsste, dann *in fractis* wäre die Sach offt unmöglich.

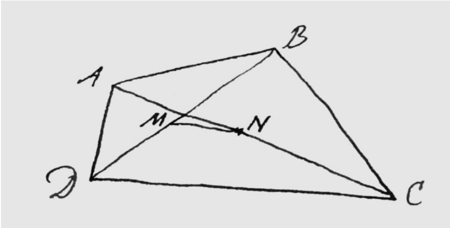
Ich habe diese Sach auch folgender gestalt betrachtet: Es muß allzeit möglich seyn von $8m + 3$ ein solches *Quadrat* $4xx - 4x + 1$ zu *subtrahi*ren daß der *Rest* $8m + 2 - 4xx + 4x$ in zwey *quadrata resolubel* werde; folglich muß auch die Helfte davon $4m + 1 - 2xx + 2x$ eine *summa duorum quadratorum* seyn, nehmlich $4yy - 4y + 1 + 4zz$, allso würde

$$m = \frac{xx - x}{2} + yy - y + zz.$$

Wann man dahero beweisen könnte daß diese *Formul* $\dfrac{xx - x}{2} + yy - y + zz$ alle *numeros integros* in sich begreiffe so wäre das *Theorema* auch bewiesen.

Fermat sagt in seinen *Observationibus ad Diophantum* daß diese *aequatio* $x^n = y^n + z^n$ *in numeris rationalibus* allzeit unmöglich sey, *exceptis casibus* $n = 1$ *et* $n = 2$; nehmlich weder eine *summa duorum cuborum* könne ein *Cubus*, noch eine *summa duorum biquadratorum* ein *biquadratum*, noch *in genere eine summa duarum potestatum altiorum* eine gleiche *Potestas* seyn könne. Er sagt daß er darfür eine sehr *ingenieuse demonstration* habe, welche er aber wegen Mangel des Raums nicht beysetzen könne: es ist allso sehr schad daß auch diese nebst vielen andern verlohren gegangen.[5]

Ich bin neulich auf nachfolgendes *Theorema Geometricum* gefallen, welches mir merkwürdig zu seyn scheinet:[6] Nehmlich gleichwie in einem jeden *Parallelogrammo* die *summa quadratorum laterum* der *summae quadratorum diagonalium* gleich ist, so ist in einem jeden *quadrilatero non parallelogrammo* die *summa quadratorum laterum* grösser als die *summa quadratorum diagonalium*; und der *Excessus* kan allso *concinne* angegeben werden:



Man *bisecire* in dem *Trapezio* $ABCD$ die *Diagonales* AC und BD in N *et* M und *jungi*re die Linie MN so wird seyn:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot MN^2.$$

Ewr. Hochwohlgebohrnen statte allen ergebensten Dank ab für die gute Aufnahm des H. *Prof.* Brauns,[7] und will hoffen es werde jedermann mit seiner Aufführung wohl zu frieden seyn.

Schließlich empfehle ich mich samt den meinigen zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Gewogenheit und Gnade, und habe die Ehre mit der schuldigsten *Veneration* zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 13ten *Febr.*
1748.

R 839 Reply to nº 124
Berlin, February 13th, 1748
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 219–220v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 443–446; *Euler-Goldbach* (1965), p. 285–287

126
Goldbach to Euler
Petersburg, (March 26th) April 6th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Professor*

In Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 2.ten *Sept.* hatte ich die Worte: “daß P um 1 immer kleiner als ein quadrat seyn muß”, für eine zur vorher gehenden Formul $Q = P + \sqrt{2P^2 \pm 2}$ gehörige *condition* angesehen, welche sich aber, wie ich nunmehro finde bloß auf die *aequation* $z^2 = 4p^2 - 1 = P$ *rapporti*ren, so daß alles seine Richtigkeit hat.[1]

Wann Ew. HochEdelg. wie Sie vermuthen, *demonstrir*en könnten daß alle *numeri* $8m + 3$ wann Sie *primi* sind zu dieser Formul $2a^2 + b^2$ gebracht werden können,[2] so werden Sie auch leicht finden daß alle *numeri primi* $4m + 3$ zu dieser *formul* gehören $2a^2 + b^2 + c^2$, weil dieselbe meines erachtens alle *numeros impares* in sich begreifft, wann aber solches nur von allen *numeris primis demonstrir*et wäre so würde offenbar seyn daß alle *numeri integri affirmativi* aus 4 *quadratis* bestehen.

Was die *transmutationes* einer *Summae quatuor quadratorum* betrifft, so habe ich derselben unterschiedene gefunden welche ich folgender gestalt *exprimir*en will daß $\triangle$ einen *numerum trigonalem*, $2\triangle$ ein *duplum trigonalis*, $3\triangle$ ein *triplum &c.*, $\square + \square$ ein *aggregatum duorum qua[dra]torum*, $2\square$ ein *duplum quadrati &c.* bedeuten, solchem nach wird eine jede zahl sein[3]

$$\begin{array}{llllll}
\text{(I.)} & 2\square + \square + 4\triangle & \text{(IV.)} & 2\square + \square + \triangle & \text{(VII.)} & \triangle + 2\triangle + 4\triangle \\
\text{(II.)} & \square + 2\square + 2\triangle & \text{(V.)} & \square + \triangle + 4\triangle & \text{(VIII.)} & \square + \square + 2\triangle \\
\text{(III.)} & \square + 2\triangle + 4\triangle & \text{(VI.)} & 2\square + \triangle + 2\triangle & \text{(VIIII.)} & \dfrac{(\square + \square + \square)}{2}
\end{array}$$

aus welchen noch viele andere *deducir*et werden können.

In der nachfolgenden formel

$$a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d + 1$$

ist offenbar daß selbige eine *Summa quatuor quadratorum* wird wann $d = -a - b - c + 1$, wann aber auch *d pro numero quocunque* genommen wird muß die *formula* dennoch eine *summa quatuor quadratorum* seyn.[4]

Sollte mir etwas neues von dieser Materie einfallen, werde ich das Vergnugen haben selbiges Eurer Hochedelg. zu *communicir*en. Indessen verharre mit vieler hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 6. *Apr. st. n.* 1748.

P. S. Wann die *numeri a, b, c in casu* $2a^2 + b^2 + c^2 = 2n + 1$ gegeben sind, so können daraus die 4 *quadrata pro summa* $2n+3$, $4n+3$, $6n+3$, $4n+6$, $8n+6$ *&c.*, imgleichen vor $2n+2p^2+1$, $4f^2n+2f^2+d^2$, allwo p, f, d *numeri integri quicunque* sind, leicht angegeben werden, und diese *formula* $2a^2+4b^2+(2c+1)^2+2$ ist allezeit gleich einer andern $2A^2 + 4B^2 + (2C + 1)^2$, von welcher letzteren *proposition* aber die *demonstratio rigorosa* fehlet.[5]

In Ermangelung einer bequemen Gelegenheit, inliegendes Schreiben an Hn *D[octor] Gmelin* zu befordern, nehme ich die freyheit es an Ew. Hochedelg. zu *adressir*en, mit Bitte, weil gar kein *periculum in mora* ist, es so lange bey sich zu behalten biß sich ein Weg ereignet wodurch es *franco* an den Hn *Doctor* gelangen kan.[6]

R 840 Reply to n° 125
Petersburg, (March 26th) April 6th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 121–122r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 52r–53r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 447–449; *Euler-Goldbach* (1965), p. 287–288

127
Euler to Goldbach
Berlin, May 4th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die von Ewr. Hochwohlgeb. verlangten Bücher wird H. *Haude* besorgen, die vergessene *Pamela*[1] auf die neue Rechnung bringen. Den Brief an H. *D*[*octo*]^r *Gmelin* habe ich sogleich nach Tübingen abgefertiget.[2]

Wann der Satz wahr ist, daß $8m+3 = 2aa+bb$, so offt $8m+3$ ein *numerus primus* ist, so sehe ich nicht daß auch immer seyn müsse $4n+3 = 2aa+bb+cc$, so offt $4n+3$ ein *numerus primus* ist, es wäre dann daß man beweisen könnte, daß in diesem Fall immer wäre $4n+3 = 8m+3+4\,(2p+1)^2$; vielleicht aber ist dieses sogar wahr, wann auch $4n+3$ kein *numerus primus* ist. Zum wenigsten deucht mich daß

$$8n+7 = (8m+3)\,(2q+1)^2 + 4\,(2p+1)^2\,,$$

existente $8m+3$ *numero primo*. Wäre nun dieses wa[h]r, so würden freylich alle *numeri primi* und folglich gar alle Zahlen *summae quatuor quadratorum* seyn. Allein ich glaube kaum, daß so wohl bey diesem als bey andern *Fermatiani*schen *Theorematibus* mit *general formul*n etwas auszurichten ist.[3] Dann, was das *Theorema* anlangt, daß eine jegliche Zahl eine *summa trium trigonalium* sey, so ist solches nur von *numeris integris* zu verstehen, und würde daher sogar unmöglich seyn diesen *general* Satz

$$n = \frac{aa+a}{2} + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2}$$

zu beweisen, weil derselbe sogar in viel Fällen nehmlich wann $n = \frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{2}$ oder $\frac{5}{2}$ *etc.* falsch wäre. Dann wann dieser Satz auch für gebrochene Werthe von n wahr wäre, so würde eine jegliche Zahl so gar eine *summa* 3 *quadratorum* seyn können indem $8n+3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$, und $8n+3$ alle Zahlen in sich begriffe; allso kan Ewr. Hochwohlgeb. VIIII. *Formul*, krafft welcher eine jede Zahl seyn soll $= \dfrac{\square + \square + \square}{2}$, wofern kein Schreibfehler darinn befindlich nicht statt finden,[4] dann wann *quivis numerus* $n = \dfrac{\square + \square + \square}{2}$, so würde *quivis numerus par* $2n = \square + \square + \square$, welches doch bey unendlich vielen als 28, 60 *etc.* nicht angeht. Hingegen kommt mir die VIII. *Formul* $n = \square + \square + 2\,\triangle$ sehr merkwürdig vor, von deren Wahrheit ich durch die *Induction* bin überführt worden, ungeacht ich nicht sehe wie dieselbe aus dieser $n = \square + \square + \square + \square$ oder dieser $n = \triangle + \triangle + \triangle$ folget.

Die *Formul*

$$aa - a + bb - b + cc - c + dd - d + 1$$

ist *generaliter* und allso nicht allein in dem Fall da $a + b + c + d = 1$ eine *summa* 4 *quadr*[*atorum*], dann dieselbe ist

$$= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2 :$$

dann ungeacht diese *quadrata fracta* sind, so ist doch gewiß, *omnem numerum, qui sit summa quatuor quadratorum fractorum, eundem in integris esse* 4 *quadr*[*atorum*] *summam.*[5] Folgendes *Theorema* kan auch dienen in vielen fällen die 4 *quadr*[*ata*] selbst zu bestimmen, woraus eine Zahl zusammen gesetzt ist: *si* $m = aa + bb + cc + dd$ *et* $n = pp + qq + rr + ss$ *erit*[6]

$$mn = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

existente:

$$\begin{aligned} A &= ap + bq + cr + ds \\ B &= aq - bp - cs + dr \\ C &= ar + bs - cp - dq \\ D &= as - br + cq - dp; \end{aligned}$$

weil man nun die Zahlen a, b, c, d, p, q, r, s so wohl *affirmative* als *negative* annehmen, dieselben ferner auch nach Belieben mit ein ander *combiniren* oder ihre ordnung verändern kan, so ist die *resolutio producti mn* auf sehr vielerley verschiedene Arten möglich.

Meines Erachtens ist allso nicht leicht eine *Demonstration* von dergleichen *Fermatiani*schen *Theorematibus* zu erwarten, so lang man die *numeros trigonales*, *tetragonales*, *pentagonales*, *etc.* durch die gewöhnlichen *generalformul*n ausdrückt, weil in denselben auch die *numeri fracti* mit begriffen sind, welche doch in den meisten *Theor*[*ematibus*] ausgeschlossen werden. Ich habe mir zu diesem Ende die Sach folgender gestalt vorgestellt:[7]

Es sey

$$s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + etc.$$

wo keine andere *potestates ipsius* x vorkommen, als deren *Exponentes* sind $= \triangle$. Wann man nun das *Quadratum* dieser *Seriei* nimmt, so wird $ss =$ einer *seriei*, in deren[!] keine andere *potestates ipsius* x vorkommen, als deren *exponentes* sind $= \triangle + \triangle$, und s^3 wird gleich einer *seriei* da der *potestates ipsius* x *exponent*en sind $= \triangle + \triangle + \triangle$. Wann man nun beweisen könnte daß in der *serie* s^3 alle *potestates ipsius* x vorkommen, so wäre dieses ein Beweiß, *omnem numerum integrum esse summam trium trigonalium.* Diese *series* lassen sich aber leicht *generaliter* bestimmen: Dann es sey

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + etc.$$

so sind die *valores* dieser *Coefficient*en für die verschiedenen *Valores* von n wie folgt:
si $n = 1$,

$$1, A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$$
1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0

dazu *add*[ire] eben die *series* wie zu sehen

1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0
1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0
1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0
1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0
1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1
1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0

si $n = 2$,

1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 4, 2, 0, 2, 2, 0, 2

dazu *addi*re [*ea*]*ndem seriem* wie zu sehen

1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 4, 2, 0, 2, 2, 0
1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 4, 2, 0, 2
1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0, 2, 0, 1, 4
1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1, 2, 0, 2, 4, 0
1, 2, 1, 2, 2, 0, 3, 2, 0, 2, 2, 2, 1
1, 2, 1, 2, 2, 0, 3

si $n = 3$

1, 3, 3, 4, 6, 3, 6, 9, 3, 7, 9, 6, 9, 9, 6, 6, 15, 9, 7, 12, 3, 15, 15, 6, 12, 12, 9, 12 *etc.*

Wann man allso zeigen könnte, daß in dieser *serie pro* $n = 3$ kein *terminus* $= 0$, so wäre bewiesen, daß eine jede gantze Zahl eine *summa trium trigonalium* ist. Gleich wie man aus der *serie* $n = 2$ sieht, da viel *termini* $= 0$, daß viel Zahlen auch nicht *summae* 2 *trigon*[*alium*] sind nehmlich 5, 8, 14, 17, 19, 23, 26, *etc.*

Auf gleiche Weise kan auch die *Compositio numerorum ex quadratis* vorgestellt werden; dann ich setze zu diesem Ende

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + x^{49} + etc.$$

und

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + etc.$$

Hier werden nun die *Coefficientes singularum potestatum ipsius* x, *pro valoribus ipsius* n *successive* folgender Gestalt gefunden.

Exponentes ipsius x

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ etc.$$

Coefficientes casu $n = 1$

$$1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ etc.$$

dazu *addire*

$$\begin{array}{r} 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Coeff[*icientes*] *casu* $n = 2$

$$1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2$$

dazu *add*[*i*]re

$$\begin{array}{r} 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 2,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0 \\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Coeff[*icientes*] *casu* $n = 3$

$$1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 6,\ 3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 6,\ 3,\ 1,\ 6,\ 6,\ 0,\ 3$$

*addi*re

$$\begin{array}{r} 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 6,\ 3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 6,\ 3,\ 1,\ 6,\ 6,\ 0 \\ 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 6,\ 3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 6,\ 3,\ 1 \\ 1,\ 3,\ 3,\ 1,\ 3,\ 6,\ 3,\ 0 \\ 1 \\ \hline \end{array}$$

Coeff[*icientes*] *casu* $n = 4$

$$1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 5,\ 12,\ 12,\ 4,\ 6,\ 16,\ 18,\ 12,\ 8,\ 16,\ 24,\ 12,\ 5.$$

Hier kommen in der *serie* für $n = 2$ noch häuffig 0 vor als bey 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, welches ein Zeichen ist, daß diese Zahlen nicht sind $\Box + \Box$. In der *serie* $n = 3$ findet sich die 0 bey den Zahlen 7, 15, dahero diese Zahlen nicht *summae trium* $\Box$

sind; in der *serie* $n = 4$ aber kommt keine 0 mehr vor: dahero müsste nur dieses bewiesen werden können.

Auf beyligendem Zettul habe ich die *Verba Fermatii* über seine *Demonstrationes Theorematum copir*t,[8] woraus man ungefehr merken kan, aus was für Gründen dieselben hergeleitet waren, und eben deswegen ist der Verlust derselben meines Erachtens um soviel mehr zu bedauren.

Hier geht das Gerücht, daß von der *Academi*e zu *Paris* für dieses Jahr der gantze Preiß mir zuerkannt worden, worüber vielleicht morgen die Nachricht selbst erhalten werde.[9]

Meine gantze *Famille* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. auf das gehorsamste empfehlen und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4 *May*
1748

Fermat[*ius*] *in Observ*[*ationibus*] *ad Diophantum*[10]

Imo propositionem generalem et pulcherrimam nos primi deteximus nempe omnem numerum (integrum) vel esse triang[*ularem*], *vel ex* 2 *vel* 3 *triang*[*ularibus*] *compositum: Item vel esse quadratum, vel ex* 2 *vel* 3 *vel* 4 *quadratis compositum: Item esse vel pentagonum, vel ex* 2 *vel* 3, *vel* 4, *vel* 5 *pentagonis compositum, et sic in infinitum: Hujus autem propositionis demonstrationem quae ex multis, variis et abstrusissimis numerorum mysteriis derivatur, hic apponere non licet. Opus enim et librum integrum huic operi destinare decrevimus, et Arithmeticen hac in parte ultra veteres ac notos terminos mirum in modum promovere.*

R 841 Reply to n° 126
Berlin, May 4th, 1748
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 223–224v, 223ᵃr
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 450–455; *Euler-Goldbach* (1965), p. 288–291

128

GOLDBACH TO EULER

Petersburg, (May 28th) June 8th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ich bin noch gäntzlich der Meinung daß nicht nur $4n+3$ sondern auch $4n+1$ und folglich ein jeder *numerus impar* zu dieser formul gebracht werden kan: $2a^2+b^2+c^2$, welches auch in der That eben so viel ist, als die *sub n.º* II von mir angeführte formul $\square+2\square+2\triangle$,[1] so daß, wann Ew. Hoched. an dieser letztern, wie ich sehe, nicht zweiffeln, auch die *aequatio* $2n+1=2a^2+4b^2+c^2$ gewiß ist. Hingegen kan die *sub n.º* 8 aus versehen gesetzte $\dfrac{\square+\square+\square}{2}$ nicht statt haben,[2] als an deren Stelle es heissen muß $2\square+\triangle+\triangle$ oder auch $\dfrac{\square+\square}{2}+\triangle$. Ausser diesem ist aber in meiner *copie* von der Tabelle der Formeln noch ein lächerlicher Fehler so sich vermuthlich auch im Original finden wird, indem *sub n.º* I *et n.º* IV eben dieselbe Formel $2\square+\square+\triangle$ stehet.[3] Was diese: $\square+\square+2\triangle$, welche Ew. Hochedelgeb. für merckwürdig halten, betrifft so fliesset dieselbe alsofort aus der *consideration* daß ein jeder $4n+1$ eine *summa duorum quadratorum parium et unius imparis* ist, gleichwie im gegentheil $4n+2$ aus *duobus imp*[*aribus*] *et uno pari* bestehet.

Ohngeachtet ich mir zur *demonstration* des *Theorematis Ferm*[*atiani*] wenige hofnung mache,[4] so habe dennoch nach anleitung desselben einige andere gefunden die ich vor eben so wahr halte, als zum Ex[empel]:

Omne quadratum numeri imparis vel numeri impariter paris, modo sit minus quam $8n+7$, *est unum ex quatuor quadratis quorum summa est* $8n+7$. Ingleichen *Omnis numerus* $8n+2$ *est huius formae* $(2\pm 2)^{2e}+\square+\square$.[5]

Die hiebey liegende *Demonstration* von Ew. HochEdelg. *theoremate de quadratis laterum trapezii* will ich eben nicht für die kürtzeste ausgeben, ich glaube aber daß man gar leicht auf noch viel weitläufftigere verfallen kan.[6] Die Gelegenheit dazu hat neulich ein guter freund gegeben, welcher mir sagte daß er einen *casum particularem* davon, nemlich in einem *trapezio* wo *duo anguli recti* und *duo latera parallela* sind, *demonstri*ren könnte.

Ew. HochEdelg. würden mich sehr *obligi*ren wenn Sie den Hn *Haude* wollten ersuchen lassen daß er mir zwey *exemplaria* von der berechnung der bevorstehenden Sonnenfinsterniß nach den *Euler*ischen Tabellen auf der Post mit der *inscript*[*ione*] *Gedruckte Sachen* zusenden möchte, jedoch mit dieser *conditione sine qua non* daß die *exemplaria* noch wenigstens 8 Tage vor der Sonnenfinsterniß allhie ankommen.[7]

Daß Ew. HochEdelg. das gantze *praemium* von der *Acad*[*emie*] *Royale de*[*s*] *Sc*[*iences*] erhalten haben, ist mir eine sehr angenehme Nachricht gewesen.[8] Ich *gratuli*re Deroselben dazu von hertzen und meine hofnung daß Sie bey allen künfftigen Aufgaben nicht weniger *réussi*ren werden wird immer grösser.

Von Dero werthesten *familie* Wohlstande bin ich zum Theil durch den Hn *Prof. Braun* benachrichtiget worden; mir wird es insonderheit lieb seyn etwas von den ferneren *progres*sen des Hn *Joannis Alberti* zu erfahren weil ich grosse hofnung habe daß er zu seiner zeit Eurer HochEdelg. Stelle in *S.^{t}* Petersburg wieder vertreten wird.

Ich verharre mit vieler hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersbourg
den 8. *Jun.* 1748 *st. n.*

R 842 Reply to n° 127
Petersburg, (May 28th) June 8th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 123–124v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 53rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 456–457; *Euler-Goldbach* (1965), p. 292–293

129
Euler to Goldbach
Berlin, June 25th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Wegen der in Nürnberg herausgekommenen Vorstellung der bevorstehenden Sonnen-Finsternüß, wovon Ewr. Hochwohlgeb. zwey *Exemplaria* verlangen,[1] hat sich ein solcher Zufall ereignet, daß ungeacht davon einige hundert *Exemplaria* hier ligen, es dennoch nicht möglich ist Dero *Ordr*en ein Genügen zu leisten. Ihro Königl[iche] *Majestät* haben zum Besten der *Academie* auf alle hier einkommende Land-*Chart*en einen *Impost* geleget, welchen die hier befindlichen Nürnberger Bilder Händler noch nicht entrichten wollen, dahero die ihnen zugehörigen *Chart*en noch auf dem hiesigen Packhof ligen. Es sind mir zwar vor einiger Zeit 12 Stük von diesen Sonnen-Finsternüß-*Chart*en zum *Praesent* geschickt worden; welche ich aber alle hier ausgetheilet biß auf ein *Exemplar*, so in Rahmen eingefasset. Hätte ich Ewr. Hochwohlgeb. Willen ehe gewusst, so würde ich mit den grösten Freuden davon einige Stück auf der Post überschickt haben. Bey diesen Umständen wusste ich nun keinen anderen Rath, als den H. Spener, welcher des verstorbenen H. *Haude* Buch Handel übernommen zu bitten unverzüglich nach Leipzig zu schreiben, welches vorgestern geschehen, und daselbst *Ordres* zu stellen, daß von da unmittelbar an Ewr. Hochwohlgeb. die verlangten *Exemplaria* durch die Post abgeschickt werden, welches auf den morndrigen Tag geschehen kan: da nun solche nicht über drey Wochen unter Wegen bleiben werden, so hoffe daß dieselben noch wohl 8 Tage vor der Finsternüß ankommen. Hier wird dieselbe insonderheit merkwürdig seyn, da sie nicht nur *annularis* seyn, sondern auch auf den Mittag einfallen wird. H. Spener wird auch nächstens die von Ewr. Hochwohlgb. letst verlangten Bücher abschicken, zu welchen ich die Freyheit genommen ein *Exemplar* von meiner neulich in *Lausanne* herausgekommenen *Introductione in Analysin infinitorum* zu legen;[2] welches als ein geringes Merkmal meiner Pflichtschuldigsten Ergebenheit gütigst aufzunehmen bitte.

Nun bin ich endlich auf den Grund der mir neulich von Ewr. Hochwohlgeb. überschriebenen schönen *Formul*n gekommen wobey ich das in der Abschrifft derselben begangene geringe Versehen sogleich eingesehen.[3] Dieselben gründen sich meines Erachtens auf folgende drey Haupt *Formul*n I. $n = \triangle + \triangle + \triangle$; II. $4n + 1 = \square + \square + \square$; und III. $4n + 2 = \square + \square + \square$; von deren Wahrheit ich schon längst völlig versichert bin, ungeacht ich davon keine *Demonstration* angeben kan.

Aus der ersten $n = \triangle + \triangle + \triangle$ folget $n = \dfrac{2aa + a}{2} + \dfrac{bb + b}{2} + \dfrac{cc + c}{2}$: Nun sey $a = d + e$ und $b = d - e$, so wird $n = dd + d + ee + \dfrac{2cc + c}{2}$; folglich ist auch eine jegliche Zahl $n = \square + 2\,\triangle + \triangle$: woraus zugleich erhellet daß immer $\triangle + \triangle = \square + 2\,\triangle$.

Aus der zweyten $4n + 1 = \square + \square + \square$ folget $4n + 1 = 4aa + 4bb + (2c + 1)^2$ allso $n = aa + bb + cc + c$, und dahero $n = \square + \square + 2\,\triangle$. Ferner da eine jede gantze Zahl $= aa + bb + cc + c$ so ist auch eine jede grade Zahl $2n = aa + bb + cc + c$ und allso

$$n = \frac{aa + bb}{2} + \frac{cc + c}{2} = \frac{\square + \square}{2} + \triangle.$$

Oder man setze $a = d + e$ und $b = d - e$ so wird

$$n = dd + ee + \frac{cc + c}{2} = \square + \square + \triangle.$$

Ebenfalls wird auch eine jede ungrade Zahl seyn $2n + 1 = aa + bb + cc + c$; da nun $cc + c$ immer grad ist, so muß von den Zahlen a und b die eine grad die andere ungrad seyn, dahero $2n + 1 = 4aa + (2b + 1)^2 + cc + c$, und allso

$$n = 2aa + 2bb + 2b + \frac{cc + c}{2},$$

folglich $n = 2\,\square + 4\,\triangle + \triangle$.

Die dritte *Formul* $4n+2 = \square+\square+\square$ gibt $4n+2 = 4aa+(2b + 1)^2+(2c + 1)^2$, allso ist $n = aa+bb+b+cc+c$ und dahero $n = \square+2\,\triangle+2\,\triangle$. Setzt man $b = d+e$, $c = d - e$ so wird

$$n = aa + 2dd + 2d + 2ee = \square + 2\,\square + 4\,\triangle.$$

Ferner ist auch $2n = \Box + 2\triangle + 2\triangle$, und allso $\Box$ grad, dahero wird $2n = 4aa + bb + b + cc + c$, und

$$n = 2aa + \frac{bb+b}{2} + \frac{cc+c}{2} = 2\Box + \triangle + \triangle.$$

Weil weiter $\triangle + \triangle = \Box + 2\triangle$ so ist $n = 2\Box + \Box + 2\triangle$; folglich auch $2n = 2\Box + 4\Box + 2\triangle$, und allso $n = \Box + 2\Box + \triangle$. Oder da auch $2n + 1 = 2aa + (2b+1)^2 + cc + c$ so wird

$$n = aa + 2bb + 2b + \frac{cc+c}{2} = \Box + 4\triangle + \triangle.$$

Endlich ist auch $2n + 1 = \Box + 2\triangle + 2\triangle = (2a+1)^2 + bb + b + cc + c$, und $n = 2aa + 2a + \dfrac{bb+b}{2} + \dfrac{cc+c}{2}$ oder

$$n = 4\triangle + \triangle + \triangle = \Box + 2\triangle + 4\triangle.$$

Allso ist auch $2n = 4\Box + 2\triangle + 4\triangle$ oder $n = 2\Box + \triangle + 2\triangle$ oder $2n + 1 = (2a+1)^2 + 2\triangle + 4\triangle$ und allso

$$n = \triangle + 2\triangle + 4\triangle.$$

Da $4n + 2 = 4aa + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$ so ist

$$2n + 1 = 2aa + 2bb + 2b + 2cc + 2c + 1.$$

Es sey $b = d + e$, $c = d - e$ so wird

$$2n + 1 = 2aa + 4dd + 4ee + 4d + 1 = 2\Box + \Box + \Box.$$

Allso ist ein jeglicher *numerus impar* $2n + 1 = 2\Box + \Box + \Box$: welches Ewr. Hochwohlgeb. erstes meines Erachtens sehr merkwürdiges *Theorema* war.

Alle diese hier gefundene *Formul*n sind allso folgende:

I.	$n = \triangle + \triangle + \triangle$	IV.	$n = \Box + \Box + \triangle$	VII.	$n = \Box + 2\Box + 4\triangle$
II.	$n = \Box + 2\triangle + \triangle$	V.	$n = 2\Box + \triangle + 4\triangle$	VIII.	$n = 2\Box + \Box + 2\triangle$
III.	$n = \Box + \Box + 2\triangle$	VI.	$n = \Box + 2\triangle + 2\triangle$	IX.	$n = \Box + 2\Box + \triangle$

X.	$2\Box + \triangle + \triangle = n$	XIII.	$n = 2\Box + \triangle + 2\triangle$
XI.	$\Box + 4\triangle + \triangle = n$	XIV.	$n = \triangle + 2\triangle + 4\triangle$
XII.	$4\triangle + \triangle + \triangle = n$	XV.	$2n + 1 = \Box + \Box + 2\Box.$

Da so wohl $8n + 3$ als $8n + 6$ allzeit in 3 *Quadrata* zertheilt werden kan so folgt daß $8n + 7 - pp$ wann $pp = 8m + 4$ oder $= 8m + 1$ das ist, wann p entweder ein *numerus impar*, oder *impariter par* ist, allzeit eine *summa trium quadratorum* sey, wie Ewr. Hochwohlgeb. gemeldet haben.

Daß aber *omnis numerus* $8n+2$ in dieser *Form* $(2\pm 2)^{2e}+\Box+\Box$ enthalten sey, kan ich nicht recht begreiffen.[4] Sollte der Sinn davon dieser seyn daß allzeit $8n+2=\Box+\Box+q$, da q ist entweder 0, oder 16 oder 256 oder 4096 *etc.* welches die Werthe sind von $(2+2)^{2e}$, so würde solches in dem Fall $8n+2=154$ nicht statt finden, indem $154-q$ nimmer eine *summa duorum quadratorum* wird; es wäre dann daß der *exponens* e auch 0 seyn könnte und folglich auch $q=1$: ob ich gleich zweifle ob auch in diesem Fall sich keine Ausn[ahme] finden sollte.

Ich bin neulich auf eine sonderbare Betrachtung gefallen, vermittelst welcher viel *Diophante*ische *Problemata* sehr leicht können *solvir*t werden. Wann man zum *Exempel* für x, y, z *numeros rationales* bestimmen kan, daß dieser *Aequation*

$$xx+yy+zz-2x-2y-2z+1=0$$

*satisfacir*t wird, so müssen alle *surd*ische[5] *Formul*n in nachfolgenden *aequation*en, so aus jener entstehen, *rational* werden.

$$\begin{array}{ll}
x=1\pm\sqrt{(2y+2z-yy-zz)}\,; & x-y=1\pm\sqrt{(2z+4y-2xy-zz)}\\
y=1\pm\sqrt{(2x+2z-xx-zz)}\,; & y-x=1\pm\sqrt{(2z+4x-2xy-zz)}\\
z=1\pm\sqrt{(2x+2y-xx-yy)}\,; & x-z=1\pm\sqrt{(2y+4z-2xz-yy)}\\
x+y=1\pm\sqrt{(2z-zz+2xy)}\,; & z-x=1\pm\sqrt{(2y+4x-2xz-yy)}\\
x+z=1\pm\sqrt{(2y-yy+2xz)}\,; & y-z=1\pm\sqrt{(2x+4z-2yz-xx)}\\
y+z=1\pm\sqrt{(2x-xx+2yz)}\,; & z-y=1\pm\sqrt{(2x+[4]y-2yz-xx)}
\end{array}$$

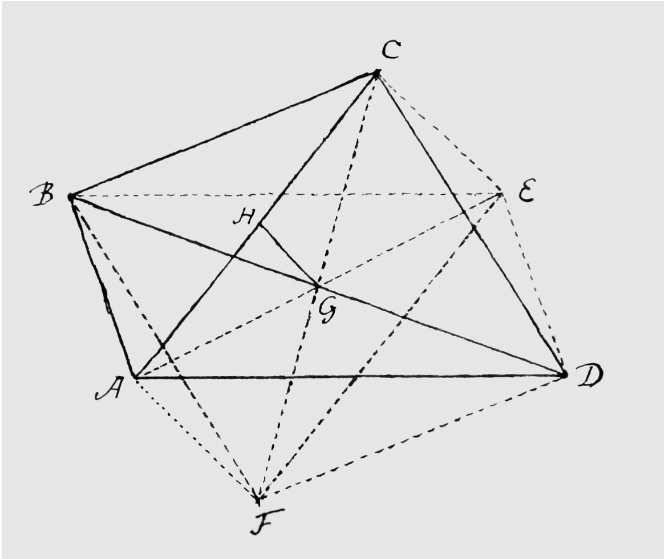
$$x+y+z=1\pm\sqrt{(2xy+2xz+2yz)}\,.$$

Wann allso nur eine von diesen *Formul*n *rational* gemacht wird, welches sehr leicht ist, so werden alle übrige 12 von selbsten *rational.* Solches geschieht allso nach der ersten wann

$$\begin{aligned}
x &= \frac{pp+qq+rr+2pr+2qr}{pp+qq+rr};\\
y &= \frac{2p\,(p+q)}{pp+qq+rr};\\
z &= \frac{2q\,(p+q)}{pp+qq+rr}.
\end{aligned}$$

Wann allso drey solche Zahlen x, y, z gesucht werden sollten, daß alle obigen XIII *surd*ischen *formul*n *rational* werden, welches *problema* nach der gewöhnlichen Art beynahe unmöglich seyn würde, so können doch hierauß leicht unendlich viel *solution*en angegeben werden. Als wann $p=1$, $q=2$, $r=2$ so wird $x=\frac{7}{3}$; $y=\frac{2}{3}$; $z=\frac{4}{3}$.[6]

Eben jetz als den 24ten bekomme ich aus Petersburg mit der fahrenden Post ein Paket vom 28ten *Maj. st. v.* allso vom 8ten *Jun. st. n.*[7] welches dahero nicht mehr als 16 Tag unter wegs gewesen, woraus ich schliesse daß die *Chart*en aus Leipzig noch früh genug ankommen werden.[8]



Meine *Demonstration* des vorhergemeldten *Theorematis*[9] verhält sich allso: *Sit propositum trapezium ABCD cum diagoniis AC, BD; compleatur primo parallelogrammum ABED cujus diagonales AE, BD se in G bisecabunt. Tum ducta CE compleatur parall[elogrammum] ACEF cum Diag[onali] CF, ductisque BF, DF erit quoque BCDF parall[elogrammum]. Jam cum in omni parallelogrammo*

summa quadr[atorum] diag[onalium] = summae quadr[atorum] laterum,

ex ▱ *ACEF erit*

$$AE^2 + CF^2 = 2AC^2 + 2CE^2$$

ex ▱ *BCDF erit*

$$BD^2 + CF^2 = 2BC^2 + 2CD^2$$

ergo

$$2AC^2 + 2CE^2 - AE^2 = 2BC^2 + 2CD^2 - BD^2 = CF^2.$$

Porro ▱ *ABED dat*

$$AE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2,$$

quae aequatio ad priorem addita dat

$$\begin{array}{llcll} 2AC^2 + 2CE^2 & +BD^2 & = & 2AB^2 + 2BC^2 + 2CD^2 + 2AD^2 & -BD^2 \\ \textit{add[atur]} & BD^2 & & \textit{(et divid[atur] per 2)} & BD^2 \\ \hline AC^2 + CE^2 + BD^2 & & = & AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2. & \end{array}$$

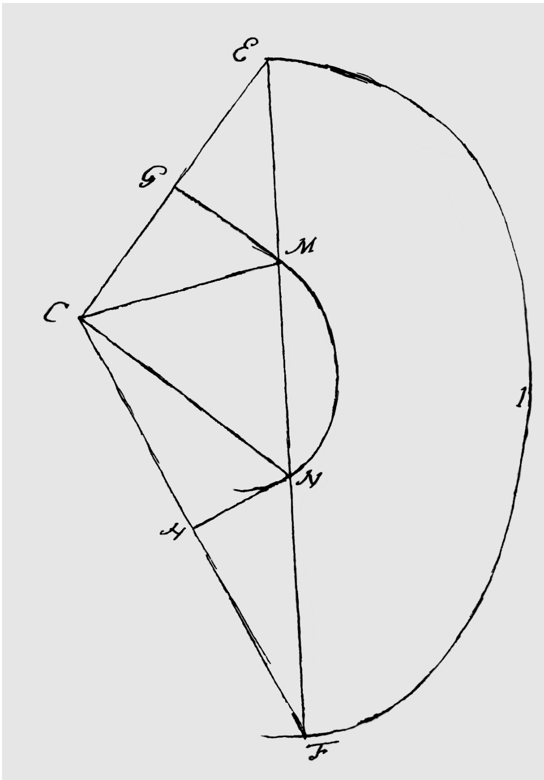
At quia AE uti et BD bisecta est in G, bisecetur quoque AC in H et ducta GH erit parallela ipsi CE ejusque semissi aequalis, ita ut sit $CE^2 = 4GH^2$ *quo substituto erit*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4GH^2.$$

Q. E. D.

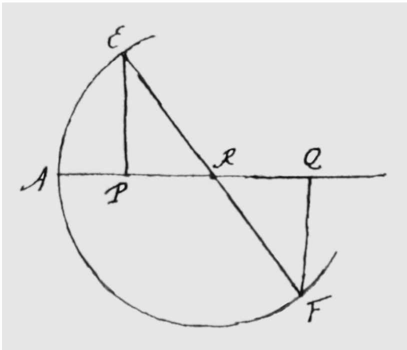
Wann man wie gemeiniglich in der *Geometri*e zu geschehen pflegt, eine *Demonstrationem more Veterum* verlangt, so verdienet diese einen grossen Vorzug vor der[je]nigen, welche Ewr. Hochwohlgeb. mir zu überschreiben die Güte gehabt;[10] will man aber nur von der Wahrheit worauf doch die Haupt Sach ankommt, überzeuget seyn, so würde meine *Demonstration* allen Vorzug verlieren, weil ich darinn die angeführte Eigenschafft der *Parallelogrammorum* voraussetze, deren Ewr. Hochwohlgeb. nicht nur nicht nöthig haben, sondern dieselbe auch zugleich mit beweisen.

H. *Oechliz* aus Leipzig, welcher nach *S.*^{t} *Petersburg* zur *Mathesi sublimiori* beruffen worden die *Vocation* aber ausgeschlagen,[11] hat eine sehr schöne *Solution* des schon längst erwehnten *Problematis catoptrici* erfunden, welche Ewr. Hochwohlgeb. unfehlbar gefallen wird.[12]



Es sey MN eine von den gesuchten *Curvis* welche alle *radios ex puncto fixo C emissos post geminam reflexionem in M et N factas*[!] *in idem punctum C remittat.* Man verlängere MN beyderseits *in E et F* so daß $ME = CM$ et $NF = CN$: so wird die *longitudo EF constans* seyn, und die *Punct*en *E et F* werden in einer solchen krummen Linie EF seyn, daß die grade Linie EF beyderseits auf dieselbe *perpendicular* fällt. Die gantze Sach kommt allso darauf an, daß man solche krummen Linien EF finde, daß die auf ein jegliches *Punct* derselben gezogenen *Perpendicular* Linien EF dieselbe krumme Linie noch mal *in F ad angulos* *rectos* durchschneiden, dann diese Eigenschafft schliesst jene schon in sich, daß die *quantitas lineae hujus EF constans* seyn müsse. Man sieht nun alsbald daß die Linie EIF ein *Circul* seyn könne, dessen *Diameter* $= EF$; es gibt aber noch unendlich viel andere krumme Linien welche diese Eigenschafft mit dem *Circul* gemein haben; wie ich bald zeigen werde.

Hat man aber eine solche krumme Linie EIF gefunden, so kan daraus sehr leicht die gesuchte krumme Linie MN gefunden werden, und das auf unendlich vielerley Art: dann man kan das *punctum radians* C nach Belieben annehmen; und wann man daraus *ad terminos lineae* EF die graden Linien CE und CF zieht, dieselben in G und H in zwey gleiche Theile schneidet, aus den *puncte*n G und H auf dieselben die *perpendicular* Linien GM und HN aufrichtet, biß solche der EF begegnen, so sind nicht nur die *puncte*n M und N in der gesuchten Linie MN, sondern GM und HN sind auch *tangentes* derselben. Nimmt man für EIF ein *Circul* an *Diametri* EF, so wird MN eine *Ellipsis*, deren *foci* sind das *punctum radians* C und das *centrum circuli* EIF.



Um aber alle mögliche krumme Linien EAF zu finden, welche von ihren *normalibus* ERF nochmal in F *normaliter* durchschnitten werden, so setze ich die *abscissas* $AP = x$, $AQ = X$, die *applicatas* $PE = y$, $QF = -Y$ (weil diese *ad partes oppositas axis* fällt); so ist die *subnormalis* $PR = \frac{y\,dy}{dx}$, und die *subnormalis* $QR = \frac{-\,Y\,dY}{dX}$. Da nun $PE : PR = QF : QR$ so wird $y : \frac{y\,dy}{dx} = -\,Y : \frac{-\,Y\,dY}{dX}$, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$. Jetz setze ich $dx = p\,dy$ so wird auch $dX = p\,dY$, und $PR = \frac{y}{p}$; $QR = -\frac{Y}{p}$; allso $PQ = \frac{y-Y}{p} = X - x$; diese *aequation differentir*t gibt

$$\frac{dy - dY}{p} - \frac{(y-Y)\;dp}{pp} = dX - dx = p\,(dY - dy)$$

oder

$$(dy - dY)\,\frac{(1+pp)}{p} = \frac{(y-Y)\;dp}{pp}$$

das ist

$$\frac{dy - dY}{y - Y} = \frac{dp}{p\,(1 + pp)} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1 + pp};$$

dahero ist

$$\ell\;(y - Y) = \ell\,2a + \ell\,p - \ell\sqrt{(1 + pp)}\,,$$

oder

$$y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{(1 + pp)}},$$

und folglich

$$X - x = \frac{2a}{\sqrt{(1 + pp)}} = PQ;$$

da nun $PE + QF = y - Y = \dfrac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ so wird $EF^2 = PQ^2 + (PE + QF)^2 = 4aa$, und allso $EF = 2a$ dahero *constans*. Da $y - Y = \dfrac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ so setze ich $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ und $Y = P - \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ wo P eine *functionem rationalem quamcunque ipsius* p bedeuten mag; dann solchergestalt wird die *Conditio continuitatis* erfüllt, weil die *Formul* $P \pm \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ wegen des *radical*-Zeichens von *natur ambigua* ist, und allso auf beyde *Puncte* E und F zugleich geht. Weil nun $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ so ist $dy = dP + \dfrac{a\,dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$ und allso

$$dx = p\,dy = p\,dP + \frac{ap\,dp}{(1 + pp)^{\frac{3}{2}}},$$

wovon das *Integrale* ist

$$x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

Wann demnach für P eine *functio quaecunque rationalis* von p angenommen wird, so hat man *pro curva AE* diese *formul*n

$$\begin{aligned} AP &= x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{(1 + pp)}}; \\ PE &= y = P + \frac{ap}{\sqrt{(1 + pp)}}, \end{aligned}$$

aus welchen zugleich die *Coordinatae pro puncto altero respondente* F gefunden werden, wann man nur das *signum* des *radicalis* $\sqrt{(1 + pp)}$ verwandelt. Will man

Curvas algebraicas haben, so darf man für P nur eine solche *functionem ipsius p* annehmen, daß $\int p\,dP$ *integrabel* wird. Zum *Exemp*el setze man $P = 2bp$, so wird

$$x = 2b\int p\,dp - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} = bpp - \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} + a$$

und

$$y = 2bp + \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}};$$

erstere gibt $px = bp^3 + ap - \dfrac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, welche zu jener *addir*t gibt $y + px = bp^3 + (a+2b)\,p$; wann nun aus diesen zwey *aequation*en der Buchstabe p *eliminir*t wird, so erhält man die *aequation* zwischen x und y. Zur *Construction* sind aber obige *formul*n bequemer, weil in diesem *Exempel* seyn wird

$$\begin{aligned} AR &= bpp + a + 2b;\\ PQ &= \frac{2a}{\sqrt{(1+pp)}};\\ PR &= 2b + \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}};\\ PE + QF &= \frac{2ap}{\sqrt{(1+pp)}}. \end{aligned}$$

Man kan aber auch *in genere* eine sehr leichte *Construction* geben, welche alle mögliche *Curvas*, so diese Eigenschafft haben, in sich begreifft, sie seyen *algebra*isch oder *transcendentes*.

Meine gantze *Famille* lässt sich für Ewr. Hochwohlgeb. gütiges Andenken gehorsamst bedanken, und zugleich zu Dero ferneren Wohlgewogenheit und Gnade unterthänigst empfehlen. Die Gesundheit unsers *Johan* Albrechts scheinet nun auch dauerhafter zu werden, und da er bißher *in Mathematicis* ziemlich zugenommen, dabey aber *in humanioribus* etwas zurükgeblieben, so gehet er jetz in eine hier neu errichtete Schule, welche wegen der schönen Anordnung und besonderen leichten und bequemen Lehr Art allgemeinen Beyfall findet. Ungeacht dieselbe erst seyt einem Jahr aufgerichtet worden, so habe ich doch letstens bey dem *Examine* mit grosser Verwunderung gesehen, daß die Knaben so wohl in Sprachen als Wissenschafften, die *Mathematic* und *Physic* nicht ausgenommen, solche *Progressus* gemacht, dergleichen in anderen *Gymnasiis* entweder gar nicht, oder erst nach Verfliessung vieler Jahren zu erwarten sind. Weil er daselbst den gantzen Tag auf eine angenehme Art zum Lernen angehalten wird, so muß ich meinen eigenen Unterricht auf einige Zeit aussetzen, in der Hoffnung, daß er nachdem in den *humanioribus* ein guter Grund wird gelegt worden seyn, alsdann um so viel geschwinder zunehmen werde.

Ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu seyn
Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 25ten *Junii*
A. 1748

R 843 Reply to n° 128
Berlin, June 25th, 1748
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 227–230v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 458–466; *Euler-Goldbach* (1965), p. 293–298

130
Goldbach to Euler
Petersburg, July (2nd) 13th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen dancke ich dienstl[ich] für die viele Mühe welche Sie über sich nehmen wollen damit mir die verlangte Beschreibung der Sonnenfinsterniß zu rechter Zeit übersandt werden möchte, und will hoffen daß selbige noch *intra terminum* allhie eintreffen werde;[1] ich würde aber[2] auf Dero geehrtes letzteres Schreiben so zeitig noch nicht geantwortet haben wann ich nicht die von mir angeführte, aber mit $(2 \pm 2)^{2e}$ übel *exprimi*rte *formul*[3] je eher je lieber zu *corrigi*ren nöthig gefunden hätte, denn es ist $8n + 2 = (2 \pm 2)^{e+1} + \Box + \Box$ allwo e allezeit einen *numerum integr*[*um*] *affirm*[*ativum*] bedeutet, oder auch $8n + 2 = (1 \pm 1)^{2e+2} + \Box + \Box$, gleichwie $8n + 1 = (1 \pm 1)^{2e} + (1 \pm 1)^{2f} + \Box$ allwo e *et* f *integros affirm*[*ativos*] bedeuten;[4] es ist auch sehr wahrscheinlich daß so gar $4n + 1 = (1 \pm 1)^{2e+1} + \Box + \Box$. Insonderheit aber halte ich für merckwürdig daß in dieser *aequatione*

$$4n + 3 = 2a^2 + 4b^2 + c^2 + 2 = 2A^2 + 4B^2 + C^2,$$

allwo a ein *numerus par* und A *impar* ist, a *in quocunque casu numeri* n so angenommen werden kan daß A gleich sey $a + 1$. In dem *casu* wo $a = 0$, ist solches offenbar, in den übrigen *casibus* aber fehlet es *more solito* an der *demonstration*,[5] jedoch ist wohl zu verstehen daß, wie gesaget, der *valor* a also angenommen werden kan und nicht nothwendig also beschaffen ist, als zum Ex[empel]: wann $n = 19$ und $4n + 3 = 79$, so kan a zwey *valores* haben, nemlich 4 und 6; nicht der andere sondern der erste ist allhie *app*[*l*]*icable* damit die *aequationes*

$$4 \cdot 19 + 3 = 2 \cdot 4^2 + 6^2 + 3^2 + 2 = 2\,(4 + 1)^2 + 2^2 + 5^2$$

statt finden und $A = a + 1 = 4 + 1$ werde.[6]

Meine vorige *formulas*[7] habe ich auf folgende art heraus gebracht so in der That mit Eurer Hochedelg. *methode* übereinstimmet: Wann man annimmt

$$(1.)\quad 4a^2 + 2b^2 + 4c^2 + 4c + 1 = 2n + 1,$$

so wird

$$(2.)\quad n = 2a^2 + b^2 + 2c^2 + 2c = 2\,\square + \square + 4\,\triangle.$$

Es sey n ein *numerus par* $= 2m$ so muß auch b ein *numerus par* $= 2d$ seyn, *ergo*

$$(3.)\quad m = a^2 + 2d^2 + c^2 + c = 2\,\square + \square + 2\,\triangle.$$

Es sey $m = 2p$, so muß auch $a = 2e$ seyn, *ergo*

$$(4.)\quad p = 2e^2 + d^2 + \frac{c^2 + c}{2} = 2\,\square + \square + \triangle.$$

Sit in formula (2.) $n = 2m + 1$, *erit* $b = 2d + 1$, *ergo*

$$(5.)\quad m = a^2 + 2d^2 + 2d + c^2 + c = \square + 4\,\triangle + 2\,\triangle.$$

Sit $m = 2p$, *erit* $a = 2e$, *ergo*[8]

$$(6.)\quad p = 2e^2 + d^2 + d + \frac{c^2 + c}{2} = 2\,\square + 2\,\triangle + \triangle.$$

Sit in formula (4.) $m = 2p + 1$, *erit* $a = 2e + 1$, *ergo*

$$(7.)\quad p = 2e^2 + 2e + d^2 + d + \frac{c^2 + c}{2} = 4\,\triangle + 2\,\triangle + \triangle.$$

Sit in form[*ula*] (3.) $m = 2p + 1$, [*erit*] $a = 2e + 1$, *ergo*

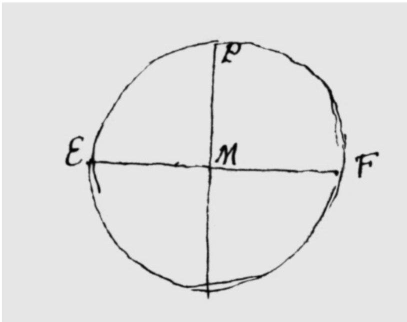
$$(8.)\quad p = 2e^2 + 2e + d^2 + \frac{c^2 + c}{2} = 4\,\triangle + \square + \triangle,$$

&c.

Das *present* welches mir Ew. Hochedelgeb. von Dero *introductione in analysin infinitorum* machen, wird mir überaus angenehm seyn; ich hatte gar nicht gewust oder wenigstens gäntzlich vergessen daß Sie dergleichen Buch geschrieben welches nunmehro vermuthlich in den Gelehrten Zeitungen bald *recensi*ret werden wird.[9] Bei dieser Gelegenheit möchte ich wissen [ob] Eurer HochEd. *Scientia navalis* schon gedruckt worden? *item* was Sie von einer Abhandlung *eiusdem argumenti* so *M.r Bouguer* herausgegeben, halten?[10] *item* möchte gern benachrichtiget seyn ob der in E. H. Antworten auf die Fragen von den *Comet*en erwehnte neuentdeckte *Planet* sich in seiner *position*[11] *mainteni*ret und durch fernere *observationes* bestätiget worden?[12] *item* ob der *Comet* von *A.* 1742 in dem Lauf des *Mercurii* einige *alteration* verursachet?[13]

Was die *aequation* $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+1=0$ betrifft so wird selbige *positis* $x-1=A$, $y-1=B$, $z-1=C$ in diese $A^2+B^2+C^2=2$ verwandelt woraus alsofort offenbar ist daß *posita* $A=\sqrt{2-B^2-C^2}$ *rationali*, auch $-B^2=A^2+C^2-2$ oder $B=\sqrt{2-A^2-C^2}$ oder $C=\sqrt{2-A^2-B^2}$ *rationales* seyn müssen.[14]

Vor Dero mir *communicir*te *solution* des *Problematis* von den *diagonalibus trapezii*[15] sage ich schuldigsten Danck, und *observi*re hiebey annoch, daß wann von den *quatuor lateribus* AB, BC, CD, DA eines durch einen *numerum impariter parem*, und die drey übrigen durch *numeros impares exprimi*ret werden alsdenn die drey *quadrata* $AC^2+BD^2+4GH^2$ unmöglich aus *numeris integris* bestehen können.



Die *solution* des *Problematis Catoptrici*[16] durch hülffe einer *curvae* deren *normalis curvam secans* allenthalben *constans* sey, ist allerdings sehr schön. Ich habe dabey angemercket daß in der *formul* $y=P+\dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ *in casu* $y=$ *applicatae maximae* allezeit seyn müsse $P=-ap+a\sqrt{1+p^2}$; hingegen kan ich mir nicht recht vorstellen wie die *curva* aussehen müsse wann man das *spatium* EM *a vertice* E *usque ad applicatam maximam* MP *interceptum* gantz klein, als $\dfrac{a}{1000}$ annimmt und schlüsse daraus daß eben dieses *spatium* EM gewisse *limites* haben werde.

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 13. *Jul.* 1748.

R 844 Reply to n° 129
Petersburg, July (2nd) 13th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 125–126v
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 53v–54r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 467–470; *Euler-Goldbach* (1965), p. 299–300

131

Euler to Goldbach

Berlin, August 6th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

In der Hoffnung, Ewr. Hochwohlgeb. werden die verlangten Finsternüß *Chart*en wohl und noch zu rechter Zeit erhalten haben,[1] zweifle ich nicht, Dieselben werden auch mit derselben Übereinstimmung zufrieden seyn. Dann ungeacht ich in den *Elementis*, worauf dieselben gegründet sind, einige Verbesserungen entdecket, so sind dieselben doch so gering, daß in der Vorstellung auf der *Chart*e daher keine merkliche Ändrung entstanden seyn würde. Nachdem uns allhier der Himmel ziemlich günstig gewesen um diese Finsternüß sehr genau zu beobachten so habe ich Ursach mit meinen neuen *Tabulis lunaribus* vollkommen zufrieden zu seyn,[2] dann so wohl der Anfang als das Ende hat näher als auf eine *Minute* mit meiner Rechnung übereingetroffen, indem der Anfang nur $15''$, und das Ende $30''$ späther bemerket worden als ich angesetzt hatte. Insonderheit aber war diese Finsternüß würklich *annularis*, wie ich gefunden hatte, ungeacht nicht nur die anderen *Tabulae*, welche doch für die besten gehalten werden, keinen *annulum* anzeigten, sondern auch einige HH. *Pariser Astronomi* meine Rechnung durch einige bey den *Tabulis* angebrachte vermeinte *Correctiones* wiederlegen und behaupten wollen, daß diese Finsternüß allhier nur *partialis* seyn würde:[3] Die nach den übrigen *Tabulis lunaribus* angestellten Rechnungen haben so wohl im Anfang als Ende um 2, 3 ja biß auf 10 *minut*en gefehlet. Übermorgen werde ich sehen, wie genau meine Rechnung bey der Monds Finsternüß eintreffen wird.[4]

Was die *Formul* $8n+2=(2\pm 2)^{e+1}+\square+\square$ betrifft, so kan ich zwar kein[en] *casum in contrarium* entdecken, ich sehe aber doch die Wahrheit davon nicht ein: Hingegen kan ich diese *Formul* $8n+1=(1\pm 1)^{2e}+(1\pm 1)^{2f}+\square$ nicht zugeben, wofern dieselbe so viel anzeigen soll, daß eine jede Zahl von dieser *Form* $8n+1$ allzeit in 3 dergleichen *quadrata* zertheilet werden könne, wovon 2 zugleich *potestates binarii* seyen, <u>*cyphra non exclusa*</u>. Dann wann $8n+1=217$, so findet diese *Formul* nicht statt.[5] Wann es gewiß daß $8n+2=(1\pm 1)^{2e+2}+\square+\square$ so folget von selbsten daß $4n+1=(1\pm 1)^{2e+1}+\square+\square$, wann man nur jene durch 2 *dividir*t weil $\dfrac{\square+\square}{2}=\square+\square$. An der Wahrheit dieser gedoppelten *Formul* $4n+3=2aa+4bb+cc+2=2AA+4BB+CC$, und daß allzeit seyn könne $A=a+1$, finde ich keine Ursach zu zweifeln, ich kan aber eben so wenig den Grund davon einsehen; indessen sind solche Sätze, welche durch kein *Exempel refutir*t werden können, freylich um so viel mehr merkwürdig.[6]

Für die gütige *Communication* der *Demonstration*en der mir letst überschriebenen schönen Eigenschafften der Zahlen[7] sage Ewr. Hochwohlgeb. allen schuldigsten Dank, und es freuet mich nicht wenig, daß dieselben mit denen so ich herausgebracht so schön übereinstimmen.

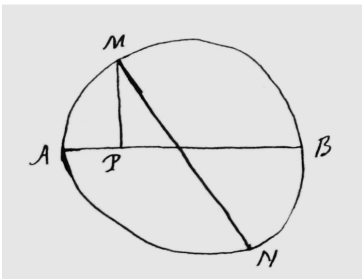
Die *Introductio in Analysin infinitorum*, welche mir die Ehre gegeben Ewr. Hochwohlgeb. zu *praesenti*ren, ist schon seit drey Jahren unter der Preß gewesen, und anjetzo wird von *M.*r *Bousquet* meine Abhandlung vom *Calculo differentiali* gedrukt.[8]

Weil die Kaiserl[iche] *Academi*e der Wissenschafften Ihren Anspruch auf meine *scientiam navalem* erneuert, so habe ich letstens das gantze Werk an des H. *Praesidenten* *Excell*[*enz*] überschicket, und ersuche Ewr. Hochwohlgeb. bey Gelegenheit etwan den Druk desselben durch Vorstellungen bey dem H. Schumacher gütigst beschleunigen zu helfen; insonderheit da in des H. *Bouguer*s Werk von dieser *Materie* schon ziemlich viel enthalten, was ich darüber herausgebracht habe, und da meine *Principia*, worauf die gantze Sache beruhet, je länger je mehr bekannt werden, so beförchte ich, daß gar alles anderwerts herauskommen möchte, wann der Druck meines Werks nicht bald zu Stande kommt.[9] Von dem erwehnten neuen *Planet*en, welcher alle 4 Jahr seinen Lauf vollenden soll, ist nicht nur nichts neues entdeket worden, sondern ich bin versichert, daß der *Autor* desselben nicht genugsam in der *Theoria Planetarum* und *Cometarum* erfahren gewesen, daß er aus den *Observation*en einen solchen Schluß hätte machen können.[10]

Nachdem ich den *Locum Mercurii* auf die Zeit des *Comet*en *A.* 1744 genauer berechnet, so habe befunden, daß derselbe dem *Comet*en nicht so nahe gewesen als ich anfänglich gemeinet hatte, und daß folglich in seinem Lauf keine *Alteration* hat entstehen können.[11]

Wann die 4 *latera trapezii* allso durch Zahlen ausgedruckt werden daß eines ein *numerus impariter par*, die drey übrigen aber *numeri impares* sind,[12] so wird die *summa quadratorum laterum* eine solche Zahl $8n + 7$, und kan folglich *rationaliter* nicht in drey *Quadrata resolvir*t werden.

Ewr. Hochwohlgeb. *Dubium* gegen die *figuram curvae*, deren *normalis curvam secans* allenthalben *constans* ist, kan ich nicht genug einsehen.[13]



Es sey $AMBNA$ eine solche *curva*, wo die *recta utrinque normalis* $MN = 2a$, die *Abscissa* $AP = x$, die *Applicata* $PM = y$, und P eine *functio rationalis* von p, so habe gefunden daß $x = \int p\,dP - \dfrac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$, und $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$. Hieraus wird $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{p}$ und folglich die *Applicata* y *maxima* wann $\dfrac{dy}{dx} = 0$, das ist wann $p = \infty$. Nun kan aber für P eine solche *functio* von p angenommen werden, daß in diesem Fall eben nicht wird $P = -ap + a\sqrt{(1+pp)}$ oder $P = 0$ weil $p = \infty$.

Hingegen wird die *applicata maxima* seyn $= P+a$, wann in P gesetzt wird $p=\infty$, und die *abscissa* wird $x=\int p\,dP$.

H. Kratzenstein wird bey Ewr. Hochwohlgeb. seine Aufwart[ung] gemacht haben; wegen Kürze der Zeit konnte ich Ihm keinen Brief an Dieselben mitgeben, er scheint mir aber ein sehr artiger und geschickter Mann zu seyn.[14]

Nächst gehorsamster Empfehlung meiner und aller mei[nigen] habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Eurer Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 6ten *Aug.*
1748.

R 845 Reply to nº 130
Berlin, August 6th, 1748
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 231–232v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 471–474; *Euler-Goldbach* (1965), p. 300–302

132
Goldbach to Euler
Petersburg, (August 27th) September 7th, 1748

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Die in Charten vorgestellete Sonnenfinsterniß und die dazu gehörige gedruckte Beschreibung sind mir Tages zuvor und also noch zu rechter zeit eingehändiget worden,[1] vor deren übersendung ich Eurer Hochedelgeb. schuldigsten Danck sage, wie ich denn Deroselben zugleich zu der genauen übereinstimmung dieser Sonnenfinsterniß mit Dero *Tabulis Astronomicis* von herzen *gratuli*re und ein gleiches von der letzt verwiechenen Mondfinsterniß zu erfahren hoffe.[2] Ich habe auch nicht unterlassen gehörigen ortes die verlangte Erinnerung wegen der *Scientiae navalis* zu thun,[3] und zuverlässig vernommen, daß man, wie mir schon vorhero bekannt war, und Ew. Hochedelg. ohne zweiffel bereits von andern werden erfahren haben, mit dem Druck dieses Werckes eyfferigst fortfähret.

Die für $8n+1$ angegebene *formul*[4] ist allerdings unrichtig; ich habe aber bey gelegenheit des *theorematis Fermatiani* noch bemercket, daß gleichwie ein jedes *quadratum impar*, oder *radicis impariter paris*, *dummodo minus sit quam* $8m+7$, diese Eigenschafft hat, daß es eines von den 4 *quadratis* ist deren *aggregatum* $=8m+7$, also auch ein jedes *quadratum impar*, oder *radicis pariter paris*, *dummodo sit minus quam* $8m+3$, diese Eigenschafft hat, daß es eines von den 4 *quadratis* ist deren *summa* $=8m+3$;[5] weil nun 0 unter die *quadrata pariter paria* mit gerechnet werden kan, so geschiehet es gleichsam *per accidens* daß alle *numeri* $8m+3$ auch aus 3 *quadratis imparibus* allein bestehen können.[6] Wann man ein *quadratum par* durch $\square$, und ein *quadratum impar* durch $\boxdot$, ein *quadratum ambiguum* aber so *diverso respectu par* oder *impar* seyn kan durch $\boxminus$ oder $\boxminus$ andeutet, so lässet sich dieses alles durch folgende formul *exprimi*ren

$$4\,\boxminus + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8m + 5 \pm 2,$$

allwo vor $\boxminus$ *in casu signi superioris* + ein *quadratum impar*, *in casu signi inferioris* − aber ein *quadratum par* zu verstehen ist.

Ich habe auch *observi*ret daß wann man setzet

$$2\,(2a+1)^2 + 4b^2 + (2c-1)^2 = 4n-1$$

und

$$8n-6 = 2\,(2A+1)^2 + 4B^2 + 4C^2$$

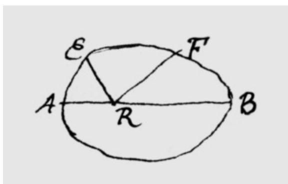
posito pro n numero eodem integro positivo alsdann allezeit genommen werden könne $B=b$; es sey zum Exempel $n=29$, so kan beyden *aequation*en ein gnügen geschehen wann man setzet $B=b=4$, dann es wird

$$2\cdot 1 + 4\cdot 16 + 49 = 115$$

und

$$2\cdot 49 + 4\cdot 16 + 4\cdot 16 = 226.$$

Was die *curvas* deren *normalis curvam secans* allenthalben *constans* ist, anlanget,[7] so bin ich der Meinung daß wann in denselben ein *axis curvam in duas partes similes et aequales dividens* $= 2a$ angenommen wird, die *applicata maxima* nicht anders als $= a$ seyn könne, und dieses aus folgender Ursache:



Sit axis $AB = 2a$; sit normalis in axem incidens $ER = a-u$, erit normalis ab axe reflexa RF sub eodem angulo ($FRB = ERA$) $= a+u$. Cum igitur in casu quo normalis fit perpendicularis ad axem, quantitas variabilis u fiat $=0$, adeoque ipsa normalis $= a$, applicata vero maxima nihil aliud sit nisi normalis ad axem perpendicularis, sequitur applicatam maximam in omnibus istis curvis esse $= a$; dahero sehe ich nicht wie die *applicata maxima* $= a+P$ seyn könne ohne daß $P=0$ sey.[8]

Ich nehme abermal die freyheit mir einige hiebey *specifi*rte Bücher aus Hn Speners Buchladen auszubitten[9] und verharre mit besonderer hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^t Petersburg
den 7. *Sept. st. n.* 1748.

R 846 Reply to nº 131
Petersburg, (August 27th) September 7th, 1748
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 127–128r
Partial copy, 3 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 54v–55v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 475–477; *Euler-Goldbach* (1965), p. 302–303

133
Euler to Goldbach
Berlin, October 12th, 1748

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die letste Sonnen-Finsternüß ist zwar mit meinen neuen *Tabulis Lunaribus* genauer übereingekommen, als mit allen anderen[1] und auch denjenigen, welche für die richtigsten gehalten werden, es fand sich aber doch ein geringer Unterscheid von ungefehr einer *Minute* in der Zeit, und der *Annulus* daurete nicht so lang, als ich nach meiner Rechnung gefunden hatte. Der erstere Fehler kommt theils von der noch nicht genugsam genau bestimmten *Differentia Meridianorum* von *Berlin* und *Paris*, theils von der noch in den *Tabell*en selbst befindlichen kleinen Unrichtigkeit her, welche ich mir zu heben nicht getraue; dann ich habe die *Elementa* meiner *Tabell*en ausser der *Theori*e auf *Observationes eclipsium Lunarium* gegründet, über deren *Momenta* man nicht wohl auf eine *Minut*e gewiß seyn kan. Es lässt sich nehmlich wegen der *Penumbrae* weder der Anfang noch das Ende einer Mondsfinsternüß so genau bestimmen, daß man nicht noch um eine *Minut*e oder mehr fehlen sollte. Was die Dauer des *Annuli* anlangt, so hatte ich mit den meisten *Astronomis* die *Parallaxin Lunae* zu groß angenommen, allein eben diese Finsternüß hat mich in den Stand gesetzet diese *Parallaxin* auf das genauste zu bestimmen, welche ich um mehr als $1'$ kleiner befunden, als sie in den *Tabulis Cassinianis* angesetzt wird, und *M.^r le Monnier* hat auch würklich gefunden, daß die *Parallaxis Lunae* um ein merkliches kleiner sey, als bißher die *Astronomi* geglaubet, wodurch ich in meiner *Conce*[*p*]*tion* um so viel mehr bestärket werde.[2] Hieraus habe ich in meinen *Tabell*en den *Articul* von der *Parallaxi corrigir*t, und hoffe ins künftige was diesen *Punct* betrifft, in Bestimmung der Finsternüssen gar nicht mehr zu fehlen.[3]

Die letste Monds Finsternüß haben wir auch hier mit allem Fleiß beobachtet;[4] nach meiner Rechnung sollte sich dieselbe den 8^ten^ *Augusti* allso zutragen: I. der

Anfang um $11^{\mathrm{h}}, 3', 53''$; II. das Ende $13^{\mathrm{h}}, 16', 52''$. In der *Observation* selbst war der Unterscheid zwischen *Umbra* und *Penumbra* so gering, daß man bey etlichen *Minut*en weder vom wahren Anfang noch vom wahren Ende gewiß seyn konnte. Es schien uns aber der Anfang um $11^{\mathrm{h}}, 4'$ *à* $5'$, das Ende aber um $13^{\mathrm{h}}, 17'$ *à* $18'$ geschehen zu seyn. Andre haben diese beyden *Momenta* theils früher theils späther *estimir*t. Ich habe in einer verfinsterten Kammer meines Hauses das Bild des Monds durch einen 10schühigen *Tubum* auf ein weisses *Papier* fallen lassen, worauf sich der Mond mit allen Flecken sehr deutlich *praesentir*t; und ich habe den Anfang der Finsternüß angeschrieben, als ich auf dem *Papier* nicht mehr den Rand des Monds gantz erblickte, das Ende aber als der Bord wiedrum rund herum gantz erschien, wobey zu merken daß wann die Vorstellung des Bilds stärker oder schwächer gewesen wäre beyde *Momenta* früher oder späther bemerket seyn würden: dann wann man durch den *Tubum* grad gegen den Mond sahe, so konnte man auch bey der stärksten Verfinsterung den verfinsterten Theil erkennen, als welcher von den durch die *Atmosphaer* der Erde durchgedrungenen Lichtstralen noch erleuchtet wurde. Der verfinsterte Theil des Monds schien auch ein Stück von einem kleinern *Circul* zu seyn als der erleuchtete, wovon aus angeführtem Grund die Ursach gantz klar ist, dann die durch die *Atmosphaer* der Erde gegangenen Stralen waren zu schwach den Rand des Monds, auf welchen sie so schief auffielen, zu erleuchten: dahero wir nicht den gantzen verfinsterten Theil erblicken konnten.

Die *Observation* daß $8m + 5 \pm 2 = 4 \boxminus + \boxdot + \boxdot + \boxdot$ kommt mir sehr merkwürdig vor,[5] und ich vermuthe daß diese Betrachtungen endlich zur wahren Quelle, worauß diese Eigenschafften fliessen, leiten werden. Ich habe jetz wegen anderer Geschäften seit einiger Zeit über diese Materie nicht mehr denken können; und anjetzo bin ich bemühet einen Einfall ins Werk zu richten, welchen ich gehabt um solche *Objectiv*-Gläser zu verfertigen, welche eben den Dienst leisten sollen, als die Spiegel in den *Tubis Neutonianis* und *Gregorianis*. Der Fehler der gewöhnlichen *Objectiv*-Gläser rühret nur daher, daß die Lichtstraalen nicht einerley *Refraction* leiden, und allso zum *exemp*el die Rothen Straalen einen anderen *Focum formi*ren als die Blauen: dahingegen von einem Spiegel alle Straalen in eben denselben *focum reflectir*t werden. Dieser Unterscheid zwischen den *Focis* der rothen und blauen Stralen wird auch um so viel grösser, je weiter dieselben vom Glas entfernet sind, und bey einem *Objectivgla*s von 27 Schuen fällt der Rothe *focus* einen gantzen Schuh weiter als der Blaue; woraus die Undeutlichkeit und die Farben der durch lange *Tubos* gesehenen *Objectorum* entspringen. Wann man allso solche *objectiv* Gläser verfertigen könnte, welche alle Straalen in einen gemeinen *Focum* zusammen würfen, so würde man von denselben eben diejenigen Vortheile zu gewarten haben als von den Spiegeln. Dieses ist aber nicht möglich mit blossem Glas zu bewerkstelligen; dahero bin ich auf die Gedanken gefallen, ob es nicht möglich wäre aus Glas und Wasser oder zwey anderen verschiedenen durchsichtigen *Mat*erien solche *Lentes objectivas* zu verfertigen: und zweifelte hieran um soviel weniger, da wir sehen, daß in den Augen, welche aus verschiedenen durchsichtigen Cörpern bestehen, eine solche Undeutlichkeit wegen der verschiedenen Brechung der Lichtstraalen nicht wahrgenommen wird.

Ich habe mir dahero eine solche *Lentem compositam* vorgestellt, so aus zwey Gläsern *abba*, *cddc*, und dem Zwischen Raum *bccb* mit Wasser angefüllt bestehen soll. Nach dem ich die *Radios* der Krümmungen *aa*, *bb*, *cc*, *dd generaliter* durch die Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* bemerket, so habe ich *ex lege refractionis* erstlich die *distantiam foci a radiis rubris formati*, und dann die *Distantiam foci a radiis violaceis formati* gesuchet. Hernach habe ich diese beyden *Expressiones* einander gleich gesetzt, und darauß die Verhältnüß zwischen den *Radiis a*, *b*, *c*, *d* bestimmet. Die *Solution* fiel dahin aus, daß beyde Gläser *Menisci* seyn müssen, von welchen sich der *Radius faciei convexae* zum *radio faciei concavae* verhalte wie 23 zu 10. Solche *Meniscos* habe ich mir schon verschiedene schleiffen lassen; es findet sich aber noch diese Schwierigkeit, daß das Glas nicht eben die *Figur*, welche die Schüssel hat, auf das genauste bekommt. Gleichwohl kan ich schon von solchen *Objectiv*-Gläsern einen merklichen Vortheil spühren. Ich werde aber noch mehrere solche *Meniscos* verfertigen lassen um zu sehen, ob etwan *casu* die erforderte *Proportion* näher getroffen wird.[6]

Ewr. Hochwohlgeb. haben vollkommen recht, daß in den *Curvis* deren *normales secantes* allenthalben *constantes* sind, die *maxima applicata ad diametrum curvae relata* der Hälfte jener *quantitatis constantis* gleich seyn müsse:[7] Die Sache kommt allso nur darauf an, ob in diesen *Curvis* immer ein solcher *Axis curvam in duas partes similes et aequales secans* Platz finde? welche Frage ich nicht mit ja beantworten kan.

Die verlangten Bücher werden Ewr. Hochwohlgeb. bald erhalten;[8] zu Dero beständigen Gewogenheit ich mich sammt den meinigen gehorsamst empfehle und mit der schuldigsten Hochachtung verharre

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 12 *Octobr.*
1748.

R 847 Reply to n° 132
Berlin, October 12th, 1748
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 238–239v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 478–482; *Euler-Goldbach* (1965), p. 303–305

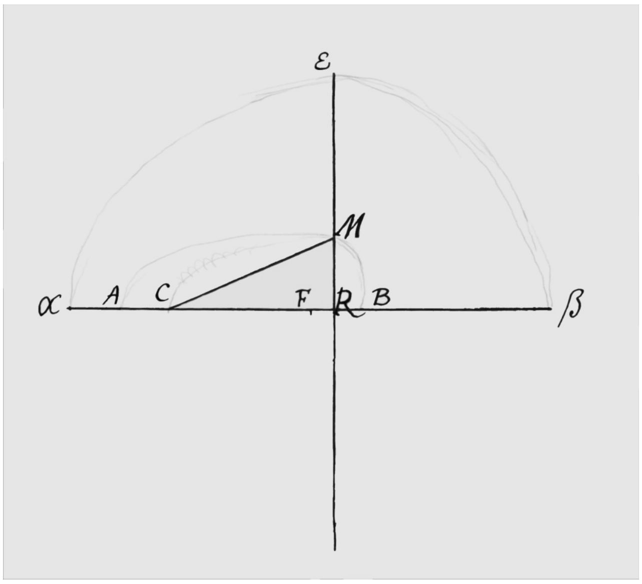
134

Goldbach to Euler

Moscow, (January 30th) February 10th, 1749

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Auf Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 12. *Oct.*, 1748 habe ich bißhero wegen einiger dazwischen gekommenen Verhinderungen und zum Theil wegen meiner Reise von Petersburg anhero, nicht geantwortet. Das vornehmste so ich vorjetzo bey der *curva Catoptrica* anzumercken habe bestehet in folgendem:[1]



Wann die *Catoptrica*, deren *axis* $AB = a$ ist, *compendii causa* die *curva* A,[2] und die *curva huic respondens* deren *axis* $\alpha\beta = 2a$ ist und welche diese Eigenschafft hat daß alle *normales curvam secantes* auch $= 2a$ sind die *Curva* α genannt wird, so wird diese *curva* α, weil sie allezeit einen *axem* hat, welcher der *axis* AB *utrinque continuatus* ist, zur *applicata maxima ad axem* haben $ER = a$; hieraus ziehe ich durch ein sehr *simpl*es *raisonnement* nachfolgende zwey *corollaria*:

I. *Si distantia verticis* A *a puncto radiante* C *vocetur* b *et abscissa* CR *sit* $= x$, *applicata huic abscissae respondens* $MR = y$, *datae per* x, *semper invenietur Spatium interceptum* CR *maximum si ponatur* $CR = x = \sqrt{a^2 - 2ay}$.

II. *Si in axe curvae* α *sumatur* $\alpha F = F\beta = a$, *erit in curva* A *spatium* $CF = a - 2b$ *minimum omnium inter punctum radians* C *et radium ad axem reflexum interceptorum ita ut locus radiorum ad axem reflexorum sit inter* F *et* R.[3]

Ubrigens habe ich auch bemercket daß so offt in dieser *aequation*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta + 4 = A^2 + B^2 + C^2$$

alle *numeri integri qui his litteris designantur* bekannt sind, in der folgenden *aequation*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

die *numeri* P, Q, R, S angegeben werden können.[4] *Sit exempli gr*[*atia*] $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$, $\delta = 3$; $A = 3$, $B = 3$, $C = 9$, *erunt* $P = 3$, $Q = 3$, $R = 9$, $S = 1$.[5]

Von den verlangten Büchern[6] so schon längst über Lübeck hätten ankommen können, habe ich annoch nicht die geringste Nachricht.

Inliegendes an Hn *Schuster* bitte nach Dero *commodité* fortsenden zu lassen.[7]

Mir wird es ein besonderes Vergnügen seyn von Eurer Hochedelgebohrnen und Dero werthen *famili*e fernerem Wohlergehen Nachricht zu erhalten und ich verharre mit vieler hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 10. *Febr. st. n.*
1749.

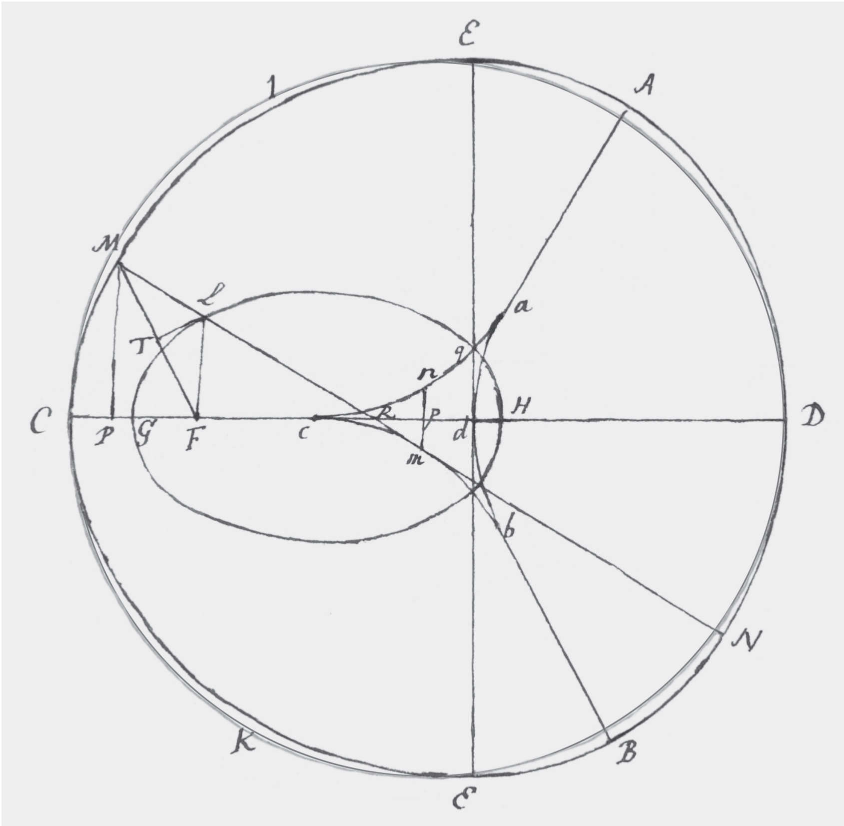
R 848 Reply to n° 133
Moscow, (January 30th) February 10th, 1749
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 129rv
Address (fol. 130): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin"
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 56v–57r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 483–484; *Euler-Goldbach* (1965), p. 305–306

135
Euler to Goldbach
Berlin, March 4th, 1749

HochWohlgebohrner Herr *Etats*-Rath
Hochgeehrtester Herr

Ewr. Hochwohlgebohrnen *gratuli*re zuvorderst zu der nach *Moscau* glücklich zurükgelegten Reise, und wünsche, daß die strenge Kälte deren betrübte Würkungen in allen Zeitungen gemeldet worden,[1] Denselben kein Ungemach möge verursachet haben.

Weil es bey der bekannten *Curva Catoptrica*[2] darauf ankommt daß man eine *curvam* finde, deren *normales utrinque secantes* allenthalben *constantis magnitudinis* seyen, so habe in beygefügter *Figur*[3] eine solche *Curvam* $CMEADNBEC$ mit allem Fleiß aufgerissen, in welcher alle diese *Normales* CD, MN, IB, EE, AK gleich groß sind, und merke dabey zuvörderst an, daß es auch solche *curvas* gebe, welche gar keinen *Diametrum* haben;[4] von der beygefügten aber ist CD ein



Diameter. Hat man eine solche *Curvam* gefunden, so kan man nach Belieben das *Punctum radians F* entweder im *Axe* oder ausser demselben annehmen, und daraus leicht die *curvam catoptricam GLH* beschreiben. Man zieht nehmlich aus dem *puncto radiante F ad quodvis curvae prioris punctum M* die Linie FM, schneidet dieselbe in T in zwey gleiche Theile, richtet darauf in T die *perpendicular* Linie TL auf, biß sie die *normalem MR* in L durchschneidet, so ist L ein *punctum* in der *Catoptrica*, und LT die *Tangens* daselbst. Wann nun das *punctum Radians F* in dem *Axe* oder *Diametro CD curvae generatricis* angenommen worden, so wird auch die Linie GH ein *Diameter* der *curvae catoptricae* selbst seyn; sonsten aber wann F nicht wäre *in axe CD* genommen worden, oder wann die *Curva generatrix CAB* gar keinen *Diametrum* hätte, so würde sich auch in der *curva catoptrica* kein *Diameter* befinden. Allso ist es gewiß, daß so offt die *curva catoptrica GLH* einen *Diametrum* hat, auch die *curva generatrix CAB* eben denselben *diametrum* haben werde, aber nicht *vicissim*; und dahero finden Ewr. Hochwohlgeb. Anmerkungen nur alsdann statt, wann die *Curva Catoptrica* einen *Diametrum* hat.

Das *Punctum radians F* mag angenommen werden, wo man will, wann man durch dasselbe *ad curvam generatricem* die *normalem* zieht CFD, und die *partes* CF und DF in zwey gleiche Theile schneidet, so bekommt man die *puncta* G und H in der *Catoptrica*.

Wann die *curva generatrix* CAB einen *diametrum* hat als CD und Ed die gröste *applicata* ist, weil $Ed = dE$ und *ad curvam normalis* so muß $EE = CD$, und allso $dE = \frac{1}{2}CD$ seyn. Es sey $CD = 2a$ so wird die *applicata maxima* $dE = a$; wann allso in der *curva catoptrica* gesetzt wird $Fd = x$, $dq = y$, so ist $Fq = Eq = \sqrt{(xx+yy)} = a - y$, und folglich $x = \sqrt{(aa-2ay)}$, wie Ewr. Hochwohlgeb. in der erstern Anmerkung gefunden, und in diesem Fall ist das *spatium* Fd *maximum vel minimum inter punctum radians* F *et radium reflexum*: in meiner *Figur* nehmlich ist es *maximum*; es wurde aber *minimum* seyn, wann ich das *punctum radians* F auf der andern Seite gegen D angenommen hätte. Gleich aber in der *Figur* das *spatium* FR in Fd ein *maximum* wird, so ist hingegen Fc der *valor minimus* desselben, wann cC der *Radius osculi curvae generatricis* in C, und folglich cD der *Radius osculi* in D ist: allso fällt dieses *punct* c nicht nothwendig in die Mitte des *Diametri* CD, viel mehr wird aus dem folgenden erhellen daß dieses *punct* c niemal in die Mitte der Linie CD falle, als wann die *curva generatrix* CAB ein *circul* ist, in welchem Fall die *Catoptrica* eine *Ellipsis* wird. Dann wann die *curva generatrix in se rediens et quasi circuli formis* seyn soll, so muß ihre *Evoluta cab* eine *curva tricuspidata* seyn: dergleichen unendlich viel gefunden werden können, so wohl *triang*[*u*]*lis aequilateris* als *scalenis inscriptibiles.* Hiebey ist merkwürdig, daß wann man eine solche *curvam tricuspidatam abc* gefunden, aus derselben *Evolution*, nach dem man den Faden länger oder kürzer annimmt, unendlich viel *curvae generatrices* CAB beschrieben werden können; dann wann Cc nach Belieben angenommen wird, so ist immer $mM = Cc + cm$ und $bI = Cc + cmb$; $Aa = Cc + cmb - adb$; und $cD = Cc + cmb + anc - adb$; weil nun $cmb + anc$ nothwendig grösser ist als adb, so kan auch cD nimmer dem Cc gleich werden, folglich das *punct* c nicht in die Mitte von CD fallen.

Um ein *exempel* von einer solchen *Curva tricuspidata* zu geben, welche *rectificabel* ist, damit so wohl die *curvae generatrices* als *catoptricae algebraicae* werden, so sey[5] $cp = t$; $pm = u$, und man nehme: $t = \dfrac{3c\,(1+3pp)}{(1+pp)^2}$ und $u = \dfrac{6cp}{(1+pp)^2}$, woraus wann man p *eliminirt* eine *aequation* von 6 *dimensionen*

$$4uu\,(tt+uu)^2 = 12ctuu\,(uu+9tt) - 243cct^4$$

[entsteht]; darinn ist $\dfrac{dt}{du} = p$; *pro puncto* d ist $p = 0$, und allso $cd = 3c$; diese *curva* ist *triangulo aequilatero inscriptibilis cujus latus* $ac = ab = bc = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}c$. Ferner ist diese *curva rectificabilis*, dann es wird der *arcus* $cm = \dfrac{2cp\,(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} + 2c$; und da *pro cuspidibus* a *et* b *est* $p = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ so ist der Bogen $cmb = cna = adb = 4c$: Wann allso genommen wird $Cc = b$, so wird $cD = b + 4c$; ferner

$$Mm = b + 2c + \frac{2cp\,(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = a + \frac{2cp\,(3-pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$$

weil $2a = 2b + 4c$. Nun aber ist $pR = pu = \dfrac{6cpp}{(1+pp)^2}$ und

$$Rm = u\sqrt{(1+pp)} = \frac{6cp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}\ etc., \qquad MR = a - \frac{2cp^3}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}.$$

Daher findet man *pro curva generatrice* die *absciss*[*am*]

$$CP = a - \frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{c\,(1-pp)}{(1+pp)^2}$$

und die *appl*[*icatam*]

$$PM = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{2cp^3}{(1+pp)^2}$$

wobey ich nur anmerke, daß, wann man in einem *Circul*, dessen *radius* $= a = \frac{1}{2}CD$, den Bogen (*qui est mensura anguli* CRM) setzt $= s$, so wird *in curva generatrice* der *arcus* $CM = s + \dfrac{\frac{2}{3}c\,(1-3pp)}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}$, und allso ist der *Perimeter totius curvae CABC accurat* gleich der *peripheria* eines *circuli*, *cujus diameter* $= CD$. {Diese Eigenschafft[6] ist allen *curvis*, so *ex evolutione curvarum tricuspidatarum quarumcunque* entstehen, gemein; indem immer der gantze *Perimeter* derselben der *Peripherie* eines *circuli diametro* $= CD$ *descripti* gleich ist; dieser Zirkel ist in der *Figur* mit Bleystifft gezeichnet. Der *Excessus areae circuli supra aream curvae* ist nur im gegenwärtigen Fall gleich der *areae circuli cujus diameter* $= c = \frac{1}{4}cna = \frac{1}{3}cd$.} Aber die *Area curvae CAB* ist kleiner als die *Area circuli cujus diameter* $= CD$ und das um einen *Circul* dessen *Diameter* $= c$; es ist aber $c = Dd - Cc$.

Weil nun aus dieser einigen *evoluta abc*, welche zugleich immer die *caustica* der daher entstehenden *catoptricarum* ist, unendlich viel *curvae generatrices ABC* und aus jeder *generatrice*, *pro loco puncti radiantis F arbitrario*, unendlich viel *catoptricae* entstehen, so kommen aus einer *caustica abc* unendlich mal unendlich viel *catoptricae*, alle *algebraicae*.

Wann

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta + 4 = A^2 + B^2 + C^2$$

so ist

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = A^2 + B^2 + C^2 + (\delta - 2)^2$$

(welches seyn soll $P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$), ist allso offenbar $P = A$, $Q = B$, $R = C$ und $S = \delta - 2$.[7]

H. Spener lässt mir sagen daß die verlangten Bücher,[8] weil es zu späth worden, nicht von hier abgegangen, sondern mit den ersten Schiffen geschickt werden sollen. Allso werden Ewr. Hochwohlgeb. belieben in *Petersburg* deswegen *Ordres* zu stellen.

Der Brief nach Leipzig[9] ist denselbigen Tag, als ich ihn empfangen, von hier abgegangen. Alle die meinige (so sich Gott sey Dank wohl auf befinden) lassen sich Ewr. Hochwohlgeb. nebst mir gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4$^{\text{ten}}$ *Martii*
1749

R 849 Reply to n° 134
Berlin, March 4th, 1749
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 242–243v, 245r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 485–489; *Euler-Goldbach* (1965), p. 306–308

136
Goldbach to Euler
Moscow, March (16th) 27th, 1749

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen sage ich schuldigsten Danck für Dero gütige *gratulation* zu meiner Reise nach *Moscau*; ich habe dieselbe vom 8. *Januar. st. n.* biß zum 17. in welchem *intervallo* die grösseste Kälte einfiel, zuruckgeleget, und nichtsdestoweniger alle Nachte auf den Bauerhöfen im Schlitten geschlaffen. Laut der Franckfurter gedruckten Zeitungen ist die Kälte so wohl in Petersburg als in Madrit vom 10. biß 13. *Januar.* gantz ausserordentlich gewesen, und wäre zu untersuchen durch welchen *tractum intermedium* diese so hefftige Kälte gegangen.[1]

Aus der von Eurer Hochedelgeb. mir übersandten *Figur*[2] sowohl als aus dem *casu* der *curvae tricuspidalis* $\triangle^{lo}$ *aequilatero inscriptibilis* kan ich nicht anders urtheilen als daß die *arcus* ac, ab, cb nicht nur *aequales* sondern auch[3] *similes*, und die *puncta* d, m, n *curvas illas in duas partes aequales bisecantia* seyn sollen; wann nun dieses ist so müssen auch die *puncta* I *et* K von dem *medio axis* CD (welches Ew. Hochedelg. in der Figur mit keinem Buchstaben bezeichnet haben und indessen r heissen kan) *aeque distantia* seyn,[4] woraus denn ferner folget, daß die *curva generatrix* auch *hexagono regulari circumscriptibilis* sey und mit dem *circulo cuius radius est* Cr in den 6 *punctis* C, I, A, D, B, K *coincidi*ren müsse, womit aber die übersandte und hiebey zurückkommende *Figur* (die mir wieder zuzuschicken bitte) nicht übereinstimmet, weil sonst alle diese *puncta* in dem mit Bleystifft gezogenen *circul* stehen müsten; wann aber auch die *arcus* ab, bc, ca nur *longitudine aequales* und nicht *similes* wären so müste nichts destoweniger folgen daß die *puncta ABC* ein *triangulum aequilaterum circulo cuius radius est Cr inscriptum formi*ren und in den mit Bleystifft gezogenen *circul* fallen dessen *centrum r* zugleich der Mittelpunct des *trianguli aequilateri* ist, wie denn auch ferner[5] die *distantiae punctorum EA* und *EB aequales* seyn müsten, welche doch in der *Figur* um ein gar merckliches *differi*ren.[6] Dieses alles habe nur deswegen erinnern wollen damit Ew. Hochedelgeb. überzeuget würden daß ich die mir übersandte *Figur* nicht nur obenhin angesehen, sondern mit einiger *attention* (woran es mir offtmals zu fehlen pfleget) betrachtet habe.

Was ich von den *quadratis* $A^2+B^2+C^2$ *&c.* in meinem vorigen gemeldet hatte, ist, wie ich aus Dero *Solution* ersehe, von keiner Erheblichkeit gewesen und einer *distraction* zuzuschreiben.[7]

Ich habe noch einige Bücher auf beyliegendem Zettel *noti*ret;[8] im fall aber Ew. Hochedelg. sehen daß sich der H. Spener mit der übersendung keine mühe machen will so kan ich dergleichen Sachen künfftig gantz füglich von Leipzig kommen lassen.

Ich verharre mit vieler Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 27. *Mart. st. n.*
1749.

R 850 Reply to n° 135
Moscow, March (16th) 27th, 1749
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 131–132r
Address (fol. 132v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin"
Partial copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 58v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 490–491; *Euler-Goldbach* (1965), p. 308–309

137
Goldbach to Euler
[Moscow], (March 21st) April 1st, 1749

P. S. Nachdem ich ohngefehr die *curvam generatricem* abermal betrachtet, so habe befunden daß bey der von E. HochEdelgeb. mir übersandten *Figur* nichts *essentielle*s zu erinnern gewesen,[1] welches bey zeiten, um Deroselben keine vergebliche mühe zu machen, melden wollen, wobey nur noch dieses anmercke, daß von der mit Bleystifft gezeichneten *curva exteriore* (welche man *trigibberam* nennen könnte) *cuius omnes normales curvam secantes aequales sunt*, die *curva normales omnes in duas partes aequales dividens*, wie die innere *Figur* anzeiget, *tricuspidalis* ist.

Die *aequatio* $4n+5 = 4\square + 4\square + 4\boxdot + \boxdot$ (allwo $\square$ ein *quadratum par*, $\boxdot$ ein *quadratum impar* bedeutet) ist zwar allezeit möglich, man kan aber für $\boxdot$ so eines von den 4 *quadratis* ist, nicht ein jedes *pro lubitu* annehmen, wie in der *aequatione* $4\boxdot + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8n+7$ geschiehet, allwo vor eines von diesen 4 *quadratis* ein jedes *quadratum* $< 8n+7$ genommen werden kan.

den 1. *April.* 1749.

R 851 Postscript to n° 136
[Moscow], (March 21st) April 1st, 1749
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 133r
Copy, 1 p. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 59r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 491–492; *Euler-Goldbach* (1965), p. 309

138
Euler to Goldbach
Berlin, April 12th, 1749

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Erst vor etlichen Tagen hat H. Spener die von Ewr. Hochwohlgeb. verlangten Bücher von hier über Lübek abgeschickt,[1] welche allso bald in *S.t Petersbourg* eintreffen werden.

Nunmehro habe ich endlich einen bündigen Beweiß gefunden daß ein jeglicher *numerus primus* von dieser *Form* $4n+1$ eine *summa duorum quadratorum* ist.[2] Es sey $\boxed{2}$ das Zeichen der Zahlen, welche *summae duorum quadratorum* sind;[3] so sind meine Sätze folgende:

I. *Si* $a = \boxed{2}$ *et* $b = \boxed{2}$ *erit etiam* $ab = \boxed{2}$, wovon der Beweiß leicht.

II. *Si* $ab = \boxed{2}$ *et* $a = \boxed{2}$ *erit etiam* $b = \boxed{2}$; hievon ist der Beweiß schon schwehrer, und erfordert einige Sätze.

III. *Summa duorum quadratorum* $aa+bb$, *ubi* a *et* b *communem divisorem non habeant, nullos alios admittit divisores, nisi qui ipsi sint* $\boxed{2}$.

IV. *Proposito numero primo* $4n+1$, *per eum semper* $a^{4n}-1$ *erit divisibilis nisi ipse numerus* a *sit per* $4n+1$ *divisibilis*: den Beweiß hievon habe in den *Comment*[*ariis*] *Petr*[*opolitanis*] gegeben.[4]

V. Da $a^{4n}-1 = \left(a^{2n}+1\right)\left(a^{2n}-1\right)$ so ist allso entweder $a^{2n}+1$ oder $a^{2n}-1$ *per* $4n+1$ theilbar: könnte nun ein einiger Fall angezeigt werden, da nicht $a^{2n}-1$ sondern $a^{2n}+1$ durch $4n+1$ *divisibel* wäre, weil $a^{2n}+1 = \boxed{2}$, so wäre *per n.o* III bewiesen daß $4n+1$ eine *summa* $2\,\square$ seyn muß.

VI. *Theor*[*ema*]: *Omnis numerus primus formae* $4n+1$ *est summa duorum quadratorum.*

Dem[*onstratio*]: *Si* $4n+1$ *non esset* $\boxed{2}$, *quia* $a^{4n}-1$ *vel etiam* $a^{4n}-b^{4n}$ *per* $4n+1$ *est divisib*[*ile*] *(dummodo neque a neque b sit per* $4n+1$ *divisib*[*ile)*] *nunquam* $a^{2n}+b^{2n}$ *sed semper* $a^{2n}-b^{2n}$ *per* $4n+1$ *esset divisibile: forent ergo sequentes numeri omnes* $2^{2n}-1$*;* $3^{2n}-2^{2n}$*;* $4^{2n}-3^{2n}$*;* $5^{2n}-4^{2n}$*; etc. (quamdiu radices sunt minores quam* $4n+1$*) per* $4n+1$ *divisibiles. Hoc est hujus progressionis*

$$1,\ 2^{2n},\ 3^{2n},\ 4^{2n},\ 5^{2n},\ \ldots,\ (4n)^{2n}$$

differentiae forent per $4n+1$ *divisibiles. Forent ergo quoque differentiae secundae, et tertiae, et quartae et tandem differentiae ordinis* $2n$ *quae sunt constantes, per* $4n+1$ *divisibiles. At ex doctrina differentiarum notum est, differentias ordinis* $2n$*, quae sunt constantes, esse* $= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots 2n$*, qui numerus cum non sit divisibilis per numerum primum* $4n+1$*, sequitur non omnes differentias* $2^{2n}-1$*,* $3^{2n}-2^{2n}$*,* $4^{2n}-3^{2n}$*, etc. per* $4n+1$ *esse divisibiles; dabitur ergo quaedam differentia* $a^{2n}-b^{2n}$*, quae non erit per* $4n+1$ *divisibilis, quare cum* $a^{4n}-b^{4n} = \left(a^{2n}-b^{2n}\right)\left(a^{2n}+b^{2n}\right)$ *semper sit per* $4n+1$ *divisibilis (in serie enim superiori, cujus differentias sum contemplatus, termini tantum usque ad* $(2n+1)^{2n}$ *continuantur, ita ut sit a et* $b < 2n+1$*, ideoque neque a neque b per se sit per* $4n+1$ *divisib*[*ilis*]*, qui casus sunt excepti), necesse est ut hoc casu factor* $a^{2n}+b^{2n}$ *sit per* $4n+1$*divisibilis; qui cum sit* $\boxed{2}$*, ejus quoque divisorem* $4n+1$ *summam* $2\,\square$ *esse oportet. Q.* [*E. D.*]

Daß eine jede Zahl eine *Summa* 4 vel *pauciorum quadratorum* sey, kan ich bey nahe beweisen, es fehlt mir nehmlich nur noch an einer *Proposition* welche dem ersten Ansehen nach keine Schwierigkeit zu haben scheint.[5]

Dieses Zeichen $\boxed{4}$ bedeute eine jegliche Zahl, welche eine *Summ* von 4 oder weniger *Quadratis* ist; so sind meine Sätze folgende:

I. *Si* $a=\boxed{4}$ *et* $b=\boxed{4}$*, erit quoque* $ab=\boxed{4}$. Hievon ist der Beweiß bündig, dann es sey $a=pp+qq+rr+ss$ und $b=xx+yy+zz+vv$ so wird[6]

$$\begin{aligned} ab = \quad & (px+qy+rz+sv)^2+(py-qx\pm rv\mp sz)^2 \\ & +(pz\mp qv-rx\pm sy)^2+(pv\pm qz\mp ry-sx)^2 \quad = \boxed{4}. \end{aligned}$$

II. *Si* $ab=\boxed{4}$ *et* $a=\boxed{4}$ *erit etiam* $b=\boxed{4}$; dieses ist der Satz, worauf die gantze Sach beruhet, und den ich noch nicht beweisen kan.[7]

III. *Coroll*[*arium*]: (Dieses *Signum* $\neq$ soll nach Ewr. Hochwohlgeb. *negationem aequalitatis* bedeuten). *Si ergo* $ab=\boxed{4}$ *et* $a\neq\boxed{4}$ *tum etiam* $b\neq\boxed{4}$*: si enim esset* $b=\boxed{4}$ *per* II *foret quoque* $a=\boxed{4}$ *contra hypoth*[*esin*].

IV. *Si omnes numeri primi essent formae* $\boxed{4}$*, tunc omnes omnino numeri in hac forma* $\boxed{4}$ *continerentur. Manifestum est ex n.º* I*, unde demonstratio propositi ad numeros tantum primos revocatur.*

V. *Proposito numero primo quocunque p semper datur numerus formae* $aa+bb+cc+dd$ *per p divisibilis, ita ut nullus numerorum a, b, c, d, seorsim per p sit divisibilis.* Ich kan nehmlich beweisen daß es allzeit solche Zahlen $aa+bb+cc+dd$ und das unendlich viel gibt, obschon ich *in genere* keine davon anzuzeigen vermögend bin. Der Beweiß davon ist ins besondere merkwürdig, aber etwas weitläuffig, und kan auf Belieben den Inhalt eines gantzen Briefs inskünftige abgeben.[8]

VI. *Si* $aa+bb+cc+dd$ *per* p *est divisibil[is] quantumvis numeri* a, b, c, d *sint magni semper exhiberi potest similis forma* $xx+yy+zz+vv$ *per* p *divisibilis ita ut singuli numeri* x, y, z, v *semisse ipsius* p *non sint majores.*

Dem[onstratio]: Erit enim $a=\alpha p\pm x$, $b=\beta p\pm y$, $c=\gamma p\pm z$, $d=\delta p\pm v$ *atque* x, y, z, v *erunt numeri non majores quam* $\frac{1}{2}p$. *Cum igitur sit*

$$aa+bb+cc+dd=(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)\,pp\pm 2p\,(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta v)+xx+yy+zz+vv,$$

haecque forma per p *divisibilis existat, ob duo priora membra jam sponte per* p *divisibilia, necesse est ut ultimum membrum* $xx+yy+zz+vv$ *quoque per* p *sit divisibile.*

VII. *Si* p *est numerus primus ideoque impar, erunt singuli numeri* x, y, z, v *minores quam* $\frac{1}{2}p$, *ideoque* $xx+yy+zz+vv<4\cdot\frac{1}{4}\,pp<$[!] pp.

VIII. *Si* p *est numerus primus, certe erit summa* 4 *quadratorum vel pauciorum.*

Dem[onstratio]. Per n.º VI *datur numerus* $aa+bb+cc+dd$ *per* p *divisibilis, ac per n.º* VII *dabitur etiam numerus* $xx+yy+zz+vv$ *per* p *divisibilis, ita ut sit* $xx+yy+zz+vv<pp$. *Quodsi jam darentur numeri* $\neq \boxed{4}$, *existeret horum numerorum minimus, qui sit* $=p$, *ita ut sit* p *minimus eorum numerorum qui in quatuor quadrata sunt irresolubiles (hic semper de numeris integris est sermo). Sit igitur* $xx+yy+zz+vv=\boxed{4}=pq$, *et quia per hyp[othesin]* $p\neq\boxed{4}$ *foret quoque* $q\neq\boxed{4}$; *at* $pq<pp$, *ideoque* $q<p$, *ac propterea haberetur numerus* q *minor quam* p *qui esset* $\neq\boxed{4}$, *contra hypothesin. Nullus ergo datur numerus minimus in quatuor quadrata irresolubilis, ideoque nullus plane datur numerus* $\neq\boxed{4}$; *ac per consequens omnis numerus* $p=\boxed{4}$.

Weil ich nicht zweifle, daß diese *Demonstrationen* Ewr. Hochwohlgeb. nicht gefallen sollten, so bitte, dieselben Dero Aufmerksamkeit zu würdigen.

In meinen Umständen ist seit der Zeit nichts veränderliches vorgefallen, als daß ich dieser Tagen in einer *Lotterie* 600 Rthl. gewonnen, welches allso eben so gut ist, als wann ich dieses Jahr einen Pariser Preiß gewonnen hätte.[9]

Nächst gehorsamster Empfehlung meiner und aller meinigen habe die Ehre mit dem schuldigsten *Respect* zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 12ten *April*
1749.

R 852 Reply to nº 134
Berlin, April 12th, 1749
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 244rv, 246rv (fol. 245 contains the figure that belongs with Euler's previous letter: cf. nº 135, note 3)
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 493–497; *Euler-Goldbach* (1965), p. 310–311

139
Euler to Goldbach
Berlin, April 15th, 1749

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

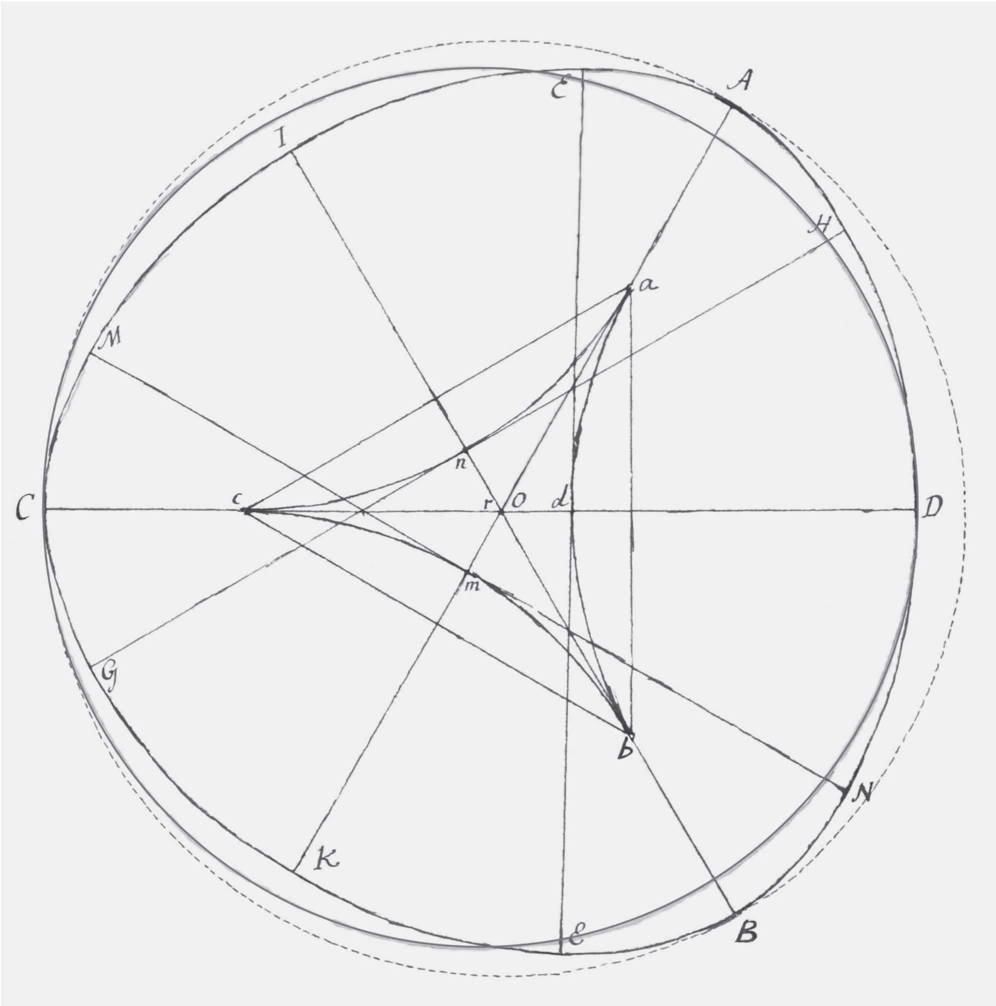
Kaum hatte ich mit der vorigen Post meinen letsten Brief fortgeschicket, als ich Ewr. Hochwohlgeb. geehrteste Zuschrifft vom 27^{ten} *Mart.* erhielt,[1] wovon ich so gleich das Zettelein dem H. Spener abgegeben[2] welcher nicht ermangeln wird, die verlangten Bücher mit ehestem wegzuschicken. Vorgestern ist meine Frau mit 2 Töchtern auf einmal niedergekommen[3] und befindet sich Gott sey Dank sammt den Kindern wohlauf.

Hiebey habe die Ehre meine *Figur* von den *Curvis catacausticis* wiedrum zurükzusenden,[4] und weil dieselbe nicht *accurat* genug gerathen indem freylich die Bögen AE und BE wie Ewr. Hochwohlgeb. angemerkt, gleich seyn sollten so füge noch eine andere *Figur* hiezu, welche ich mit mehrerem Fleiß aufgezeichnet.

In derselben ist wie in der vorigen die *Curva tricuspidata abc aequilatera*, und die drey *Partes adb*, *bmc*, *cna*, unter sich *aequales et similes.* Diese *Curva* hat allso ein *Centrum* in O welches das *Centrum circuli triangulo abc circumscripti* ist. Dieses *Punct* O ist aber nicht das Mittelpunkt der Linie CD welches Ewr. Hochwohlgeb. mit dem Buchstaben r andeuten wollen. Dann aus der Natur der *Evolution* ist cD der Faden, welcher vorher um den Bogen cna gelegen und biß in A ausgedehnt gewesen, folglich ist $cD = arc.\, cna + Aa = arc.\, cna + Cc$ (*ob* $Cc = Aa = Bb$); und allso $cD + Cc = CD = arc.\, cna + 2Cc$. Wann nun das Punkt r in der Mitte der Linie CD genommen wird, so ist $Cr = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\, arc.\, cna + Cc$, und dahero $cr = Cr - Cc = \frac{1}{2}\, arc.\, cna = cn$. Nun aber ist in der *Figur* cO grösser als der Bogen cn, und allso $cO > cr$ (ich habe nehmlich die *Puncta* d, m, n in der Mitte der Bogen ab, ac, bc angenommen). Hernach sind freylich die Linien OI und OK nicht nur einander gleich, sondern machen auch mit OC gleiche Winkel. Dann es ist $OI = OK = OD$; allein weil das *Punct* O nicht in die Mitte der Linie CD fällt, so sind auch diese drey Linien OI, OK, OD nicht so groß, als CO oder AO und BO. Dieses ist auch aus der Auswicklung offenbar, da der anfänglich gelegte Faden $bmcC$ in bOI nach der graden Linie ausgedehnt wird; allso ist $bI = bmc + Cc$, und $OI = bmc + Cc - bO$; nun aber ist $Cc = OC - cO$ und daher $OI = bmc + OC - cO - bO$, oder weil $bO = cO$, so ist

$$OI = OC - 2cO + bmc = OC - 2\,(cO - cm)\,,$$

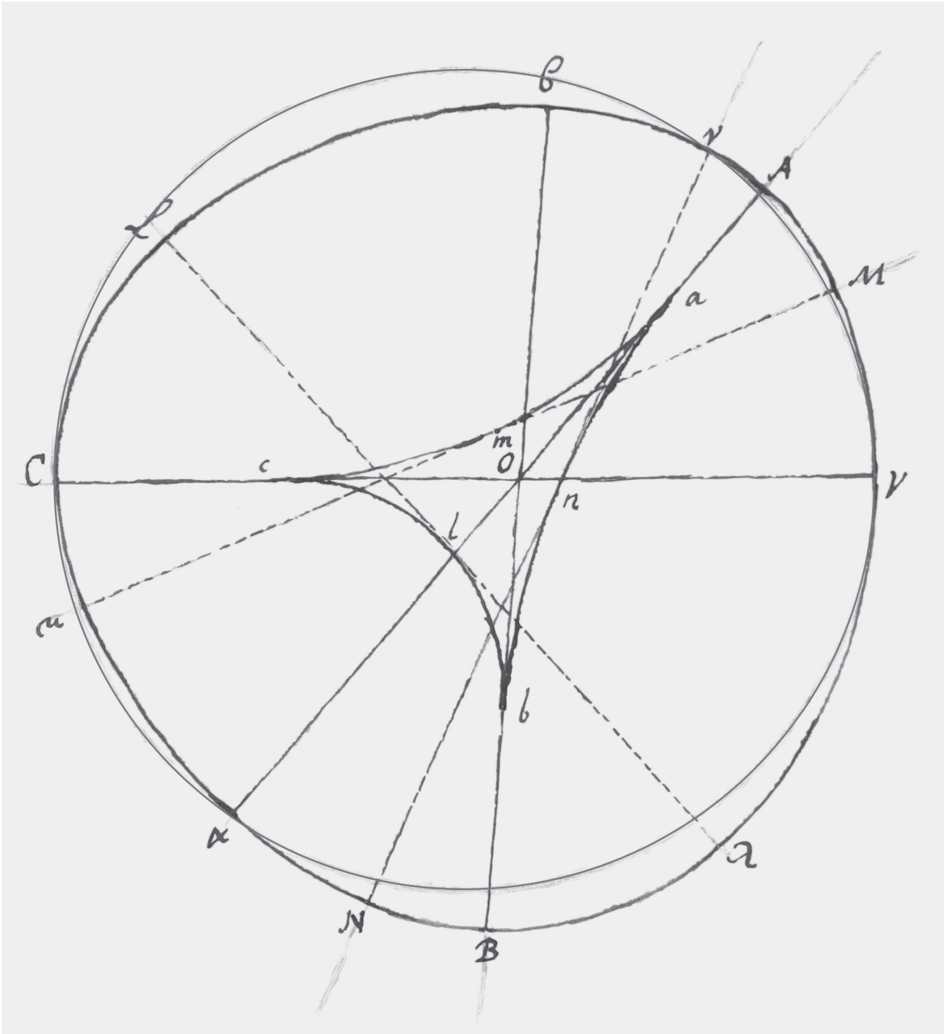
und da $cO > cm$, so ist $OI < OC$. Wann daher aus dem *Centro* O mit dem *Radio* $OC = OA = OB$ ein *Circul* beschrieben wird, so berührt derselbe die *curvam descriptam* in den drey Punkten C, A, B, und diese *Curva* hat allso drey Bückel in A, B, C und drey Tiefen I, D, K, kan allso *trigibba* genannt werden. In der vorigen *Figur* war der *Circul* aus dem *centro* r beschrieben, welchen hier gleichfalls mit Bleystifft vorstelle, woraus gantz klar zu sehen, wie dieser Zirkul die *curvam*



trigibbam in zwey Punkten berührt, und in zweyen durchschneidet; wie dann auch dieser *Circul* und die *curva trigibba ejusdem perimetri*, folglich die *area curvae* kleiner als die *area* des *Circuli* seyn muß.

Ich füge noch eine neue *Figur* hinzu, in welcher die *curva tricuspidata abc* nicht *aequilatera* sondern *scalena* ist, aus welcher auch eine *curva trigibba scalena ABC* entstehet.

Ungeacht es solche *curvas continuas* oder *aequatione exprimibiles* gibt, so kan man doch auch von freyer Hand ohne einige Regel solche *curvas tricuspidatas* aufreissen, und aus denselben *per evolutionem* die *curvas trigibbas* beschreiben, aus welchen hernach weiter auf unendlich vielerley Arten die gesuchten *curvae cataclasticae*[5] *construir*t werden können. Wie ich dann in dieser *Figur* die *curvam tricuspidatam abc* aus drey *Circul* Bögen *ab*, *ac*, *bc*, so einander berühren, *formir*t, und daraus die *trigibbam* allso gezeichnet habe, nachdem ich die *Tangentes ad cuspides a*, *b*, *c*, und *puncta laterum media l*, *m*, *n* gezogen, und *aA pro arbitrio*



angenommen, so wird $mM = ma + aA$; $c\gamma = cm + mM$; $l\lambda = c\gamma - cl$; $bB = l\lambda - lb$; $nN = nb + bB$ *etc.* biß man herumkommt.[6]

Ich bin neulich auf diese Betrachtung gefallen, ob es nicht möglich sey zwey Zahlen x und y zu finden, so daß $xy\,(x+y)$ einer gegebenen Zahl a gleich sey, oder *proposito numero a invenire duos numeros rationales x et y* (*sive integros sive fractos*) *ut sit* $xy\,(x+y) = a$. Solches ist immer möglich, so offt die Zahl a in dieser *Form* $pq\left(pm^3 \pm qn^3\right)$ enthalten ist; ich glaube aber daß in dieser *Form* bey weitem nicht alle Zahlen enthalten sind: und allso das *problema* öffters unmöglich ist, welches zu geschehen scheint, wann $a = 1$, oder $a = 3$, *etc.*[7]

Wann aber dieses *Problema proponir*t wird: *Proposito numero a invenire tres numeros rationales x, y, z, ut sit* $xyz\,(x+y+z) = a$, so ist das *Problema* immer möglich, und kan so gar *in genere* die *solution* angegeben werden, welche ich endlich nach vieler angewandter Mühe herausgebracht.[8] Nehmlich man setze (*sumendo pro s et t numeros quoscunque pro lubitu*):

$$\begin{aligned}
x &= \frac{6ast^3\left(at^4-2s^4\right)^2}{\left(4at^4+s^4\right)\left(2aat^8+10as^4t^4-s^8\right)},\\
y &= \frac{3s^5\left(4at^4+s^4\right)^2}{2t\left(at^4-2s^4\right)\left(2aat^8+10as^4t^4-s^8\right)},\\
z &= \frac{2\left(2aat^8+10as^4t^4-s^8\right)}{3s^3t\left(4at^4+s^4\right)},
\end{aligned}$$

so wird

$$x+y+z=\frac{2aat^8+10as^4t^4-s^8}{6s^3t\left(at^4-2s^4\right)},$$

und hieraus bekommt man

$$xyz\,(x+y+z)=a.$$

Als es sey $a=1$, und man nehme $t=2$, $s=1$, so wird:

$$x=\frac{48\cdot 14^2}{65\cdot 671},\quad y=\frac{3\cdot 65^2}{56\cdot 671},\quad z=\frac{2\cdot 671}{6\cdot 65};$$

daher

$$x+y=\frac{1\,350\,723}{56\cdot 65\cdot 671}=\frac{3\cdot 671^2}{56\cdot 65\cdot 671}=\frac{3\cdot 671}{56\cdot 65},$$

und

$$x+y+z=\frac{671}{3\cdot 56},$$

folglich

$$xyz\,(x+y+z)=\frac{48\cdot 14^2}{65\cdot 671}\cdot\frac{3\cdot 65^2}{56\cdot 671}\cdot\frac{671}{3\cdot 65}\cdot\frac{671}{3\cdot 56}=1.$$

Nächst gehorsamster Empfehlung meiner und der meinigen, habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 15 *April.* 1749.

R 853 Reply to n° 136
Berlin, April 15th, 1749
Original, 4 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 247–250v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 498–501; *Euler-Goldbach* (1965), p. 312–314

140
Goldbach to Euler
Moscow, June (5th) 16th, 1749

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*

Aus Eurer Hochedelgebohrnen beyden letzteren Schreiben habe ich mit vielem Vergnügen ersehen daß Dero *Familie* so wohl als Dero *revenu*en bald auf einander vermehret worden,[1] wozu nicht weniger Eurer Hochedelgeb. als der Frau *Professor*in von hertzen *gratuli*re; vor die *communication* von Dero *theorematibus* in dem Briefe vom 12. *Apr.* sage ich schuldigsten Danck,[2] und daß an der mir übersandten *Figur* nichts auszusetzen gewesen, hatte ich schon in meinem vorigen *P. S.* welches ohne Zweiffel angekommen seyn wird, erkannt.[3]

Ich glaube[4] es werde Eurer Hochedelg. auch nicht viele Mühe kosten die *curvam omnes verticales bisecantem* zu beschreiben *in casu* da die *curva tricuspidalis*[5] so zum grunde geleget wird aus lauter *arcubus circuli* bestehet und es scheinet daß diese *curva verticales bisecans* seltsame *proprietates* haben wird.

Was die *resolutionem cuiusvis numeri in quatuor quadratos* betrifft so sehe ich gar wohl ein daß alles, wie Ew. Hochedelg. angemerket auf der *demonstration* des andern Satzes beruhet:[6] *Si ab est* $\boxed{4}$ *et* $a = \boxed{4}$ *erit etiam* $b = \boxed{4}$. Eine gleiche bewandniß hat es mit der *demonstratione huius propositionis*: *Si summa quatuor quadratorum in numeris fractis sit = numero integro, erit idem numerus integer = quatuor quadratis integris*; allein die *demonstrationem huius propositionis*: *Si numerus aliquis est summa quatuor quadratorum imparium, idem numerus est summa quatuor quadratorum parium* oder *datis quatuor quadratis imparibus* $= 8m + 4$, *dantur etiam quatuor quadrata numeri* $2m + 1$, meyne ich *in potestate* zu haben.

Wann man aber ein Mittel finden könnte die *summam quatuor quorumcunque quadratorum* $A^2 + B^2 + C^2 + D^2$ in die 4 folgenden *quadrata* zu *resolvi*ren $a^2 + b^2 + \dfrac{\left(k^2 - b^2\right)^2}{4} + d^2$, wo doch auch *quatuor quantitates indeterminatae* sind, so hätte man zugleich erwiesen daß eine jede zahl $= \boxed{4}$, denn die letztern 4 *quadrata* sind so beschaffen daß ihre *summa unitate aucta* wieder eine *summa* 4 *quadratorum* wird, oder: diese *quinque quadrata*[7] $4a^2 + 4b^2 + \left(f^2 + 2bf\right)^2 + 4d^2 + 4$ sind allezeit = *quatuor quadratis.*

Ob[8] E. Hochedelg. das *praemium* bey der Frage von der ursache der *perturbationum in motibus planetarum* erhalten haben,[9] ist mir entweder nicht bekannt worden oder ich habe es vergessen, und da ich schlüsse daß Sie auch um den Preiß über die Frage von der *direction* der *Courans &c.* werden *competi*ret haben,[10] so wünsche ich daß Dero *Piece* durch einen kleinen Zusatz von <u>vûes</u>, künfftiges Jahr *victorieuse* werden möge, Eurer Hochedelgebohrnen

ergebenster Diener *Goldbach.*

Moscau den 16. *Jun. st. n.* 1749.

P. S. Wann das signum $\boxed{4}$ eine *summam* entweder von 4 oder von wenigern *quadratis*, und $\boxed{4}$ eine *summam* nicht von wenigern als 4 *quadratis* bedeutet, so kan gar leicht *demonstri*ret werden *omnem numerum huius formae*: $8m+7$ *esse* $\boxed{4}$; wann aber zugleich nachgegeben wird[11] daß alle *numeri* $\boxed{4}$ in dieser *formula* begriffen sind: $4^{e-1}\,(8m+7)$ *ubi e sit numerus integer affirmativus quicunque*, so kan *demonstri*ret werden *numerum quemcunque esse* $\boxed{4}$.

R 854 Reply to n° 138 and n° 139
Moscow, June (5th) 16th, 1749
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 135–136r
Partial copy, 2 pp. – RGADA, f. 181, n. 1415, č. IV, fol. 59v–60r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 502–504; *Euler-Goldbach* (1965), p. 314–315

141
Euler to Goldbach
Berlin, July 26th, 1749

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Für Ewr. Hochwohlgeb. gütige *Gratulation* zu Vermehrung meiner *Famille*[1] statte allen gehorsamsten Dank ab, und nehme die Freyheit, dieselbe ferner zu Dero Wohlgewogenheit zu *recommendi*ren. Über die *Pariser* Frage von den *Courans* habe ich nicht gearbeitet,[2] und vernommen, daß nur eine einige Schrifft darüber soll eingelauffen seyn; ich zweifle auch sehr, ob ich künftiges Jahr etwas tüchtiges darinn hervorzubringen im Stande seyn werde. Auf die wiederhohlte Frage aber vom *Saturno* habe ich schon eine neue Abhandlung übersandt: worüber auf künftige Ostern das Urtheil gefället werden soll.[3]

Ewr. Hochwohlgeb. *Theorema*, daß wann $8m+4$ eine *summa quatuor quadratorum imparium* ist, eben diese Zahl $8m+4$ auch eine *summa quatuor quadratorum parium* seyn müsse, kan ich auch auf folgende Art *demonstri*ren:

Es sey

$$8m+4 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2 + (2d+1)^2\,;$$

so wird (wann man durch 2 *dividir*t, da $\dfrac{(2p+1)^2+(2q+1)^2}{2} = (p+q+1)^2 + (p-q)^2$):

$$4m+2 = (a+b+1)^2 + (a-b)^2 + (c+d+1)^2 + (c-d)^2$$

allso $4m+2 = 4\,\square$. Da aber $4m+2$ ein *numerus impariter par* ist, so müssen von diesen 4 *quadratis* zwey *paria* und 2 *imparia* seyn; allso wird seyn

$$4m+2 = (2p+1)^2 + (2q+1)^2 + 4rr + 4ss,$$

dahero

$$2m + 1 = (p + q + 1)^2 + (p - q)^2 + (r + s)^2 + (r - s)^2$$

folglich

$$8m + 4 = 4\,(p + q + 1)^2 + 4\,(p - q)^2 + 4\,(r + s)^2 + 4\,(r - s)^2 \,.$$

Q. E. D.

Hieraus folget, daß wann $2A$ eine *summa* 4 *quadratorum* ist, auch A eine *summa* $4\,\square$ *in integris* sey, und *generalius*: *Si* $2^n A = 4\,\square$, *tum etiam* A *erit* $= 4\,\square$ *in integris*; oder *si in fractis habetur* $A = \dfrac{aa + bb + cc + dd}{2^n}$ *tum etiam numerus* A *in integris in quatuor quadrata resolvi poterit.*

Dieses ist nun schon ein Stück von dem allgemeinen *Theoremate*: *Si summa* $4\,\square$ *fractorum aequatur numero integro* A, *tum etiam hic numerus erit in integris summa quatuor quadratorum*; oder von diesem, worauf ich meine gantze vorige *Demonstration* gegründet: Wann $mA = 4\,\square$ und $m = 4\,\square$ *tum etiam erit* $A = 4\,\square$. Von diesem *Theoremate* ist allso schon dieser *Casus* bewiesen: *Si* $2A = 4\,\square$ *tum etiam* $A = 4\,\square$, oder *si* $2^n A = 4\,\square$, *tum quoque* $A = 4\,\square$. Ich kan aber auch noch einige andere Fälle beweisen, als:

Th[*eorema*]: *Si* $3A = \boxed{4}$ (ich habe im vorigen vergessen dieses Zeichen $\boxed{4}$ um *summam quatuor quadratorum integrorum* anzuzeigen)[4] *erit etiam* $A = \boxed{4}$.

Dem[*onstratio*]: *Quia omne quadratum est vel formae* $3n$ *vel* $3n + 1$, so sind entweder alle 4 *quadrata per* 3 *divisibilia*, oder nur eines; im ersteren Fall wird

$$3A = 9aa + 9bb + 9cc + 9dd,$$

und allso

$$A = 3aa + 3bb + 3cc + 3dd,$$

das ist

$$A = (a + b + c)^2 + (a - b + d)^2 + (a - c - d)^2 + (b - c + d)^2 \,.$$

Im andern Fall ist

$$3A = (3a + 1)^2 + (3b + 1)^2 + (3c + 1)^2 + 9dd,$$

und folglich

$$A = 1 + 2a + 2b + 2c + 3aa + 3bb + 3cc + 3dd;$$

dieses aber ist:

$$A = (1 + a + b + c)^2 + (a - b + d)^2 + (a - c - d)^2 + (b - c + d)^2 \,,$$

allso wiedrum $A = \boxed{4}$.

Th[*eorema*]: *Si* $5A = \boxed{4}$ *erit quoque* $A = \boxed{4}$.

Dem[onstratio]: *Erit enim vel*

$$\text{I.}\quad 5A = 25aa + 25bb + 25cc + 25dd;$$

vel

$$\text{II.}\quad 5A = (5a+1)^2 + (5b+2)^2 + 25cc\ [+25dd;]$$

vel

$$\text{III.}\quad 5A = (5a+1)^2 + (5b+2)^2 + (5c+1)^2 + (5d+2)^2\,.$$

Casu I. *est*

$$\begin{aligned} A &= 5aa + 5bb + 5cc + 5dd \\ &= (2a+b)^2 + (a-2b)^2 + (2c+d)^2 + (c-2d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

Casu II. *est*

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 5cc + 5dd \\ &= (1+a+2b)^2 + (2a-b)^2 + (2c+d)^2 + (c-2d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

Casu III. *est*

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2a + 4b + 5aa + 5bb + 1 + 2c + 4d + 5cc + 5dd \\ &= (1+a+2b)^2 + (2a-b)^2 + (1+c+2d)^2 + (2c-d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

Hier ist zu merken daß a, b, c, d, so wohl *numeros affirmativos als negativos* bedeuten, dahero nicht nöthig habe um der Allgemeinheit willen $5a \pm 1$ für $5a+1$ zu schre[iben.]

Wann man nun diese *Theoremata* zusammen nimmt, so folget daraus dieses:[5] *Si* $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma A = \boxed{4}$ *tum erit quoque* $A = \boxed{4}$.

Man kan auch noch weiter gehen, als:

Theor[ema]: *Si* $7A = \boxed{4}$ *erit quoque* $A = \boxed{4}$.

Dem[onstratio]: *Cum omnis* $\square$ *sit vel formae* $7m$, *vel* $7m+1$, *vel* $7m+2$, *vel* $7m+4$, *erit vel*

$$\text{I.}\quad 7A = 49aa + 49bb + 49cc + 49dd,$$

ergo

$$A = 7\,(aa + bb + cc + dd) = \boxed{4};$$

nam $\boxed{4} \cdot \boxed{4} = \boxed{4}$; *vel*

$$\text{II.}\quad 7A = (1+7a)^2 + (1+7b)^2 + (1+7c)^2 + (2+7d)^2$$

vel

$$\text{III.}\quad 7A = (1+7a)^2 + (2+7b)^2 + (3+7c)^2 + 49dd$$

vel

$$\text{IV.}\quad 7A = (2+7a)^2 + (2+7b)^2 + (2+7c)^2 + (3+7d)^2$$

vel

$$\text{V.} \quad 7A = (1+7a)^2 + (3+7b)^2 + (3+7c)^2 + (3+7d)^2 .$$

Casu II. *erit*:

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2a + 2b + 2c + 4d + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd \\ &= (1+a+b+c+2d)^2 + (a-b-2c+d)^2 + (a+2b-c-d)^2 \\ &\quad + (2a-b+c-d)^2 . \end{aligned}$$

Casu III.

$$A = 2 + 2a + 4b + 6c + 7aa + 7bb + 7cc + 7dd =$$

(wovon die *Resolution* noch zu suchen)[6]

etc.

Wann der *numerus* A allso in 4 *quadrata* könnte *resolvir*t werden, $A = aa + bb + \frac{1}{4}(kk - bb)^2 + dd$, so würde freylich, wie Ewr. Hochwohlgeb. bemerket, $A + 1 = \boxed{4}$, dann

$$A + 1 = \left(\tfrac{1}{2}(kk - bb) - 1\right)^2 + kk + aa + dd.$$

Das im *Postscripto* gemeldte *Theorema* ist sehr artig; dann wann alle *numeri* $\underset{\cdot}{\boxed{4}}$ (welche nicht aus weniger als 4 *quadratis* bestehen) in dieser *Form* $4^{e-1}(8m+7)$ enthalten wären, so finde ich auch, daß daraus folgte *omnem numerum esse* $= \boxed{4}$. Mein Beweiß davon ist dieser:

Si omnes numeri $\underset{\cdot}{\boxed{4}}$ *in hac forma* $4^{e-1}(8m+7)$ *continentur, tum omnes numeri in hac forma* $4^{e-1}(8m+7)$ *non contenti essent* $= \boxed{4}$: *foret ergo* $8m+1 = \boxed{4}$, *item* $8m+3 = \boxed{4}$, *item* $8m+5 = \boxed{4}$. *At si* $8m+5 = \boxed{4}$, *erit quoque* $3(8m+5) = 8n+7 = \boxed{4}$. Oder allso: *Quia* $3(8n+7) = 8m+5$, *erit* $3(8n+7) = \boxed{4}$ *ideoque etiam* $8n+7 = \boxed{4}$.

Hieraus folget ferner, daß wann man nur beweisen könnte, *omnes numeros formae* $8m+1$ *esse* $= \boxed{4}$, *tum omnes plane numeros futuros esse* $= \boxed{4}$. *Cum enim sit* $3(8n+3) = 8m+1$, *erit* $3(8n+3) = \boxed{4}$ *ergo et* $8n+3 = \boxed{4}$. *Porro ob* $5(8n+5) = 8m+1$ *erit* $5(8n+5) = \boxed{4}$ *ergo et* $8n+5 = \boxed{4}$; *hinc denique erit* $8n+7 = \boxed{4}$: *ergo omnes numeri impares, ac proinde etiam omnes pares essent* $= \boxed{4}$.

Beyligenden Brief habe ich dieser Tagen von dem H. *D*[*octo*]^r *Gmelin* erhalten,[7] und verbleibe mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 26$^{\text{ten}}$ *Julii*
1749

P. S. Das *Theorema* für $7A = \boxed{4}$ so ich nicht ausgeführt, wird durch folgendes *general Theorema* vollendet:

Theorema. Posito $m = aa + bb + cc + dd$*, si sit* $mA = \boxed{4}$ *erit quoque* $A = \boxed{4}$.
Dem[*onstratio*]: *Sit*

$$mA = (f + mp)^2 + (g + mq)^2 + (h + mr)^2 + (k + ms)^2$$

atque

$$ff + gg + hh + kk = (aa + bb + cc + dd)\,(xx + yy + zz + vv)$$

erit

$$\begin{aligned} f &= ax + by + cz + dv \\ g &= bx - ay - dz + cv \\ h &= cx + dy - az - bv \\ k &= dx - cy + bz - av \end{aligned}$$

fietque

$$A = xx + yy + zz + vv + 2\,(fp + gq + hr + ks) + m\,(pp + qq + rr + ss)\,,$$

at reperitur hinc

$$\begin{aligned} A = \; & (ap + bq + cr + ds + x)^2 \\ & + (aq - bp + cs - dr - y)^2 \\ & + (ar - bs - cp + dq - z)^2 \\ & + (as + br - cq - dp - v)^2 \end{aligned}$$

ergo $A = \boxed{4}$ *in integris q. e. d.*

Ita si $7A = (2 + 7p)^2 + (2 + 7q)^2 + (2 + 7r)^2 + (3 + 7s)^2$*, erit* $a = 2$*,* $b = 1$*,* $c = 1$*,* $d = 1$*;* $xx + yy + zz + vv = 3$*,* $x = 1$*,* $y = 1$*,* $z = 1$ *et* $v = 0$*, unde* $f = 4$*,* $g = -2$*,* $h = 0$*,* $k = 1$*. Ergo si*

$$7A = (4 + 7p)^2 + (7q - 2)^2 + (7r + 0)^2 + (7s + 1)^2$$

erit

$$\begin{aligned} A = \; & (2p + q + r + s + 1)^2 \\ & + (2q - p + s - r - 1)^2 \\ & + (2r - s - p + q - 1)^2 \\ & + (2s + r - q - p)^2\,. \end{aligned}$$

Neulich ward in den Braunschweiger Anzeigen diese Frage aufgegeben: Wie viel ein *Capital* von 1000 Rthl. in 640 Jahren zu 5 *pro cento*, Zins auf Zins gerechnet, betragen werde?

Weil die herauskommende Zahl sehr groß, und die Rechnung nach der ordentlichen Art auszuführen fast unmöglich ist, so ist die Auflösung gewiß nicht leicht; ich habe folgende *summ* gefunden:

36 404 192 715 744 080 Rthl. 22 g[ute] g[roschen] $11\frac{9}{10}$ *d*[*eniers*]

welche nicht um $\frac{1}{10}$ *d*[*enier*] von der Wahrheit fehlen soll.

Der Aufgeber verlangt daß man die Antwort in einer halben Stund finden soll, mich hat aber dieselbe wohl eine gantze Stund gekostet; und ich sehe nicht, wie die Arbeit verkürzet werden könnte.[8]

R 855 Reply to n° 140
Berlin, July 26th, 1749
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 257–258v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 505–510; *Euler-Goldbach* (1965), p. 315–317

142
Goldbach to Euler
Petersburg, March (13th) 24th, 1750

HochEdelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*

Es sind schon mehr als 7 Monate verflossen seit dem ich Eurer HochEdelgeb. letztes Schreiben erhalten habe, und dieses würde nicht geschehen seyn wann nicht eines Theils unterschiedene abhaltungen dazwischen gekommen wären, andern Theils aber dasjenige so ich hätte schreiben können, auch nach meinem eigenen urtheil von gar zu geringem werth gewesen wäre. Die *methode* so Ew. HochEdelg. gefunden um zu zeigen daß wann $mA = \boxed{4}$ auch $A = \boxed{4}$ sey, halte ich vor ein *inventum inventorum*,[1] und ob ich zwar geglaubet daß die *propositio*: *omnem numerum esse summam quatuor quadratorum* auf eine leichtere art würde können *demonstrir*et werden, so habe doch dergleichen *demonstration* nicht gefunden; ich lasse aber dahin gestellet seyn ob nicht einige kleine *theoremata* so mir *en passant* vorgekommen nicht hiezu dienlich seyn möchten von welchen ich Eurer Hochedelgb. einige anzeigen will:

I.

$$\beta^2 + \gamma^2 + (3\delta - \beta - \gamma)^2 = (2\delta - \beta)^2 + (2\delta - \gamma)^2 + (\delta - \beta - \gamma)^2 .$$

Diese *transmutatio trium quadratorum in tria alia* scheinet mir von ziemlichem Nutzen zu seyn, *nam inter quatuor quadrata* $a^2 + b^2 + c^2 + 4k^2$, *ubi omnes litterae denotant numeros impares semper erunt tria quadrata quorum summa radicum est divisibilis per* 3, folglich können diese 4 *quadrata* nach solcher *methode* auf viele, und vieleicht gar auf alle mögliche Arten *transformir*et werden, wie denn zum Exempel die Zahl 335 durch diese *methode* in alle *modos possibiles* verwandelt wird nemlich

$$\begin{aligned} &3^2+7^2+9^2+14^2 &&= 3^2+13^2+11^2+6^2 &&= 9^2+13^2+9^2+2^2 = \\ &15^2+7^2+5^2+6^2 &&= 15^2+1^2+3^2+10^2 &&= 15^2+9^2+5^2+2^2 = \\ &3^2+1^2+1^2+18^2 &&= 3^2+1^2+17^2+6^2 &&= 7^2+13^2+9^2+6^2, \end{aligned}$$

so daß in diesen *transmutationibus* alle *quadrata paria et imparia in quae resolvi potest numerus* 335, begriffen sind.[2] Es wäre aber schon gnug wann man ein Mittel hätte diese 4 *quadrata* $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ in nachfolgende 4 zu verwandeln $1^2+\eta^2+\theta^2+4\kappa^2$, denn so hätte man *demonstrir*et daß alle *numeri* $8n+7$ *summae quatuor quadratorum* sind; mir ist aber gleichwohl noch kein *exemple* vorgekommen da nicht die *quadrata* $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ *post primam aut secundam transmutationem in quatuor quadrata quorum unum sit unitas*, hätten verwandelt werden können, denn also findet man

$$\begin{aligned}
3^2+13^2+15^2+2^2 &= 407 &&= 1^2+9^2+15^2+10^2,\\
3^2+9^2+15^2+10^2 &= 415 &&= 1^2+5^2+17^2+10^2,\\
3^2+5^2+17^2+10^2 &= 423 &&= 1^2+5^2+19^2+6^2,\\
3^2+5^2+19^2+6^2 &= 431 &&= 1^2+3^2+15^2+14^2;
\end{aligned}$$

die folgenden 4 *quadrata* werden alsofort durch eine einige *operation*, eben wie die vorhergehende, *in quatuor quadrata quorum unum est unitas transmut*iret biß auf $3^2+3^2+21^2+2^2=463$, allwo man *per primam transmutationem* bekommt $15^2+15^2+3^2+2^2$, und aus diesen *per secundam transmutationem* $1^2+13^2+17^2+2^2$.

II.

Wie schwer es auch ist zu sagen was *datis quatuor quadratis in quae resolvi potest numerus* $2m-1$, die *quatuor quadrata* = *numero* $2m+1$ seyn werden, so haben doch die ersteren 4 *quadrata* mit den letzteren einen gantz genauen *nexum* welcher in den *tribus quadratis* = $8m+3$ gegründet ist, *datis enim his dantur simul quatuor quadrata pro* $2m-1$ *et pro* $2m+1$.

III.

Wann α, β, γ, δ *quatuor numeri impares quicunque* sind und man selbige gleich setzen kan folgenden *numeris*:

$$\alpha=2er+1,\quad \beta=b+fr,\quad \gamma=c+gr,\quad \delta=r-e^2r-e-bf-cg,$$

so daß b, c, r *numeri integri* seyn, so kan man auch *demonstrir*en *omnem numerum* $8m+4$ oder *generatim omnem numerum esse summam quatuor quadratorum*. Denn es ist

$$\begin{aligned}
&(2er+1)^2+(b+fr)^2+(c+gr)^2+\bigl(r-e^2r-e-bf-cg\bigr)^2\\
&\quad=1^2+(b-fr)^2+(c-gr)^2+\bigl(r+e^2r+e+bf+cg\bigr)^2.
\end{aligned}$$

Daß derjenige welcher das *Problema* in den *Braunschweigischen Anzeigen* aufgegeben bessere *compendia* als Ew. Hochedelg. zu dessen *Solution* haben sollte kan ich mir nicht vorstellen, und bitte mir zu melden ob der *Autor* ferner etwas davon bekannt gemacht?[3] In den *Amsterdamer frantzösischen Zeitungen* vom 5. *Aug.* 1749 war folgendes *avertissement*: *M.ʳ Quin Mackenzie Quin … a inventé à l'âge* *de* 8 *ans & il a eu l'honneur de presenter au Roi une methode par la quelle il multiplie & divise quelque nombre de figures que ce soit & en verifie le produit & le quotient en une seule ligne. Il fait cette operation en moins de trois minutes quand même il s'agiroit de multiplier* 20 *figures par* 20 *figures ou* 40 *par* 20*. Ceux qui voudront souscrire pour avoir cette methode seront tenus de donner d'abord une Guinée & une autre après que cette methode leur aura été communiquée ou à leurs Correspondans.* Nach der Zeit habe ich nichts mehr hievon gehöret.[4]

Ew. Hochedelg. haben die Güte gehabt zu denen mir schon längst übersandten Büchern Dero *Analysin Infinitorum* beyzulegen wovor ich dienstl[ich] dancke und die an den Hn Spener bezahlte 7 th., falls sie noch nicht abgegeben wären, zu empfangen bitte.[5] Ich nehme zugleich die Freyheit einen neuen Aufsatz von Büchern beyzufügen,[6] welche ich den Hn Spener ersuche bey offenem Wasser über Lübeck auf gleiche Art an Hn Köppen zu übersenden, wornechst ich mit besonderer hochachtung verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersbourg den 24. *Mart. st. n.* 1750.

R 856 Reply to n° 141
Petersburg, March (13th) 24th, 1750
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 137–138v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 511–514; *Euler-Goldbach* (1965), p. 318–319

143
Euler to Goldbach
Berlin, April 14th, 1750

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Wann ich nicht glaubte daß Ewr. Hochwohlgeb. in Übersendung meiner *Introduction* von Seiten des H. Speners einen groben Irrthum so gleich vermuthet, so würde ich über diesen Umstand gantz untröstlich seyn,[1] und nicht wissen wie ich mich wegen eines so unverschämten Verfahrens, ein Werk von meiner Arbeit zu *praesenti*ren, und zugleich die Bezahlung darfür auf den höchsten Preiß abfordern zu lassen, rechtfertigen sollte. Allein eben Ew. Hochwohlgeb. Anfrage ob ich von H. Spener die für dieses Werk angeschriebene Bezahlung erhalten, tröstet mich, und gibt mir die Versicherung daß Ewr. Hochwohlgeb. noch weit entfernet sind, mir wegen dieses groben Fehlers einige Schuld beyzumessen; und ich erkenne mich für diese gütige Anfrage Ewr. Hochwohlgeb. um so viel mehr verpflichtet, da ich sonsten nimmermehr zur Erkänntnüß dieses Irrthums gelanget seyn würde. Dann als ich vor einiger Zeit mit dem H. Spener meine Rechnung schloß, und er mir wegen einer *Parti*e ihm aus Basel verschriebener Bücher etwas Geld zurück schuldig war, so fand es sich zwar, daß er mir $7\frac{1}{2}$ Rthl. mehr auszahlen wollte, als meine Rechnung betrug; weil ich aber in meiner Rechnung sicher war, so glaubte ich ohne weiter nachzufragen, daß er zu seinem eigenen Schaden einen Fehler begangen, und ließ folglich blosser Dinge diesen Überschuß von $7\frac{1}{2}$ Rthl. ausstreichen. Allso kan ich auch dem H. Spener nicht aufbürden daß er *mala fide* gehandelt, und der gantze Fehler rühret daher daß ich ihm damals mein Buch zugeschickt um solches zu den von Ewr. Hochwohlgeb. verschriebenen Büchern beyzulegen, ohne ihm zu melden, daß ich die Freyheit nähme solches Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst zu *praesenti*ren. Weil nun derselbe durch die dritte oder 4te Hand auch einige *Exemplaria* von meinem Werk bekommen hatte und solche für den angesetzten Preiß verkaufte, so wurde eben dieser Preiß auch in Ewr. Hochwohlgeb. Rechnung angeschrieben; zugleich aber derselbe mir zu gut bemerket. Nachdem nun durch Ewr. Hochwohlgeb. Schreiben dieser Fehler entdecket worden, so hat der H. *Spener* solchen auch sogleich erkannt, und das überflüssig ausgezahlte Geld Ewr. Hochwohlgeb. zu gut geschrieben, welches auch bey der künftigen Rechnung sorgfältig abgezogen werden wird.[2] Diese meine Weitläuffigkeit, welche mir die gröste Unruhe über diese verdrüßliche Sache abgedrungen, werden Ewr. Hochwohlgeb. mir nicht übeldeuten, ungeacht ich glaube daß meine bißherige Aufführung mich von einem so häßlichen Verdacht bey Ewr. Hochwohlgeb. gäntzlich loßgesprochen haben muß: dahero ich auch nicht vermuthe daß diese Sach den geringsten Antheil an Ewr. Hochwohlgeb. so langem Stillschweigen gehabt haben mag; ich habe mir vielmehr solche Ursachen davon vorgestellt, welche mich auch abgehalten haben, Ewr. Hochwohlgeb. zuzuschreiben, ungeacht ich dazu öffters die Feder angesetzt hatte. Nunmehr aber habe ich die feste Hoffnung, daß ich hinführo das unschätzbare Vergnügen Dero Briefwechsels ununterbrochen werde geniessen können.

Vergangenen *Char*Freytag ist meine Frau gantz unvermuthet nach einer nicht gar 7 Monathlichen Schwangerschaft mit einem Söhnlein niedergekommen,[3] und hat seit der Zeit eine sehr schwehre Krankheit auszustehen gehabt, zu deren Besserung sich nun aber durch die Gnade Gottes alles anlässt, wie dann auch das Kind recht wohl zunimmt. Gleichwohl aber haben mir diese Umstände noch nicht erlaubet, Ewr. Hochwohlgeb. schöne *Theoremata* genauer in Erwägung zu ziehen; dahero ich nicht mehr davon melden kan, als daß mir dieselben von grosser Wichtigkeit zu Erfindung einer leichteren *Demonstration* des *Th*[*eorematis*] *Fermatiani* zu seyn scheinen.

In den Braunschweigischen Anzeigen ist über die gemeldte Frage, insonderheit was die Zeit der *Solution* betrifft, nichts weiter zum Vorschein gekommen.[4] Das in den *Amsterdammer* Zeitungen eingerükte *Avertissement*[5] ist mir wohl bekannt, und ich war auch sehr begierig mehr davon zu erfahren, allein seit der Zeit ist gar nichts mehr davon gehöret worden; dahero ich glaube daß solches nichts andres als eine Erfindung des Zeitungs Schreibers gewesen, wie dergleichen schon öffters zum Vorschein gekommen.

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen, wie ich mir dann nichts so sehr ausbitte als die Fortsetzung Dero gantz besonderen Neigung und Wohlgewogenheit,[6] der ich mit der allervollkommensten Hochachtung verharre

Eurer Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 14$^{\text{ten}}$ *April*
1750

R 857 Reply to n° 142
Berlin, April 14th, 1750
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 260–261v
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 319-320

144
Euler to Goldbach
Berlin, June 9th, 1750

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Nachdem H. *Spener* von Leipzig wieder zurückgekommen, so sagt er mir, daß er alle von Ewr. Hochwohlgeb. verlangte Bücher mit sich gebracht, ausser einigen *Defect*en zu alten Büchern, weswegen er doch *ordre* gestellt habe: So bald diese Bücher Dero *Ordre* gemäß gebunden seyn werden, so wird er dieselben abschicken, welches vielleicht auch schon geschehen, weil ich ihn seit mehr als 8 Tagen nicht gesehen habe; insonderheit aber habe ich ihm eingeschärfet, die in der vorigen Rechnung zu viel angesetzten 7 Rthl. bey dieser ja nicht zu vergessen.[1]

Ewr. Hochwohlgeb. *Theorema*

$$\beta^2+\gamma^2+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2$$

hat mir Anlaß gegeben folgende *Theoremata* zu finden, unter welchen dieses das erste ist:[2]

I. *Si* $a+b+c=3m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2\,.$$

II. *Si* $a+b+2c=3m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2\,.$$

III. *Si* $a + 2b + 2c = 9m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2m - a)^2 + (4m - b)^2 + (4m - c)^2 .$$

IV. *Si* $a + b + 3c = 11m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2m - a)^2 + (2m - b)^2 + (6m - c)^2 .$$

V. *Si* $a + 2b + 3c = 7m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (m - a)^2 + (2m - b)^2 + (3m - c)^2 .$$

VI. *Si* $2a + 2b + 3c = 17m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (4m - a)^2 + (4m - b)^2 + (6m - c)^2 .$$

VII. *Si* $a + 3b + 3c = 19m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2m - a)^2 + (6m - b)^2 + (6m - c)^2 .$$

VIII. *Si* $2a + 3b + 3c = 11m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2m - a)^2 + (3m - b)^2 + (3m - c)^2$$

wo zu merken daß die *radices* a, b, c so wohl *negative* als *affirmative* genommen werden können.

Solche *Theoremata* können auch für 4 *quadrata* gefunden werden als

I. *Si* $a + b + c + d = 2m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (m - a)^2 + (m - b)^2 + (m - c)^2 + (m - d)^2 .$$

II. *Si* $a + b + c + 2d = 7m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2m - a)^2 + (2m - b)^2 + (2m - c)^2 + (4m - d)^2 .$$

III. *Si* $a + b + 2c + 2d = 5m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (m - a)^2 + (m - b)^2 + (2m - c)^2 + (2m - d)^2 .$$

IV. *Si* $a + 2b + 2c + 2d = 13m$ *erit*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (2m - a)^2 + (4m - b)^2 + (4m - c)^2 + (4m - d)^2 .$$

Wann dahero $3^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon^2$ zu $1^2 + \eta^2 + \theta^2 + 4\kappa^2$ *reducirt* werden soll wo alle Buchstaben *numeros impares* bedeuten so wohl *affirm*[*ativos*] als *negat*[*ivos*], so würde nach dem II$^{\text{ten}}$ *Theoremate* kommen:

1. *Si* $3 + \beta + \gamma + 4\varepsilon = 7m$ *erit*

$$3^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon^2 = (2m - 3)^2 + (2m - \beta)^2 + (2m - \gamma)^2 + 4\,(2m - \varepsilon)^2 ,$$

wo auch m ein *numerus impar*; also müste entweder $2m-3=1$ oder $2m-\beta=1$ oder $2m-\gamma=1$. Solches geschieht nun in folgenden fällen

1. wann $m=1$ und also $\beta+\gamma+4\varepsilon=4$;
2. wann $m=2$ und also $\beta+\gamma+4\varepsilon=11$ welches unmöglich;
3. wann $\beta=2m\pm1$; und $\gamma+4\varepsilon=5m-3\mp1$.

2. *Si* $3+\beta+2\gamma+2\varepsilon=7m$ *erit*

$$3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(4m-\gamma)^2+4\,(m-\varepsilon)^2\,;$$

allso müste seyn entweder $2m-3=\pm1$ oder $2m-\beta=\pm1$ oder $4m-\gamma=\pm1$ wo m eine grade Zahl ist; allso geschieht dieses in folgenden Fällen

1. Wann $m=2$ und allso $\beta+2\gamma+2\varepsilon=11$
2. Wann $\beta=2m\pm1$ und $2\gamma+2\varepsilon=5m-3\mp1$
3. Wann $\gamma=4m\pm1$ und $\beta+2\varepsilon=-m-3\mp2$.

3. *Si* $6+\beta+\gamma+2\varepsilon=7m$ *erit*

$$3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(4m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4\,(m-\varepsilon)^2$$

wo m wieder ein *numerus par* ist.

Jedoch zweifle ich, ob durch dieses 2^{te} *Theorema* allein immer ein *quadrat* $=1$ gefunden werden könne.

Man kan auch solche *Theoremata* für 5 *quadrata* geben, als

I. *Si* $a+b+c+d+e=5m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2+(2m-e)^2\,.$$

II. *Si* $a+b+c+d+2e=4m$ *erit*

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2+(2m-e)^2$$

etc.

Wann man nun beweisen könnte, daß eines von diesen letsteren *quadratis* könnte *ad nihilum* gebracht werden, so hätte man auch, was man verlanget. Solches geht allso an wann entweder $a+b+c+d=0$ oder $3a=b+c+d+2e$.

Ewr. Hochwohlgeb. II^{tes} *Theorema* von dem *nexu inter* $2m-1=4\,\Box$ *et* $2m+1=4\,\Box$, *concessa resolutione numeri* $8n+3$ *in tria quadrata*, verstehe ich allso: *sit* $n=m-1$, *atque* $8n+3=8m-5=aa+bb+cc$, wo a, b, c, *numeri impares* sind; *erit* $8m-4=1+a^2+b^2+c^2$; *unde*

$$4m-2=\left(\frac{1+a}{2}\right)^2+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

wo zwey *radices pares* sind und 2 *impares*; folglich diese *Form* $4m-2=4pp+4qq+rr+ss$, also

$$2m-1=(p+q)^2+(p-q)^2+\left(\frac{r+s}{2}\right)^2+\left(\frac{r-s}{2}\right)^2.$$

Weil a, b, c so wohl *negative* als *affirmative* genommen werden können *sit* $2p = \dfrac{a+1}{2}$; $2q = \dfrac{b+c}{2}$ *erit*

$$2m-1 = \left(\frac{a+b+c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c+1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c-1}{4}\right)^2.$$

Hernach ist $8m+4 = 9+aa+bb+cc$; also

$$4m+2 = \left(\frac{a+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2$$

wo $\dfrac{a-3}{2}$ *et* $\dfrac{b+c}{2}$ grade, $\dfrac{a+3}{2}$, $\dfrac{b-c}{2}$ ungrade Zahlen seyn werden; allso wird

$$2m+1 = \left(\frac{a+b+c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b-c-3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a+b-c+3}{4}\right)^2 + \left(\frac{a-b+c+3}{4}\right)^2.$$

Hieraus folgert daß wann $2m-1 = pp+qq+rr+ss$, alsdann immer seyn werde

$$2m+1 = (p+1)^2 + (q+1)^2 + (r-1)^2 + (s-1)^2,$$

nehmlich zwey von den *radicibus quadratorum ipsius* $2m+1$ werden um 1 grösser seyn als zwey von den *radicibus quadratorum ipsius* $2m-1$ und zwey um 1 kleiner: woraus dieses schöne *Theorema* entspringet.

Th[*eorema*]: Wann $2m-1 = \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta$ *et* $2m+1 = a^2+b^2+c^2+d^2$ so werden von den Wurzeln a, b, c, d, zwey um 1 grösser, die anderen 2 aber um 1 kleiner seyn als die Wurzeln α, β, γ, δ. Also ist:

$$\begin{array}{rccccc}
1 & = & 0^2+ & 0^2+ & 0^2+ & 1^2 \\
3 & = & (0+1)^2+ & (0+1)^2+ & (0-1)^2+ & (1-1)^2 \\
3 & = & 0^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 1^2 \\
5 & = & (0+1)^2+ & (1+1)^2+ & (1-1)^2+ & (1-1)^2 \\
5 & = & 0^2+ & 0^2+ & 1^2+ & 2^2 \\
7 & = & (0+1)^2+ & (1+1)^2+ & (2-1)^2+ & (0-1)^2 \\
7 & = & 1^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 2^2 \\
 & & + & + & - & - \\
9 & = & 2^2+ & 2^2+ & 0^2+ & 1^2 \\
9 & = & 0^2+ & (-1)^2+ & 2^2+ & 2^2 \\
 & & - & + & + & - \\
11 & = & 0^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 3^2
\end{array}$$

Zu merken ist daß α, β, γ, δ so wohl *affirmative* als *negative* genommen werden können. Allso kan das *Theorema* allso ausgesprochen werden: *Singulae radicum* a, b, c, d, *semper unitate discrepabunt a singulis litterarum* α, β, γ, δ.

Folgendes *Theorema* scheint allso merkwürdig zu seyn:

Si $2m-1 = pp+qq+rr+ss$ *erit semper*

$$2m+1 = (p\pm 1)^2 + (q\pm 1)^2 + (r\pm 1)^2 + (s\pm 1)^2$$

dummodo signorum ambiguitas rite observetur.

{NB. Nicht eine jegliche Resolution von $2m-1$ hat diese Eigenschafft, sondern es gibt allzeit eine, so diese Eigenschafft hat.}[3]

Coroll[*arium*]: Allso ist allzeit $\pm 2p \pm 2q \pm 2r \pm 2s + 4 = 2$, oder $\pm p \pm q \pm r \pm s + 1 = 0$, das ist: Eine jegliche ungrade Zahl $2m-1$ kan allzeit in vier solche *quadrata* $pp+qq+rr+ss$ *resolvir*t werden, *ut sit* $\pm p \pm q \pm r \pm s = 1$. Dann es ist zu merken daß man auch offt solche 4 *quadrata* findet, da diese Eigenschafft nicht statt findet: als $27 = 0^2+1^2+1^2+5^2$ oder $39 = 1^2+1^2+1^2+6^2$; doch aber ist auch

$$27 = \quad 1^2+ \quad 1^2+ \quad 3^2+ \quad 4^2 \quad ubi \quad +1-1-3+4=1;$$

allso ist wann diese *signa* $+\ -\ -\ +$ verkehrt unter jene *quadrata* geschrieben werden

$$\begin{array}{rcccccl}
 & - & + & + & - & & \\
29 = & 0^2+ & 2^2+ & 4^2+ & 3^2 & ubi & +0+2-4+3=1 \\
 & - & - & + & - & & \\
31 = & 1^2+ & 1^2+ & 5^2+ & 2^2 & ubi & -1-1+5-2=1 \\
 & + & + & - & + & & \\
33 = & 2^2+ & 2^2+ & 4^2+ & 3^2 & ubi & +2-2+4-3=1 \\
 & - & + & - & + & & \\
35 = & 1^2+ & 3^2+ & 3^2+ & 4^2 & ubi & -1+3+3-4=1 \\
 & + & - & - & + & & \\
37 = & 2^2+ & 2^2+ & 2^2+ & 5^2 & ubi & +2+2+2-5=1 \\
 & - & - & - & + & & \\
39 = & 1^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 6^2; & &
\end{array}$$

von hier aus lässt sich nicht weiter gehen; dahero muß man eine andere *resolution* von 39 nehmen, welches durch die III der obigen *formul*n geschehen kan, da dann wird $a=1$; $b=-1$; $c=-1$; $d=6$; $a+b+2c+2d = 10 = 5m$, allso $m=2$ und allso

$$\begin{array}{rcccccl}
39 = & 1^2+ & 3^2+ & 5^2+ & 2^2 & ubi & 1+3-5+2=1 \\
 & - & - & + & - & & \\
41 = & 0^2+ & 2^2+ & 6^2+ & 1^2 & & \\
 & & & & & \text{oder} & 1-3+5-2, \qquad \text{da wird} \\
41 = & 0^2+ & 4^2+ & 4^2+ & 3^2; & &
\end{array}$$

hieraus muß wieder eine neue *resolution* gesucht werden; nach dem andern *Th*[*eoremate*] wird $a=-1$; $b=2$; $c=6$; $d=0$; $a+b+c+2d = 7 = 7m$, allso $m=1$; und dahero

$$41 = 3^2 + 0^2 + 4^2 + 4^2$$

welche wieder nichts hilft; hieraus aber wird durch das andere *Th*[*eorema*] $a = 0$; $b = 4$; $c = 4$; $d = 3$; $m = 2$

{Hiezu ist es aber leichter die *Theoremata* von 3 *quadr*[*atis*] sonderlich das 1ste zu gebrauchen.}[4]

und allso

$$\begin{array}{llllllll}
41 = & 4^2 + & 0^2 + & 0^2 + & 5^2 & \textit{ubi} & -4+0+0+5=1 & \\
 & + & - & - & - & & & \\
43 = & 5^2 + & 1^2 + & 1^2 + & 4^2 & \textit{ubi} & +5+1-1-4=1 & \\
 & - & - & + & + & & & \\
45 = & 4^2 + & 0^2 + & 2^2 + & 5^2 & \textit{etc.} & & \\
 & & & & & \text{oder} & -5+1+1+4 & \text{oder} \\
45 = & 6^2 + & 0^2 + & 0^2 + & 3^2. & & &
\end{array}$$

Ungeacht ich aber in dieser *Materie* so weit gekommen, daß ich dieses *Theorema demonstrir*en kan: *omnem numerum esse summam quatuor quadratorum vel pauciorum*, so fehlet mir doch noch zu zeigen, daß diese 4 oder wenigere *quadrata* allzeit *in integris* angegeben werden können. Und dahero bin ich noch weit von des *Fermat*s Erfindung entfernet: zu dieser glaube ich auch nicht, daß man gelangen könne, ohne bey den *numeris trigonalibus* anzufangen, man müste allso trachten zu beweisen, daß *Omnis numerus integer summae trium vel pauciorum numerorum trigonalium* gleich seye:[5] Hiezu aber kan eine *algebra*ische *evolution* keineswegs behülflich seyn, weil es nicht einmal wahr ist, daß

$$n = \frac{xx+x}{2} + \frac{yy+y}{2} + \frac{zz+z}{2}$$

generaliter, sondern nur in den Fällen da n ein *numerus integer affirmativus*: dahingegen diese *Formul*

$$n = xx + yy + zz + vv$$

wahr ist, wann n auch ein *numerus fractus* ist, nur nicht *negativus*. Ich habe aber hierauf seit langer Zeit nicht weiter gedacht und allso auch nichts weiter gefunden.

Vor einiger Zeit habe ich Ewr. Hochwohlgeb. eine Entdeckung über die *summas divisorum numerorum naturalium* zu überschreiben die Ehre gehabt:[6]

numeri:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
	11,	12,	13,	14,	15	*etc.*				
summae divis[*orum*]:	1,	3,	4,	7,	6,	12,	8,	15,	13,	18,
	12,	28,	14,	24,	24	*etc.*				

und bemerket daß diese *Series Summae divisorum recurrens* sey allso daß wann $\mathbf{S}\,n$ die *summam divisorum numeri* n andeutet allzeit ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\,n = \mathbf{S}\,(n-1) \;&+\; \mathbf{S}\,(n-2) - \mathbf{S}\,(n-5) - \mathbf{S}\,(n-7)\\ &+\; \mathbf{S}\,(n-12) + \mathbf{S}\,(n-15) - \mathbf{S}\,(n-22) - \textit{etc.}\end{aligned}$$

Diese Entdeckung schien mir um so viel merkwürdiger, da der Beweiß davon nicht vollständig war, sondern sich auf dieses *Theorema* gründete, daß

$$\begin{aligned} & (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) \ etc. \\ = \ & 1-x^1-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-etc. \end{aligned}$$

welches ich nur *per inductionem* gefunden hatte, und auf keinerley Weise beweisen konnte.[7] Es schien mir auch merkwürdig, daß die *exponentes alternatim sumti* 1, 5, 12, 22, 35 *etc.* die *numeri pentagonales* sind, und die übrigen 2, 7, 15, 26, 40 *etc.* die *seriem pentagonalium retro continuatam* vorstellen, allso daß die obige *series* auch solchergestalt dargestellt werden kan:

$$etc.-x^{40}+x^{26}-x^{15}+x^7-x^2+x^0-x^1+x^5-x^{12}+x^{22}-x^{35}+etc.$$

wo die *Differentiae exponentium* eine *progr*[*essionem*] *arithmeticam* ausmachen.

Seit der Zeit aber habe ich auch die *Demonstration* dieses *Theorematis* gefunden, welche sich auf dieses *Lemma* gründet:

$$\begin{aligned} & (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta) \ etc. \\ = \ & 1-\alpha-\beta(1-\alpha)-\gamma(1-\alpha)(1-\beta)-\delta(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)-etc. \end{aligned}$$

dessen *Demonstration* sogleich in die Augen fällt.

Allso ist nach diesem *Lemmate*:

$$\begin{aligned} & (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) \ etc. = s \\ = \ & 1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)\left(1-x^2\right)-x^4(1-x)\left(1-x^2\right)\left[\left(1-x^3\right)-etc.\right] \end{aligned}$$

Ponatur $s=1-x-Axx$ *erit*

$$A=1-x+x(1-x)\left(1-x^2\right)+x^2(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)+etc.;$$

evolvatur ubique factor $1-x$ [*erit*]

$$\begin{array}{lllll} A=1-x & -x^2(1-xx) & -x^3(1-xx)\left(1-x^3\right) & & etc. \\ \quad +x(1-xx) & +xx(1-xx)\left(1-x^3\right) & +x^3(1-xx)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & & etc. \end{array}$$

hincque fiet

$$A=1-x^3-x^5(1-xx)-x^7(1-xx)\left(1-x^3\right) \ etc.;$$

sit $A=1-x^3-Bx^5$ *e*[*rit*]

$$B=1-xx+x^2(1-xx)\left(1-x^3\right)+x^4(1-xx)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)+etc.;$$

evolv[*atur*] *fact*[*or*] $1-xx$

$$\begin{array}{llll} B=1-xx & -x^4\left(1-x^3\right) & -x^6\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & \\ \quad +xx\left(1-x^3\right) & +x^4\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & +x^6\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) & etc. \end{array}$$

hincque fiet

$$B = 1 - x^5 - x^8\left(1 - x^3\right) - x^{11}\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^4\right) - \textit{etc.};$$

sit $B = 1 - x^5 - Cx^8$ *er[it]*

$$C = 1 - x^3 + x^3\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^4\right) + x^6\left(1 - x^3\right)\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right) + \textit{etc.};$$

evolv[atur] fact[or] $1 - x^3$

$$\begin{array}{llll} C = 1 - x^3 & - x^6\left(1 - x^4\right) & - x^9\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right) & \textit{etc.} \\ \quad + x^3\left(1 - x^4\right) & + x^6\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right) & + x^9\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right)\left(1 - x^6\right) & \end{array}$$

ergo

$$C = 1 - x^7 - x^{11}\left(1 - x^4\right) - x^{15}\left(1 - x^4\right)\left(1 - x^5\right) - \textit{etc.};$$

sit $C = 1 - x^7 - Dx^{11}$.

Wann man nun auf gleiche Art fortgehet, so wird $D = 1 - x^9 - Ex^{14}$, $E = 1 - x^{11} - Fx^{17}$ *etc.* Allso wird seyn

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}c@{\qquad}rcl} s & = & 1 - x - Ax^2 & & s & = & 1 - x - Ax^2 \\ A & = & 1 - x^3 - Bx^5 & \text{oder} & Ax^2 & = & x^2\left(1 - x^3\right) - Bx^7 \\ B & = & 1 - x^5 - Cx^8 & & Bx^7 & = & x^7\left(1 - x^5\right) - Cx^{15} \\ C & = & 1 - x^7 - Dx^{11} & & Cx^{15} & = & x^{15}\left(1 - x^7\right) - Dx^{26} \\ D & = & 1 - x^9 - Ex^{14} & & Dx^{26} & = & x^{26}\left(1 - x^9\right) - Ex^{40} \\ & & \textit{etc.} & & & & \textit{etc.}, \end{array}$$

woraus dann gantz ungezweifelt folget

$$s = 1 - x - x^2\left(1 - x^3\right) + x^7\left(1 - x^5\right) - x^{15}\left(1 - x^7\right) + x^{26}\left(1 - x^9\right) - \textit{etc.}$$

oder

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \textit{etc.}$$

Nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 9 *Junii*
1750.

R 858 Berlin, June 9th, 1750
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 262–264v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 515–524; *Euler-Goldbach* (1965), p. 321–325

145
Goldbach to Euler
Petersburg, July (7th) 18th, 1750

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Aus Eurer Hochedelgebohrnen Schreiben vom 14. *Apr.* habe ich mit vielem vergnügen ersehen daß Dero *Familie* mit einem Söhnlein vermehret worden und daß sich selbiges nebst seiner Frau Mutter wohlaufbefindet;[1] ich bitte Derselben meine schuldigste *Gratulation* abzustatten und werde jederzeit an allem was Ew. Hochedelg. und Dero werthe Angehörige betrifft vielen Theil nehmen. Ich will auch hoffen daß der H. *Johannes Albertus* über wenige Jahre sich als *Professor Matheseos sublimioris* allhie einfinden und diese Stelle mit vielem Ruhm bekleiden wird.[2]

Hingegen thut es mir leyd daß Eurer Hochedelg. durch den in der Rechnung des Hn Speners vorgegangenen fehler einige *inquietude* verursachet worden;[3] ich dancke dienstl[ich] vor das übersandte mir sehr angenehme *présent* von der *introductione in Arithmeticam infinitorum*,[4] ich habe dieselbe alsofort in *Moscau* einbinden lassen und im durchblättern befunden daß mir einige *propositiones* davon schon aus dem was Ew. Hochedelg. mir in voriger Zeit mündlich gemeldet hatten, bekannt waren, ich zweifele aber nunmehro sehr ob ich fernere *progress*en darin zu machen gnugsame gelegenheit und *Capaci*tät haben werde.

Die *demonstration* von den *Theorematibus*, die *summas trium & quatuor quadratorum* betreffend, welche Ew. Hochedelg. in Dero Schreiben anführen, habe ich leicht eingesehen,[5] weil *generaliter* wahr ist daß *posita*

$$z = \frac{2\,(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)}{e^2 + f^2 + g^2 + h^2}$$

die 4 gegebenen *quadrata*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

gleich sind

$$(ez - \alpha)^2 + (fz - \beta)^2 + (gz - \gamma)^2 + (hz - \delta)^2$$

allwo die *quantitates* e, f, g, h *pro lubitu* genommen werden können; wann auch über dieses die letzteren 4 *quantitates* so beschaffen sind daß die *summa quatuor radicum* $(e + f + g + h)\,z - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0$, so können die 4 *quadrata* allezeit in drey *quadrata* verwandelt werden.

Ich will noch einige andere *propositiones* beyfügen die mir schon längst bekannt gewesen, und sich selbst *demonstri*ren.[6]

(1.)

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (2\delta + \alpha + \beta + \gamma)^2 \\ &= (\alpha + \beta + \delta)^2 + (\alpha + \gamma + \delta)^2 + (\beta + \gamma + \delta)^2 + \delta^2 \\ &= (\alpha + \delta)^2 + (\beta + \delta)^2 + (\gamma + \delta)^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 \end{aligned}$$

woraus zugleich die *methode* erhellet wie *data quatuor quadrata imparia (non aequalia inter se) in quatuor alia, sive paria sive imparia* verwandelt werden können, denn wann δ in den gegebenen 4 *quadratis* ein *numerus par* ist, so gilt die erste *aequation pro quadratis paribus*, und die andere *pro imparibus*.

(2.) *Si dantur in uno casu* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=8m+3$, *dantur etiam quatuor quadrata pro casu quocunque* $2m+p^2\pm p+1$, *nam, si* $8m+3$ *est* = *tribus quadratis, erit*[7] $8m+3+(1+2p)^2=4$ *quadratis, et divisis omnibus per* 4, $2m+p^2\pm p+1=$ 4 *quadratis*.

(3.) Nachfolgende drey *quadrata in fractis*

$$\frac{\left(\pm p^2\alpha\mp 2q^2\beta-2pq\gamma\right)^2+\left(\mp 2q^2\alpha\pm p^2\beta-2pq\gamma\right)^2+\left(\mp 2pq\alpha\mp 2pq\beta+\left(2q^2-p^2\right)\gamma\right)^2}{\left(p^2+2q^2\right)^2}$$

allwo α, β, γ *pro integris* genommen werden, sind gleich diesen 3 *quadratis integris* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

(4.) *Si* $A^2+B^2+C^2=8m+3$ *erit*

$$\begin{aligned}&\frac{(A+B-C\pm 1)^2}{4\cdot 4}+\frac{(A-B+C\pm 1)^2}{4\cdot 4}\\ +\ &\frac{(-A+B+C\pm 1)^2}{4\cdot 4}+\frac{(-A-B-C\pm 1)^2}{4\cdot 4}=2m+1\end{aligned}$$

und wann man 3 an statt 1 setzet so kommen 4 *quadrata* $=2m+3$ heraus.

Das vorhergehende ist bereits vor mehr als 8 Tagen geschrieben gewesen und ich will es für dieses mal dabey bewenden lassen damit der Brief nicht etwa durch neue *distractiones* noch länger aufgehalten werde. Ich verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg den 18. *Jul.* 1750.

R 859 Reply to n° 143 and n° 144
Petersburg, July (7th) 18th, 1750
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 139rv, 141r (fol. 140 contains two postscripts that actually belong with a much earlier letter: see n° 55, note 22)
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 525–526; *Euler-Goldbach* (1965), p. 326–327

146

Euler to Goldbach

Berlin, August 15th, 1750

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. statte zuvorderst für Dero gütige *Gratulation* zu meiner Frauen glücklichen Entbindung allen gehorsamsten Dank ab, muß aber nunmehr berichten, daß dieses Söhnlein gestern acht Tag wieder gestorben, nachdem dasselbe in seinem sehr schwächlichen Zustand $19\frac{1}{2}$ Wochen das Leben erhalten.[1]

In meinem vorigen Schreiben habe Ewr. Hochwohlgeb. zu berichten die Ehre gehabt, daß ich gedächte eine Reise nach Frankfurth am Main vorzunehmen, um von dannen meine Muter hieher zu hohlen.[2] Diese Reise ist nun inzwischen würklich für sich gegangen, welche ich mit meiner Frau und unsrem ältesten Sohn vorgenommen. Wir sind über Magdenburg, *Duderstat* und *Cassel* dahin gereiset, haben aber den Rückweg über Hanau, *Fulda*, *Erfurt*, *Merseburg* und *Wittenberg* genommen, und meine Muter glücklich hieher gebracht, nachdem wir nicht mehr als 20 Tag weggewesen.[3]

Ewr. Hochwohlgeb. hegen schon einen allzu vortheilhaften Begriff von unserem *Johan Albrecht*;[4] seit einigen Jahren habe ich denselben eine hiesige wohleingerichtete Schul *frequentir*en lassen, um darinn das Latein und andere nöthige *studia* zu treiben, in welcher Zeit er dann *in Mathematicis* nicht sonderlich weiter gekommen; auf *Micheli* gedenke ich ihn aber wieder zu Hause zu behalten, und hoffe alsdann in kurzer Zeit das in diesem Stük verseumte wieder einzuhohlen.

H. Spener sagt mir daß er die verlangten Bücher schon vor einiger Zeit an Ewr. Hochwohlgeb. abgeschickt, und in der beygelegten Rechnung die bewussten 7 Rthl. abgezogen.[5]

Die überschriebenen *Theoremata circa resolutionem numerorum in tria et* 4 *quadrata* sind alle merkwürdig, und haben ihre völlige Richtigkeit; ich habe mich aber bißher umsonst bemühet aus solchen *Theorematibus* den geringsten Nutzen für die bewussten *Fermatiana* zu ziehen. Ich habe zwar bewiesen: *omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum*; allein es fehlet mir noch an diesem Beweise:

Si numerus integer n *fuerit summa quatuor fractorum quadratorum* $\frac{aa}{pp}+\frac{bb}{qq}+\frac{cc}{rr}+\frac{dd}{ss}$, *tum eundem quoque semper esse summam quatuor quadratorum in integris.*[6]

Und ich sehe wohl daß ich ohne diese *Demonstration* nichts *pro resolutione numerorum in tres trigonales*, 5 *pentagonales*, 6 *hexagonales*, *etc.* auszurichten vermögend bin; und weil hier alles auf *numeros integros* ankommt, so können die *formulae universales*, als welche auch *fractos* in sich schliessen nicht viel helfen.[7] Die *Demonstrationem pro quadratis* habe ich aus der Betrachtung der *residuorum*, welche *post divisionem cujusque numeri per quadratum* überbleiben, hergeleitet, allein diese Betrachtung kan bey den übrigen *numeris polygonalibus* nicht angewandt werden; dahero ich den sicheren Schluß mache, daß *Fermat* durch gantz andere *speculation*en auf seine *Theoremata* geleitet worden, welche vielleicht aus fleissiger Erwägung seiner Werke zu errathen wären.[8]

Ich habe neulich einen Einfall gehabt eine *seriem* $a+b+c+d+e+f$ *etc.* daraus zu bestimmen, wann die *producta ex binis terminis contiguis* gegeben sind: als:

Quaeratur series numerorum $a+b+c+d+e+f+$ *etc. certa et uniformi lege procedens, ut sit:* $ab=1$; $bc=2$; $cd=3$; $de=4$; $ef=5$ *etc.*

Hieraus ist sogleich klar, daß wann nur ein *terminus* bekannt wäre, die übrigen alle daraus bestimmt werden; allso aus dem ersten a sind die folgenden $b=\dfrac{1}{a}$; $c=\dfrac{2a}{1}$; $d=\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot a}$; $e=\dfrac{2\cdot 4a}{1\cdot 3}$; $f=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot a}$; nun folgt *ex natura seriei* daß die *Termini infinitesimi* einander gleich seyn müssen;[9] allso wann je zwey *contigui* einander gleich gesetzt werden, so müssen folgende *valores* der Wahrheit immer näher kommen:

$$aa=\frac{1\cdot 1}{2}=\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 2}=\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 4}=\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}\ \textit{etc.}$$

allso wird seyn

$$aa=\frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 11\cdot \textit{etc.}}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10\cdot 12\cdot \textit{etc.}}\ \textit{in infinitum.}$$

Diese *expression* aber ist $=\dfrac{2}{\pi}$ (*existente* $1:\pi=$ *diam*[*eter*] : *periph*[*eriam*]);[10] folglich wird $a=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$; dahero ist dieses eine *series uniformi lege procedens*:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}};\quad \sqrt{\frac{\pi}{2}};\quad 2\sqrt{\frac{2}{\pi}};\quad \frac{1\cdot 3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}};\quad \frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\textit{etc.}$$

Von dieser *Serie*

$$1-x^1+x^4-x^9+x^{16}-x^{25}+x^{36}-x^{49}+\textit{etc.}$$

halte ich für merkwürdig, daß wann man setzt $x=1-y$, diese *series* herauskommt

$$\frac{1}{2}+0y+0y^2+0y^3+0y^4+\textit{etc.}$$

nehmlich daß alle *Potestates finitae ipsius y evanesci*ren, welches aber bey den *infinitis* nicht geschehen kan, indem die *summa* derselben *seriei* unmöglich allzeit seyn kan $=\frac{1}{2}$. Solches mag wohl eintreffen *casu* $x=1$; aber wann $x<1$, so ist die *summa* gewiß $>\frac{1}{2}$. Allein setze ich nur $x=\frac{9}{10}$ oder $y=\frac{1}{10}$ so wird die *summ* $=0{,}499\,949\,2$ wofern ich im Rechnen nicht gefehlt.[11]

Weil ich Verhindrung bekomme, so muß ich hier abbrechen. Dahero mich samt den meinigen zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Gewogenheit und Zuneigung gehorsamst empfehle und mit aller schuldigsten Hochachtung verharre

Ewr. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 15ten *Augusti*

1750

R 860 Reply to nº 145
Berlin, August 15th, 1750
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 265–266v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 527–529; *Euler-Goldbach* (1965), p. 327–328

147
Euler to Goldbach
Berlin, August 17th, 1750

P. S.

Ich kan nicht unterlassen den in meinem letsten Schreiben begangenen Rechnungs Fehler anzuzeigen,[1] daß ich die *summ* der dort angeführten *seriei* kleiner als $\frac{1}{2}$ befunden welche doch würklich nach wiederhohlter Rechnung grösser ist als $\frac{1}{2}$. Ich habe seit der Zeit verschiedene *casus* mit allem Fleiße berechnet, von dieser *serie*:

$$s = 1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + etc.$$

und befunden daß

wann	$x = 0,$	so ist	$s = 1,$	welches für sich klar;
	$x = \frac{1}{2}$	...	$s = 0,560\,562\,104\,0$	
	$x = \frac{2}{3}$	...	$s = 0,506\,335\,1$	
	$x = \frac{7}{10}$	...	$s = 0,502\,937\,986\,1$	
	$x = \frac{8}{10}$	...	$s = 0,500\,059\,168\,3$	
	$x = \frac{9}{10}$	...	$s = 0,500\,000\,000\,5$	
	$x = 1$	...	$s = 0,5.$	

Wann allso x nur um sehr wenig kleiner ist als 1, nehmlich $x = 1 - \omega$, so wird die *Summa* s um etwas fast unmerkliches grösser als $\frac{1}{2}$. Dann wann $\omega = \frac{1}{10}$ so ist $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{10}}$; und wann man setzen sollte $\omega = \frac{1}{20}$ oder $x = \frac{19}{20}$, so kan man sicher schliessen, daß der *excess* der *summae* s über $\frac{1}{2}$ nur ungefehr $\frac{5}{10^{20}}$ betragen würde. Ich habe aber bißher umsonst einen sicheren Weg gesucht um die *summe* dieser *Seriei proxime in numeris* zu bestimmen, wann ω ein sehr kleiner Bruch ist. Dann wann ich setzen wollte $\omega = \frac{1}{100}$ oder $x = \frac{99}{100}$, so müsste ich alle *Terminos seriei* auf mehr als 100 *Figur*en in *Decimal Fractionen* berechnen weil $s = 0,500\,000\,0$ *etc.* und die Anzahl der nach der 5 folgenden Nullen sich biß auf 100 belauffen würde: dann ungefehr wird seyn $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{100}}$. Es wäre allso eine *Methode* hoch zu schätzen, vermittelst welcher man im Stande wäre den Werth von s *proxime* zu bestimmen, wann ω ein sehr kleiner Bruch ist.

Die *Theoremata Fermatiana* haben mich auf die Betrachtung dieser *seriei*

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + etc.$$

gebracht, als in welcher keine andere *potestates ipsius* x vorkommen, als deren *exponentes numeri quadrati* sind. Nimmt man nun das *quadrat* von dieser *serie*:

$$ss = 1 + 2x + x^2 + 2x^4 + 2x^5 + x^8 + etc.$$

so enthält diese *series* keine andere *potestates ipsius* x, als deren *exponentes summae duorum quadratorum* sind. In der *serie* s^3 werden noch nicht alle *potestates ipsius* x vorkommen, sondern darinn noch diese x^7, x^{15}, x^{23}, x^{28} *etc.* fehlen. Könnte man nun beweisen, daß in der *serie* s^4 gar alle *potestates ipsius* x nothwendig vorkommen, so wäre zu gleich bewiesen, daß eine jegliche Zahl *summa* 4 *quadratorum pauciorumve* wäre.

Ebenfalls *pro resolutione numerorum in tres triangulares* müste man beweisen daß *posito*

$$s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + etc.$$

die daraus entstehende *series* s^3 gar alle *potestates ipsius* x in sich fasse. Und *pro numeris pentagonalibus* müsste bewiesen werden, daß *posito*

$$s = 1 + x^1 + x^5 + x^{12} + x^{22} + etc.$$

die daher entstehende *series* s^5 gar alle *potestates ipsius* x in sich fasse, *etc.*

In diesen *seriebus pro* s *assumtis* habe ich alle *coefficientes* gleich 1 gesetzt: Der Beweiß aber wird einerley seyn, wann man *quosvis coefficientes affirmativos* annimmt, und es käme darauf an solche *Coefficientes* zu erwählen, daß der Beweiß erleichtert würde. Dieser Weg deucht mir noch der *natür*lichste zu seyn, um zum Beweiß der *Theor*[*ematum*] *Fermat*[*ianorum*] zu gelangen.[2]

Ewr. Hochwohlgeb. werde noch ein *curieuses paradoxon in Analysi infinitorum* vorlegen, welches darinn bestehet, daß man öffters das *integrale* von einer *differential aequation* finden kan, ohne dieselbe zu *integri*ren: indem man dieselbe so gar noch weiter *differentir*t: ungeacht eine solche *operation* dem Endzweck schnurstracks entgegen zu seyn scheinet: dann wann man eine *aequationem differentialem* nochmals *differentir*t, so bekommt man ihr *differentiale*, oder das *differentio-differentiale aequationis integralis quaesitae*; so wunderbar muß es allso scheinen, daß man durch eine solche *operation* die *aequationem integralem* selbst bekommen sollte. Folgendes *Exempel* wird dieses *paradoxon* deutlich an den Tag legen:

Proposita sit haec aequatio differentialis $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ *cujus integrale quaeratur.*

Ponatur $dy = p\,dx$ *haecque aequatio abibit in* $y - px = a\sqrt{(1+pp)}$ *quae denuo differentiata dat*

$$dy - p\,dx - x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Atqui est $dy = p\,dx$ *(per hyp[othesin]) ergo*

$$-x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{(1+pp)}},$$

ideoque hinc habebitur

$$x = \frac{-ap}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Porro ex aequatione $y - px = a\sqrt{(1+pp)}$ *fit* $y = px + a\sqrt{(1+pp)}$, *unde valore invento pro x substituto, obtinetur*

$$y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}.$$

Cum jam sit $x = \dfrac{-ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ *erit* $xx + yy = aa$, *quae est aequatio integralis quaesita, atque per differentiationem eruta.*[3]

Übrigens beziehe ich mich auf mein voriges und verharre mit der schuldigsten Hochachtung

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 17$^{\text{ten}}$ *Aug.* 1750

R 861 Postscript to n° 146
Berlin, August 17th, 1750
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 267–268r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 530–533; *Euler-Goldbach* (1965), p. 329–330

148

Goldbach to Euler

[Petersburg], (September 22nd) October 3rd, 1750

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ew. Hochedelgebohrne hatten mir zwar keine Nachricht von Dero bevorstehenden Reise nach Franckfurt gegeben, ich bin aber doch davon ehe ich Dero letztes Schreiben erhielte *informi*ret gewesen,[1] und schätze Ew. HochEdelg. glücklich daß Sie den Entschluß gefasset auch zum theil bewerckstelliget Dero Frau Mutter bey sich aufzunehmen und zu versorgen.

Der Rechnungs-Fehler welchen E. HochEdelg. selbst in Dero Schreiben vermuthet hatten ist mir alsofort sehr wahrscheinlich vorgekommen, es hätte mir aber viele Mühe gekostet selbigen eigentlich anzuzeigen, wann solches nicht E. H. selbst in Dero *P*[*ost*] *S*[*cri*]*pto* gethan hätten;[2] mir werden auch diese Sachen seit dem E. H. von hie abgereiset sind und ich hierüber mit keinem Menschen mehr spreche noch in Büchern etwas dergleichen lese, je länger je fremder, wie ich denn den *nexum inter aequationes* $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$ und $x^2 + y^2 = a^2$ schwerlich würde entdecket haben wann Ew. HochEdelg. selbigen nicht so deutlich angezeiget hätten.[3]

Aus dem *Theoremate Fermatiano* folget auch dieses: daß die *summa radicum quatuor quadratorum imparium* allezeit = seyn kan ± 2, oder daß *data summa quatuor quadratorum imparium* die *quatuor quadrata* so angegeben werden können daß die *summa radicum* = sey ± 2; wann man aber auf eine leichte Art beweisen kan daß die *summa quatuor quadratorum imparium* auf nachfolgende 4 zu *reduci*ren ist: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (2 - \alpha - \beta - \gamma)^2$ so ist auch leicht zu beweisen daß $8m + 4$ allezeit eine *summa quatuor quadratorum imparium* ist.

Die bewusten 7 Rub. sind zwar nicht in die Rechnung gebracht welche ich neulich mit 31 R. 40 *Cop.* bezahlet habe, ich möchte aber auch nicht gern den H. *Spener* mit dergleichen Erinnerungen weiter *incommodi*ren[4] sondern bin zufrieden wann mir anstatt derselben der *Nouveau Secretaire de la Cour à Paris* 1744, *in* 12.° welches Buch auf der *Specification* gestanden hat, aber mit den andern nicht mitgekommen ist, bey gelegenheit übersandt wird; es kan kein rares Buch seyn, weil es zu Fr[ank]f[urt] am Mayn in dem Knoch- und Eslingerischen Buchladen für 1 *fl.* 15 Kreutzer verkaufft wird.[5]

Ich bitte meine Empfehlung an Dero sämmtliche *Famili*e zu machen und verharre mit vieler hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

den 3. *Oct. st. n.* 1750.

R 862 Reply to nº 146 and nº 147
[Petersburg], (September 22nd) October 3rd, 1750
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 142–143r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 534–535; *Euler-Goldbach* (1965), p. 331

149
Euler to Goldbach
Berlin, November 14th, 1750

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ich war nicht wenig bestürzt, als ich aus Ewr. Hochwohlgeb. Schreiben vernommen, daß H. Spener in seiner letsten Rechnung die bewussten 7 Rthl. nicht abgezogen, da mich derselbe doch so fest versichert hatte, daß solches geschehen:[1] Als ich ihm deswegen Vorstellung gethan, war er nicht weniger bestürzt, und versicherte mich daß der Abzug würklich in seinen Büchern geschehen, und durch ein blosses Versehen nicht in die Rechnung gebracht worden. Damit nun eben dieses Versehen nicht ferner begangen werde, so habe ich darauf gedrungen, daß dieser überschuß Ewr. Hochwohlgeb. unverzüglich durch H. Köppen vergütet würde, wozu H. *Spener* sich gantz willig erzeiget, und mir in beyligendem Zettulein die Versicherung gegeben, daß solches schon allbereits geschehen.[2] Dann ungeacht Ewr. Hochwohlgeb. die Sach nicht weiter wollten getrieben wissen, so war mir doch allzuviel daran gelegen, als daß ich damit zufrieden seyn könnte: und bitte dahero Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst um Vergebung, wann ich in diesem Stück mich nicht so genau an Dero Verordnung gehalten habe. Inzwischen wird H. Spener doch nicht unterlassen das verlangte Buch zu verschaffen.[3]

Neulich kam mir in Sinn die allgemeinen Eigenschafften der Cörper, welche *hedris planis* eingeschlossen sind, zu bestimmen; weil kein Zweifel ist, daß sich in denselben nicht eben dergleichen allgemeine Eigenschafften finden sollten, als in den *figuris planis rectilineis*, deren Eigenschafften darinn bestehen, daß 1. in einer jeglichen *figura plana* der *numerus laterum* dem *numero angulorum* gleich ist, hernach 2. daß die *summa angulorum omnium* gleich ist *bis tot rectis quot sunt latera demtis quatuor*. Wie aber in den *figuris planis* nur *latera* und *anguli* zu betrachten vorkommen, so müssen bey den Cörpern mehr Stücke in Betrachtung gezogen werden. Als[4]

I. die *Hedrae*, deren Anzahl sey $= H$

II. die *anguli solidi*, deren Anzahl sey $= S$

III. die Fügungen, wo zwey *hedrae secundum latera* zusammen kommen, so ich aus Mangel eines *recipir*ten Worts *acies* nenne, deren Anzahl sey $= A$

IV. die *Latera singularum hedrarum, quorum omnium simul sumtorum numerus sit* $= L$

V. die *anguli plani singularum hedrarum, quorum omnium numerus sit* $= P$.

1. Bey diesen 5 Stücken ist nun erstlich klar daß $P = L$ weil in allen *hedris* der *numerus angulorum = numero laterum.*

2. Ist auch immer $A = \frac{1}{2}L$ oder $A = \frac{1}{2}P$, weil immer zwey *Latera diversarum* [*hedrarum*] zusammen kommen, um eine *aciem* zu *formi*ren.

3. Dahero ist der *numerus laterum seu angulorum planorum omnium hedrarum corpus includentium* allzeit *par.*

$$\left.\begin{array}{l} \text{4. } \textit{Semper est vel } L = 3H \textit{ vel } L > 3H \\ \text{5. } \textit{Semper est vel } P = 3S \textit{ vel } P > 3S \end{array}\right\} \textit{at est } P = L.$$

Dieses ist klar weil keine *Hedra* aus weniger als 3 Seiten, und kein *angulus solidus* aus weniger als 3 *angulis planis* bestehen kan. Folgende *proposition* aber kan ich noch nicht recht *rigorose demonstri*ren:

6. *In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum,*[5] *seu est* $H + S = A + 2$ *seu* $H + S = \frac{1}{2}L + 2 = \frac{1}{2}P + 2$.

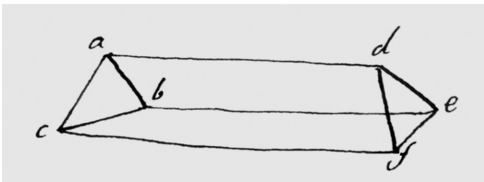
7. *Impossibile est ut sit* $A + 6 > 3H$ *vel* $A + 6 > 3S$.

8. *Impossibile est ut sit* $H + 4 > 2S$ *vel* $S + 4 > 2H$.

9. *Nullum formari potest solidum cujus omnes hedrae sint* 6 *pluriumve laterum, nec cujus omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis sint conflati.*

10. *Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cujusque occurrunt, tot angulis rectis aequatur quot sunt unitates in* $4A - 4H$.

11. *Summa omnium angulorum planorum aequatur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi, demtis octo, seu est* $= 4S - 8$ *rectis.*[6]



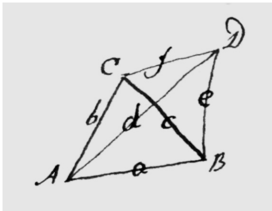
Exemplo sit prisma triangulare ubi est

1. *numerus hedrarum* $H = 5$
2. *numerus ang*[*ulorum*] *sol*[*idorum*] $S = 6$
3. *numerus acierum* (*ab, ac, bc, ad, be, cf, de, df, ef*) ... $A = 9$
4. *numerus laterum et angulorum planorum* $L = P = 18$. *Includitur enim corpus duobus triangulis et tribus quadrilateris, unde* $L = P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$.

Nun ist nach dem *Theor*[*emate*] 6: $H + S\ (11) = A + 2\ (11)$. Ferner *summa omnium angulorum planorum* (aus den beyden $\triangle = 4$ *rectis*, und den drey $\square = 12$ *rectis*) *erit* $= 16$ *rectis* $= 4\,(A - H) = 4S - 8$ *rectis.*

Es nimmt mich wunder daß diese allgemeinen *Proprietates* in der *Stereometrie* noch von Niemand so viel mir bekannt sind angemerket worden;[7] noch vielmehr aber, daß die fürnehmsten davon, als *Th*[*eorema*] 6 *et Th*[*eorema*] 11 so schwehr zu beweisen sind; dann ich kan dieselben noch nicht so beweisen, daß ich damit zu frieden bin.

Um die *soliditatem* eines Körpers zu bestimmen, so wollte ich nach Belieben innert desselben ein *punct* annehmen, und daraus nach allen *angulis solidis* grade Linien ziehen:[8] hierdurch wird der Cörper in lauter *pyramiden* zertheilt deren *vertices* im angenomm[en]en *punct* sind, und die *hedras* zu *basibus* haben: welche *pyramid*en nicht *triangulares* sind, können ferner leicht in *triangulares* zerschnitten [werden]. Alles kommt allso darauf an, daß man die *soliditatem pyramidis triangularis* bestimmen könne: welches allso *ex cognitis lateribus* geschehen kan:



Sit $ABCD$ pyramis proposita, in qua habeantur $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$: erit hujus pyramidis soliditas[9]

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\begin{pmatrix} +aaff\,(bb+cc+dd+ee-aa-ff) & -aabbcc \\ +bbee\,(aa+cc+dd+ff-bb-ee) & -aaddee \\ +ccdd\,(aa+bb+ee+ff-cc-dd) & -bbddff \\ & -cceeff \end{pmatrix}}$$

Hiemit empfehle ich mich gehorsamst zu Ewr. Hochwohlgeb. beständigen Zuneigung und Gewogenheit, und habe die Ehre, mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 14ten *Nov.* 1750.

R 863 Reply to nº 148
Berlin, November 14th, 1750
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 269–270v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 536–539; *Euler-Goldbach* (1965), p. 332–333

150

Goldbach to Euler

[Petersburg], June 4th / 15th, 1751

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen bin ich für die mir *communici*rten schönen *theoremata* von den Eigenschafften der Cörper welche *hedris planis* eingeschlossen sind, sehr verbunden, ich beklage aber daß bey mir die gehörige *attention* zu dergleichen Betrachtungen je länger je mehr und zwar *per seriem valde ad nihilum convergentem* wider meinen willen abnimmt, ausser daß ich noch bißweilen an das *Theorema Fermatianum* [denke], wovon ich über vermuthen nachfolgende *casus* darin *quatuor quadrata* $+8$ *aequalia fiunt quatuor quadratis* bemercket. *Sint* α, β, γ, δ *numeri integri permutabiles sive affirmativi sive negativi, erunt* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8$ *aequalia quatuor quadratis si fuerit* $\delta = 7+\alpha+\beta+\gamma$ *vel* $= 2+\alpha+\beta+\gamma$ *vel* $= 2\beta+2\gamma+3$ *vel* $= \dfrac{2\alpha+2\beta+\gamma}{3}$ *(casu quo hic numerus fit integer) vel* $= 3\alpha+2\beta+2\gamma$ *vel* $= \alpha$ *vel* $3\gamma+8$, in welchen allen fällen die *quatuor quadrata* gar leicht angegeben werden können, imgleichen wann

$$\delta = \frac{\left(3q^2+1\right)\gamma - 2q\,(q+1)\,(\alpha+\beta+\gamma)}{3q^2-2q-1}$$

numero integro, ubi et $2q$ *sit numerus integer quicunque.*[1]

Der kleine Irrthum in des Hn Speners Rechnung ist schon längst völlig *redressi*ret worden ohngeachtet ich es nicht verlanget hatte;[2] wann ich aber aufs neue durch Eurer HochEdelgebohrnen Vermittelung die auf beyliegendem Zettel *noti*rten Bücher auf die vorige Art erhalten könnte, würde es mir sehr lieb seyn.[3]

Ich habe schon längst in den Zeitungen gelesen daß der H. *Philidor* sich in Berlin bey den grössesten Schachspielern fürchterlich gemachet woraus ich vermuthe daß er Eurer Hochedelg. auch nicht unbekannt seyn wird.[4]

An die Fr[au] *Professo*rin, wie auch an meinen H. Pathen bitte ich meine *complimens* zu machen und verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

den $\dfrac{4}{15}$ *Jun.* 1751.

R 864 Reply to n° 149
[Petersburg], June 4th / 15th, 1751
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 144rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 540–541; *Euler-Goldbach* (1965), p. 334

151
Euler to Goldbach
Berlin, July 3rd, 1751

HochWohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die Freude, welche Ewr. Hochwohlgeb. geehrteste Zuschrifft bey mir erwecket, war um so viel grösser, je heftiger das Verlangen gewesen, mit welchem ich schon eine geraume Zeit darauf gewartet. Inzwischen hat sich doch zu meinem grösten Vergnügen von Zeit zu Zeit Gelegenheit gefunden von Ewr. Hochwohlgeb. Wohlseyn Nachricht einzuziehen, wie ich dann auch zu dem vor einiger Zeit erkauften prächtigen Hauß meine gehorsamste *Gratulation* abstatte, und von Herzen wünsche, daß Dieselben in dieser Wohnung jederzeit eine mit allem Vergnügen begleitete vollkommene Gesundheit geniessen mögen.[1]

Vor einigen Tagen habe ich hier von ungefehr einen alten guten Freund von Ewr. Hochwohlgeb. angetroffen: dies war der H. Geheime *Finanz* Rath Deutsch, welcher sich bey mir genau um alle Dero Umstände erkundiget, und über Dero Wohlstand ein gantz besonderes Vergnügen an den Tag gelegt: mir auch aufgetragen bey der ersten Gelegenheit Ewr. Hochwohlgeb. sein ergebenstes *Compliment* abzustatten.[2]

Die verlangten Bücher sind schon in der Spenerischen Buchhandlung bestellt, und werden, so bald sie alle beysammen und gebunden sind, an Ewr. Hochwohlgeb. überschicket werden.[3]

Ich beklage von Herzen, daß bey Ewr. Hochwohlgeb. die Lust zu *mathematischen Speculation*en abzunehmen beginnt, woran ohne Zweifel der Mangel eines vertrauten Umgangs über dergleichen Untersuchungen grossen Antheil haben wird. Dann die mir gütigst überschriebenen Anmerkungen über das *Theorema Fermatianum* zeigen nichts weniger als eine Verminderung in der Kraft dergleichen Sachen nachzudenken an. Dieselben haben mir Anlaß gegeben diese Bestimmung allgemeiner zu machen, und den Werth von δ zu bestimmen, daß $\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + e$ eine *summa quatuor quadratorum* werde.[4] Setze ich nun

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + e = (\alpha - kx)^2 + (\beta - mx)^2 + (\gamma - nx)^2 + (\delta + x)^2$$

so wird

$$\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma - \frac{1}{2}x\,(kk + mm + nn + 1) + \frac{e}{2x}.$$

Damit nun diese *Formul* in gantzen Zahlen bestehe setze ich

$$e\,(kk + mm + nn + 1) = ab,$$

oder ich *resolvi*re $e\,(kk + mm + nn + 1)$ in zwey *Factores*, die entweder beyde grad oder beyde ungrad sind, so wird $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma + \dfrac{a-b}{2}$; und $x = \dfrac{e}{a}$.

Ist nun wie Ewr. Hochwohlgeb. [annehmen] $e = 8$, so können *in genere* die 4 *Quadrata* deren *Summ* $= \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma + \delta\delta + 8$ angegeben werden, wann $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma + f$, und f so angenommen wird, daß $f = c - d$, *existente* $2\,(kk + mm + nn + 1) = cd$, und da wird $x = \frac{4}{c}$, oder $x = -\frac{4}{d}$.

Für k, m, und n können nun Zahlen nach Belieben angenommen werden da immer für f ein, zwey oder mehr taugliche Werthe herauskommen; als setzt man

$k = 1$; $m = 0$; $n = 0$; so wird $cd = 4$, und $f = 0$, oder $f = 3$; $\delta = \alpha + \begin{cases} 0^* \\ 3 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 0$; $n = 0$; so wird $cd = 10$ und $f = 3$, oder $f = 9$; $\delta = 2\alpha + \begin{cases} 3 \\ 9 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 0$; $n = 0$; so wird $cd = 20$ und $f = 1$; $f = 8$; $f = 19$;

$$\delta = 3\alpha + \begin{cases} 1 \\ 8^* \\ 19 \end{cases}$$

$k = 1$; $m = 1$; $n = 0$; $cd = 6$; $f = 1$; $f = 5$; das ist $\delta = \alpha + \beta + \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 1$; $n = 0$; $cd = 12$; $f = 1$; $f = 4$; $f = 11 \ldots$ $\delta = 2\alpha + \beta + \begin{cases} 1 \\ 4 \\ 11 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 2$; $n = 0$; $cd = 18$; $f = 3, 7, 17 \ldots$ $\delta = 2\alpha + 2\beta + \begin{cases} 3^* \\ 7 \\ 17 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 1$; $n = 0$; $cd = 22$; $f = 9, 21 \ldots$ $\delta = 3\alpha + \beta + \begin{cases} 9 \\ 21 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 2$; $n = 0$; $cd = 28$; $f = 3, 12, 27 \ldots$ $\delta = 3\alpha + 2\beta + \begin{cases} 3 \\ 12 \\ 27 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 3$; $n = 0$; $cd = 38$; $f = 17, 37 \ldots$ $\delta = 3\alpha + 3\beta + \begin{cases} 17 \\ 37 \end{cases}$

$k = 1$; $m = 1$; $n = 1$; $cd = 8$; $f = 2, 7 \ldots$ $\delta = \alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 2^* \\ 7^* \end{cases}$

$k = 2$; $m = 1$; $n = 1$; $cd = 14$; $f = 5, 13 \ldots$ $\delta = 2\alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 5 \\ 13 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 2$; $n = 1$; $cd = 20$; $f = 1, 8, 19 \ldots$ $\delta = 2\alpha + 2\beta + \gamma + \begin{cases} 1 \\ 8 \\ 19 \end{cases}$

$k = 2$; $m = 2$; $n = 2$; $cd = 26$; $f = 11, 25 \ldots$ $\delta = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + \begin{cases} 11 \\ 25 \end{cases}$

$k = 3$; $m = 1$; $n = 1$; $cd = 24$; $f = 2, 5, 10, 23 \ldots$ $\delta = 3\alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 23 \end{cases}$

$$k = 3;\ m = 2;\ n = 1;\ cd = 30;\ f = 1, 7, 13, 29\ \ldots\ \delta = 3\alpha + 2\beta + \gamma + \begin{cases} 1 \\ 7 \\ 13 \\ 29 \end{cases}$$

$$k = 3;\ m = 2;\ n = 2;\ cd = 36;\quad f = 0, 5, 9, 16, 35\ldots$$

$$\delta = 3\alpha + 2\beta + 2\gamma + \begin{cases} 0^* \\ 5 \\ 9 \\ 16 \\ 35 \end{cases}$$

wo ich die von Ewr. Hochwohlgeb. überschriebenen *Formul*n mit einem * bemerkt. Man kan auch f nach Belieben annehmen, um daraus k, m, und n zu bestimmen, als wann seyn soll $f = 0$, oder $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma$, so wird $c = d$, folglich cd ein *quadrat*: dasselbe sey $= 4pp$, so wird $kk + mm + nn = 2pp - 1$. Hier ist klar, daß, wann p ein *numerus par*, $2pp - 1$ unmöglich die *Summ* von 3 *quadrat*en seyn kan, allso müssen für p nur ungrade Zahlen genommen werden, da dann für k, m, n folgende Werthe herauskommen:

$2pp - 1 = 1$	17	49	97	161	241	337
$k = 1$	4; 3	7; 6	9; 6	12; 11; 10; 9	15; 14; 13; 12	18; 16; 12
$m = 0$	1; 2	0; 3	4; 6	4; 6; 6; 8	4; 6; 6; 9	3; 9; 12
$n = 0$	0; 2	0; 2	0; 5	1; 2; 5; 4	0; 3; 6; 4	2; 0; 7

Da nun solcher Gestalt wann α, β, γ gegeben sind, unendlich vielerley *valores* für δ gefunden werden können, nachdem entweder f oder k, m, n nach Belieben angenommen wird, und auch die Zahlen, k, m, n und f *negative* genommen werden können so wäre nun zu beweisen, daß auf solche Art alle mögliche Zahlen für δ herauskommen: und hieraus würde man einen sehr schönen Beweiß für das *Theorema Fermatianum* erhalten, welcher gewiß noch zu andern wichtigen Entdeckungen leiten würde.

Den grossen Schachspieler *Philidor* habe ich nicht gesehen, weil er sich mehrentheils in *Pottsdamm* aufhielte; er soll noch ein sehr junger Mensch seyn, führte aber eine *Maitress*e mit sich, wegen welcher er mit einigen *Officiers* in *Pottsdam* Verdrüßlichkeiten bekommen, welche ihn genöthiget, unvermuthet wegzureisen; sonsten würde ich wohl Gelegenheit gefunden haben mit ihm zu spielen. Er hat aber ein Buch vom Schachspiel in Engelland druken lassen, welches ich habe, und darinn gewiß sehr schöne Arten zu spielen enthalten sind. Seine gröste Stärke bestehet in Vertheidigung und guter Führung seiner Bauren, um dieselben zu Königinnen zu machen, da er dann, wann die Anstalten dazu gemacht, *piece* für *piece* wegnimmt; um seine Absicht zu erreichen und dadurch das Spiel zu gewinnen.[5]

Meine gantze *Familie* lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen; ins besondere aber ist unser Albrecht über Dero Geneigtes Andenken innigst gerühret, und lässt hierdurch seine unterthänigste Danksagung abstatten. Er ist seit einiger Zeit mit dem Fieber geplaget, wovon fast kein Haus hier frey ist; wir hoffen aber daß solches ohne Folgen seyn werde. Seit dem Winter habe ich ihn zu Haus gehalten, da er sich nun mit allem Fleiß in *mathematicis* übet; und nachdem ich die Haupt Sachen aus der *Analysi finitorum* und *infinitorum* mit ihm durchgenommen, so bin ich jetz mit ihm in der *Application* derselben auf die *Mechanic* beschäfftigt; dabey *continuir*t er aber hauptsächlich das *Latein*ische, und auch das Griechische, nebst anderen *Studi*en, zu welchen in der Schul der Grund gelegt worden.

Seit einiger Zeit habe ich mich wiedrum mit dem *Jupiter* und *Saturnus* gequälet, und darüber verschiedene Sachen entdecket, welche mir zu einer nähern Erkänntnüß ihrer Bewegung den Weg gebahnet. Weil dieses wieder die Preißfrage bey der *Pariser Academie* auf künftiges Jahr ist so habe ich darüber eine neue Abhandlung dahin geschickt.[6]

Hiemit empfehle ich mich gehorsamst zu Ewr. Hochwohlgebohrnen beständigen Zuneigung und Gewogenheit, und habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 3ten *Julii*
1751.

R 865 Reply to nº 150
Berlin, July 3rd, 1751
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 52–53v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 542–545; *Euler-Goldbach* (1965), p. 334–337

152
Goldbach to Euler
Petersburg, July (6th) 17th, 1751

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen beyde Schreiben vom 3. und 6. *Jul.* habe ich wohl erhalten; auf das erstere, so mir sehr gefällt, *reservi*re ich mir künfftig zu antworten, auf das letztere aber wird beyliegender Zettel zur antwort dienen.[1] Ich will nur noch mit wenigem von der *aequatione*

$$3^2+5^2+u^2+8=u^2+42=\textit{tribus quadratis}$$

bemercken daß *u infinities infinitis modis determini*ret werden kan, davon ein *casus* ist

$$3^2+5^2+\left(4p^2-10p+7\right)^2+8=\left(4p^2-10p+3\right)^2+(4p-9)^2+(4p-1)^2\,;$$

was ich aber in meinem vorigen Schreiben von dem *valore* δ *per* α, β, γ, *et* q *expresso* erwehnet habe, verstehe ich jetzo selbst nicht mehr, und zweiffele an dessen Richtigkeit, doch ist dieses gewiß daß

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2+8=3^2+(1-\alpha+\beta)^2+(1-\alpha+\gamma)^2+\frac{(2\varepsilon q+\alpha-1)^2}{q^2}$$

si q *determinetur per hanc aequationem*

$$\frac{(3q^2+1)}{2q}(1-\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)\,q=2\varepsilon.$$

Der H. Geheime Rath Deutsch ist in der That einer von meinen ältesten Freunden. Ich werde mich jederzeit mit vielem vergnügen der Höflichkeiten erinnern womit er mich so wohl *A*[*nno*] 1718 als 1724 in Berlin aufgenommen hat,[2] und bitte denselben bey gelegenheit von meiner vollkommenen Hochachtung und Ergebenheit zu versichern, wornechst ich in steter *Consideration* verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
schuldigster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg den 17. *Julii* 1751.

R 866 Reply to n° 151
Petersburg, July (6th) 17th, 1751
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 145r
Address (fol. 146v): "A Monsieur / Monsieur Euler / de l'Academie des Sciences / à / Berlin"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 546; *Euler-Goldbach* (1965), p. 337–338

153
Goldbach to Euler
Petersburg, (July 23rd) August 3rd, 1751

Hochedelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen sage ich schuldigsten Danck (1.) vor Dero gütige *gratulation* zu meiner neuen Wohnung (2.) vor die abermalige Besorgung einiger von mir verlangter Bücher (3.) vor die Nachricht von den glücklichen *progres*sen des Hn *Johannis Alberti* dem ich eine beständige völlige Gesundheit von hertzen wünsche, und (4.) vor die *communication* der vielen *casuum pro* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=a^2+b^2+c^2+d^2$.[1] Es ist allerdings wahr, wie Ew. Hochedelg. vermuthet, daß ich ausser Deroselben niemand habe mit dem ich von dergleichen *decouvertes* schrifftlich oder mündlich *conferi*ren könnte. Ich glaube man kan die Sache etwas kürtzer fassen, wann man nur drey *quantitates indeterminatas* annimmt und $\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=b^2+c^2+d^2$ setzet, denn es ist gewiß daß wann b in einem *casu* bekannt ist selbiges auch *in infinitis aliis* angegeben werden kan wie ich in meinem letzteren Schreiben angezeiget habe (woselbst aber unnöthig $2p$ anstatt p gesetzet worden) indem es leicht zu *demonstri*ren ist daß alsdenn auch seyn wird

$$\beta^2+\gamma^2+(\delta+pu)^2+8=(b+pu)^2+(c+2u)^2+(d+2u)^2$$

si ponatur $u=(\delta-b)\,p-(c+d)$.[2] Ich weiß gar wohl daß u noch auf unzehliche andere Arten *determini*ret werden kan, ich bin aber ein grosser Liebhaber von solchen *formulis* welche an sich selbst kurtz, und auf eine leichte art immer *general*er zu machen sind, denn wann zum Exempel allhie $(\delta+pu)=\Delta$, $b+pu=B$, $c+2u=C$, $d+2u=D$, so entstehet daraus diese *aequatio infinities generalior*

$$\beta^2+\gamma^2+(\Delta+PU)^2+8=(B+PU)^2+(C+2U)^2+(D+2U)^2\,,$$

wann P *numerum integrum quemcunque* bedeutet und

$$U=(\Delta-B)\,P-(C+D)$$

gesetzet wird.

Es folget auch *ex theoremate Fermatiano* daß $8n+4$ allezeit *in quatuor quadrata imparia quorum summa radicum est* $=2$, aber nicht allezeit *in quatuor quadrata imparia quorum summa radicum est* $=0$ *resolvi*ret werden kan.

Ferner hat auch dieses seine Richtigkeit daß eine *summa quatuor quadratorum quorum summa radicum est* $=0$ *in tria quadrata resolvi*ret werden kan, ob aber *quinque quadrata quorum summa radicum* $=0$ allezeit *in quatuor quadrata* die man angeben kan *resolvi*ret werden könne[n], weiß ich noch nicht, jedoch giebt es unendlich viele *casus* da solches angehet, ohngeachtet die *summa radicum* nicht $=0$ ist; also ist zum Exempel

$$\left(\left(2+p^2\right)b-c-d-e\right)^2+(c-2b)^2+(d-2b)^2+(e-2b)^2+4p^2b^2$$

$=$ *his quatuor*

$$\left(\left(4+p^2\right)b-c-d-e\right)^2+c^2+d^2+e^2.$$

Hiernechst ersuche ich Ew. HochEdelgb. abermal dienstlich beykommenden Zettel an Hn *Spener* zu übersenden damit die darauf *noti*rten Bücher entweder den vorigen beygefüget, oder, wann diese schon abgegangen wären mit einer andern Gelegenheit an mich überschicket werden mögen,[3] und verharre mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 3. *Aug.* 1751.

R 867 Continuation of the reply to nº 151
Petersburg, (July 23rd) August 3rd, 1751
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 147–148r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 547–548; *Euler-Goldbach* (1965), p. 338

154
Euler to Goldbach
Berlin, September 4th, 1751

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Von H. Spener vernehme ich daß die von Ewr. Hochwohlgb. verlangten Bücher nächstens abgeschickt werden sollen;[1] welche Nachricht ich vorher abwarten wollte, ehe ich auf Ewr. Hochwohlgeb. beyde geehrteste Schreiben antwortete. Inzwischen so groß das Vergnügen auch ist, welches ich in Betrachtung der Eigenschafften der Zahlen finde, so wird mir doch diese Materie, wann ich einige Zeit mit gantz andren Untersuchungen umgegangen, so fremd, daß ich mich so bald nicht mehr darein finden kan. Allso konnte ich den Grund des schönen *Theorematis*, dessen Ewr. Hochwohlgb. Meldung thun, daß eine *summa* 4 *quadratorum* $aa+bb+cc+dd$, *quorum summa radicum* $a+b+c+d=0$, allzeit in drey *Quadrata resolvir*t werden könne, so gleich nicht einsehen, da doch derselbe ziemlich offenbar, indem

$$aa+bb+cc+dd = aa+bb+cc+(a+b+c)^2 = (a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2 .$$

Doch läst sich auf gleiche Weise nicht darthun daß eine *Summa* 5 *quadratorum* $aa+bb+cc+dd+ee$ *in* 4 *Quadrata resolvir*t werden könne, soofft die *summa radicum* $a+b+c+d+e=0$. Allein aus dem vorigen erhellet, daß diese *Resolution* statt findet, so offt die 5 *radices* a, b, c, d, e so beschaffen sind, daß vier derselben zusammen genommen nichts werden, welches auf so vielerley Art geschehen kan, da es erlaubt ist eine jede *radicem* sowohl *affirmative* als *negative* zu nehmen, daß es schwehr seyn würde, 5 solche Zahlen anzuzeigen, davon nicht 4 zusammen genommen auf 0 gebracht werden könnten.

Oder die *summa* 5 *quadratorum* $aa+bb+cc+dd+ee$ läst sich in 4 *Quadrata resolvi*ren in folgenden Fällen

$$a\,..\,b\,..\,c\,..\,d=0$$
$$a\,..\,b\,..\,c\,..\,e=0$$
$$a\,..\,b\,..\,d\,..\,e=0$$
$$a\,..\,c\,..\,d\,..\,e=0$$
$$b\,..\,c\,..\,d\,..\,e=0$$

wo das Zeichen .. statt $\pm$ gesetzt ist: dahero jede von diesen 5 *aequation*en 8 in sich schliesst, und folglich 40 darinn enthalten sind. Wann allso die *radices* a, b, c, d, e alle *affirmative* genommen werden, und unter diesen 40 *formul*n nur eine enthalten ist die $= 0$, so kan man sicher schliessen, daß die *summa quinque quadratorum* $aa + bb + cc + dd + ee$ sich *in summam* 4 *quadratorum* verwandeln lasse.

Dieses folget nun aus dem einigen Satz, daß $aa+bb+cc+dd = \square+\square+\square$ wann $a + b + c + d = 0$; weil nun eine *summa* 4 *quadratorum* in unendlich viel andern Fällen auch *in* 3 *quadrata resolvir*t werden kan, so können daher noch unendlich mal mehr *Condition*en angezei[g]t werden unter welchen *summa* 5 *Quadratorum in quatuor quadrata resolvir*t werden kan.

So offt die *quatuor quadrata* $aa+bb+cc+dd$ so beschaffen daß $a+b+c+d = 2$, so ist

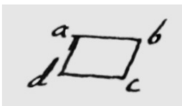
$$aa + bb + cc + dd = (a + b - 1)^2 + (a + c - 1)^2 + (b + c - 1)^2 + 1,$$

folglich ist $aa+bb+cc+dd-1$ *in* 3 *quadrata resolubel.* Da nun $8n+3$ *in* 3 *quadrata resolubel*, wann man setzt

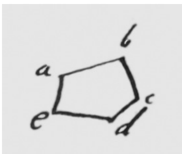
$$8n + 3 = (a + b - 1)^2 + (a + c - 1)^2 + (b + c - 1)^2$$

so wird $8n + 4 = aa + bb + cc + dd$ dergestalt daß $a + b + c + d = 2$. Und dieses ist das schöne *Theorema* welches Ewr. Hochwohlgb. aus dem *Theoremate Fermatiano* hergeleitet haben.

Ich bin neulich auf eine Betrachtung gefallen, welche mir nicht wenig merkwürdig vorkam: dieselbe betrifft, auf wie vielerley Arten ein gegebenes *Polygonum* durch *Diagonal* Linien in *Triangula* zerschnitten werden könne.



Allso ein *quadrilaterum* kan entweder durch die *Diagonalem ac* oder durch *bd*, und allso auf 2^erley^ Art in zwey *Triangula resolvir*t werden.



Ein Fünfeck wird durch 2 *Diagonales* in 3 *Triangula* getheilet, und solches kan auf 5^erley^ verschiedene Arten geschehen nehmlich durch die *Diagonales*

$$\text{I.}\ \begin{matrix} ac \\ ad \end{matrix}\ ;\ \text{II.}\ \begin{matrix} bd \\ be \end{matrix}\ ;\ \text{III.}\ \begin{matrix} ca \\ ce \end{matrix}\ ;\ \text{IV.}\ \begin{matrix} db \\ da \end{matrix}\ ;\ \text{V.}\ \begin{matrix} ec \\ eb \end{matrix}\ .$$

Ferner wird ein Sechseck durch 3 *Diagonales in* 4 *Triangula* zertheilet, und dieses kan auf 14 verschiedene Arten geschehen.

Nun ist die Frage *Generaliter*, da ein *Polygonum* von n Seiten durch $n-3$ *Diagonales in* $n-2$ *Triangula* zerschnitten wird, auf wie vielerley verschiedene Arten solches geschehen könne. Setze ich nun die Anzahl dieser verschiedenen Arten $= x$ so habe ich *per Inductionem* gefunden[2]

wann	$n =$	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
so ist	$x =$	1,	2,	5,	14,	42,	132,	429,	1430.

Hieraus habe ich nun den Schluß gemacht, das[!] *generaliter* sey

$$x = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 18 \cdot 22 \cdots (4n-10)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (n-1)}$$

oder es ist

$$1 = \frac{2}{2}; \quad 2 = 1 \cdot \frac{6}{3}; \quad 5 = 2 \cdot \frac{10}{4}; \quad 14 = 5 \cdot \frac{14}{5}; \quad 42 = 14 \cdot \frac{18}{6}; \quad 132 = 42 \cdot \frac{22}{7};$$

daß allso aus einer jeden Zahl die folgende leicht gefunden wird. Die *Induction* aber, so ich gebraucht, war ziemlich mühsam, doch zweifle ich nicht, daß diese Sach nicht solte weit leichter entwickelt werden können. Über die *Progression* der Zahlen 1, 2, 5, 14, 42, 132, *etc.* habe ich auch diese Eigenschaft angemerket, daß

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + etc. = \frac{1 - 2a - \sqrt{(1-4a)}}{2aa};$$

allso wann $a = \frac{1}{4}$, so ist

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + etc. = 4.$$

Alle die meinige lassen sich zu Ewr. Hochwohlgeb. beständiger Gewogenheit gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung Lebenslang zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4[ten] *Sept.*
1751.

R 868 Reply to n° 152 and n° 153
Berlin, September 4th, 1751
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 95–96r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 549–552; *Euler-Goldbach* (1965), p. 339–340

155

Goldbach to Euler

Petersburg, October (5th) 16th, 1751

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Aus Eurer Hochedelgebohrnen werthem Schreiben vom 4. *Sept.* habe ich mit vergnügen die leichte *legem progressionis* von $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + \&c.$ ersehen.[1] Wann mir wäre aufgegeben worden die *coefficientes incognitos* b, c, d, *&c. in serie*

$$A \ldots\ 1 + ba + ca^2 + da^3 + ea^4 + \&c. = \frac{1 - 2a - \sqrt{1-4a}}{2a^2}$$

zu *determini*ren, würde ich die *solution* kaum unternommen haben; da ich aber diese *coëfficientes* bereits *exprimi*ret gesehen, so habe ich zwey *method*en zur *Solution* gefunden:

(1.) weil aus der *summa* $\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2a^2} = A$ folget, daß $1 + aA = A^{\frac{1}{2}}$ oder, daß

$$B \ldots\ 1 + a + ba^2 + ca^3 + da^4 + \&c.$$

in se multiplicata $= A$ seyn muß, so wird

$$B^2 \quad = \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & +a & +ba^2 & +ca^3 & +da^4 & \ldots \\ . & a & +a^2 & +ba^3 & +ca^4 & \ldots \\ . & . & ba^2 & +ba^3 & +b^2a^4 & \ldots \\ . & . & . & +ca^3 & +ca^4 & \ldots \\ . & . & . & . & +da^4 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{array} \right.$$

$$= \quad A \ldots\ 1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4\ \ldots$$

nemlich $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$, *&c.*

(2.) Wann in der *serie* A gesetzt wird $a = \alpha - \alpha^2$, so wird die *summa seriei*

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^2} = E \ldots\ 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \&c.$$

und die *series* A verwandelt sich in[2]

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ . & +b\alpha & -b\alpha^2 & & & \\ . & . & +c\alpha^2 & \mathbin{:\!+\!:}\, 2c\alpha^3 & +c\alpha^4 & \\ . & . & . & +d\alpha^3 & \mathbin{:\!+\!:}\, 3d\alpha^4 & \\ . & . & . & . & +e\alpha^4 & \ldots \\ . & . & . & . & . & \ldots \end{array}$$

$$= \quad E\ \ldots\ 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4\ \ldots$$

Comparatis singulis terminis seriei A transmutatae cum singulis seriei E fit $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$ *&c.*

Ich hatte in meinem Briefe vom 15. *Jun.* unter anderm auch des *casus* erwehnung gethan, wann in der *aequatione*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = \textit{quatuor quadratis}$$

$$\delta = \frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3} \quad \textit{numero integro};$$[3]

selbigen *casum* haben Ew. Hochedelg. in Dero Antwort mit Stillschweigen übergangen, es sind aber die *quatuor quadrata invenienda* in solchem falle[4]

$$\frac{(2\alpha + 2\beta - \gamma + 6)^2}{3^2} + \frac{(2\alpha + 2\beta - \gamma - 6)^2}{3^2} + \frac{(-\alpha + 2\beta + 2\gamma)^2}{3^2} + \frac{(2\alpha - \beta + 2\gamma)^2}{3^2}$$

und der *valor* δ kan noch *general*er angenommen werden wann man setzet

$$\delta = \frac{\alpha - 2q^2\beta - 2q\gamma}{1 + 2q^2} = \textit{numero integro}$$

und zugleich

$$\varepsilon = \frac{-2q\alpha - 2q\beta + \left(2q^2 - 1\right)\gamma}{1 + 2q^2} = \textit{numero integro},$$

quibus positis erunt

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta - \alpha + \beta)^2 + \varepsilon^2.$$

Hinc sequitur pro quocunque casu $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8$ *assignari posse quatuor quadrata integra si* $\gamma^2 + 2(\beta + \delta)(\alpha - \delta)$ *sit numerus quadratus, ubi* α, β, *&c. sunt numeri permutabiles sive affirmativi sive negativi.*

Im gleichen *positis tribus quadratis imparibus* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8n + 3$ *et* $\delta = \left(u^2 - u - 4n - 1\right)$ *ubi u sit numerus quicunque integer, erunt*

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta - u)^2 + (\delta + u - 1)^2 .$$

Unter die *problemata* zu deren *solution* es an einer sicheren *methode* fehlet, rechne ich auch dieses: *Determinare numerum e per f et constantes hac lege ut* $2e^2 - f^2 + 2$ *fiat quadratum.* <u>*Solutio*</u>: *Ponatur* $e = 13^2 f \pm 239$.[5]

Von Hn *Spener* habe ich nachricht erhalten daß die Bücher von Berlin schon abgesandt worden, welches mir sehr lieb ist,[6] und ich verharre im übrigen mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 16. *Oct. st. n.* 1751.

R 869 Reply to n° 154
Petersburg, October (5th) 16th, 1751
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 149–150r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 553–555; *Euler-Goldbach* (1965), p. 340–342

156
Euler to Goldbach
Berlin, December 4th, 1751

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. Schwierigkeit betreffend die Auswicklung der *Formul* $\dfrac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa}$ wird sogleich gehoben, wann man die *Formul* $\sqrt{(1-4a)} = (1-4a)^{\frac{1}{2}}$ nach gewöhnlicher Art in eine *Seriem* verwandelt; dann da

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-4a)} = 1 &- \frac{1}{2}\cdot 4a - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot 4^2a^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 4^3a^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 4^4a^4 \\ &- \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot 4^5a^5\ [-\ etc.]\end{aligned}$$

oder wann ein jeder *coefficiens numericus* des *Termini antecedentis*, die *potestatem* von 4 mit eingeschlossen, durch P angedeutet wird, so wird

$$\sqrt{(1-4a)} = 1 - 2a - \frac{4}{4}Pa^2 - \frac{12}{6}Pa^3 - \frac{20}{8}Pa^4 - \frac{28}{10}Pa^5 - etc.$$

oder

$$\sqrt{(1-4a)} = 1 - 2a - \frac{2}{2}Pa^2 - \frac{6}{3}Pa^3 - \frac{10}{4}Pa^4 - \frac{14}{5}Pa^5 - etc.,$$

folglich

$$\begin{aligned}\sqrt{(1-4a)} = 1 &- 2a - 2\cdot\frac{2}{2}\,a^2 - 2\cdot\frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}\,a^3 - 2\cdot\frac{2\cdot 6\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\,a^4 \\ &- 2\cdot\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^5 - etc.\end{aligned}$$

Dahero bekommt man

$$\frac{1-2a-\sqrt{(1-4a)}}{2aa} = \frac{2}{2} + \frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}\,a + \frac{2\cdot 6\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}\,a^2 + \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^3 + etc.,$$

wobey merkwürdig ist daß alle diese *Coefficient*en gantze Zahlen werden, welches zu besondern Betrachtungen Anlaß geben kan.

Allso gibt auch $\sqrt[3]{}(1-9a)$ eine *Seriem*, deren alle *coefficient*en gantze Zahlen werden, nehmlich

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{}(1-9a) = 1 \quad & - \quad 3a - 3\cdot\frac{6}{2}\,a^2 - 3\cdot\frac{6\cdot 15}{2\cdot 3}\,a^3 - 3\cdot\frac{6\cdot 15\cdot 24}{2\cdot 3\cdot 4}\,a^4 \\ & - \quad 3\cdot\frac{6\cdot 15\cdot 24\cdot [33]}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,a^5 - etc.,\end{aligned}$$

und *generaliter* geschieht dieses

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{}(1-nna) = 1 \quad & - \quad na - n\,\frac{(nn-n)}{2}\,a^2 - n\,\frac{(nn-n)\,(2nn-n)}{2\cdot 3}\,a^3 \\ & - \quad n\,\frac{(nn-n)\,(2nn-n)\,(3nn-n)}{2\cdot 3\cdot 4}\,a^4 - etc.\end{aligned}$$

Ewr. Hochwohlgeb. *casus quo*

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8 = quatuor\ \square$$

nehmlich[1]

$$\delta = \frac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$$

hat allerdings etwas besonders an sich, welches ich so gleich nicht bemerket, und noch jetz nicht sehe wie derselbe in den von mir angeführten Fällen enthalten ist. Nun sehe ich zwar daß derselbe herauskommt, wann von den gesuchten 4 *Quadratis* zwey dergestalt angenommen werden, $(\delta+2)^2+(\delta-2)^2$, da dann noch übrig ist $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2$ in 2 *quadrata* zu *resolvi*ren. Setzt man nun dieselben $(\delta+p)^2+(\delta+q)^2$ so wird

$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = 3\delta\delta+2\,(p+q)\,\delta+pp+qq$$

und

$$3\delta+p+q = \sqrt{}\,(3\alpha\alpha+3\beta\beta+3\gamma\gamma-2pp-2qq+2pq)\,.$$

Es sey nun ferner $p=\gamma+m$; $q=\gamma+n$, so wird

$$3\delta+2\gamma+m+n = \sqrt{}\,(\gamma\gamma-2\,(m+n)\,\gamma+3\alpha\alpha+3\beta\beta-2mm-2nn+2mn)\,;$$

damit nun dieses *Radicale* gleich werde

$$\sqrt{}\left(\gamma\gamma-2\,(m+n)\,\gamma+(m+n)^2\right)$$

oder $3\alpha\alpha+3\beta\beta = 3mm+3nn$ so darf man nur setzen $m=\alpha$ und $n=\beta$ und bekommt

$$3\delta+2\gamma+\alpha+\beta = \pm\,(\gamma-\alpha-\beta)$$

oder[2]

$$\delta = -\left(\frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}\right).$$

Wann um die Sach *generaler* zu machen zwey von den gesuchten 4 *Quadrat*en angenommen werden

$$(q\delta + 2)^2 + (q\delta - 2)^2 = 2qq\delta\delta + 8,$$

so muß

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma - (2qq - 1)\,\delta\delta = 2\ \textit{quadratis}\ = (\delta + f)^2 + (\delta + g)^2$$

das ist

$$\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = (2qq + 1)\,\delta\delta + 2\,(f + g)\,\delta + ff + gg$$

oder

$$(2qq + 1)\,\delta + f + g = \surd\left(2fg - 2qq\,(ff + gg) + (2qq + 1)\,(\alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma)\right).$$

Nun sey ferner $f = \dfrac{q\gamma + m}{2q - 1}$ und $g = \dfrac{q\gamma + n}{2q - 1}$, so kommt eine weitläuffige *Formul* heraus, welche ich nicht der Müh werth achte zu entwickeln, weil ich nun sehe daß daraus Ewr. Hochwohlgeb. zweyte *Formul*n nicht entspringen. Es scheint aber daß unendlich viel dergleichen *Operation*en angestellt werden können, welche immer andere *Forml*en hervorbringen; und deswegen können unendlich viel *relation*en zwischen den Buchstaben α, β, γ, δ angegeben werden, damit $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta+8$ in 4 *quadrata resolvir*t werden könne: da nun dieses ohne einige *Restriction* wahr ist, so sehe ich nicht, was dergleichen *Determination*en zur gesuchten *Demonstration* beytragen könnten.

Ich habe *rigorosissime* bewiesen, daß wann N ein *numerus integer* ist, allzeit seyn müsse $N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, wo aber A, B, C, D so wohl *numeros fractos* als *integros* andeuten: es wäre allso nur noch übrig zu zeigen, daß wann *Quatuor quadrata fracta* eine *summam integram* haben, dieselbe *summ* sich auch nothwendig *in quatuor (vel pauciora) quadrata integra* müsse zerlegen lassen. Ich kan nun wohl beweisen daß wann $\dfrac{pp}{qq} + \dfrac{rr}{ss} = N$ *numero integro*, auch seyn müsse $N = aa + bb$ *in integris*; allein jenen Beweiß kan ich nicht auf gleiche Art bewerkstelligen.[3]

Wann $2ee - ff + 2$ ein *Quadrat* seyn soll, und dazu e gesucht wird, ohne darauf zu sehen, ob e ein *numerus fractus* oder *integer* wird, so habe ich diese *Solutionem generalem* gefunden[4]

$$e = \frac{(mm - 2mn + 2nn)\,f + mm - 4mn + 2nn}{2nn - mm},$$

wo man für m und n *numeros quoscunque* annehmen kan.

Will man aber nur die *valores integros* für e haben damit $2e^2 - f^2 + 2$ ein *Quadrat* werde, so dienen dazu folgende *Formulae in infinitum*:

$$\begin{array}{lrr}
e = & f\pm & 1\\
e = & 5f\pm & 7\\
e = & 29f\pm & 41\\
e = & 169f\pm & 239\\
e = & 985f\pm & 1393\\
e = & 5741f\pm & 8119\\
 & \textit{etc.}; &
\end{array}$$

die *Lex progressionis* ist diese daß wann zwey dergleichen *formulae se immediate insequentes* sind

$$\begin{aligned} e &= Mf \pm m \\ e &= Nf \pm n, \end{aligned}$$

die folgende seyn muß

$$e = (6N - M)\ f \pm (6n - m)\,.$$

Inzwischen kan man doch alle diese *Formul*n durch eine einige *generalformul* ausdrücken: *Sit q numerus impar quicunque, dico fore*

$$e = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^q + \left(\sqrt{2}-1\right)^q}{2\sqrt{2}}\, f \pm \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^q - \left(\sqrt{2}-1\right)^q}{2},$$

und es ist auch gewiß, daß alle Fälle, in welchen e durch gantze Zahlen ausgedruckt werden kan, in diesen *formul*n enthalten sind.[5]

Gleicher gestalt wann $(bb \pm 1)\ ee \mp 4aaff \pm 4cc\ (bb \pm 1)$ ein *Quadrat* seyn soll, so ist

$$\begin{aligned} e = \quad & \frac{\left(\sqrt{(bb\pm 1)}+b\right)^q + \left(\sqrt{(bb\pm 1)}-b\right)^q}{\sqrt{(bb\pm 1)}}\, af \\ & \pm \left(\left(\sqrt{(bb\pm 1)}+b\right)^q - \left(\sqrt{(bb\pm 1)}-b\right)^q\right) c, \end{aligned}$$

allso in diesem Fall $3ee + ff - 3 = \textit{Quadrato}$ wird

$$e = \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^q + \left(\sqrt{3}-2\right)^q}{2\sqrt{3}}\, f \pm \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^q - \left[\left(\sqrt{3}-2\right)^q\right]}{2}.$$

Nächst gehorsamster Empfehlung meines Hauses habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 4 *Dec.*
1751.

R 870 Reply to n° 155
Berlin, December 4th, 1751
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 97–98v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 556–560; *Euler-Goldbach* (1965), p. 342–344

157
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 28th) May 9th, 1752

Hochedelgebohrner Herr,
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer Hochedelgebohrnen *Dissertation de summis divisorum*, welche Sie an die hiesige *Acad*[*emie*] der Wiss[enschaften] übersandt haben ist mir von dem Hn *Prof. Grischow communici*ret worden.[1] Ich befinde mich jetzo nicht im Stande davon *pro dignitate* zu urtheilen; allein Dero bekannte Einsicht in dergleichen Sachen lässet mich an der Richtigkeit alles dessen was in bemeldter *dissertation* enthalten ist nicht zweiffeln; insonderheit habe ich mit vergnügen gesehen daß in den *numeris* 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22 *&c.* eine so schöne Ordnung von Eurer Hochedelg. bemercket worden, und glaube gäntzlich daß es *Series* giebt aus deren mehr als 100 *terminis consequentibus* die *lex progressionis*, ob sie gleich an sich selbst kurtz und leicht ist, dennoch nicht zu ersehen seyn wird, als zum Exempel:[2]

Sit series $\alpha \ldots \overset{(1.)}{1}, \overset{(2.)}{1}, \overset{(3.)}{5}, \overset{(4.)}{7}, \overset{(5.)}{1}, \overset{(6.)}{23}, \overset{(7.)}{43}$, *&c.cuius progressio haec est ut dato termino quocunque* A *et exponente termini* n, *fiat* $A \pm \sqrt{(2 \cdot 3^n - 2A^2)} =$ *termino proxime sequenti* B, *sumendo signum* $+$ *vel* $-$ *ita ut* B *non fiat divisibilis per* 3, *ex quo sequitur seriem* α *habere sororem*[3] $\beta \ldots \overset{(1.)}{1}, \overset{(2.)}{2}, \overset{(3.)}{1}, \overset{(4.)}{4}, \overset{(5.)}{11}, \overset{(6.)}{10}, \overset{(7.)}{13}$, *&c. ita comparatam ut duplum quadrati termini cuius exponens est* n *in serie* β *additum ad quadratum termini cuius exponens est idem* n *in serie* α *det* 3^n, *unde simul apparet legem progressionis seriei* β *esse* $A \pm \sqrt{3^n - 2A^2} = B$, *sumendo* $+$, *vel* $-$, *ita ut* B *non fiat divisibilis per* 3.

Sit exempli gratia $n = 4$, *erit terminus huic exponenti respondens in serie* α, 7, *quadratum eius* 49 *&* *duplum quadrati termini huic exponenti respondentis in serie* β *erit* $2 \cdot 4^2$, *ergo* $7^2 + 2 \cdot 4^2 = 3^4 = 81$.

Similiter quadratum termini cuius exponens est 5 *in serie* α, *est* 1^2, *duplum quadrati termini respondentis exponenti* 5 *in serie* β *est* $= 2 \cdot 11^2$, *ergo* $1 + 2 \cdot 11^2 = 3^5 = 243$, *et ita porro. Hinc patet solutio problematis: Dividere numerum* 3^{n+1} *in tria quadrata quorum non nisi duo sint aequalia.*[4]

Ich habe auch *observi*ret daß

$$\Box + \Box + \Box = \frac{\Box + 2\Box + 3\Box}{6}$$

oder daß in der *aequation*

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{p^2 + 2q^2 + 3r^2}{6},$$

datis a, b, c *integris* die *numeri* p, q, r allezeit *per integros exprimi*ret werden können.[5]

Hiernechst ersuche ich Ew. Hochedelgeb. dienstl[ich] inliegenden aufsatz von Büchern an Hn *Spener* abgeben zu lassen,[6] damit die Bücher zu wasser anhero gesandt und an Hn Köppen *adressi*ret werden möchten.

Ich verharre mit besonderer Hochachtung
Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.ᵗ Petersbourg
den 9. *Maii* 1752.

<u>*vert*[*e*]</u>

Daß ein jeder *numerus* $\left(2m^2+1\right)^n$ in drey *quadrata quorum duo sunt aequalia resolvi*ret werden kan, ist gar leicht auf folgende art zu *demonstri*ren: *Sit*

$$\left(2m^2+1\right)^n = p^2 + 2m^2q^2,$$

erit

$$\left(2m^2+1\right)^{n+1} = \left(p \pm 2m^2q\right)^2 + 2m^2\left(p \mp q\right)^2;$$

nun aber ist die *propositio antecedens* wahr in *casu* $n = 1$ (denn es wird $p = q = 1$), also ist auch die *propositio consequens* wahr, weil auf gleiche Art aus jedem *casu* der *proxime sequens determini*ret werden kan.

Der *P. Bouhours* saget an einem Orte: *Comme ces Messieurs m'ont reproché plusieurs fois que je lisois ce que je ne devrois point lire, je me suis attaché plus que jamais à la lecture du Nouveau Testament.*[7]

Hierüber hat ein gewisser *Autor* nachfolgende *Critique* gemacht: *Je ne <u>devrois</u> est là une faute de temps; il falloit avoir mis: que je lisois ce que je ne <u>devois</u> point lire, autrement il faudra supposer que cet Auteur lit encore les livres qu'on lui a reproché de lire.*

Ich möchte gern wissen ob diese *Critique*, welche sehr *subtile* ist, von *M.ʳ Achard* oder von *M.ʳ Formey* vor richtig erkannt wird, im fall Ew. Hochedelg. gelegenheit hätten sich darüber zu *informi*ren.[8]

R 871 Petersburg, (April 28th) May 9th, 1752
Original, 3 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 153–155v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p.561–563; *Euler-Goldbach* (1965), p. 344–345

158
Euler to Goldbach
Berlin, May 30th, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die *Series* $\overset{1}{1}, \overset{2}{1}, \overset{3}{5}, \overset{4}{7}, \overset{5}{1}, \overset{6}{23}, \overset{7}{43}$, *etc.* von welcher Ewr. Hochwohlgb. diese schöne Eigenschafft angemerket, daß $B = A \pm \sqrt{\left(2 \cdot 3^n - 2A^2\right)}$, ist dem ersten Anblick nach so *irregulair*, daß sie nach keinem gewissen Gesätz fortzugehen scheinet. Weil aber die bemerkte Eigenschafft statt findet, die *termini* mögen *affirmative* angenommen werden oder *negative*, so kan man denselben solche *signa* vor setzen, daß eine sehr *regul*mässige *Series* herauskommt, nehmlich:[1]

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & n & n+1 \;\; n+2 \\ -1 & +1 & +5 & +7 & -1 & -23 & -43 & -17 & +215 & \textit{etc.} & +P & +Q+R \end{array}$$

als welche *recurrens* ist von der Eigenschaft daß $R = 2Q - 3P$; folglich ist Kraft der *Natur* dieser *Serierum*

$$P = \frac{-\left(1+\sqrt{-2}\right)^n - \left(1-\sqrt{-2}\right)^n}{2}$$

und

$$Q = \frac{-\left(1+\sqrt{-2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{-2}\right)^{n+1}}{2},$$

folglich $2 \cdot 3^n = QQ - 2PQ + 3PP$; und allso

$$Q = P + \sqrt{(2 \cdot 3^n - 2PP)}\,.$$

Eine gleiche Beschaffenheit hat es mit der anderen *serie sorore*, welche mit den gehörigen *signis* diese *Form* bekommt:[2]

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & n & n+1 \;\; n+2 \\ +1 & +2 & +1 & -4 & -11 & -10 & +13 & \ldots & p & +q \;\; +r\,, \end{array}$$

da auch $r = 2q - 3p$ und allso

$$p = \frac{\left(1+\sqrt{-2}\right)^n - \left(1-\sqrt{-2}\right)^n}{2\sqrt{-2}};$$

und

$$q = p + \sqrt{(3^n - 2pp)}\,.$$

Was aber die schöne Verwandtschafft dieser beyden *serierum* anlangt, so habe ich überhaupt gefunden, wann man zwey solche *series* hat

$$\begin{array}{llllll} & (0) & (1) & (2) & (3) & (4) \\ \alpha \ldots & 1, & a, & aa-b, & a^3-3ab, & a^4-6aab+bb \\ & & & & & (n) \\ & & & & \ldots & \dfrac{\left(a+\sqrt{-b}\right)^n+\left(a-\sqrt{-b}\right)^n}{2}=X \\ \beta \ldots & 0, & 1, & 2a, & 3aa-b, & 4a^3-4ab \\ & & & & \ldots & \dfrac{\left(a+\sqrt{-b}\right)^n-\left(a-\sqrt{-b}\right)^n}{2\sqrt{-b}}=Y \end{array}$$

welche beyde *recurrentes* sind von der *natur* das[!] $C = 2aB - (aa + b)A$, wann nehmlich A, B, C *tres termini successivi* sind, so ist immer $XX+bYY = (aa + b)^n$. Setzt man nun $a = 1$; $b = 2$; so kommen Ewr. Hochwohlgeb. beyde *series* heraus.[3]

Dero Anmerkung daß allezeit $aa + bb + cc = \dfrac{pp + 2qq + 3rr}{6}$, beruhet auf diesem Grund daß $p = 2a + b - c$; $q = a - b + c$; und $r = b + c$. Dieselbe hat mir aber Anlaß gegeben zu suchen, in welchen Fällen es möglich sey daß $aa + bb + cc = fpp + gqq + hrr$: zu diesem Ende setze ich: $p = \alpha a + \beta b + \gamma c$; $q = \delta a + \varepsilon b + \zeta c$; $r = \eta a + \theta b + \iota c$; und da muß folgenden 6 *aequation*en ein Genügen geleistet werden:

$$f\alpha\alpha + g\delta\delta + h\eta\eta = 1; \quad f\beta\beta + g\varepsilon\varepsilon + h\theta\theta = 1; \quad f\gamma\gamma + g\zeta\zeta + h\iota\iota = 1$$
$$f\alpha\beta + g\delta\varepsilon + h\eta\theta = 0; \quad f\alpha\gamma + g\delta\zeta + h\eta\iota = 0; \quad f\beta\gamma + g\varepsilon\zeta + h\theta\iota = 0$$

deren *Resolution* nicht wenig Mühe kostet. Ich habe dieselbe folgender Gestalt herausgebracht: für β, γ, ε, ζ kan man annehmen, was man will, und ausser denselben noch nach Belieben die Zahlen m und n, so wird:

$$\alpha = \frac{n}{m}(\beta\varepsilon + \gamma\zeta); \quad \delta = -\frac{m}{n}; \quad \eta = mn(\gamma\varepsilon - \beta\zeta)$$

$$\theta = mm\gamma + nn\zeta(\beta\varepsilon + \gamma\zeta); \quad \iota = -mm\beta - nn\varepsilon(\beta\varepsilon + \gamma\zeta)$$

und ferner

$$f = \frac{mm}{mm(\beta\beta + \gamma\gamma) + nn(\beta\varepsilon + \gamma\zeta)^2}$$
$$g = \frac{nn}{mm + nn(\varepsilon\varepsilon + \zeta\zeta)}$$

und

$$h = \frac{fg}{mmnn}.$$

Allso ist

$$aa + bb + cc = \frac{3pp + 14qq + rr}{42}$$

wann $p = 3a + 2b - c$, $q = a - b + c$, $r = -a + 4b + 5c$. Dergleichen *Theoremata* können allso unendlich viel aus diesen *generalformul*n herausgebracht werden.[4]

Wegen der überschriebenen *Pas*[*s*]*age* des *P. Bouhours*[5] habe ich erstlich den H. *De Maupertuis* als *un des quarante de l'Académie françoise*[6] befraget, welcher nachdem er dieselbe nebst der *Critique* etlichemal überlesen gesagt, das[!] er ohne einiges Bedenken sich so wohl des *devrois* als des *devois* bedienen würde, und fügte hinzu: *il est plaisant, qu'on a critiqué le Pere Bouhours sur ce mot.*

M.^{r} *Achard* lässt Ewr. Hochwohlgeb. wegen des in ihn gesetzten guten Zutrauens sein gehorsamstes *Compliment* vermelden, und nachdem er die Sache wohl erwogen, so vermeint er das[!] *devrois* besser sey: doch will er das *devois* nicht verwerfen.

Ich habe darüber auch den H. *Beguelin* Hofmeister bey dem Prinz *Friderich* von Preussen, welcher für ungemein stark in der *Französi*schen Sprache gehalten wird, befraget; und dieser *approbir*t die *Critique* vollkommen.

M.^{r} *De Maupertuis* hatte noch diesen Einfall, daß man untersuchen müsste, ob man auf *Latein* sagen soll, *quos legere non debebam* oder *non deberem*; und die *Decision* im *Lateini*schen, welche weder Er noch ich zu geben uns getraueten, würde auch im Frantzösischen gelten. Hieraus werden allso Ewr. Hochwohlgeb. Selbst die Sache am besten *decidi*ren.

Mir kommt des H. *Beguelin*s Entscheidung deswegen am gründlichsten vor, weil er die *Regul*n der Französischen Sprache mit allem Fleiß studirt hat, welche *M.*^{rs} *de Maupertuis* und *Achard* nur *ex usu* wissen, und beyde sagen mir, daß Sie oft der Sache einen andren *Tour* geben müssen, weil sie in Zweifel stehen, ob gewisse *Expression*en, die sie brauchen wollten, recht sind oder nicht.

Die Bücher, so Ewr. Hochwohlgb. verlangen, wird H. Spener auch unverzüglich besorgen;[7] ich habe die Freyheit genommen auf die Liste noch ein sehr wichtiges Buch: *La Monogamie par M.*^{r} *de Premontval* zu setzen, welches wegen seiner Gründlichkeit und gantz besondern Ausführung einen allgemeinen Beyfall findet:[8] dahero ich gewiß versichert bin, daß Ewr. Hochwohlgeb. meine genommene Freyheit gut heissen werden.

Neulich bin ich auch auf *curieuse integration*en verfallen:[9] dann gleich wie von dieser *aequation*

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$$

das *integrale* ist

$$yy + xx = cc + 2xy\sqrt{(1-cc)}$$

allso ist von dieser *Aequation*

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}$$

das *integrale*:

$$yy + xx = cc + 2xy\sqrt{\left(1-c^4\right)} - ccxxyy;$$

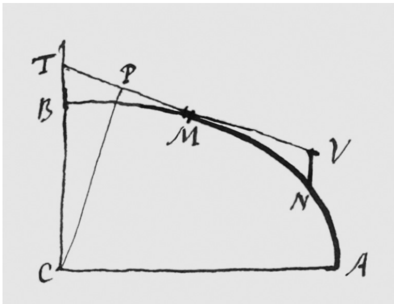
ferner ist von dieser *Aequation*

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^3)}}$$

das *Integrale*:

$$xx + yy + ccxxyy = 4c - 4cc\,(x+y) + 2xy - 2cxy\,(x+y)\,.$$

Aus solchen *Formul*n habe ich folgendes *Theorema* hergeleitet:



In quadrante elliptico ACB, si ad punctum quodvis M ducatur tangens VMT alteri axi CB occurrens in T, eaque capiatur $TV = CA$ et ex V ipsi CB agatur parallela VN; itemque ex centro C in tangentem perpendiculum CP, dico fore differentiam arcuum BM et AN rectificabilem, scilicet $BM - AN = MP$.[10]

Dieses Jahr habe ich wieder den auf den *Saturnum* gesetzten Preiß, welcher doppelt war nehmlich von 5000 *lb*, allein erhalten.[11]

Nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen habe ich die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 30[ten] *May*
1752.

R 872 Reply to n° 157
Berlin, May 30th, 1752
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 108–109v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 564–568; *Euler-Goldbach* (1965), p. 346–348

159

EULER TO GOLDBACH

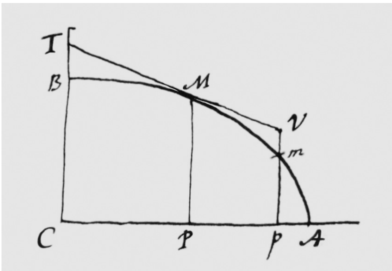
Berlin, June 3rd, 1752

Hochwohlgebohrner Herr

Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Seit dem vorigen Post Tag hat mir auch *M.r Formey* seine Meynung über die gemeldte Stelle des *P. Bouhours* zugeschickt, welche allso Ewr. Hochwohlgeb. nicht habe ermangeln wollen zuzustellen.[1]

Die Eigenschafft der *Ellipsis*, daß darinn zwey *arcus*, deren *differentia rectificabilis* ist, können angegeben werden,[2] scheinet um so viel mehr merkwürdig zu seyn, da bißher die *arcus elliptici* auf keinerley Art haben unter sich verglichen werden können: Seit dem habe ich aber angemerkt, daß wann man das *Problema* umgekehrt vorträgt, und diejenige krumme Linie sucht, welcher die gedachte Eigenschaft zukommt, die *Solution* durch die gewöhnlichen *Methoden* gefunden werden kan.



Quaeratur scilicet curva AMB hujus indolis ut ducta in quovis puncto M tangente TMV axi CB in T occurrente, indeque sumta $TV = CA$, *si ex V ad axem CA perpendicularis agatur Vmp curvam in m secans; differentia arcuum BM et Am fiat rectificabilis scilicet* $= \dfrac{CP \cdot Cp}{b}$.

Solutio: Pro puncto M sit abscissa $CP = x$, *arcus* $BM = s$; *pro puncto autem m sit abscissa* $Cp = X$ *et arcus* $Bm = S$; *et ob curvae continuitatem relatio inter X et S similis esse debet relationi inter x et s. Ponatur totus arcus* $AMB = A$, *erit arcus* $Am = A - S$, *ideoque oportet sit*

$$BM - Am = s - A + S = \frac{xX}{b};$$

hincque differentiando

$$ds + dS = \frac{X\,dx + x\,dX}{b}.$$

Deinde quia $TV = CA = a$ *est tangens curvae in M erit* $ds : dx = TV : Cp = a : X$; *ergo* $ds = \dfrac{a\,dx}{X}$. *Cum autem puncta M et m sint inter se permutabilia ob* *curvae continuitatem, erit pari modo* $dS = \dfrac{a\,dX}{x}$, *sicque habebitur*

$$ds + dS = \frac{a\,dx}{X} + \frac{a\,dX}{x}.$$

At invenimus $ds + dS = \dfrac{X\,dx + x\,dX}{b}$, *unde fit*

$$\frac{a\,dx}{X} + \frac{a\,dX}{x} = \frac{X\,dx + x\,dX}{b}$$

seu

$$ab\,(x\,dx + X\,dX) = Xx\,(X\,dx + x\,dX)$$

quae aequatio integrata dat:

$$ab\,(xx + XX) = XXxx \pm c^4;$$

ideoque

$$XX = \frac{abxx \mp c^4}{xx - ab} = \frac{\pm\,c^4 - abxx}{ab - xx}$$

et

$$X = \sqrt{\frac{c^4 - abxx}{ab - xx}}.$$

Consequenter

$$ds = \frac{a\,dx}{X} = \frac{a\,dx\sqrt{(ab - xx)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Sit applicata $PM = y$; *ob* $dy = \sqrt{\left(ds^2 - dx^2\right)}$ *erit*

$$dy = \frac{dx\sqrt{\left(a^3b - aaxx - c^4 + abxx\right)}}{\sqrt{(c^4 - abxx)}}.$$

Cum nunc constans c pro lubitu accipi queat, dantur infinitae curvae problemati satisfacientes, inter quas erit curva algebraica, si $c^4 = a^3b$; *quo casu fit*

$$dy = \frac{x\,dx\sqrt{(ab - aa)}}{\sqrt{ab\,(aa - xx)}},$$

et integrando

$$y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{b}\right)}\,(aa - xx)$$

quae est aequatio pro ellipsi, existente $CA = a$ *et* $CB = a\sqrt{\dfrac{b-a}{b}}$; *hincque*

$$b = \frac{a^3}{aa - CB^2}.$$

Ita vicissim ellipsis proprietas ante memorata hinc colligitur. Scilicet sumta tangente $TMV = CA$, unde punctum m definitur, erit

$$BM - Am = \frac{CP \cdot Cp\left(CA^2 - CB^2\right)}{CA^3},$$

cujus expressionis valor reducitur ad portionem tangentis inter punctum M et perpendiculum ex C in eam dimissum interceptam.

Ich habe die Ehre, mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren
Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 3ten *Junii*
1752.

R 873 Continuation of nº 158
Berlin, June 3rd, 1752
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 99rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 569–571; *Euler-Goldbach* (1965), p. 348–349

160
GOLDBACH TO EULER
[Petersburg, June/July 1752][1]

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer Hochedelgebohrnen beyde mir sehr angenehme Schreiben vom 30. *Maii* und 3. *Jun.* habe ich allhie den 10. und 14. *eiusd*[*em*] wohl erhalten. Was die von Eurer Hochedelg. angeführten *Series* betrifft[2] deren *progressiones* ich durch gewisse *formulas determini*ret hatte, sehe ich mit vergnügen daß Sie selbigen auch die *terminos generales* bestimmet haben; ich erinnere mich hiebey daß ich schon ehemals mündlich gegen Ew. Hochedelg. erwehnet daß alle *quantitates finitae tam rationales quam quovis modo irrationales* durch die einige *seriem* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ *&c. exprimi*ret werden könnten und die gantze Kunst nur darauf ankommen würde, wie die abwechselungen der *signorum* $+$ *et* $-$ zu *determini*ren sind.[3] Solchergestalt ist zum Exempel

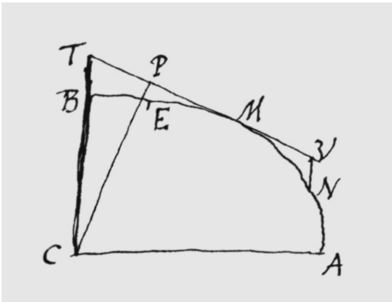
$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \&c. = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{18} + \&c.;$$

die *Signa* $+$ *et* $-$ werden allhie so abgewechselt daß *in terminis qui locis imparibus exstant* die *signa alterni*ren, nemlich $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} -$ *&c.*, *in terminis vero qui locis paribus exstant*[4] *eadem signa occurrunt quibus dupla eorum affecta sunt*;

also hat der *terminus* $\frac{1}{8}$ das *signum* + weil $\frac{1}{4}$ das *signum* + hat; $\frac{1}{12}$ hat das *signum* −, weil $\frac{1}{6}$ das *signum* − hat *&c.*

Was übrigens Ew. Hochedelg. von den zwey *seriebus* allwo $XX + bYY = (a^2 + b)^n$ imgleichen von $\square + \square + \square = f\,\square + g\,\square + h\,\square$ melden, zeiget alles von der grossen Fertigkeit welche Sie für unzehlichen andern erlanget haben dergleichen *calculos* einzusehen und unendlich *general*er zu machen.[5]

Ich habe vorher nicht gewust auch vieleicht niemals daran gedacht ob es möglich sey den *quadrantem ellipsis in aliquot partes aequales* zu theilen;



aus dem jenigen aber was Ew. H. in Dero Schreiben anführen[6] lässet sich leicht schlüssen (1.) daß es zwar möglich diesen *quadrantem* in zwey gleiche Theile zu theilen wenn $PM = 0$ genommen wird, aber (2.) schlechterdings unmöglich sey den *quadrantem* in mehrere *partes aliquotas* zu theilen ohne zugleich eine *partem assignabilem huius quadrantis* zu *rectifici*ren. Denn es sey nach Eurer Hochedelg. *figur* $AN = BE$ eine *pars aliquota quaecunque totius quadrantis*, so wird der *arcus* $EM = BM - BE =$ *rectae* PM.

Eurer Hochedelg. dancke ich sehr daß Sie denen von mir aufgesetzten Büchern so ich aus Berlin verlanget hatte, noch eines von dem Hn *Premontval* beyfügen wollen.[7]

Von den *integralibus aequationis* $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ möchte ich wissen ob Ew. H. nur allein die *casus* $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ entdecket, oder ob Sie deren noch mehr *in potestate* haben.[8] Sonst ist mir zwar die *integralis* von $\dfrac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \dfrac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$ bekannt, ich mag aber dieselbe nicht hersetzen weil ich besorge sie möchte Eurer HochE. gar zu einfältig vorkommen, hingegen gestehe ich gern daß ich auch selbige jetzo nicht hätte finden können wann ich sie nicht schon längst in einem Buche *annoti*ret hätte.

Zu dem abermal erhaltenen Preise aus Pariß *gratuli*re ich von hertzen. Die erste Nachricht davon bekam ich aus der frantzösischen Zeitung, allein das eigentliche *quantum* des *praemii* war mir entfallen. Dafern Ew. H. ein *exemplar* von der *Piece* an H.n *Prof. Grischow* schicken möchten, werde mir selbiges auf einige Tage ausbitten.[9]

Was endlich die über eine gewisse *expression* des *P. Bouhours* entstandene *difficulté* betrifft, habe ich grosse Ursach Eurer H. zu dancken daß Sie darüber die *éclaircissemens* von 4 so berühmten Männern mir *communici*ren wollen,[10] bedaure aber auch zugleich daß Ihnen dadurch mehrere Mühe als ich gedacht hätte verursachet worden. Indessen halte ich gäntzlich dafür daß wann die *difficulté* von denen *Quarante* selbst hätte *decidi*ret werden sollen, die *Sentimens* nicht weniger *partagi*ret gewesen seyn würden so daß man bey dieser Gelegenheit eben das sagen könnte was der *P. Bouhours* in der *Suite des Remarques nouvelles* gesaget hat:[11] *J'ai consulté sur cette question de fort habiles gens, & j'ai été surpris de voir que leurs sentimens ne s'accordent point*, worin er aber wiederum nach der Meinung des selben *Critici*[12] einen Fehler begangen, indem er hätte sagen sollen *ne s'accordoient point*, und auf diese Weise sollte es fast das ansehen gewinnen daß die *Quarante* welche in ihrer *Observation* über die *Remarque* 201 *de Vaugelas* gesagt haben: *On a decidé d'une voix qu'il faut dire …* vielmehr hätten sagen sollen: *qu'il faloit dire &c.*[13]

Von *M.r Achard*, welchen unter den 4 Gelehrten deren Ew. Hochedelg. Erwehnung gethan haben, nur allein persönlich kenne, bin ich ein alter *admirateur*; ich habe denselben schon vor 27 Jahren mit ungemeinem Vergnügen gehöret und erinnere mich noch eigentlich zweyer Predigten, deren eine von der *Médisance*, die andere von der dritten Bitte im Vater unser handelte.[14]

Wann Ew. H. mir die zwey oder drey kurtze *formulas* wodurch die *leges motus* von dem Hn *de Maupertuis exprimi*ret werden und wie selbige von den *formulis Leibnitianis* unterschieden sind, *communici*ren, oder auch nur melden wollten ob Sie den ersteren gäntzlich beypflichten, würden Sie mich *obligi*ren; ich weiß wohl daß diese *formulae* in einem gewissen *tomo* der *Miscellaneorum* befindlich sind, woselbst ich sie auch im durchblättern gesehen, ich erinnere mich aber nicht mehr von wem ich damals den selben *tomum* bekommen hatte.[15] Ich verharre nechst hertzlicher Anwünschung alles Vergnügens und schuldigster Empfehlung an Dero sämmtliche *Familie*, Eurer Hochedelg. treuer Diener *G.*

R 874 Reply to n° 158 and n° 159
[Petersburg, June/July 1752]
Original, 3 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 40–42r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 572–575; *Euler-Goldbach* (1965), p. 350–351

161
Euler to Goldbach
Berlin, August 5th, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ich erinnere mich noch gantz wohl von Ewr. Hochwohlgeb. gehöret zu haben daß alle mögliche Zahlen durch die *Seriem* $1 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \frac{1}{5} \,.\, \frac{1}{6} \,.$ *etc.* ausgedruckt werden können, wofern nur statt der Punkten die gehörigen Zeichen + oder − gesetzt werden.[1] Ewr. Hochwohlgeb. hatten mir auch einige solche *series* eröffnet, und wo ich nicht irre, so befand sich darunter auch die letst überschriebene

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\textit{etc.}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\ \textit{etc.;}$$

da nun jene *series* $= \frac{\pi}{4}$, wann π die *peripheriam circuli* dessen *diameter* $= 1$ andeutet; so ist

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\ \textit{etc.}$$

und folglich

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\textit{etc.}$$

welche *seriem* ich auch in meiner *Introductione in Analysin pag.* 244 angebracht.[2] Daselbst befinden sich noch viel andere *series* von dieser Art, als:

$$\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\textit{etc.}$$

ubi binarius habet signum $-$ 1, *numeri primi formae* $4n-1$ *signum* $-$ *et numeri primi formae* $4n+1$ *signum* $+$, *numeris autem compositis id signum convenit, quod iis ratione multiplicationis ex primis competit*, also $\frac{1}{60}$ *ob* $60 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$ hat das Zeichen $-\cdot-\cdot-\cdot+=-$. Ferner ist

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\ \textit{etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, *numeri primi formae* $4n-1$ *signum* $+$ *et numeri primi formae* $4n+1$ *signum* $-$. Ferner ist

$$\frac{3\pi}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\ \textit{etc.}$$

ubi binarius habet signum $+$, *numeri primi* $4n-1$ *signum* $+$, *numeri primi* $4n+1$ *excepto quinario signum* $-$. Alle dergleichen *series* folgen aus diesen beyden *formul*n:

$$\text{I.}\ \frac{\pi}{2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

wo die *Factores* nach den *numeris primis* fortgehen.

$$\text{II.}\ \frac{\pi}{3}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

als aus welchen unendlich viel andere hergeleitet werden können. Als *multiplicetur prima per* $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$; *erit*

$$\pi=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ \textit{etc.}}$$

et resolutione in seriem facta

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

ubi 2 *habet signum* $+$, *numeri primi formae* $4n-1$ *excepto ternario signum* $-$, *numeri primi* $4n+1$ *signum* $+1$. Hernach da

$$0 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right) \text{ etc.}}$$

können auch unendlich viel *series* $= 0$ gemacht werden, als

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \text{ etc.}$$

ubi omnes numeri primi habent sign[*um*] $-$. Noch mehr als in meinem Buch befindlich können auch noch aus den daselbst gegebenen *formul*n gefunden werden; als da

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right) \text{ etc.}}$$

ubi numeri primi $6n-1$ *habent* $+$, *numeri primi* $6n+1$ ... $-$, *multiplicetur per* $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$, *erit*

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right) \text{ etc.}}$$

und allso

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \text{ etc.}$$

ubi 2 *habet* $-$; 3, $+$; $6n-1$, $-$; *et* $6n+1$, $+$.[3]

Vermittelst dieser *Methode* aber kan ich keine andere *series* von dieser Art heraus bringen, als deren *summae* entweder $= 0$ oder *a quadratura circuli pendent.*

Von den *integralibus aequationis* $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^n)}}$ kan ich keine andere angeben, als die Fälle $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und $n = 6$.[4] Wann ich diesen letsten Fall Ewr. Hochwohlgeb. zu berichten vergessen habe, so ist von dieser *aequatione differentiali* $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^6)}}$ die *aequatio integralis*

$$x^4 + y^4 - 4cx^4y^4 + 4ccxxyy\,(xx+yy) - 2xxyy + 2c\,(xx+yy) + cc = 0$$

wo c die *constantem* andeutet, so durch die *integration* dazu gekommen, und nach Belieben angenommen werden kan, so daß dieses *Integrale completum* ist.

Die *Integration* dieser *Aequation* $\dfrac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \dfrac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}}$ fällt auch nicht sogleich in die Augen, wie Ewr. Hochwohlgeb. scheinen zu sagen; allein da ein jedes Glied für sich *integrabel* ist *per logarithmos*, so kan davon eine *integralis algebraica* gegeben werden: welcher Umstand sich bey obigen *Formul*n nicht befindet, da weder $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$ noch $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ noch $\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}}$ *ullo modo sive per circulum sive logarithmos integrir*t werden kan; dahero um so viel merkwürdiger ist, daß doch für jene *aequationes differentiales aequationes integrales algebraicae* angegeben werden können. Für Ewr. Hochwohlgeb. *Formul*n aber, wann ich setze $\sqrt{(1-x^n)} = v$ so wird $x^n = 1 - vv$, und

$$\frac{n\,dx}{x} = -\frac{2v\,dv}{1-vv},$$

allso

$$\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}} = -\frac{2}{n}\cdot\frac{dv}{1-vv},$$

und *integrando*

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^n)}} = -\frac{1}{n}\,\ell\,\frac{1+v}{1-v} = -\frac{1}{n}\,\ell\,\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Ebenfalls ist

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{(1-y^p)}} = \frac{-1}{p}\,\ell\,\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}} + Const.$$

folglich

$$\frac{1+\sqrt{(1-x^n)}}{1-\sqrt{(1-x^n)}} = C\left(\frac{1+\sqrt{(1-y^p)}}{1-\sqrt{(1-y^p)}}\right)^{\frac{mn}{p}},$$

welches die *Integratio completa* ist von dieser *aequatione differentiali*

$$\frac{x^{-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{my^{-1}dy}{\sqrt{(1-y^p)}\,.}$$

Es ist noch sehr zweifelhaft ob ich von meiner *Piece* über den *Saturnum* aus *Paris Exemplaria* bekommen werde?[5] dann bißher habe ich keine erhalten, und es ist so schwehr dergleichen Sachen von *Paris* zu bekommen, daß auch ein Buch, so *M.^{r} Bouguer* mir zu *Praesent* geschickt, unter Wegs verlohren gegangen.[6] Sollte ich aber bekommen können, so werde nicht ermangeln damit Ewr. Hochwohlgeb. aufzuwarten; und würde mir nicht in Sinn gekommen seyn eines an den H. *P. Grischau* zu schicken.

Als ich letstens bey *M.^{r} de Maupertuis* speisete, so habe ich die von Ewr. Hochwohlgeb. angeführten Französischen *Passagen* auf die Bahn gebracht. Die Meynung fiel dahinn daß *grammaticaliter* so wohl das *Praesens* als *Imperfectum* recht sey, allein der Sinn sey unterschieden. Allso sey es Recht: *On a decidé d'une voix qu'il faut dire ...*, weil man nicht nur so hätte sagen soll[en], sondern auch immer so sagen soll. Stünde aber *qu'il faloit dire*, so würde solches nicht mehr anzeigen, als daß man bey dem vorgelegten Fall allein so hätte reden sollen, und würde allso nicht als ein beständiges Gesätz angesehen werden können.[7]

Was Ewr. Hochwohlgeb. wegen der von *M.^{r} De Maupertuis* gegebenen *Formul*n über die *Leges motus* zu fragen belieben, wird ohne Zweifel diejenigen antreffen, wodurch Er die *Regulas communicationis Motus in conflictu corporum tam elasticorum quam non elasticorum* bestimmt; weil dieselben mit den schon längst bekannten vollkommen einerley sind, so kommen sie auch mit den *Leibnizianis* überein. Was aber das *Principium* selbst anlanget, woraus der H. von *Maupertuis* diese *regulas* hergeleitet, solches ist allerdings vollkommen neu: dann ungeacht man schon vorlängst behauptet daß die *natur via facillima* würke, so hat doch weder *Leibniz* noch jemand anders gezeigt, welches eigentlich diejenige *Quantität* sey, welche in den *operationibus naturae* ein *minimum* ist. *M.^{r} De Maupertuis* nennet diese *Quantität* die *quantitatem actionis*, und bestimmt dieselbe durch das *Product* aus der *Massa*, der Geschwindigkeit, und dem *Spatio*; und leitet daraus nicht nur die *Regulas motus* sondern andere Sachen gar schön her. Ich hatte auch schon längst gewiesen, daß *in motibus corporum coelestium* immer die *formul* $\int Mv\,ds$ ein *minimum* sey; wo M die *Massam*, v die *celeritatem*, und ds das *spatiolum percursum* andeutet. Allso ist $Mv\,ds$ die *quantitas actionis elementaris*, und $\int Mv\,ds$ die *totalis*, welche folglich nach *M.^{r} De Maupertuis* ein *Minimum* seyn muß.[8]

Ich habe die Ehre nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 5$^{\text{ten}}$ *Aug.* 1752.

Die von Ewr. Hochwohlgeb. verlangten Bücher sind schon vor 14 Tagen von hier abgegangen.[9]

R 875 Reply to n° 160
Berlin, August 5th, 1752
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 104–105v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 576–581; *Euler-Goldbach* (1965), p. 351–354

162

GOLDBACH TO EULER

Petersburg, (September 26th) October 7th, 1752

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Meine *demonstration* daß

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\text{\&c.}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\text{\&c.},$$

ist ein *casus particularis* von dieser *propositione generali*

$$\begin{aligned} &A \ldots \ \frac{1}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{d}+\frac{1}{8a}+\frac{1}{e}+\text{\&c.}\\ =\ &B \ldots \ \frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{2}{d}+\frac{2}{e}-\text{\&c.};\end{aligned}$$

sunt enim seriei A *termini impares* $=\frac{B}{2}$ *et eiusdem seriei* A *termini pares et termini impares simul sumti nempe* $\frac{B+A}{2}=A$*, ergo* $A=B$. Es sind zwar allhie in der *serie* B die *signa* $+$ *et* $-$ *alternantia* angenommen worden, es können aber auch wann nur die *summa ipsius* B *finita* ist alle *termini affirmativi* oder *quacunque lege variantes* angenommen werden; wann man also die *condition* daß in der *serie* A die *termini continuo decresci*ren sollen (*non attenta variatione signorum* $+$ *et* $-$) bey seite setzet so kan eine jede *series* B in A verwandelt werden, hingegen sehe ich nicht wie eine eintzige von denen welche Ew. Hochedelg. gefunden haben hieraus *deduci*ret werden könne. Daß aber alle solche *series* entweder $=0$ sind oder von der *quadratura circuli dependi*ren halte ich vor eine merckwürdige *observation*.[1]

Was Ew. Hochedelg. von den *casibus integrabilibus aequationis* $\frac{dx}{\surd(1-x^n)}=\frac{dy}{\surd(1-y^n)}$ melden, wird ohne zweiffel nur von denen zu verstehen seyn wo n ein *numerus integer* ist;[2] denn daß jede *aequatio*

$$\frac{dx}{\surd\left(1-x^{\frac{1}{m+1}}\right)}=\frac{a\,dy}{\surd\left(1-y^{\frac{1}{m+1}}\right)}$$

posito m *numero integro affirmativo integrabilis* sey, scheinet mir gantz gewiß zu seyn. In denen von E. H. angegebenen *casibus* aber wo $n=2$, *vel* 3, *vel* 4, *vel* 6, finde ich daß zwar die *valores* von y etwas verworren aussehen wann man die *constantem generatim* durch C *exprimi*ret[3] weil sich alsdenn allezeit *quantitates irrationales* mit einmischen, setzet man aber $C=-1$, so wird

$$\begin{aligned} &\textit{pro casu} \quad n=2; \quad y^2 = && 1-x^2; \\ &\qquad n=3; \quad y^2 = && \frac{\left(x^2+x-2\right)^2}{(1-x)^4} \\ &\qquad n=4; \quad y^2 = && \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ &\qquad n=6; \quad y^2 = && \frac{-2x^4+x^2+1}{\left(1+2x^2\right)^2} \end{aligned}$$

woraus man siehet daß alle diese *casus* in der *formula*

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2+ex+f}{1+px+qx^2+rx^3+sx^4}$$

begriffen sind, so daß wann jemand noch mehrere *casus* suchen wolte, der selbe sehr wohl thun würde wann er gleich anfangs die *constantem* $C = -1$ setzete.

Hiebey lieget ein Zettel von Dero eigenen hand[4] worauf Sie schon vor vielen Jahren aus der *aequatione* $x^2+y^2-1=0$ diese: $x^2-1=2cy+c^2$ *deduci*ret; ich zweifele aber ob $x\,dx+y\,dy = dy\sqrt{\left(x^2+y^2-1\right)}$ gesetzt werden könne wann gleich beydes *ex hypothesi* $=0$ ist, denn sonst würde auch folgen daß *positis* X *et* Y *pro functionibus quibuscunque ipsarum* x *et* y, $x\,dx+y\,dy = XY\,dy\sqrt{\left(x^2+y^2-1\right)}$ seyn könnte.

Als ich vor wenigen Tagen einige *tomos commentariorum tam antiquorum quam novorum* von der *Acad*[*emie*] der Wiss[enschaften] zum *present* bekam, hat sich mir, so bald ich den *Tom.* II. der letzteren eröfnet, des Hn Winsheims *Dissertatio de numeris perfectis praesenti*ret[5] woselbst er *p.* 77 die von Eurer HochEdelg. angegebenen *numeros perfectos*, absonderlich aber den neunten, *cum salutari clausula*: *donec contrarium fuerit probatum*, annimmt; ich zweiffele aber ob E. H. das schöne *excerptum* so er aus dem *Mersenno* anführet, schon gelesen haben, welches meines erachtens sehr lesenswürdig ist. Ob die *Cogitata Mersenni* oder des *Leuneschlos paradoxa* eher bekannt gemacht worden ist mir zwar unbekannt, ich sehe aber daß sie beyde sich in betrachtung der noch rückständigen 10 oder 11 *numerorum perfectorum* einer gleichlautenden *expression* gebrauchet. *Qui undecim alios invenerit*, sagt *Mersennus*, *noverit se analysim omnem quae fuerit hactenus superasse*, er hält aber doch die erfindung derselben nicht unmöglich; und *Leuneschlos* sagt *paradoxo* 46 *et* 47: *Vastissima et infinita numerorum multitudo capit duntaxat decem numeros perfectos; qui decem alios invenerit noverit se analysin omnem quae fuerit hactenus, superasse*, welcher zusatz aber überflüssig ist wann nach des *Autoris* vorgeben nur 10 *numeri perfecti in rerum natura* sind.[6]

An Eurer HochE. wertheste *familie* bitte ich mich bestens zu empfehlen und verharre mit besonderer Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 7. *Oct.* 1752.

R 876 Reply to n° 161
Petersburg, (September 26th) October 7th, 1752
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 156–157v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 582–585; *Euler-Goldbach* (1965), p. 355–356

163
Euler to Goldbach
Berlin, October 28th, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Ewr. Hochwohlgeb. *Methode* eine jede *seriem*

$$\frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{2}{d}+etc.$$

in eine andere als

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2b}\ etc.$$

zu verwandeln erinnere ich mich noch sehr wohl, und es können allerdings durch Hülfe derselben solche Verwandlungen gefunden werden, die sich aus der von mir gebrauchten *Methode*, als welche nur auf eine gewisse Art von Zahlen eingeschränkt ist nicht herleiten. Hingegen gibt auch meine *Methode* solche *series* welche mit jener keine Gemeinschaft haben. Da meine *Methode* nur eine gewisse Art von *Variation* in den *signis* in sich schliesst, so folgt daher, daß die *summ* aller daraus entspringenden *serierum* entweder 0 ist, oder *a circuli quadratura dependir*t; wann ich aber im Stande wäre andere *Variationes signorum* anzubringen, so zweifle ich nicht daß nicht *quaelibet quantitas pro summa* herausgebracht werden könnte.[1]

Da die *numeri primi* in Ansehung ihrer gedoppelten *Form* von $4n+1$ und $4n-1$ so sehr von einander unterschieden sind, und die Menge von beyden Gattungen *infinita* ist,[2] so habe ich die *summam* folgender *seriei proxime* untersucht:

$$A=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}+\frac{1}{31}-\frac{1}{37}-\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{47}\ etc.$$

wo die *numeri primi formae* $4n-1$ das *signum* $+$, die *formae* $4n+1$ aber das *signum* $-$ haben, in der Hoffnung ob etwan die *summa* nicht *rational* seyn möchte. Ich fund aber diese *summam* $=0,334\,980$ und allso etwas grösser als $\frac{1}{3}$; wäre *accurat* $\frac{1}{3}$ herausgekommen, so hätte die Sach allerdings Nachdenken verdienet.[3]

Da die Anzahl aller *numerorum primorum* unendlich ist, aber doch ein *infinitum infimi ordinis*, weil ich gezeigt, daß wann die Anzahl *omnium numerorum*

$= n$, die Anzahl der *numerorum primorum* seyn werde $= \ell\, n$; es ist aber $\ell\, n$ kleiner als $n^{\frac{1}{m}}$ so groß auch immer die Zahl m seyn mag:[4] so wäre die Frage, ob auch die Anzahl der *numerorum primorum*, so zum *Exempel* in dieser *formul* $aa+1$ enthalten sind, auch unendlich sey, weil dieselbe gewiß unendlich mal kleiner ist als die Anzahl aller *numerorum primorum*.[5] Hernach wann auch diese unendlich wäre, könnte man eben dieses fragen *de numeris primis hujus formae* a^4+1 oder a^8+1 *etc.* Ich habe die *numeros primos in hac forma* $aa+1$ *contentos* untersucht, und gefunden daß $aa+1$ ein *numerus primus* wird in folgenden Fällen:[6]

$a =$ 1, 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, 26, 36, 40, 54, 56, 66, 74, 84, 90, 94,
110, 116, 120, 124, 126, 130, 134, 146, 150, 156, 160, 170, 176, 180, 184,
204, 206, 210, 224, 230, 236, 240, 250, 256, 260, 264, 270, 280, 284, 300,
306, 314, 326, 340, 350, 384, 386, 396, 400,
406, 420, 430, 436, 440, 444, 464, 466, 470, 474, 490, 496,
536, 544, 556, 570, 576, 584, 594,
634, 636, 644, 646, 654, 674, 680, 686, 690, 696, 700,
704, 714, 716, 740, 750, 760, 764, 780, 784,
816, 826, 844, 860, 864, 890,
906, 910, 920, 930, 936, 946, 950, 960, 966, 986,
1004, 1010, 1036, 1054, 1060, 1066, 1070, 1094, 1096,
1106, 1124, 1140, 1144, 1146, 1150, 1156, 1174, 1176, 1184,
1210, 1234, 1244, 1246, 1274, 1276, 1290, 1294,
1306, 1314, 1316, 1320, 1324, 1340, 1350, 1354, 1366, 1374, 1376, 1394,
1406, 1410, 1416, 1420, 1430, 1434, 1440, 1456, 1460, 1494;

biß 1500 habe ich dieses *examen* getrieben, und hierdurch bin ich im Stande viel *numeros primos* anzuzeigen, welche nicht nur grösser sind als 100 000, als so weit die *Tabulae numerorum primorum* gehen,[7] sondern auch als 1 000 000; sonsten würde es gewiß sehr schwehr seyn einen *numerum primum* $> 1\,000\,000$ anzugeben.

Soll aber a^4+1 ein *numerus primus* seyn, so werden die *valores* von a seyn folgende wenige:[8]

$a = 1, 2, 4, 6, 16, 20, 24, 34.$

Doch bin ich noch weit entfernt des *Fermatii problema* zu *solvi*ren, *invenire numerum primum, dato quovis numero majorem.* Sollte man eine *seriem regularem* finden können, deren alle *termini* in jenen *valoribus* von a enthalten wären, so wäre das *Problema solvir*t. Jedoch gibt es gewiß keine *series algebraica*, deren *omnes termini numeri primi* seyn können. Denn es sey X der *terminus indici x respondens*, und daher A der *terminus indici dato a respondens*, so wird, wann man nimmt $x = nA + a$, der *terminus X divisibilis per A* und allso nicht *primus*.[9]

Meine *integratio aequationis* $\dfrac{dx}{\sqrt{(a+bx^n)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{(a+by^n)}}$ setzet nicht nur zum voraus, daß n ein *numerus integer* ist; sondern ich kan auch nur die *integralia* angeben in diesen Fällen, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ und $n = 6$;[10] wann $n = 5$ so habe ich bißher das *integrale* nicht finden können. Wann aber $n = \dfrac{1}{m+1}$

so wären die *Formulae* allerdings *absolute integrabiles*, dahero dieselben nichts sonderbares geben würden. Dann dieses kam mir fürnehmlich merkwürdig vor daß da die *Formul*n in den Fällen $n = 3$, oder $n = 4$, oder $n = 6$ auf keinerley Art weder *ad circuli* noch *hyperbolae quadraturam* gebracht werden können, doch die *aequation* selbst *algebraice* und das *generaliter integrir*t werden kan.

Beygelegten Zettul[11] erinnere ich mich noch bey Ewr. Hochwohlgebohrnen geschrieben zu haben um zu zeigen, daß man nicht allezeit *per integrationem* alle *Casus* findet, *quibus aequationi differentiali satisfit*: wovon ich in meiner *Mechanic* einige wichtige *Casus* angemerket hatte. Ich kan den Fall noch *simpler* machen und diese *aequationem differentialem* $a\,dx = (a - x)\,dy$ vorlegen welcher augenscheinlich ein Genügen geschieht wann $x = a$, welcher Fall doch durch die *Integration* nicht herausgebracht wird. Allso wann ich habe: $\dfrac{P\,dz}{Z} = dy$ oder $P\,dz = Z\,dy$, *existente Z functione ipsius z et P quantitate ex y et z utcunque composita*, so *satisfacir*t $Z = 0$, dann daher wird $z =$ *certae constanti*, und allso $dz = 0$. Setzt man nun für z eine *formulam magis compositam* als $xx + yy - aa$, so bekommt man aus $Z = 0$ solche *casus integralis* welche durch die *Integration* nimmer herausgebracht werden. Allso wann $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{(xx + yy - aa)}} = V\,dy$ *existente V functione quacunque ipsarum x et y* so *satisfacir*t gewiß $xx + yy - aa = 0$.[12]

Den *Tom*[*um*] II *Nov*[*orum*] *Comm*[*entariorum*] habe ich noch nicht bekommen; ob $2^{30}\left(2^{31} - 1\right)$ würklich ein *numerus perfectus* sey oder nicht? kan ich freylich nicht behaupten, weil ich nicht weiß, ob $2^{31} - 1$ ein *numerus primus* ist oder nicht?[13] daß es aber nicht unendlich viel *numeros perfectos* geben sollte, kan ich nicht einsehen: weil aber um dieselben zu finden erfordert wird daß man alle *casus, quibus formula* $2^n - 1$ *fit numerus primus*, anzeigen könne, so sehe ich nicht ab, wie man mehr als 7, nehmlich $2^1\left(2^2 - 1\right)$; $2^2\left(2^3 - 1\right)$; $2^4\left(2^5 - 1\right)$; $2^6\left(2^7 - 1\right)$; $2^{12}\left(2^{13} - 1\right)$; $2^{16}\left(2^{17} - 1\right)$; $2^{18}\left(2^{19} - 1\right)$, und allso nicht einmal 8 oder gar 10 angeben kan.[14] So viel ist gewiß, daß wann $2^n - 1$ ein *numerus primus* seyn soll, auch n ein *numerus primus* seyn muß. Allein es gibt viel *numeri primi*, die für n gesetzt, $2^n - 1$ nicht *primum* machen, als $n = 11$, $n = 23$, $n = 29$, $n = 37$, *etc.* Was allso *Mersennus* oder *Leunenschloß* sagt, als wann die Anzahl der *numerorum perfectorum* endlich wäre, halte ich für ungegründet, ungeacht ich nicht glaube, daß mehr als 7 *praeter unitatem* mit Gewißheit angezeigt werden können.[15] Des *Leunenschloß Tractat* erinnere ich mich bey Ewr. Hochwohlgeb. gesehen zu haben, ich kan aber von diesem *Autore* in keinem *Lexico* die geringste Nachricht finden; dahero ich Ewr. Hochwohlgeb. um einige Umstände seines *Tractats* und wo möglich seiner Selbst gehorsamst ersuchet haben wollte: der ich nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren die Ehre habe

Ewr. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 28ten *Octobr.* 1752.

R 877 Reply to n° 162
Berlin, October 28th, 1752
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 102–103v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 586–591; *Euler-Goldbach* (1965), p. 357–359

164
Goldbach to Euler
Petersburg, November (7th) 18th, 1752

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Ew. Hochedelg. haben die Güte gehabt mir schon längst zu schreiben daß die Bücher so mir H. *Spener destini*ret hat bereits im *Julio* von Berlin abgegangen,[1] ich weiß aber biß diese Stunde noch nicht an was für einen Kaufmann in Petersburg selbige *adressi*ret worden, oder ob sie gar in Lübeck zurück geblieben sind.

Durch was für *compendia* Ew. Hochedelg. die *differentiam serierum* $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+$ *&c. et* $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{29}+$ *&c.* erhalten haben ist mir zwar nicht bekannt; sollten Sie aber die *methode* schon herausgegeben haben, so bitte mir den ort wo selbige zu finden ist anzuzeigen.[2]

Daß der *numerus numerorum primorum omnium huius formae* a^2+1 *infinite magnus* sey halte ich für gewiß[3] ohngeachtet ich es nicht alsofort *demonstri*ren kan, und finde ich die *rationem dubitandi*: daß die anzahl *numerorum primorum huius formae* a^2+1 unendliche mal kleiner ist als die anzahl *numerorum primorum omnium*, gar nicht erheblich, indem kein *numerus infinitus* so klein genommen werden kan daß er nicht *infinities maior alio infinito* sey.[4]

Mersennus hat um so viel weniger gesaget daß nur 10 *numeri perfecti* möglich sind, weil er deren eilf selbst angiebet darunter aber der *octavus* von E. HochE. nicht begriffen ist;[5] er saget auch nicht daß die Anzahl der *numerorum perfectorum* endlich sey, wohl aber daß kein so grosses *intervallum numerorum* anzugeben möglich sey, welches nicht *absque numeris perfectis* seyn könne, wie solches Ew. HochE. aus der von dem Hn *Winsheim allegi*rten *praefatione gener*[*ali*] *ad Mersenni cogitata physico-mathem*[*atica*] §. 19, wann der *Tomus* II. *Comm*[*entariorum*] noch nicht ankommen ist, allenfals selbst werden ersehen können.

Was des *Leuneschlos paradoxa mathematica* betrifft, so sind selbige zu Heidelberg *A*[*nno*] 1658, 8. gedruckt, ich habe aber dieses Buch selbst niemals gehabt, sondern ich hatte das *exemplar* welches ich *A*[*nno*] 1716 gelesen von der altstädtischen *Bibliothec* in Königsberg genommen welches derselben auch noch vor meiner letzten Abreise *A*[*nno*] 1718 *restitui*ret worden, dahero es unmöglich ist daß Ew. HochE. selbiges Buch in Petersb[urg] bey mir gesehen haben sollten, hingegen erinnere ich mich, jedoch nicht mit völliger Gewißheit, daß Sie mir vor einigen Jahren aus Berlin geschrieben, Sie hätten sich selbiges nebst des *Bungi* Buch aus der Königlichen *Bibliothec* geben lassen.[6] Von diesem *Leuneschlos* ist mir weiter nichts bewust als daß ich irgendwo gelesen er habe in Heidelberg als *Professor* gestanden; er wird auch von einigen, *ni fallor*, *Luneschlos* genannt, und wäre also dessen Name auf beyde art in den *Lexicis* zu suchen. Es scheinet daß er sein *paradoxum de numeris perfectis* in dem *Mersenno* gefunden und nachgehends, da er es *memoriter* hingeschrieben, von dem wahren Sinn des *Mersenni* abgegangen ist.

Daß keine *formula Algebraica* lauter *numeros primos* geben könne hatte ich schon in einem meiner vorigen Briefe angemercket,[7] denn es sey zum Exempel die *formula* $x^3 + bx^2 + cx + e$, so ist offenbar, daß so offt x ein *multiplus* des *termini absoluti* e ist, so offt auch (und folglich *infinitis modis*) die *formula* einen *numerum non primum* geben wird; sollte aber $e = 1$ seyn, so setze ich nur $x + p$ anstatt x, alsdann wird die *formula transmuti*ret in

$$\begin{array}{llll} x^3 & +3px^2 & +3p^2x & +p^3 \\ & +bx^2 & +2bpx & +bp^2 \\ & & +cx & +cp \\ & & & +1 \end{array}$$

und so offt x ein *multiplus numeri* $p^3 + bp^2 + cp + 1$ wird, so offt giebt die *formula* einen *numerum non-primum*;[8] da nun dieser *casus* wo die *potestas maxima ipsius* $x = 3$ ist, auf alle andere *lusus naturae*, *quaecunque fuerit potestas ipsius* x, *applici*ret werden kan, so ist es unmöglich eine *seriem Algebraicam* anzugeben in welcher nicht *infiniti termini* aus *numeris non primis* bestehen sollten.

Noch habe ein kleines gantz neues *theorema* beyzufügen, welches so lange vor wahr halte *donec probetur contrarium*: *Omnis numerus impar est = duplo quadrati + numero primo, sive* $2n - 1 = 2a^2 + p$, *ubi a denotet numerum integrum vel* 0; *p numerum primum, exempli gr[atia]* $17 = 2\cdot 0^2 + 17$; $21 = 2\cdot 1^2 + 19$; $27 = 2\cdot 2^2 + 19$, *&c.*[9] Ich verharre nechst schuldigster Empfehlung an Dero wertheste *Familie*,

Eurer Hochedelgebohrnen

ergebenster Diener *Goldbach*.

S. Petersburg den 18. *Nov.* 1752.

R 878 Reply to n° 163
Petersburg, November (7th) 18th, 1752
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 158–159v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 592–594; *Euler-Goldbach* (1965), p. 360–361

165
Euler to Goldbach
Berlin, December 16th, 1752

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Es war mir höchst verdrüßlich zu vernehmen, daß die von Ewr. Hochwohlgb. verschriebenen Bücher unter Wegs ligen geblieben;[1] ich habe solches sogleich dem H. Spener vorgehalten und aus der Antwort ersehen, daß keine geringe Nachlässigkeit mit unterlaufen; insonderheit aber beklage ich daß diese Bücher noch biß künftigen Sommer werden ligen bleiben müssen. Inskünftige aber werde ich solche *Commission*en einem andern Buchhändler auftragen, von welchem ich versichert bin, daß er dabey alle mögliche Sorgfalt anwenden wird.

Ich bin weit davon entfernt, daß ich die wahre *summ* dieser *Seriei*

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}\ \textit{etc.}^{[2]}$$

sollte anzeigen können; ich habe diese *summ* nur *per approximationem* gesucht, von deren Beschaffenheit ich mich nicht mehr erinnern kan. Meine Absicht war dabey nur zu erforschen ob etwan diese Summ *simpel* seyn möchte: weil ich schon vorher gemerket hatte, daß dieselbe bey nahe $\frac{1}{3}$ ist.

Ewr. Hochwohlgeb. *Theorema, quod omnis numerus impar* $2n-1$ *sit aggregatum ex quadrato duplicato* $2aa$ *et numero primo* p, hat bey mir alle Aufmerksamkeit verdienet, und nach angestellter Probe habe ich dasselbe für alle *numeros* $2n-1$ unter 1000 würklich wahr befunden. Kraft desselben kan man allso behaupten, *quod dato numero* $2n-1$ *semper detur duplum quadratum* $2aa$, *ut* $2n-1-2aa$ *evadat numerus primus.*[3]

Um die *Demonstration* davon zu finden, fiel mir ein, ob man etwan nicht beweisen könnte, daß je grösser die Zahl $2n-1$, je mehr *numeri primi* aus der *Form* $2n-1-2aa$ erwachsen müssten. Dann da das *Theorema* wahr ist für die kleinen Zahlen, so würde man um so viel sicherer auf die grossen Zahlen schliessen können. Ich habe demnach *pro quovis numero non primo* $2n-1$ bemerket, wie viel *numeri primi* daraus entstehen, allein ich habe befunden, daß wann auch $2n-1$ eine sehr grosse Zahl, doch bißweilen nur ein einziger *numerus primus* entspringt. Allso wann $2n-1=785$, so wird $785-2aa$ *unico casu numerus primus* nehmlich *quo* $a=18$. Eben dieses geschieht auch wann $2n-1=1703=13\cdot 131$; und der *casus* ist $1703-2\cdot 21^2=821$; wann allso 821 kein *numerus primus* wäre, so fände hier das *Theorema* nicht statt. Ich habe auch noch viel andere und grössere Zahlen untersucht, von welchen ich vorhersahe, daß die daher entstehenden *numeri primi* sparsam seyn müssen; doch habe ich aber keine Ausnahme finden können. Ich glaube allso dieses *Theorema*, ungeacht ich nicht darauf schwören wollte.

Es fiel mir dabey ein ziemlich ähnliches *Theorema* ein: nehmlich daß *a numero impari non primo* $2n-1$ allzeit eine *potestas binarii* abgezogen werden könne, daß der *Rest* ein *numerus primus* sey. Nach angestellter Probe hat sich dieses auch biß auf sehr grosse Zahlen wahr befunden; als ich aber auf $959 = 7 \cdot 137$ kam, so fand sich eine ausnahm, indem $959 - 2^\alpha$ *nullo modo primus* werden kan.[4]

Ich bin letstens auf folgende *Theoremata negativa* gefallen:

I. *Si n non est numerus formae* $\Box + 2\,\triangle$ *tum* $4n+1$ *certe non est primus.*

II. *Si n non est numerus formae* $\Box + \triangle$ *tum* $8n+1$ *certe non est primus.*

III. *Si n non est numerus formae* $2\,\triangle + \triangle$ *tum* $8n+3$ *certe non est primus.*

Der Grund der zwey letsteren beruht darauf, daß wann $8n+1$ oder $8n+3$ *primus* ist, so sey derselbe auch *in hac forma* $2\,\Box + \Box$ enthalten: als $3 = 2 \cdot 1 + 1$; $11 = 2 \cdot 1 + 9$; $17 = 2 \cdot 4 + 9$; $19 = 2 \cdot 9 + 1$; dieses aber kan ich nicht beweisen[5] ungeacht ich es für eben so gewiß halte, als daß $4n+1 = \Box + \Box$, *siquidem* $4n+1$ *sit primus*, welches ich bewiesen habe.[6]

Ewr. Hochwohlgeb. bin für die mir gütigst ertheilten Nachrichten über den *Leunenschloss* gehorsamst verbunden; ich habe mich geirrt, wann ich geglaubt das Buch selbst bey Ewr. Hochwohlgeb. gesehen zu haben; es werden nur einige *Excerpta* gewesen seyn, so Dieselben mir zu *communici*ren die Güte gehabt; hier habe ich dieses Buch nicht finden können. Des *Bungi* Buch erinnere ich mich auch nicht gelesen zu haben; ich werde es aber auf der hiesigen *Bibliothec* aufsuchen.[7] Den II$^{\text{ten}}$ *Tomum Nov*[*orum*] *Comment*[*ariorum*] habe ich noch nicht bekommen, um darinn nachsehen zu können, was der sel[ige] H. *Winsheim* von den *Numeris perfectis* geschrieben.[8] Ich glaube daß man keine andere *numeros perfectos* für gewiß angeben könne als folgende:

I. $2^0\,(2-1) = 1$; II. $2^1\,\big(2^2-1\big) = 6$; III. $2^2\,\big(2^3-1\big) = 28$; IV. $2^4\,\big(2^5-1\big)$; V. $2^6\,\big(2^7-1\big)$; VI. $2^{12}\,\big(2^{13}-1\big)$; VII. $2^{16}\,\big(2^{17}-1\big)$; und VIII. $2^{18}\,\big(2^{19}-1\big)$;

weil man von den folgenden *formuln* $2^p - 1$ (*existente p primo*) nicht gewiß seyn kan, ob dieselben *primi* sind oder nicht? Der folgende wäre $2^{30}\,\big(2^{31}-1\big)$ wann nur $2^{31}-1$ ein *numerus primus* wäre; welches aber weder behauptet noch untersuchet werden kan. So viel ist gewiß daß diese Zahl $2^{31}-1$ keine andere *Divisores* haben kan, als welche in dieser *Formul* $62n+1$ enthalten sind, woraus ich soviel gefunden, daß kein *Divisor* unter 2000 statt findet.[9]

Aus Anlaß der *Aequationum Moivreanarum* habe ich noch viel ähnliche *formulas* gefunden, deren *radix* angegeben werden kan, ungeacht die *aequation* keine *divisores rationales* hat:[10]

Als von dieser *aequation*

$$x^5 = 5\alpha xx + 5\beta x + \frac{\beta\beta}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta}$$

ist *radix*

$$x = \sqrt[5]{\frac{\beta\beta}{\alpha}} + \sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}}.$$

Allso von dieser

$$x^5 = 10xx + 10x + 6$$

ist *radix*

$$x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4};$$

ferner von dieser *aequatione* 6^{ti} *gradus*

$$x^6 = 6x^4 + 28x^3 + 18xx - 12x + 2$$

ist

$$x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}.$$

Diese *Casus* scheinen um so viel mehr merkwürdig zu seyn, weil diese *aequationen* nicht *in factores* (*rationales*) zergliedert werden können.

Hernach habe ich auch wahrgenommen, wann eine solche *Formul* vorgegeben wird

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4},$$

welche von den *signis radicalibus* befreyt werden soll, solches geschehen könne, ohne daß man nöthig hat, über die 5te *potestät* des x herauf zu steigen. Dieses scheinet deswegen *paradox* zu seyn, da 4 *signa radicalia* und das *surdesolida* vorhanden, welche durch eine einige *Elevation ad* 5^{tam} *dignitatem* nicht gehoben werden können. Doch kommt nun diese *aequatio rationalis* 5^{ti} *gradus* heraus

$$x^5 \quad = \quad 5s\,(AD+BC)\,x^3 \quad \begin{matrix} +\,5As\,(AC+BB) \\ +\,5Dss\,(CC+BD) \end{matrix}\; xx \quad \begin{matrix} +\,5A^3Bs \\ +\,5ss\left(AC^3+B^3D\right) \\ -\,5ss\left(A^2D^2+B^2C^2\right) \\ +\,5ABCDss \\ +\,5CD^3s^3 \end{matrix}\; x$$

$$\begin{matrix} +\,A^5s + B^5s^2 + C^5s^3 + D^5s^4 \\ -\,5ACss\left(A^2D+B^3\right) \\ +\,5ABss\left(ABD+AC^2\right) \\ -\,5BDs^3\left(C^3+AD^2\right) \\ +\,5CD^2s^3\left(B^2+AC\right) \end{matrix} \quad .$$

Allso ist auch hinwiederum die *Radix* aus dieser *aequation*

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4};$$

und da die obige *aequation general* ist, so glaube ich daß in dieser *Form* alle *radices aequationum* 5^{ti} *gradus* enthalten sind: und in einem jeglich vorgelegten Fall kommt es nur auf die Bestimmung der Buchstaben A, B, C, D und s an, und zu letst wird s nur *per aequationem* 4^{ti} *ordinis* bestimmt werden; wie ich vermuthe. Daraus schliesse ich ferner daß *proposita aequatione quacunque*:

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \delta x^{n-4} - \varepsilon x^{n-5}\ etc. = 0$$

die *radix* allzeit diese *form* haben werde:

$$x = \frac{1}{n}\alpha + A\sqrt[n]{s} + B\sqrt[n]{s^2} + C\sqrt[n]{s^3} + D\sqrt[n]{s^4} + etc.,$$

und es ist so viel gewiß, daß wann $n = 2$, oder 3 oder 4, die Bestimmung des Buchstabens s von einer *aequatione* 1 oder 2 oder 3 *ordinis dependi*re, woraus zu schliessen, daß *in genere* s durch eine *aequationem* $n-1$ *ordinis* bestimmt werde.

In meinen *Papier*en habe ich noch ein ander *Theorema* so Ewr. Hochwohlgb. mir vormals *communicir*t gefunden. Nehmlich daß ein jeder *numerus impariter par* $4a+2$ allzeit gleich sey einer *summ* von 2 *numeris primis formae* $4n+1$, als $6 = 1+5$; $10 = 5+5$; $14 = 1+13$; $18 = 1+17 = 5+13$; $22 = 5+17$; $26 = 13+13$; $30 = 1+29 = 13+17$; $34 = 5+29 = 17+17$; wobey ich bemerke daß nicht nur bey kleinen Zahlen keine Ausnahm vorkommt, sondern bey grössern um so viel weniger eine zu vermuthen;[11] dann die Zahlen bey welchen eine solche Zergliedrung nur einmal angeht sind: 2, 6, 10, 14, 22, 26, 38, 50, 62, 86 und von hier biß 150 gibt es keine mehr, auch nicht biß 230, daher auch unter den folgenden um so viel weniger zu vermuthen indem die Anzahl der *Resolution*en immer zunimmt, als 210 lässt sich auf 9 Arten *resolvi*ren.

Hiemit habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren
Ewr. Hochwohlgeb.
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 16 *Dec.* 1752.

R 879 Reply to n° 164
Berlin, December 16th, 1752
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 106–107v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 595–600; *Euler-Goldbach* (1965), p. 362–364

166
Goldbach to Euler
Moscow, March (1st) 12th, [1753][1]

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Daß sich das *theorema omnem numerum imparem resolvi posse in duplum quadrati et numerum primum* biß auf die Zahl 1000 wahr befunden auch in grösseren Zahlen sich annoch keine ausnahme geäussert ist mir sehr lieb, jedoch muß es bißhero für eine blosse *conjecture passi*ren, und hat man ursach zu zweiffeln ob die *demonstration* davon, wann sie ja *possibilis* wäre, jemals gefunden werden wird.[2]

Weil Ew. Hochedelg. melden daß Sie ob *a numero impari* <u>*non primo*</u> allezeit eine *potestas binarii* abgezogen werden könne so daß ein *numerus primus* überbleibe, hatten versuchen wollen so schlüsse ich aus der *restriction* <u>*non primo*</u> daß Sie es von den *numeris primis* falsch befunden und möchte wohl wissen bey welchem *numero primo* solches zu ersehen, denn ich habe schon vor einigen Jahren dergleichen Einfall von den *numeris primis* gehabt, selbigen aber nicht weiter als biß 89 *continui*ret.[3]

Daß alle *numeri primi huius formae* $8n+1$ gleich seyn sollen $2\Box+\Box$ hatte ich vorher nicht beobachtet,[4] bey näherer Betrachtung aber habe gefunden *si* $4n+1$ *est numerus primus*, *esse eum* $= d\Box + \Box$ *denotante d quemcunque divisorem numeri n*, wodurch hoffentlich die *pomoeria* der *theorematum de numeris primis in numeros quadratos resolvendis* in etwas werden erweitert werden.[5]

Daß Eure Hochedelg. so wohl des *Bungi Tractat* als des *Leuneschlos paradoxa* sich schon *A*[*nno*] 1741 in *Berlin* aus der *Bibliotheque* geben lassen und gelesen haben ist gantz gewiß indem Sie mir solches selbst den 9. *Sept. eius anni* umständlich gemeldet.[6]

Dero *meditationes* um die *radicem quintae potestatis* zu finden scheinen mir so gründlich und zulänglich, daß wann selbige auf diese weise nicht zu erhalten ist, ich sehr zweiffele ob jemand in dieser *decouverte réussi*ren wird. Es kommt alles, wie Ew. HochEdelg. bemercken, darauf an ob sich die *quantitas s per aequationem quartae potestatis determini*ren lässet, zu welcher untersuchung aber meines erachtens eine *ferrea patientia* erfordert wird.[7]

Ich erinnere mich zwar wohl daß man noch keinen *numerum parem* angegeben welcher nicht eine *Summa duorum primorum* wäre, daß aber ein jeder *numerus pariter impar* ein *aggregatum duorum primorum huius formae* $4n+1$ ist, war mir entfallen,[8] und daß zwischen 86 und 230 keine *casus unici* vorkommen halte ich allerdings für merckwürdig, da biß 86 sich deren schon 10 befinden. Hingegen kommen in dem *theoremate* $2n-1 = 2a^2 + p$ viele *casus unici* vor wovon einige *numeri primi* selbst nicht ausgeschlossen sind, also ist 17 *unico modo* $= 2a^2 + p$ wann $a = 0$, imgleichen 127 wann $a = 0$,[9] und es scheinet fast als wann der *numerus p* so zu einem *casu unico* gehöret in keinem andern *casu unico* wieder vorkommt, *ex*[*empli*] *gratia* $57 = 2\cdot 5^2 + 7$ ist ein *casus unicus* weil in der *formula* $2a^2 + p$ vor p keine andere Zahl als 7 angenommen werden kan, ob es aber ausser diesem noch andere *casus unicos* giebt wo $2n-1 = 2a^2+7$, lasse ich dahin gestellet seyn und möchte auch wohl keine weitere untersuchung verdienen.[10]

Ich habe in meinen *annotatis* gefunden daß ich schon vor etwa 30 Jahren *observi*ret wie

$$An^2 - Bn^4 + Cn^6 - Dn^8 + \&c. = n^{\sqrt{2}}$$

seyn könne allwo A, B, C, *&c. per series numerorum rationalium, quarum singularum summa plus quam finita est*, *exprimi*ret werden; ich bin aber ungewiß ob ich solches nicht etwa schon zu anderer Zeit Eurer Hochedelg. gemeldet, oder ob es nicht gar in den *Commentar*[*iis*] gedruckt worden.[11]

Weil ich vermuthe daß nunmehro der H. *Spener* die in Lübeck zurückgebliebenen Bücher mit den ersteren Schiffen anhero zu befordern suchen wird, so habe auf dem inliegenden Zettel denen vorigen noch einige andere beyzufügen verlangt.[12]

Ich habe zwar zum öfftern das vergnügen gehabt aus den frantzösischen Zeitungen zu ersehen daß Ew. Hochedelg. den Preiß von der Parisischen *Ac*[*ademie*] *des Sc*[*iences*] erhalten, da ich aber nicht eigentlich weiß wie viel mal solches geschehen, so möchte gern davon benachrichtiget seyn,[13] und verbleibe mit besonderer Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 12. *Mart.* 1752.[14]

R 880 Reply to n° 165
Moscow, March (1st) 12th, [1753]
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 151–152v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 601–603; *Euler-Goldbach* (1965), p. 365–366

167
Euler to Goldbach
Berlin, April 3rd, 1753

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Nächst gehorsamster *Gratulation* zu Ewr. Hochwohlgeb. glücklichen Ankunft in Moskau, habe die Ehre zu berichten, daß H. Spener fest versprochen die zurükgebliebenen Bücher mit den ersten Schiffen fortzuschaffen, und die letst verlangten noch beyzufügen.[1] Nur wird nöthig seyn, dieselben an jemand in *Petersburg* zu *addressi*ren, und da Ewr. Hochwohlgeb. deswegen keine *Ordres* gestellt, so werde ich dem H. Spener sagen, daß er sie an den H. Köppen *addressi*ren soll.

Bey dem Einfall, ob etwan *ab omni numero impari* eine *potestas binarii* abgezogen werden könne, so daß ein *numerus primus* überbleibe, habe ich die *condition* <u>*a numero impari non primo*</u> beygefügt, weil ich gleich befunden, daß solches bey dem *numero primo* 127 nicht angeht. Da nun solches auch bey dem *numero non primo* 959 nicht eintrifft, so fällt das gantze vermuthete *Theorema* weg.[2]

Wann Ewr. Hochwohlgeb. bey näherer Betrachtung befunden, daß wann $4n+1$ ein *numerus primus*, und $\underline{d}$ ein *divisor quicunque ipsius* $\underline{n}$, auch allzeit sey $4n+1 = daa + bb$, so bin ich sehr begierig zu vernehmen, ob Ewr. Hochwohlgeb. diesen Satz *demonstrir*en können, indem dadurch die *pomoeria* der *Theorematum de numeris primis in quadratos resolvendis* allerdings ungemein würden erweitert werden.[3] Ich habe auch eben diesen Satz schon längst bemerket, und bin von der Wahrheit desselben so überzeuget, als wann ich davon eine *Demonstration* hätte. Allso gleichwie $4 \cdot 1m + 1$ allzeit ist $= aa + bb$, welches ich *demonstrir*en kan, so ist eben so gewiß $4 \cdot 2m + 1 = 2aa + bb$; $4 \cdot 3m + 1 = 3aa + bb$; $4 \cdot 5m + 1 = 5aa + bb$, *etc.*, wovon mir aber die *Demonstration* noch fehlet. Doch ist hiebey ein besonderer Umstand wohl zu bemerken, daß biß weilen diese *Resolution* nicht *in integris* geschehen kan. Als wann gleich $4dm+1$ ein *numerus primus* ist, so gibt es Fälle, wo diese Zahl $4dm+1$ unmöglich *in integris* in die Form $daa+bb$ verwandelt werden kan; dem ungeacht aber bleibt das *Theorema* nicht weniger wahr, weil die *Resolution* allzeit *in fractis* statt findet; welches um so viel mehr merkwürdig ist, da keine Zahl *in fractis* auf diese *Form*en $aa+bb$, $2aa+bb$, $3aa+bb$ und einige andere gebracht werden kan, wann dieselbe nicht *in integris* darinn enthalten. Dergleichen Fälle sind:

I. $4\cdot 22+1=89$ *primus*, folglich sollte 89 in dieser *Form* $11aa+bb$ enthalten seyn, welches aber *in integris* nicht angeht; doch ist *in fractis*: $89=11\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2$ oder auch $89=11\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{25}{3}\right)^2$.

II. $4\cdot 28+1=113$ *primus*: folglich sollte 113 in dieser *Form* $14aa+bb$ enthalten seyn, so *in integris* nicht möglich ist: *in fractis* aber ist $113=14\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{31}{3}\right)^2$.

III. $4\cdot 34+1=137$ *primus*: und doch nicht *in integris* $137=17aa+bb$; *in fractis* aber ist $137=17\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{31}{3}\right)^2$.

IV. $4\cdot 57+1=229$ *primus*: und doch nicht *in integris* $229=19aa+bb$; *in fractis* aber ist $229=19\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{21}{2}\right)^2$.

Bißher waren die Nenner nur 2 oder 3; es gibt aber auch Fälle, wo auch solche Brüche nicht statt finden, sondern noch grössere Nenner zu Hülfe genommen werden müssen: Als $4\cdot 3\cdot 61+1=733$ *primus*: und ist doch nicht $733=61aa+bb$ *in integris*; doch ist *in fractionibus minimis* $733=61\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{127}{5}\right)^2$.

Demnach muß dieses *Theorema* allso ausgedrukt werden:

Si $4n+1$ *sit numerus primus, et* d *divisor ipsius* n, *tum iste numerus* $4n+1$ *certo in hac forma* $daa+bb$ *continetur, si non in integris, saltem in fractis*; und dieser Umstand wird auch ins besondere bey der *Demonstration* müssen in Betrachtung gezogen werden.

Da die Fälle wo $2n-1=2a^2+p$ *unico modo* so sparsam vorkommen, so würde es freylich eine mühsehlige Arbeit seyn zu untersuchen, ob noch in einem andern *unico modo* $p=7$ seyn könnte, ausser $57=2\cdot 5^2+7$: zum wenigsten habe ich biß 2500 keinen solchen gefunden.[4] Wann dieses behauptet werden könnte so folgte daraus dieses *Theorema*:

Si $2aa+p$ *unico modo est aggregatum ex duplo quadrato et numero primo, tum* $2bb+p$ *certo plus uno modo erit ejusmodi aggregatum, dum non sit* $b=a$.

Ich konnte mich gar wohl erinnern daß Ewr. Hochwohlgeb. mir schon längst die *Resolution* von $n^{\sqrt{2}}$ *communicir*t; und weiß auch daß sich solches unter meinen Papieren finden muß,[5] allein es fället mir sehr schwehr etwas daraus hervorzufinden, und ich konnte fast nicht mehr auf den Grund dieser *Resolution* kommen, biß mir ungefehr die *Materi*e von der *Interpolation* wieder einfiel. Da nun *proposita serie*: $\overset{0}{a}, \overset{1}{b}, \overset{2}{c}, \overset{3}{d}, \overset{4}{e}$, *etc.* der *terminus indici* x *respondens* ist

$$\begin{aligned}(1-1)^x a \quad &+ \quad (1-1)^{x-1}xb+(1-1)^{x-2}\,\frac{x\,(x-1)}{1\cdot 2}\,c\\ &+ \quad (1-1)^{x-3}\,\frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,d+etc.\end{aligned}$$

so ist der *terminus indici* $\frac{1}{2}$ *respondens*

$$= a\sqrt{(1-1)} + \frac{b}{2\sqrt{(1-1)}} - \frac{1\cdot 1\cdot c}{2\cdot 4\,(1-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot 1\cdot 3d}{2\cdot 4\cdot 6\,(1-1)^{\frac{5}{2}}} - etc.;$$

setzt man nun n^1, n^2, n^4, n^8, n^{16} *etc.* für a, b, c, d, e *etc.* so ist $n^{\sqrt{2}}$ der *terminus indici* $\frac{1}{2}$ *respondens*, folglich

$$n^{\sqrt{2}} = n\,(1-1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1\,n^2}{2\,(1-1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1\cdot 1\,n^4}{2\cdot 4\,(1-1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot 1\cdot 3n^8}{2\cdot 4\cdot 6\,(1-1)^{\frac{5}{2}}} - etc.;$$

setzt man nun *ob primum terminum* $n\,(1-1)^{\frac{1}{2}} = 0$:

$$n^{\sqrt{2}} = An^2 - Bn^4 + Cn^8 - Dn^{16} + etc.$$

so wird

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,(1-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + etc.\right)\\
B &= \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\,(1-1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + etc.\right)\\
C &= \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,(1-1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(1 + \frac{5}{2} + \frac{5\cdot 7}{2\cdot 4} + \frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + etc.\right)\\
& etc.
\end{aligned}$$

welches ohne Zweifel Ew. Hochwohlgeb. *series numerorum rationalium* sind, *quarum singularum summa plus quam finita est.*

Von dieser *serie* $An^2 - Bn^4 + Cn^8 - Dn^{16} +$ *etc.* $= n^{\sqrt{2}}$ verdienet angemerkt zu werden daß:

$$\begin{aligned}
An^2\left(2-\sqrt{2}\right) &- Bn^4\left(4-\sqrt{2}\right) + Cn^8\left(8-\sqrt{2}\right)\\
&- Dn^{16}\left(16-\sqrt{2}\right) + En^{32}\left(32-\sqrt{2}\right) - etc. = 0,
\end{aligned}$$

was auch immer n für eine Zahl seyn mag.

Bei den obigen Betrachtungen ist mir auch folgendes *problema* beygefallen:

Invenire summam duorum quadratorum $xx + yy$, *quae simul in hac forma contineatur* $2aa + bb$.

Solutio: *Sumantur* $x = pp - qq$ *et* $y = rr \pm 2pq$ *eritque*

$$\begin{aligned}
xx + yy &= (pp-qq)^2 + (rr \pm 2pq)^2 = (pp+qq)^2 \pm 4pqrr + r^4\\
&= (pp+qq-rr)^2 + 2\,(p \pm q)^2\,rr.
\end{aligned}$$

Q. E. I.[6]

Ewr. Hochwohlgeb. haben die Güte Sich zu erkundigen, wie viel mal ich schon bey der *Academie* zu *Paris* den Preiß erhalten?[7] Weil ich solches nicht aufgeschrieben, und auch von meinen *Piec*en keine *Copi*en behalten so kan ich weder die Jahre noch den Theil des Preises so ich jedes mal bekommen, genau melden. Ich habe aber bey folgenden Fragen den Preiß davon getragen: I. *Sur la nature du feu*. II. *Sur le Cabestan*. III. *Sur le flux et reflux de la mer*. IV. *Sur la Theorie de l'aimant*. V. *Sur l'observation de l'heure du jour sur mer*. VI. *Sur les inegalités de Saturne*. VII. *Sur la meme question*.[8]

Ich fand letstens, weiß aber nicht mehr wo, dieses *Problema*: *Invenire numerum, qui sit vel duplici, vel triplici, vel quadruplici modo numerus polygonalis*?[9] Wollte man das *Problema* so nehmen: *invenire numerum, qui simul sit trigonalis et tetragonalis*, oder *qui simul sit trigonalis et pentagonalis etc.*, so ließ sich dasselbe wohl *solvi*ren; kämen aber drey Bedingungen, als *invenire numerum qui simul sit trigonalis, tetragonalis, et pentagonalis*? so wäre das *problema* vielleicht unmöglich. Bestimmt man aber den *numerum laterum* nicht, so ist es möglich, so viel mal die Zahl auch ein *numerus polygonalis* seyn soll, und die *solution* ist artig. Es sey z die gesuchte Zahl; x die *Radix* und n die Anzahl der Seiten der *Polygonal*-Zahl: so wird

$$z = \frac{(n-2)\,xx - (n-4)\,x}{2};$$

hieraus wird

$$n = \frac{2z + 2xx - 4x}{xx - x} = 2 + \frac{2z - 2x}{xx - x} = 2 - \frac{2z}{x} + \frac{2\,(z-1)}{x-1}.$$

Allso muß sich $2z$ durch x und $2z-2$ durch $x-1$ theilen lassen; das ist: *quaeruntur duo numeri binario differentes, qui habeant divisores unitate differentes* (*major majorem, minor minorem*), und wann dieses auf vielerley art geschehen kan, so ist z auf eben sovielerley Art ein *numerus polygonalis*. Zum *exempel*:

		divisores unitate differentes			
Numeri binario diff[*erentes*]:	450	3,	5,	9,	15
	448	2,	4,	8,	14

(die *divis*[*ores*] $\begin{matrix}225\\224\end{matrix}$ lasse ich weg weil daraus *numeri digonales* entstünden.)

Allso sey $2z = 450$ oder $z = 225$, so ist folgender Gestalt

$$\text{I.}\quad n = 2 - \frac{450}{3} + \frac{448}{2} = 76; \qquad \text{II.}\quad n = 2 - \frac{450}{5} + \frac{448}{4} = 24;$$
$$\text{III.}\quad n = 2 - \frac{450}{9} + \frac{448}{8} = 8; \qquad \text{IV.}\quad n = 2 - \frac{450}{15} + \frac{448}{14} = 4;$$

dahero ist 225 I. *tetragonalis*; II. *octogonalis*; III. 24*gonalis*; *et* IV. 76*gonalis*.

Dergleichen Zahlen nun zu suchen, ist gewiß ein *Problema*, wo es insonderheit auf die *Natur* der Zahlen ankomt, und welches zu schönen *Speculation*en Anlaß geben kan.[10]

Alle die meinigen lassen sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen; und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 3ten *April.* 1753.

Heut speisete ich bey des H. Staats *Ministri* von *Arnim Excell*[*enz*] wo ich den H. Geh[eimen] Rath von *Froben* antraff, welcher sich sehr genau nach Ewr. Hochwohlgeb. erkundigte, und sagte daß er vormals mit Denselben eine sehr genaue Freundschaft unterhalten: Er hat mir nun gar nachdrüklich aufgetragen Ewr. Hochwohlgeb. sein gantz ergebenstes *Compliment* abzustatten.[11]

R 881 Reply to nº 166
Berlin, April 3rd, 1753
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 110–111v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 604–609; *Euler-Goldbach* (1965), p. 367–370

168
Goldbach to Euler
Moscow, June (17th) 28th, 1753

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Den Hn Geheimen Rath von *Froben* habe ich das Glück schon seit 35 Jahren her zu kennen und freue mich sehr daß sich derselbe meiner annoch erinnert, ich habe dessen fürtreffliche *qualit*äten jederzeit *admiri*ret, wie denn auch die viele höflichkeiten so er mir theils in Königsberg, theils in Berlin erwiesen, bey mir annoch in frischem andencken sind.[1]

Eine *rigorosam demonstrationem* daß $1 + 4ef = P^2 + 4Q^2$ habe ich zwar nicht gefunden, jedoch bin ich auf einige *observationes affines* gerathen worinnen Ew. Hochedelg. vieleicht finden werden *qu'il y a des vûes*.[2] Ich verstehe also in folgendem durch p allezeit den *numerum primum* $1 + 4ef$ und $e > f$, imgleichen setze ich $a^2 + b^2 = p$. In einem gegebenen *casu particulari* wollte ich mich dieser *methode* bedienen: Zuvorderst suche ich *numerum* Q *huius naturae ut* $1 + 4ef + 4fQ^2 = \square$ welches *per substitutiones successivas* $Q = 1$, $Q = 2$, *&c.* leicht zu seyn scheinet, indem viele *numeri ad hunc scopum non idonei* gleichsam bey dem ersten Anblick *removi*ret werden können, *ex*[*empli*] *grat*[*ia*] es wäre der gegebene *numerus primus* 89 und $f = 2$, so siehet man alsofort, daß vor Q kein *numerus desinens in* 1 angenommen werden kan weil sich das gesuchte *quadratum* auf 7 endigen würde *quod est absurdum*; so bald nun ein solcher *numerus congruus pro* Q gefunden ist setze ich die *radicem quadrati inventi* oder $\sqrt{1+4ef+4fQ^2}=4fv+1$, wo v entweder *affirmativa* oder *negativa* zu nehmen ist *ut solutioni satisfiat*, und alsdann findet sich $1+4ef=\dfrac{(e-v)^2+eQ^2}{v^2}$;[3] solchergestalt wird in denen von Eurer HochEdelgeb. angeführten Zahlen *in casu numeri* 89, $Q=2$; *numeri* 113, $Q=1$; *num.* 137, $Q=2$; *num.* 229, $Q=5$; *num.* 733, $Q=3$. Hieraus[4] folget auch die doppelte *aequation*

$$p=\frac{P^2+eQ^2}{v^2}=\frac{(4fv+(P+v):e)^2-4fQ^2}{(P+v)^2:e^2}.$$

Ich bemercke ferner (1.) daß weil die *numeri* a, b, e, f *cogniti* sind, es schon gnug ist wann nur $p=\dfrac{R^2\pm 2abe}{h^2}$ statt finden kan, so daß R und h *rationales* seyen es mag $2ab$ ein *numerus quadratus* seyn oder nicht, denn es wird

$$Q=\frac{-(a+b)\pm R}{e+h^2}=\frac{P-(a+b)}{h}$$

und

$$p=\left(a^2+b^2\right)=P^2+eQ^2.$$

(2.) habe ich beobachtet daß wann $1+4ef+4fQ^2=\Box$, der *numerus* Q entweder eines von beyden *quadratis* a^2 oder b^2 oder doch einer von derer selben *factoribus* ist; als in 89, wo $a=8$, $b=5$,[5] wird $Q=5$; *in casu numeri* $137=4^2+11^2$ wird $Q=2$, wiewohl ich von der allgemeinen gewißheit dieser *observation* noch nicht *convinci*ret bin. Dahingegen kan ich (3.) *in summo rigore demonstri*ren, daß wenn α ein *numerus huius formae* ist $\beta^2+e\gamma^2$, alsdenn auch

$$\alpha\left(e+x^2\right)\left(e+y^2\right)\left(e+z^2\right)\ \&c.=P^2+eQ^2.$$[6]

(4.) *dependi*ret die *natura numerorum* P *et* v in dieser *aequatione* $1+4ef=\dfrac{P^2+eQ^2}{v^2}$ allerdings von dem *numero* e, denn es müssen P^2 *et* v^2 beyde so beschaffen seyn daß sie *divisa per e idem residuum* hinterlassen,[7] als zum Ex[empel] in dem *casu* $89=\dfrac{9^2+11\cdot 5^2}{2^2}$, allwo $e=11$, $P^2=81$, $v^2=4$, folglich das *residuum commune post divisionem per* 11 *est* $=4$; hingegen müssen die *residua quadratorum* P^2 *et* Q^2 *post divisionem per* v^2 so beschaffen seyn, daß wann das *residuum respectu* P^2 *aequale* α wird, das *residuum respectu* Q^2 *aequale* $\dfrac{uv^2-\alpha}{e}$ werde so daß u ein *numerus integer* sey; also wird *in eodem exemplo* $\alpha=1$, $\dfrac{uv^2-\alpha}{e}=\dfrac{4u-1}{11}=1$ (weil 25 *per* 4 *divisum* 1 zum *residuo* lässet) *et* $u=$ *numero integro* 3.

(5.) will ich Eurer HochEdelg. für die mir *communicir*te *solution* des *problematis*: *invenire duo quadrata quorum summa sit* $P^2 + 2Q^2$; *qualiscunque hostimenti loco* die *solution* des nachfolgenden *problematis offerir*en:[8] *invenire duo quadrata quorum Summa sit* $P^2 + eQ^2$*, dato pro e numero quocunque. Sint n et e numeri quicunque, erunt*

$$\left(\frac{4n^2+e}{4n}\right)^2 + \frac{4e^2}{(e-1)^2} = \left(\frac{4n^2-e}{4n}\right)^2 + \frac{e\,(e+1)^2}{(e-1)^2}$$

vel

$$\left(\frac{4n^2+e}{4n}\right)^2 + \frac{4e^2m^2}{(e-m^2)^2} = \left(\frac{4n^2-e}{4n}\right)^2 + e\left(\frac{e+m^2}{e-m^2}\right)^2,$$

positis pro e, m, n numeris quibusvis.[9]

Meine *expression* für $n^{\sqrt{2}}$ bestehet in folgendem:[10] *sit* $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$, $d = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$, $e = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ *&c., dico*

$$\begin{aligned} n^{\sqrt{2}} = \; & (a+b+c+d+\&c.)\; n^2 \\ & - (b+2c+3d+4e+\&c.)\; n^4 \\ & + (c+3d+6e+10f+\&c.)\; n^8 \\ & - (d+4e+10f+20g+\&c.)\; n^{16} \\ & + (e+5f+15g+35h+\&c.)\; n^{32} \\ & - \&c.^{[11]} \end{aligned}$$

und *differir*et nicht von dieser

$$n^{\sqrt{2}} = n^2 - \frac{1}{2}\left(n^4 - n^2\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(n^8 - 2n^4 + n^2\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(n^{16} - 3n^8 + 3n^4 - n^2\right) + \&c.,$$

welche den *terminum respondentem exponenti* $\frac{1}{2}$ *in serie*

$$n^{2^1} + n^{2^2} + n^{2^3} + n^{2^4} + \&c.$$

*exprimir*et.

Ich verharre nechst hertzlichem anwunsch alles vergnügens und schuldigster Empfehlung an Dero sämmtliche *Familie*

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

Moscau den 28. *Jun. st. n.* 1753.

vid[*e*] *P. S.*[12]

R 882 Reply to n° 167
Moscow, June (17th) 28th, 1753
Original, 2 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 160–161v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 610–613; *Euler-Goldbach* (1965), p. 370–372

169
Euler to Goldbach
Berlin, August 4th, 1753

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Die verlangten *Exemplaria* von der *Lettre d'un Officier de la Flotte Russienne* sind schon vor einigen Posttagen von hier weggeschickt worden, und werden allso verhoffentlich schon bey Ewr. Hochwohlgeb. eingelaufen seyn. Gedachte Schrifft ist mir auf *Ordre* des H. *Hettmann*s Hochgräfl[ichen] *Excellenz* zugeschickt worden um solche hier drucken zu lassen, wovon ich auch die teutsche Übersetzung besorget.[1] Inzwischen können Ewr. Hochwohlgeb. versichert seyn, daß ich hievon mit keinem Wort nach *S.^{t} Petersburg* Meldung thun werde, als wohin ich mit Niemand mehr *correspondi*re als an den H. Rath Schumacher, an welchen auch niemals einige Neuigkeit überschreibe. Seit der Abwesenheit unsers H. *Praesident*en sind auch meine Geschäffte so angewachsen, daß ich wenig Briefe mehr beantworte, weil ich nicht nur die gantze *Administration* der *Academi*e auf dem Halse habe, sondern noch alle Posttage an den *Praesident*en *rapporti*ren und über alles noch unmittelbar an S[ein]^e Königl[iche] *Majestät* Bericht abstatten muß.[2]

Weil ich weiß, daß Ewr. Hochwohlgeb. auf grosser Herrn Briefe aufmerksam sind, so nehme die Freyheit ein Königl[iches] Hand Schreiben zu *communicir*en, welches ich erhalten, als ich im Früh Jahr einige Pfirsich aus dem *Academi*schen Garten an S[ein]^e Königl[iche] *Majestät* überschickt hatte:[3]

> *J'ai bien reçu Votre lettre du* 24 *de ce Mois avec les Présens, qui l'accompagnoient; quelque plaisir que la Beauté et la Bonté des fruits, que Vous M'avez envoyés, m'ait causé, J'en ai encore ressenti davantage de l'attention, que Vous avez bien voulu Me temoigner par là: Je vous en remercie et Je verrai avec satisfaction les occasions pour vous en marquer Ma reconnoissance, à Pottsdam le* 26 *may* 1753.

Ewr. Hochwohlgeb. Manier die *Formul* $1+4ef = P^2+4Q^2$ zu entwickeln, scheinet allerdings weit mehrers in ihrem Umfang einzuschliessen, woraus vielleicht gar eine bündige *Demonstration* herzuleiten wäre; ich getraue mir aber kaum bey meinen gegenwärtigen Zerstreuungen mich an diese Untersuchung zu wagen. Die Art um die Zahl $1+4ef$ auf diese *Form* $\dfrac{SS+eQQ}{vv}$ zu bringen, in welchen Fällen nehmlich diese Auflösung in gantzen Zahlen nicht geschehen kan, scheint mir auch alle Aufmerksamkeit zu verdienen. Ich habe gesuchet dieses etwas *general*er zu bewerkstelligen auf folgende Art:[4]

Es sey $1+4ef = \dfrac{SS+eQQ}{vv}$; weil nun daher

$$vv - SS = eQQ - 4efvv = e\,(QQ - 4fvv)$$

so sehe ich daß $vv - SS$ durch e theilbar seyn muß. Es sey daher $S = ne - v$, so wird

$$2nev - nnee = e\,(QQ - 4fvv)\,,$$

oder

$$QQ - 4fvv + enn - 2nv = 0$$

und mit $4f$ *multipl*[*icirt*]

$$16ffvv + 8nfv + nn = 4efnn + 4fQQ + nn$$

woraus man erhält:

$$n + 4fv = \sqrt{((1 + 4ef)\,nn + 4fQQ)}\,.$$

Die gantze Sach kommt allso darauf an, daß man in einem jeglichen Fall, da die Zahlen e und f gegeben sind, solche Zahlen für n und Q suche, daß $(1 + 4ef)\,nn + 4fQQ$ ein *Quadrat* werde.[5]

Will man sich mit *probi*ren behelfen, so wird es nicht schwehr fallen in jeglichem Fall, wofern nur die Zahlen e und f nicht gar zu groß sind, n und Q zu finden; allein wann e und f grosse Zahlen sind, so wird man mit dem *probi*ren schwehrlich zu Recht kommen; eine sichere Methode aber scheint mir kaum möglich zu seyn, weil es Fälle gibt da die Auflösung gar nicht einmal statt findet, nehmlich wann $1 + 4ef$ kein *numerus primus* ist: und ich sehe nicht ab wie diese Bedingung in die *Methode* gebracht werden könnte.

Daß dergleichen *Problemata* sehr schwehr werden können, ist aus diesem zu ermessen, wann eine gantze Zahl x gesucht wird, daß $nxx + 1$ ein *Quadrat* werde, wann nehmlich n ein *numerus integer positivus non quadratus* ist. Wann zum *Exemp*el $61xx + 1$ ein *Quadrat* werden soll, so ist die kleinste gantze Zahl für x, wodurch dieses erhalten wird, $x = 226\,153\,980$; wie sollte nun diese erstaunliche Zahl durch *probi*ren gefunden werden können.

Soll aber $109xx + 1$ ein *quadrat* werden, so ist die kleinste Zahl $x = 15\,140\,424\,455\,100$, und die Wurzel des daher entstehenden *Quadrat*s $\sqrt{(109xx + 1)} = 158\,070\,671\,986\,249$. Diese grossen Zahlen habe ich vermittelst einer gewissen *methode* neulich in etlichen *minut*en gefunden.[6]

Wie unendlich viel *summae duorum quadratorum aa + bb* gefunden werden können, welche zugleich in dieser *Form* $vv + ezz$ enthalten sind, habe ich aus Anlaß der mir von Ewr. Hochwohlgeb. gütigst *communicir*ten gebrochenen *Formuln* noch diese in gantzen Zahlen gefunden: es ist nehmlich[7]

$$(eqq - yy + rr)^2 + 4rryy = (eqq - yy - rr)^2 + e \cdot 4qqrr.$$

Noch *general*er kan ich auch solche Zahlen geben, welche zugleich in dieser *Form* $aa + mbb$ und dieser $vv + nzz$ enthalten sind; nehmlich es ist:

$$(nyy - mxx + uu)^2 + m \cdot 4uuxx = (nyy - mxx - uu)^2 + n \cdot 4uuyy.$$

Bey der schönen *Serie* welche Ewr. Hochwohlgeb. für $n^{\sqrt{2}}$ gefunden ist nur schad daß dieselbe immer *divergens* wird, so offt n ein *numerus* > 1 ist;[8] diesem kan aber leicht geholfen werden, wann man für n setzt $\dfrac{1}{m}$, da dann m eine *fractio unitate minor* wird, und $n^{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{m^{\sqrt{2}}}$; doch aber sind die *summae serierum* $a + b + c + d +$ *etc. item* $b + 2c + 3d + 4e +$ *etc.* immer *infinitae*, daß allso auch mit dieser Beyhülf die *practi*sche Berechnung nicht erleichteret wird. Zu diesem Ende habe ich dieses Mittel gefunden: Man suche erst diese *seriem*

$$\frac{(n-1)}{1\,(n+1)} + \frac{(n-1)^3}{3\,(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5\,(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7\,(n+1)^7} + \mathit{etc.} = s$$

welche allzeit *convergens* ist; hernach setze man $2s\sqrt{2} = h$ so wird:[9]

$$n^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{h}{1} + \frac{hh}{1\cdot 2} + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{h^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \mathit{etc.}$$

Bey *Fermat* findet sich noch ein sehr schönes *Theorema*, dessen *Demonstration* er sagt gefunden zu haben:[10] Nehmlich bey Anlaß der *Diophantaei*schen Aufgabe zwey *Quadrata* zu finden deren *summ* ein *Quadrat* ist, sagt er daß es unmöglich sey zwey *cubos* zu finden deren *summ* ein *cubus* sey, und zwey *Biquadrata*, deren *summ* ein *Biquadratum*, und *generaliter* daß diese *Formul* $a^n + b^n = c^n$ allzeit unmöglich sey, wann $n > 2$. Ich habe nun wohl *Demonstration*en gefunden daß $a^3 + b^3 \neq c^3$ und $a^4 + b^4 \neq c^4$, wo $\neq$ unmöglich gleich bedeutet; aber die *Demonstration*en für diese zwey *casus* sind so von einander unterschieden, daß ich keine Möglichkeit sehe daraus eine allgemeine *Demonstration* für $a^n + b^n \neq c^n$ *si* $n > 2$ herzuleiten.[11] Doch sieht man *quasi per transennam* ziemlich deutlich daß je grösser n ist, je unmöglicher die *Formul* seyn müsse; inzwischen habe ich noch nicht einmal beweisen können, daß *summa duarum potestatum quintarum* keine *potestas quinta* seyn könne.[12] Dieser Beweiß beruhet allem Ansehen nach nur auf einem glücklichen Einfall, und so lang man nicht darauf verfällt, möchte wohl alles Nachsinnen vergebens seyn.[13] Da aber diese *aequation* $aa + bb = cc$ möglich ist, so ist auch diese möglich $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$,[14] woraus zu folgen scheint, daß auch diese $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ möglich ist; doch habe ich bißher noch keinen Fall davon ausfündig machen können; es können aber 5 *biquadrata* angegeben werden, deren *summ* ein *biquadrat* ist.[15]

Nächst gehorsamster Empfehlung meiner und der meinigen habe ich die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 4$^{\text{ten}}$ *Augusti*
1753.

R 883 Reply to n° 168
Berlin, August 4th, 1753
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 112–113v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 614–618; *Euler-Goldbach* (1965), p. 372–374

170
Goldbach to Euler
Petersburg, April (15th) 26th, 1755

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Wann ich mich nicht irre ist mein letztes Schreiben an Ew. HochEdelgebohrne vom 28. *Jun. st. n.* 1753 gewesen und folglich eine geraume Zeit verflossen darin mir nichts bey[ge]fallen daß ich Deroselben zu *communici*ren werth gehalten hätte; ohngeachtet ich die *proprietät* daß ein *numerus primus huius formae* $1+4ef$ zu dieser P^2+eQ^2, allwo P *et* Q *rationales* sind gebracht werden kan öffters *consideri*ret und auf unterschiedene Formen *reduci*ret habe,[1] als zum Ex[empel] wann $1+4ef=R^2+2abeS^2$, so kan solcher *numerus primus* allezeit in P^2+eQ^2 verwandelt werden, oder auch wann zwey *numeri irrationales* h *et* m gefunden werden können, so daß $h-m$ und hm *rationales* seyen und $h=\dfrac{\sqrt{4f-m^2}}{\sqrt{em^2+1}}$, können gleichfalls die *numeri quaesiti* P *et* Q *in rationalibus* angegeben werden; imgleichen wann $Q^2=4fv^2+2mv-em^2$ gefunden werden kan, so wird

$$1+4ef=\frac{(4fv+m)^2-4fQ^2}{m^2}=\frac{\left(em^2-v\right)^2+eQ^2}{v^2},$$

und endlich weil der *numerus primus* $1+4ef$ = ist *duobus quadratis* a^2+b^2, *quae in quocunque casu determinari possunt*, so ist genug wann man nur einen *numerum rationalem* k finden kan *hac lege ut* $a^2\left(e+k^2\right)+b^2\left(e-k^2\right)$ *fiat quadratus*, da es alsdann nicht schwer ist die *numeros quaesitos* P *et* Q zu finden, denn es wird

$$a^2+b^2=\frac{\left(h^2+1\right)^2a^2}{4h^2}+e\frac{k^2\left(h^2-1\right)^2a^2}{h^2\left(e-k^2\right)^2}$$

si sumatur

$$h=\frac{b\left(e-k^2\right)\pm\sqrt{a^2\left(e+k^2\right)^2+b^2\left(e-k^2\right)^2}}{a\left(e+k^2\right)}.$$

Ferner ist auch diese *proprietät* merckwürdig ohngeachtet ich mich um deren *demonstration* nicht bemühet: *Si quadratum aliquod divisum per numerum primum* p *huius formae* $4n+1$ *relinquat numerum* r, *dabitur etiam aliud quadratum quod divisum per eundem numerum* p *det residuum* $p-r$.[2]

Imgleichen *numerus primus* $4n + 1$ *dividens numeros quadratos quoscunque tot relinquere potest diversa residua quot* $2n$ *continet unitates*, als zum Ex[empel] wann $n = 1$, so kan der *divisor* 5 nur zwey *residua* nachlassen nemlich 1 und 4; wann $n = 3$, so lässet der *divisor* 13 *dividens quadratos, sex residua* nemlich 1, 3, 4, 9, 10, 12, *et ita reliqui.*

Hiernechst verharre ich mit vieler Hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.[t] Petersburg
den 26. *Apr. st. n.* 1755.

P. S. Das *avancement* Dero ältesten H.n Sohns, wozu Eurer HochEdelgebohrnen so wohl als ihm von hertzen *gratuli*re, habe ich unlängst mit vielem vergnügen erfahren.[3] Ich bin versichert daß er es bereits zu einer ausserordlichen[!] Wissenschafft *in mathematicis* gebracht hat; nichts destoweniger wird er es sich, im fall er ein Liebhaber von gelehrten Streitigkeiten ist, gefallen lassen müssen wann er von seinen *Antagonist*en *more Hermanniano* als *Leonhardus Eulerus Leonhardi Filius* widerleget werden möchte.[4]

Weil mir der H. *Spener* seine *Catalogos* zugeschicket so hoffe ich er werde die Güte haben mir die in beyliegender *Specification* enthaltenen Bücher theils aus seinem theils aus andern Buchladen zu *procuri*ren,[5] Ew. Hgb. aber ersuche ich dienstl[ich] nicht übel zu nehmen daß ich solche *Specification* an Sie *adressi*re und erbiete mich hingegen, dafern Sie mir allhie einige *Commissiones* auftragen wolten, selbige mit gehöriger Aufmercksamkeit zu besorgen.

R 884 Petersburg, April (15th) 26th, 1755
Original, 2 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 162–163r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 619–620; *Euler-Goldbach* (1965), p. 376

171
Euler to Goldbach
Berlin, May 17th, 1755

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Nachdem ich von Ewr. Hochwohlgeb. so lange Zeit mit keinem Schreiben erfreuet worden, so wäre ich wegen Dero Zustandes in sehr grosser Bekümmernüß gewesen, wann ich nicht von Zeit zu Zeit von dem H. *Etats* Rath Schumacher von Dero Wohlseyn wäre benachrichtiget worden.[1] Inzwischen hat mich doch einige Furcht eines von Ewr. Hochwohlgeb. mir etwan zugezogenen Unwillens nicht wenig beunruhiget, welche aber jetzt durch Dero geehrtestes Zuschreiben um so viel mehr verschwunden, da ich mir alles Nachsinnens ungeacht keines Versehens erinnern kan. Für den Hochgeneigten Antheil, welchen Ewr. Hochwohlgeb. an der Beförderung meines ältesten Sohns als Dero gehorsamsten Pathens zu nehmen belieben,[2] erkenne ich mich auf das schuldigste verpflichtet, und erkühne mich denselben noch ferner Dero Huld und Gewogenheit gehorsamst zu empfehlen. Er wendet allen möglichen Fleiß an, sich der besonderen Gnade, welche ihm durch die Aufnahme in unsere *Academi*e wiederfahren, je länger je mehr würdig zu machen. Es ist aber jetz das *Mathemati*sche *Studium* so weitläuffig, daß es eine lange Zeit erfordret, ehe man sich in allen Theilen so fest setzen kan, daß man ohne Anstoß etwas nahmhaftes darinn zu leisten im Stand kommt; dahero er freylich ohne meine Hülfe noch nichts sonderliches würde zum Vorschein bringen können.

Insonderheit muß er sich ja in keine gelehrte Streitigkeiten mischen weilen sonsten seine *Antagonist*en, welche ihm *more Hermanniano* antworteten, nicht so sehr unrecht haben dörften.[3] Ich habe aber die gute Hoffnung, daß er je länger je mehr Stärke erreichen und meines beständigen Beystandes nicht mehr lang benöthiget seyn werde.

Die Bücher, welche Ewr. Hochwohlgeb. verlangen, wird der H. Spener ohne Verzug zusammen schaffen und abschicken; ich habe ihm insonderheit empfohlen dahin zu sehen, daß die Bände Dero ausdrüklichen Vorschrifft gemäß seyn möchten.[4]

Ewr. Hochwohlgeb. Betrachtungen über das *Theorema* daß die Zahl $1+4ef$, so offt sie ein *numerus primus* ist, immer in dieser *form* P^2+eQ^2 enthalten sey,[5] habe ich mit dem grösten Vergnügen zu ergründen gesucht, und darinn sehr wichtige Kunstgriffe wahrgenommen, nur ist es schad, daß dieselben noch so weit von einer vollständigen *Demonstration* entfernt sind. Doch ist es schon von keinem geringen Nutzen, daß da man von der Wahrheit des *Theorematis* versichert ist, auch alle die daraus hergeleiteten *Formuln* gewiß *resolvir*t werden können, welches sonsten sehr schwehr fallen würde. Aus allen Bemühungen die ich hierüber angewandt, deucht mich so viel sicher schliessen zu können, daß man niemals eine solche *Demonstration* finden wird, aus welcher zugleich *ex dato numero primo* $1+4ef$ die *quadrata* P^2 und Q^2 selbst angegeben werden könnten; sondern man muß sich nur mit einer solchen begnügen, welche die Möglichkeit, daß $1+4ef = P^2+eQ^2$, beweiset, ohne den *modum* anzuzeigen, wie diese *Resolution* würklich anzustellen. Dann da dieselbe nur alsdann möglich ist, wann $1+4ef$ ein *numerus primus* ist, so sehe ich nicht ab, wie man diese nothwendige Bedingung in Betrachtung ziehen könnte. Es ist allso eine verlohrne Mühe, die *numeros P et Q generaliter* durch e und f bestimmen wollen; dann wann solches möglich wäre, so müssten auch die Zahlen P und Q gefunden werden können, wann auch $1+4ef$ kein *numerus primus* wäre, welches doch gewiß öffters unmöglich ist.

Es ist mir endlich wohl gelungen zu beweisen, daß $1+4f = PP+QQ$ so offt $1+4f$ ein *numerus primus* ist; allein der Beweiß hilft mir im geringsten nichts um einen solchen *numerum primum* $1+4f$ würklich in 2 *quadrata* zu *resolvi*ren.[6]

Neulich habe ich auch die Beweise zu Stande gebracht, daß $1+8f = 1+4\cdot 2f = PP+2QQ$ und $1+12f = 1+4\cdot 3f = PP+3QQ$ so offt nehmlich diese Zahlen $1+8f$ und $1+12f$ *numeri primi* sind; doch habe ich bißher noch nicht weiter gehen können.

Ich sehe aber daß sich diese *Formuln* noch weiter erstrecken; dann es ist nicht nur $1+8f = PP+2QQ$ sondern auch $3+8f = PP+2QQ$ wann es *numeri primi* sind. Hernach ist auch $7+12f = PP+3QQ$. Hernach wann $e = 5$ genommen wird, so hat man diese *Theoremata* $1+20f = P^2+5Q^2$; $9+20f = P^2+5Q^2$; welche ich aber nicht beweisen kan. Vielleicht aber, wann auch diese Fälle mit in Betrachtung gezogen werden, findet man etwan eher Mittel zu einer allgemeinen *Demonstration* zu gelangen.[7]

Das *Theorema* daß wann ein *quadratum per numerum primum* $p = 1+4n$ getheilt das *residuum* r lässt, ein anders *quadrat* das *residuum* $p-r$ zurücklassen müsse,[8] habe ich schon lang bewiesen: dann wann $1+4n$ *numerus primus*, *et* a *numerus datus*, so können immer unendlich viel Zahlen $aa+xx$ gefunden werden, *qui per* $1+4n = p$ *sint divisibiles*; wann allso aa *per* p *divisum* r zurüklässt, so muß xx, $p-r$ zurüklassen.

Ewr. Hochwohlgeb. ist der Beweiß bekannt, daß $a^4 \pm b^4 \neq p^4$; neulich bin ich auch mit dem Beweiß zu Stande gekommen, daß $a^3 \pm b^3 \neq p^3$; weiter kan ich aber auch nicht kommen. *Fermat* hat aber nicht nur dieses bewiesen, sondern auch daß $a^5 \pm b^5 \neq p^5$, $a^7 \pm b^7 \neq p^7$ und *generaliter* daß $a^n \pm b^n \neq p^n$ *exceptis casibus* $n = 1$ *et* $n = 2$. Allem Ansehen nach kommt es hier auf einen besondern Einfall an, und so lang man nicht darauf kommt, ist alle Arbeit vergebens:[9] ohne Zweifel wird man darauf sehen müssen daß a^5+b^5 ausser $a+b$ keine andere *divisores primos* haben kan als *hujus formae* $10m+1$, welches ich bewiesen habe.[10]

Mein gantzes Hauß befindet sich Gott sey Dank noch recht wohl, und lässt sich Ewr. Hochwohlgeb. gantz gehorsamst empfehlen; ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 17 *May* 1755.

R 885 Reply to n° 170
Berlin, May 17th, 1755
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 117–118v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 621–623; *Euler-Goldbach* (1965), p. 377–378

172
Goldbach to Euler
Petersburg, (July 25th) August 5th, 1755

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Eurer HochEdelgebohrnen werthestes Schreiben vom 17. *Maii* habe ich den 29. *ei*[*usdem*] wohl erhalten und daraus mit vielem vergnügen ersehen daß Sie meine Anmerckungen über die Verwandlung des *numeri primi* $1+4ef$ in P^2+eQ^2 richtig befunden; Sie führen zwar an, daß die von Ihnen *demonstrir*te *proposition*, *numerum* $1+4f$, *si est primus, esse* $= P^2+Q^2$, zu würcklicher *determination* der *numerorum* P *et* Q im geringsten nichts beyträget,[1] allein ich bin der Meinung, *quidquid per certum et determinatum numerum tentaminum inveniri potest, illud pro invento habendum esse*, als zum *exemple* wenn ein *problema ad aequationem quatuor potestatum reduci*ret wird, wo man *per unum, duo, vel tria tentamina* die *radicem satisfacientem* finden muß;[2] imgleichen halte ich das *problema*: *invenire omnes divisores numeri dati pro solubili quia solvi potest per finitum numerum tentaminum &c.* In dem *casu* nun, da Ew. HochEdelg. gefunden haben daß ein jeder *numerus primus hujus formae* $1+4f = P^2+Q^2$, sind zu gleich die *numeri* P *et* Q für gefunden zu achten *quia per numerum finitum tentaminum inveniri possunt*, denn ich darf nur P oder Q den *numeris integris* 1, 2, 3 *&c. successive* = setzen und deren *quadrata* von dem *numero primo* $1+4f$ so lang *subtrahi*ren biß das *residuum* ein *quadratum* wird, wozu noch viele *compendia*, *ut eligantur numeri idonei*, angegeben werden können.[3]

Die *demonstrationes* zu den *casibus* $1+8f$ und $1+12f$ möchte ich gern sehen im fall sie nicht weitläufftig sind und eine sehr grosse *attention* erfordern.

Sonst habe ich auch gefunden daß wann y durch diese *aequation*

$$\frac{\left(ay^2+2by-a\right)\left(by^2-2ay-b\right)}{\left(y^2+1\right)^2} = abeS^2$$

[gegeben ist][4] und *posita* S *rationali* auch y *rationalis* wird alsdann auch diese *aequation* statt hat

$$a^2+b^2 = \frac{\left(\left(ay^2+2by-a\right)-\left(by^2-2ay-b\right)\right)^2}{\left(y^2+1\right)^2} + 2abeS^2,$$

welcher *casus*, wie ich schon in meinem letzteren Schreiben angemercket, allezeit auf die Form P^2+eQ^2 *reduci*ret werden kan, ja wann in dieser letzten Formul P oder Q nur *unico casu* gegeben wird, so kan ich daraus unzehliche *similes et rationales* finden nehmlich:

$$\frac{\left(ePy^2+2eQy-P\right)^2+e\left(Q+2Py-eQy^2\right)^2}{\left(ey^2+1\right)^2}$$

wann ich vor y einen *numerum quemcunque rationalem* annehme, als zum *exemple*, weil $89 = \frac{9^2}{2^2} + \frac{11 \cdot 5^2}{2^2}$ allwo $P = \frac{9}{2}$, $Q = \frac{5}{2}$, $e = 11$, so wird *posita* $y = 2$ der *numerus primus* $89 = \frac{607^2 + 11 \cdot 179^2}{90^2}$ welches vieleicht noch zu andern anmerckungen gelegenheit geben wird.

Es deucht mir daß ich schon vor langer Zeit gehöret habe die Briefe an Ew. HochEdelgebohrne würden Deroselben allezeit *franco* zugestellet,[5] falls aber dieser Umstand nicht richtig ist, werde ich ins künfftige meine Briefe an Ew. H. über Königsberg durch meinen dortigen *Correspond*enten *franco* zusenden lassen;[6] ich würde auch vor dieses mal noch nicht geschrieben haben wenn ich nicht die auf beyliegendem Zettel *noti*rten Bücher annoch dieses Jahr durch H.n *Spener* zu erlangen hoffte. Indessen bitte sehr um Verzeihung daß Eure HochEdelgeb. hiedurch abermal *incommodi*re.[7]

Ubrigens habe mit vielem Vergnügen vernommen daß Sie nebst Dero sämtlichen *familie* sich wohl auf befinden, ich bitte mich derselben bestens zu empfehlen und wünsche hertzlich irgend worin durch würckliche Proben bezeugen zu können daß ich mit besonderer Hochachtung bin

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 5. *Aug.* 1755.

R 886 Reply to n° 171
Petersburg, (July 25th) August 5th, 1755
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 164–165r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 624–626; *Euler-Goldbach* (1965), p. 379–380

173
Euler to Goldbach
Berlin, August 23rd, 1755

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die von Ewr. HochwohlGeb. verlangten Bücher sollten eben weggeschickt werden, als Dero letstes Schreiben ankam, welches aber jetz nur einen Aufenthalt von etlichen Tagen verursachen wird. H. Spener versichert mich daß alles künftige Woche gewiß nach Lübeck abgehen wird.[1]

Es muß allerdings die *Reductio numeri primi* $1 + 4f$ *ad formam* $PP + QQ$ *pro possibili* gehalten werden, ungeacht keine Regul gegeben werden kan in jedem

Fall die *Quadrata* PP und QQ selbst zu finden: sondern die Sache auf blosses *Probi*ren ankommt. Ich hatte aber dieses nur angeführt um zu zeigen, daß um dieses *Theorema* zu beweisen, *quod* $1+4f = PP+QQ$, die *Demonstration* nicht aus der würklichen *Resolution* hergeleitet werden könne.[2] Nehmlich *dato numero* f *in genere*, halte ich für unmöglich die Zahlen P *et* Q *per* f zu bestimmen. Ebenso verhält sich auch die Sach mit diesem *Theoremate*, *quod* $1+8f = 2PP+QQ$ (wann nehmlich $1+8f$ ein *Numerus primus* ist), dessen *Demonstration* unmöglich so beschaffen seyn kan, daß die *valores numerorum* P *et* Q würklich durch f ausgedrückt würden. Mein Beweiß davon grundet sich auf folgenden Sätzen:

I. *Numerus* $2aa+bb$, *si non est primus alios non admittit divisores nisi qui ipsi sint formae* $2pp+qq$ (*posito scilicet, quod* a *et* b *sint numeri inter se primi*).

II. *Si* $1+8f$ *est primus, forma* $a^{8f}-b^{8f}$ *quicunque numeri pro* a *et* b *accipiantur, semper est divisibilis per* $1+8f$ (*dum modo neuter numerorum* a *et* b *sit per* $1+8f$ *divisibilis*). *Cum jam sit* $a^{8f}-b^{8f} = \left(a^{4f}-b^{4f}\right)\left(a^{4f}+b^{4f}\right)$ *alteruter factor* $a^{4f}-b^{4f}$ *vel* $a^{4f}+b^{4f}$ *per* $1+8f$ *erit divisibilis.*

III. *At non omnes numeri formae* $a^{4f}-b^{4f}$ *per* $1+8f$ *sunt divisibiles; nam si singuli hi numeri* $2^{4f}-1$; $3^{4f}-1$; $4^{4f}-1$; $5^{4f}-1$; $\ldots$, $(8f)^{4f}-1$ *per* $1+8f$ *essent divisibiles, eorum quoque differentiae tam primae quam secundae et sequentes omnes essent etiam per* $1+8f$ *divisibiles; at differentiae ultimae seu constantes sunt* $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots 4f$ *quae cum non sit per* $1+8f$ *divisibilis, sequitur etiam non omnes illos numeros per* $1+8f$ *esse divisibiles.*

IV. *Dantur ergo numeri pro* a *et* b, *quibus* $a^{4f}-b^{4f}$ *non est divisibilis per* $1+8f$; *iis ergo casibus numerus* $a^{4f}+b^{4f}$ *certe est per* $1+8f$ *divisibilis. At est* $a^{4f}+b^{4f} = \left(a^{2f}-b^{2f}\right)^2 + 2a^{2f}b^{2f}$ *ideoque numerus formae* $PP+2QQ$; *qui cum sit per* $1+8f$ *divisibilis, necesse est per* (I), *ut divisor* $1+8f$ *ipse sit numerus ejusdem formae* $PP+2QQ$.

Wann man einen einigen *Casum* gefunden, *quo formula* $xx+eyy$ *fit aequalis dato numero* N, so können daraus *infiniti alii in fractis scilicet* gefunden werden. Als wann $aa+ebb = N$, *ponatur* $x = a+pz$ *et* $y = b-qz$ *fietque*

$$aa+2apz+ppzz+ebb-2ebqz+eqqzz = N;$$

at $aa+ebb = N$, *ergo* $2apz+ppzz-2ebqz+eqqzz = 0$, *unde fit* $z = \dfrac{2ebq-2ap}{pp+eqq}$. *Ergo sumendo pro* p *et* q *numeros quoscunque erit*

$$x = \frac{eaqq+2ebpq-app}{pp+eqq}$$

et

$$y = \frac{bpp-ebqq+2apq}{pp+eqq}.$$

Wann aber e ein *numerus negativus*, so können aus einem einigen *casu* $aa-ebb = N$ *in integris invento infiniti alii etiam* [*in*] *integris* gefunden werden, welches ich allso kürzlich zeige:

Theorema. Si fuerit $aa - ebb = N$, *tum infiniti casus in numeris integris* x *et* y *assignari possunt, quibus fiat* $xx - eyy = N$, (*dummodo* e *non sit numerus quadratus*).

Demonstratio. Quicunque sit numerus e, *dum non quadratus, semper assignari possunt numeri* p *et* q *ut sit* $pp - eqq = 1$, *seu* $pp = eqq + 1$; *cum jam sit per hypothesin* $aa - ebb = N$, *erit quoque* $(aa - ebb)(pp - eqq) = N$.[3] *At est*

$$(aa - ebb)(pp - eqq) = aapp - ebbpp - eaaqq + eebbqq = (ap \pm ebq)^2 - e(bp \pm aq)^2 .$$

Capiatur ergo $x = ap \pm ebq$ *et* $y = bp \pm aq$ *eritque* $xx - eyy = N$. *Jam quemadmodum ex primo casu* $x = a$ *et* $y = b$ *hinc duo adeo novi sunt inventi, ex his simili modo porro novi, ex iisque deinceps alii in infinitum elici poterunt. Q. E. D.*

Die gantze Sache kommt allso darauf an, daß *pro quovis numero* e die Zahlen p *et* q angegeben werden, *ut sit* $pp = eqq + 1$, welches *in numeris integris* allzeit geschehen kan, wie schon *Pell* und *Fermat* gezeiget. Dazu kan beygesetzte *Tabelle* dienen.

Ut sit $pp = eqq + 1$	*si sit*	*erit*	*et*
	$e = 2$	$q = 2$	$p = 3$
	$e = 3$	$q = 1$	$p = 2$
	$e = 5$	$q = 4$	$p = 9$
	$e = 6$	$q = 2$	$p = 5$
	$e = 7$	$q = 3$	$p = 8$
	$e = 8$	$q = 1$	$p = 3$
	$e = 10$	$q = 6$	$p = 19$
	$e = 11$	$q = 3$	$p = 10$
	$e = 12$	$q = 2$	$p = 7$
	$e = 13$	$q = 180$	$p = 649$
		etc.	

Diese *Tabelle* enthält die kleinsten Werthe für p *et* q, welche durch die sogenannte *Pellian*ische *Methode* gefunden werden.[4] Diese *Method*e ist aber ziemlich beschwehrlich, wann die Zahlen für p und q wie bey dem *casu* $e = 13$ geschiht groß werden, und ich habe Mittel gefunden dieselbe sehr abzukürzen.[5] Dann es geschieht in einigen Fällen daß die kleinsten Zahlen p und q ungeheur groß werden als:

wann $e = 61$ so ist $q = 226\,153\,980$ und $p = 1\,766\,319\,049$;

wann $e = 109$, so ist $\begin{cases} q = 15\,140\,424\,455\,100 \\ p = 158\,070\,671\,986\,249 \end{cases}$

Ewr. Hochwohlgeb. haben vormals auch solche Zahlen $\Box + \triangle$ oder $\Box + 2\triangle$ in Betrachtung gezogen; und neulich haben mich dieselben auf *curieus*e *Theoremata exclusiva* geleitet. Als I. *Cum non omnes numeri si*[*n*]*t aggregata ex quadrato et trigonali, seu formae* $\Box + \triangle$, *dantur infiniti numeri in hac forma non contenti; cujusmodi numerus si fuerit* n, *tum numerus* $8n+1$ *certe non est primus.* II. *Infiniti* *dantur numeri in forma* $\square + 2\,\triangle$ *non contenti; sit n hujusmodi numerus, et* $4n+1$ *certe non erit numerus primus.*[6]

Le[t]stens bin i[ch] ungefehr auf dieses *Problema* gefallen:

Invenire aequationem cubicam $x^3 - Axx + Bx - C = 0$, *quae habeat omnes suas radices rationales, et in qua coefficientes* A, B, C *sint numeri quadrati.*

Vel si p, q, r *sint ejus radices, eas ita comparatas esse oportet, ut primo* $p+q+r$ *secundo* $pq+pr+qr$ *et tertio* pqr *sint numeri quadrati.*

Ich halte dieses *Problema* um so viel schwehrer, da ich glaube daß für p, q, r nicht wohl kleinere Zahlen gefunden werden können, als diese:

$$p = 252\,782\,198\,228, \quad q = 1\,633\,780\,814\,400, \quad r = 3\,474\,741\,058\,973.$$ [7]

Ich habe neulich wieder einige Untersuchungen über solche *Differentialaequation*en dergleichen die *Riccatiana* ist, angestellt, welche sich nur in gewissen Fällen *integri*ren lassen. Wann nun für i ein *numerus integer quicunque* angenommen wird so sind folgende *aequationes* immer *integrabel*:[8]

I. $dy + yy\,dx = aax^{2n-2}dx + ((2i+1)\,n \pm 1)\,ax^{n-2}dx.$

II. $dy + yy\,dx = \dfrac{(in \pm 1)\,(in + n \pm 1)\,abx^{n-2}dx}{(a - bx^n)^2};$

vel haec aequatio

$$dy + yy\,dx = \frac{mabx^{n-2}dx}{(a - bx^n)^2}$$

toties est integrabilis, quoties fuerit

$$n = \frac{\sqrt{(1 + 4i\,(i+1)\,m)} \pm (2i+1)}{2i\,(i+1)}:$$

ita si $i = 2$, $m = 3$, *erit* $n = \dfrac{\sqrt{73} + 5}{12}$; *unde integrabilis haec aequatio*

$$dy + yy\,dx = \frac{3abx^{\frac{\sqrt{73}-19}{12}}dx}{\left(a - bx^{\frac{\sqrt{73}+5}{12}}\right)^2}.$$

Porro sit $n = 2$, *et* $i = 2$, *integrabilis erit haec aequatio, ponendo* $a = 1$, $b = 1$:

$$dy + yy\,dx = \frac{15\,dx}{(1 - xx)^2};$$

est vero integrale

$$y = \frac{15x + 14xxx - 2x^5}{(1 - xx)\,(1 + 6xx + 2x^4)}.$$ [9]

III. $dy + yy\,dx = \dfrac{in\,(in \pm 1)\,bx^{n-2}dx}{a + bx^n};$

IV. $dy + yy\,dx = \dfrac{in\,(in \pm 1)\ a\,dx}{xx\ (a + bx^n)}$;

V. *Haec aequatio*

$$dy + yy\,dx = \frac{\lambda\,(\lambda - 1)\ aa - \mu abx^n + \nu\,(\nu - 1)\,bbx^{2n}}{xx\ (a + bx^n)^2}\,dx$$

semper est integrabilis quoties sumto pro i numero integro quocunque fuerit

$$\mu = i\,(i + 1)\ nn - (2i + 1)\ n\,(\lambda - \nu) + \lambda + \nu - 2\lambda\nu.$$

So viel ich weiß geniesst hier Niemand die Postfreyheit,[10] und so lang ich hier bin, hat mich meine *Correspondentz* jährlich wohl 200 Rthl. gekostet; ich gebe aber für keine Briefe das Postgeld mit grösseren Freuden aus als diejenigen, welche von Ewr. Hochwohlgeb. zu erhalten die Ehre habe, und wünschte, daß wofern solches ohne Dero Unbequemlichkeit geschehen könnte, ich dieses Vergnügens öffter theilhaftig werden könnte.

Jüngsthin hat mir die Königl[iche] *Pariser Academi*e die Ehre gethan, mich unter ihre auswärtige Mitglieder aufzunehmen;[11] der H. Graf von *Argenson* hat mir diese Nachricht selbst in einem Schreiben gemeldet, wovon ich die Freyheit nehme Ewr. Hochwohlgeb. eine *Copi*e beyzulegen.

Alle die meinige und insonderheit Dero Pathe[12] lassen sich Ewr. Hochwohlgeb. gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berli[*n*] den 23 *Augusti*
1755.

A Versailles le 15 *Juin* 1755

Le Roy vient de vous choisir, Monsieur, d'après le vœu de Son Academie Royale des sciences pour remplir une place d'associé etranger dans cette Academie, et comme elle a nommé en meme tems Milord Macclesfield President de la Societé Royale de Londres pour remplir une pareille place qui vaque par la mort de M. Moivre, Sa Majesté a decidé que la premiere place de cette espece, qui vaquera, ne sera pas remplie. L'extreme rareté de ces sortes d'arrangemens est une distinction trop marquée pour ne pas vous en faire l'observation et vous asseurer de toute la part que j'y prend. L'Academie desiroit vivement de vous voir associé à ses travaux et Sa Majesté n'a pu qu'adopter un temoignage d'estime, que vous merités à si juste titre. Soyes persuadé, Monsieur, qu'on ne peut vous etre plus parfaitement devoué que je le suis

M. D'Argenson.

M.r Euler Directeur de la Classe des Mathematiques de l'Academie Royale de Berlin.[13]

In meiner *Mechan*[*ica*] *Tom.* II, *pag.* 405 kommt diese *series* vor

$$1-\frac{n}{3}+\frac{n\,(n-2)}{3\cdot 5}-\frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{n\,(n-2)\,(n-4)\,(n-6)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}-etc.$$

deren *summ* dort gegeben wird $=\dfrac{1}{n+1}$. Ich kan mich nicht mehr recht erinnern wie ich damals auf diese *summ* gekommen, glaube aber daß damals mehrmals darüber mit Ew. Hochwohlgeb. zu *conferi*ren die Ehre gehabt habe.[14]

R 887 Reply to nº 172
Berlin, August 23rd, 1755
Original, 3 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 114–116v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 627–633; *Euler-Goldbach* (1965), p. 380–383

174
Goldbach to Euler
Petersburg, (November 28th) December 9th, 1755

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen *gratuli*re ich zuforderst zu der erhaltenen Stelle eines *Academicien Honoraire* bey der Parisischen *Acad*[*emie*] *des Sciences*[1] und dancke Deroselben für die mir übersandte *Copie* von dem Briefe des *M.r d'Argenson*; es fehlet aber dabey das beste, nemlich Eurer Hochedelg. Antwort welche wie ich gäntzlich glaube, sehr wohl abgefasset und *digne de l'approbation des Quarante* seyn wird.[2] Ferner gereichet es mir zu grossem Vergnügen daß Dero ältester Herr Sohn das *praemium* bey der hiesigen *Acad*[*emie*] der W[issenschaften] erhalten hat;[3] ich zweiffele im geringsten nicht daß solches noch öffters geschehen werde wann er die Mühe nehmen wird seine *pieces* zu solchem Ende einzusenden.

Vor die mir *communici*rten merckwürdigen *theoremata* sage ich schuldigsten Danck, und ob ich gleich wenige Hofnung habe daß ich dieselben jemals *pro dignitate* werde betrachten können so ist es mir doch sehr lieb daß Ew. Hochedelg. noch immer fortfahren solche schöne *decouvertes* zu machen. Mir ist seit meinem letzteren Schreiben nichts sonderliches eingefallen. Was aber die *seriem*

$$1-\frac{n}{3}+\frac{n\,(n-2)}{3\cdot 5}-\frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{3\cdot 5\cdot 7}+\&c.=\frac{1}{n+1}$$

betrifft, so kan ich mich zwar nicht erinneren selbige schon gesehen zu haben, es ist aber deren *summa* gantz offenbar;[4] eine andere Bewandniß hat es mit den

Seriebus deren *denominatores in certis casibus* = 0 und folglich die *summa seriei infinite magna* werden kan.

Die Bücher von Berlin sind bereits, wiewohl in geringer Anzahl allhie ankommen; die Rechnung aber habe ich bißhero nicht erhalten, sonsten es an *promt*er Bezahlung nicht ermangelt haben würde wovon ich dienstlich bitte den H.n *Spener avert*iren zu lassen.[5]

Im übrigen verharre ich nechst schuldigster Empfehlung an Dero sämmtliche *Familie*

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 9. *Dec.* 1755 *st. n.*

Theorema: Si sit $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$, *ubi* P *et* Q *rationales, erit etiam*

$$a^2 + ((2e+1)\,b - P - Q)^2 = M^2 + eN^2,$$

ubi M *et* N *rat*[*ionales*].[6]

R 888 Reply to n° 173
Petersburg, (November 28th) December 9th, 1755
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 166–167r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 634–635; *Euler-Goldbach* (1965), p. 383–384

175
Goldbach to Euler
[Petersburg], December (2nd) 13th, 1755

P. S. ad litt[*eras*] *d*[*atas*] 9. *Dec.*

Ich finde nöthig Ew. Hochedelgeb. unverzüglich von einem Schreibfehler in meinem neulichen *theoremate* zu *avert*iren indem es heissen soll *Si sit* $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$, *ubi* P *et* Q *rationales, erit etiam*

$$a^2 + ((2e+1)\,b - eP - eQ)^2 = M^2 + eN^2,$$

ubi M *et* N *rationales.*[1]

den 13. *Dec.* 1755.

In des H.n *Etienne de Bourdeaux* Buchladen in Berlin ist *la Clef du Cabinet des Princes* in 100 *volumes* in 8. befindlich.[2] Ew. HochEdelg. würden mich *obligi*ren wann Sie durch Dero Bedienten wollten nachfragen lassen was selbige kosten und ob die Bücher schon eingebunden sind?

R 889 Postscript to n° 174
[Petersburg], December (2nd) 13th, 1755
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 168r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 384

176
Euler to Goldbach
Berlin, January 3rd, 1756

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Bey dem Antritt dieses neuen Jahrs lege ich zuvorderst meinen herzlichsten Wunsch für das beständige Wohlseyn Eur. Hochwohlgeb. ab, und empfehle mich dabey gehorsamst sammt den meinigen zu Dero fortdaurenden Wohlgewogenheit. Zugleich statte ich auch Eur. Hochwohlgeb. meine verpflichtetste Danksagung ab für den gütigen Antheil welchen Dieselben an unserem Zustand zu nehmen belieben und habe das Vergnügen Eur. Hochwohlgeb. zu berichten, daß S[ein]e Königl[iche] *Majestät* bey dem Anfang dieses Jahrs Dero Pathen unsern ältesten Sohn mit einer jährlichen Besoldung von 200 Rthl. begnadiget.[1]

Ich habe nun schon eine geraume Zeit so viel andere Geschäfte gehabt daß ich an *numeri*sche *Theoremata*, dergleichen ich Eur. Hochwohlgeb. das letste mal vorzulegen die Ehre gehabt, nicht habe denken können. Die *Partes Matheseos applicatae* nehmen mir die meiste Zeit weg, wo es immer mehr zu untersuchen gibt, je mehr man damit umgeht.[2] Weil nun mein Kopf mit so viel anderen Sachen angefüllet ist, so mag das wohl die Ursache seyn, daß ich mich in das von Eur. Hochwohlgeb. *communicir*te und nach der Hand verbesserte *Theorema* nicht finden kan. Vielleicht haben Eur. Hochwohlgeb. vergessen noch eine wesentliche *Condition* hinzuzusetzen.[3]

Das *Theorema* war: *Si sit* $aa + bb = P^2 + eQ^2$ *erit etiam*

$$a^2 + ((2e+1)\,b - eP - eQ)^2 = M^2 + eN^2;$$

weil ich den Grund desselben nicht einsehen konnte, so habe ich die Richtigkeit desselben durch *Exempel* erforschen wollen.

I. Da $1^2 + 4^2 = 17 = 3^2 + 2 \cdot 2^2$, so ist $a = 1$, $b = 4$, $P = 3$, $Q = 2$ und $e = 2$, allso müste seyn

$$1^2 + (5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 = 1^2 + 10^2 = 101 = M^2 + 2N^2$$

welches unmöglich ist.

II. Da $9^2 + 4^2 = 97 = 7^2 + 3 \cdot 4^2$, so ist $a = 9$; $b = 4$; $P = 7$; $Q = 4$ und $e = 3$, allso müsste seyn

$$9^2 + (7 \cdot 4 - 3 \cdot 7 - 3 \cdot 4)^2 = 9^2 + 5^2 = 106 = M^2 + 3N^2$$

welches ebenfalls unmöglich ist.

Da ich nun nicht einmal ein *Exempel* finden kan, welches einträfe, so schliesse ich daraus, daß eine gewisse Bedingung in den Zahlen a, b, P und Q müsse weggelassen seyn, welche ich aber nicht ausfündig machen kan.[4]

Ich habe dem H. *Spener* zu wissen gethan, daß Eur. Hochwohlgeb. die Rechnung für die überschickten Bücher verlangen; bekomme ich dieselbe vor Schliessung dieses Briefs, wie ich ihm habe sagen lassen, so werde ich sie beylegen.[5] Sonsten da er nicht alle verlangte Bücher gehabt, so werde ich inskünftige dergleichen *Commission*en dem *M.^{r} Neaulme*, welcher weit *activer* ist und alles schaffen kan, auftragen. Wegen des Werks: *La Clef du Cabinet des Princes* füge hier die Antwort des *M.^{r} de Bourdeaux* bey.[6] Sollte dasselbe vor der Ankunft einer *Resolution* von Eur. Hochwohlgeb. schon verkauft worden seyn, so hat sich *M.^{r} Neaulme* anheischig gemacht, dasselbe auch zu liefern.

Ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Eur. Hochwohlgebohrnen

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 3$^{\text{ten}}$ *Januarii*

1756.

R 890 Reply to n° 174 and n° 175
Berlin, January 3rd, 1756
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 123rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 636–637; *Euler-Goldbach* (1965), p. 385–386

177
Goldbach to Euler
Petersburg, January (13th) 24th, 1756

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

So leyd es mir ist daß ich Eurer Hochedelgebohrnen durch mein unrecht abgeschriebenes *theorema* einige Mühe verursachet habe, so lieb ist es mir hingegen daß Sie selbiges Ihrer untersuchung werth gehalten[1] denn wann Sie nichts darauf geantwortet hätten, würde ich auch gewiß nicht mehr daran gedacht haben, nachdem ich solches aber auf Dero veranlassung wieder übersehen so habe ich zugleich bemercket daß es unendlich *general*er gemachet werden kan und der bey einer andern gelegenheit von mir angeführte Vers: *Si non errasset fecerat ille minus* findet hier abermal statt.[2] Es soll heissen: *Si* $a^2+b^2=P^2+eQ^2$ *ubi* P *et* Q *sint numeri rationales poterit etiam fieri*

$$a^2+(b+2em\,(mb-mP-Q))^2=M^2+eN^2,$$

ita ut M *et* N *sint rationales modo pro* m *sumatur numerus rationalis.*[3] In dem von Eurer HochE. angeführten ersten *exemple*[4] woselbst $a=1$, $b=4$, $P=3$, $Q=2$ und $e=2$, wird $1^2+4^2=3^2+2\cdot2^2$, *ergo etiam*

$$1^2+\left(4+4m^2-8m\right)^2$$

seu[5]

$$1^2+2^2\,(m-1)^4=M^2+2N^2,$$

de quo dubitare nefas; in dem andern *exemple* wo $a=9$, $b=4$, $P=7$, $Q=4$, $e=3$ oder $9^2+4^2=7^2+3\cdot4^2$ wird

$$9^2+\left(4-24m-18m^2\right)^2=M^2+3N^2,$$

welches gleichfalls eine gewisse Wahrheit ist. So offt nun

$$a^2+(b+2em\,(mb-mP-Q))^2$$

ein *numerus primus* ist so kan er diese Form M^2+eN^2 haben wann gleich a^2+b^2 kein *numerus primus* ist.

Die mühe so Ew. Hochedelgeb. nehmen wollen sich bey *M.^{r} de Bourdeaux* nach dem *Clé du Cabinet informi*ren zu lassen[6] erkenne ich mit schuldigstem Danck und übersende darauf die hiebeyliegende *Assignation* von 45 Rthl. mit dienstlicher Bitte die Bücher wann sie bey dem *M.^{r} de Bourdeaux* zusammengepackt und versiegelt worden, sonder Beschwerde in Dero hause biß zur künfftigen übersendung liegen zu lassen da ich denn selbige künfftiges Frühejahr mit noch andern Büchern zusammen anhero kommen lassen will. H. *Poggenpohl* hat schon *ordre* gestellet den H.n *Spener* in Berlin zu bezahlen welches auch vor ankunfft dieses geschehen seyn wird.[7] Den Vorschlag durch H.n *Neaulme* Bücher von Berlin kommen zu lassen, nehme ich mit allem Danck an, weiß aber nicht ob er in seinem Verlage auch deutsche Bücher hat oder solche zu *procuri*ren sich bemühen wird.

Vor den gütigen Wunsch zum neuen Jahre bin ich Eurer Hochedelgeb. sehr verbunden. Gott lasse Sie dieses bereits angefangene wie auch viele folgende Jahre nebst der Frau *Professo*rin und Dero sämmtlichen *Familie* bey allem ersinnlichen Wohlergehen zurücklegen. Daß mein Herr Pathe schon zu einer würcklichen Besoldung gelanget, habe ich mit vieler Freude vernommen.[8] Dieses ist schon ein guter anfang und hat er hierin Ew. HochEd. glücklich *imiti*ret in dem Sie, wie ich dafür halte, fast in gleichem Alter bey der *Acad*[*emie*] *des Sc*[*iences*] in Petersburg *engagi*ret worden.[9] Neulich vernahm ich auch daß der H. *Johannes Albertus* schon einen Preiß von der *Acad*[*emie*] zu Pariß bekommen,[10] wovon ich die *confirmation* durch Ew. Hochedelg. selbst zu erhalten wünsche, wann aber auch diese Zeitung gleich unrichtig seyn sollte, wird sie nach allem Vermuthen bald, und *suo tempore* öfters *verifici*ret werden. Eurer HochE. antwort auf das Schreiben des H.n *d'Argenson*[11] hatte ich schon im letzteren Briefe verlanget weil ich *présumi*rte daß selbige *cum censura et approbatione* des H.n von *Maupertuis* abgegangen, und an sich selbst eine schöne *piece* seyn würde, daher ich nochmals *instanter* darum bitte. Ich verharre im übrigen mit vieler Hochachtung

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersburg
den 24. *Jan.* 1756 *st. n.*

R 891 Reply to nº 176
Petersburg, January (13th) 24th, 1756
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 169–170r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 638–639; *Euler-Goldbach* (1965), p. 386–387

178
Euler to Goldbach
Berlin, February 10th, 1756

Hochwohlgebohrner *Herr*
Hochgeehrtester *Herr Etats* Rath

La Clef du Cabinet des Princes war noch vorhanden;[1] ich habe dieses Werk in 100 *Volumes* bestehend schon in meinem Haus wohl bewahrt; es sind immer 10 *Tomi* zusammen gebunden und ich sehe nicht wie dieselben bequem versiegelt werden könnten, ich müsste dann einen Kasten dazu machen lassen. Da aber Eur. Hochwohlgeb. noch mehr Bücher dazu zu verschreiben gesinnet sind, so möchte ein besondrer Kasten zu denselben unnöthig seyn: ich werde Dieselben allso biß dahin eben so gut verwahren, als wann sie versiegelt wären.

M.r Neaulme hat zwar nicht viel teutsche Bücher, doch ist er im Stande alles zu schaffen; er scheint mir nur *activer* als andere und dabey billig zu seyn; weiter kan ich nicht für ihn gut sprechen.

Eur. Hochwohlgeb. statte für den Hochgeneigten Antheil so Dieselben an unserm Zustand nehmen und den damit verknüpften Gütigen Wunsch allen schuldigsten Dank ab; noch hat unser *Joh*[*ann*] Albert keinen Preiß bey der *Pariser Academie* erhalten:[2] der Nahme desjenigen, so im vorigen Jahr den Preiß erhalten, wurde nicht sogleich bekannt gemacht, man wusste nur daß es ein junger Mensch war, welches vielleicht zu der Eur. Hochwohlgeb. hinterbrachten Nachricht Anlaß gegeben haben mag. Es ist mir aber seitdem die Preißschrifft selbst zugeschickt worden, deren Verfasser *M.ʳ Chauchot sousconstructeur des vaisseaux* genannt wird, welcher aber bald darauf gestorben seyn soll.[3] Die Frage war: *Diminuer le plus qu'il est possible les mouvemens de roulis et de tangage d'un Navire etc.* Da aber die obgemeldte Schrifft kein völliges Genügen geleistet, so ist eben diese Frage nochmals aufs künftige Jahr vorgeleget worden, worüber wir jetz würklich arbeiten.[4] Von meiner Danksagung an des H. *Comte d'Argensons Exzellenz* habe ich so wenig als von allen meinen Briefen eine Abschrifft behalten: sie war sehr schlecht gerathen, und allso nicht wohl möglich viel darinn zu verbessern; mir hat sie am wenigsten gefallen, und deswegen wollt ich kein Andenken davon aufbehalten.[5]

Eur. Hochwohlgeb. *Theorema*, daß wann $aa + bb = P^2 + eQ^2$ auch

$$a^2 + (b + 2em\,(mb - mP - Q))^2 = M^2 + eN^2$$

sey, hat seine völlige Richtigkeit,[6] und ist deswegen sehr merkwürdig, daß dadurch dieses *Problema solvir*t werden kan:

Datis duobus quadratis aa et bb quorum summa sit numerus formae P^2+eQ^2, invenire infinita alia quadrata loco bb substituenda quae priori aa addita summam exhibeant, quae pariter sit numerus formae $P^2 + eQ^2$.

Hier wird allso das erstere *quadratum aa* beybehalten, und an statt des anderen *bb* unendlich viel andere Werthe angegeben, daß die *summ* allzeit in dieser Form $P^2 + eQ^2$ enthalten sey. Man könnte allso das *Problema* noch *generaler* allso *proponi*ren:

Proposita summa duorum quadratorum $aa + bb$, quae sit numerus formae $P^2 + eQ^2$, invenire infinitas alias binorum quadratorum summas $xx + yy$, quae in eadem forma contineantur.

Wovon ich folgende *Solution* gefunden:

Cum sit $aa + bb = P^2 + eQ^2$, tribuantur numeris x et y sequentes valores:

$$\begin{aligned} x &= a\,(tt + evv + rr - ss) + 2r\,(bs - Pt - eQv) \\ y &= b\,(tt + evv - rr + ss) + 2s\,(ar - Pt - eQv) \end{aligned}$$

ubi quidem pro litteris r, s, t, v numeros quoscunque accipere licet. Tum autem utique erit $xx + yy = M^2 + eN^2$: fiet enim

$$M = P\,(rr + ss + tt - evv) + 2t\,(eQv - ar - bs)$$

&

$$N = Q\,(rr + ss - tt + evv) + 2v\,(Pt - ar - bs)\,.$$

Solchergestalt werden nicht nur unendlich viele, sondern sogar alle mögliche Werthe für x und y gefunden.

In diesem *Problemate* wird vorausgesetzt, daß schon ein *Casus* da $aa + bb = P^2 + eQ^2$ bekannt sey, um daraus alle übrige zu finden; allein dieses ist auch nicht einmal nöthig, sondern *proposito numero e quocunque*, können unmittelbar alle mögliche *summae binorum quadratorum* angegeben werden, welche zugleich in der Form $P^2 + eQ^2$ enthalten sind.

Man nehme nehmlich sogleich $a = exx - yy + zz$ und $b = 2yz$, so wird

$$aa + bb = (exx - yy - zz)^2 + e\,(2xz)^2 .$$

Weil nun x, y, und z nach Belieben angenommen werden können so erstreckt sich diese *Solution* auf alle mögliche Fälle, und scheinet allso vor der vorhergehenden keinen geringen Vorzug zu haben.[7]

Wir empfehlen uns insgesammt zu Eur. Hochwohlgeb. beständiger Wohlgewogenheit, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung lebenslang zu verharren

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 10 *Febr.* 1756.

R 892 Reply to n° 177
Berlin, February 10th, 1756
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 124–125r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 640–642; *Euler-Goldbach* (1965), p. 387–389

179
Goldbach to Euler
Petersburg, March (12th) 23rd, 1756

Hochedelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Ich nehme die Freyheit Eurer HochEdelgebohrnen wiederum einen kleinen aufsatz von Büchern zu übersenden,[1] welche durch denjenigen Buchhändler den Sie dazu erwehlen werden besorgen zu lassen bitte, indessen dancke Eurer Hochedelgebohrnen dienstl[ich] für die bereits mit dem *Clé du Cabinet* übernommene mühe[2] und wünschete sehr Deroselben auch auf meiner seite einige gefälligkeiten erweisen zu können. Des H.n *Spener*s erste Rechnung nebst dessen Schreiben vom 27. *Sept.* 1755 ist mir nicht eher als den 2. *Mart.* 1756 zugestellet worden, nachdem die *quittance* über die zufolge der anderen Rechnung bezahlten Gelder schon ankommen war,[3] so daß ich jetzo der mühe nicht werth halte untersuchen zu lassen wo der Brief so lange geblieben.

Die von Eurer Hochedelg. angeführte *aequatio*

$$a^2 + b^2 = \left(ex^2 - y^2 - z^2\right)^2 + e\,(2xz)^2$$

ist aus unserer vorigen *Correspondance* schon bekannt, welcher umstand Deroselben vieleicht entfallen war.[4] Sonst habe ich auch noch einen andern hierher gehörigen *lusum naturae* bemercket, nemlich wann $1+4efg=P^2+eQ^2$, *erit etiam*

$$1+4e\left(fg+ef^2y^2x^2\right)=(P-2efyx)^2+e\,(Q-x)^2$$

posita $x=\dfrac{4fPy+2Q}{4efy^2+1}$;[5] so offt nun $e\left(g+efy^2x^2\right)$ ein *numerus quadratus* ist (*posito valore dicto ipsius* x) so offt kan P^2+eQ^2 in diese form verwandelt werden M^2+fN^2, *existentibus* M *et* N *rationalibus*, denn es wird seyn $M=(P-2efyx)$ und $N=Q-x$.

Daß Ew. Hochedelg. sich ein Landgut gekauffet und dahin öfftere *promenad*en machen sollen[6] habe ich mit vergnügen vernommen, es wird solches Deroselben nicht allein *pro distractione* (wie die deutschen *Jesuit*en zu reden pflegen) sondern auch zu erhaltung der gesundheit sehr dienlich seyn, wie ich denn von Dero fernerem Wohlergehen viele angenehme Nachrichten zu erhalten wünsche und mit besonderer hochachtung verharre

Eurer Hochedelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S^t *Petersbourg*
den 23. *Mart. st. n.* 1756.

R 893 Reply to n° 178
Petersburg, March (12th) 23rd, 1756
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 171–172r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 643; *Euler-Goldbach* (1965), p. 389

180
Goldbach to Euler
Petersburg, March (16th) 27th, 1756

P. S. ad litteras d[*atas*] 23. *Mart.* 1756.

Es scheinet daß die übereilungsfehler bey mir in den Briefen an Ew. Hochedelgeb. je länger je gemeiner werden, wie es denn in dem letztern abermal $x=4fPy+2Q$ und nicht $x=\dfrac{4fPy+2Q}{4efy^2+1}$ hätte heissen sollen, welches ohne Beschwerde zu *corrigi*ren bitte. Im übrigen wird vieleicht dieses *raisonnement* zum Beweise daß ein *numerus primus* von dieser Form $1+4efg$ in P^2+eQ^2 verwandelt werden kan etwas beytragen:

Si positis e, f, g *rationalibus fieri potest* $1+4efg = P^2 + eQ^2$, *ita ut* P *et* Q *sint rationales, poterit etiam fieri*

$$1+4efg = M^2 + fN^2 = R^2 + gS^2,$$

ita ut M, N, R, S *sint rationales (cum in numero* $1+4efg$ *numeri* e, f, *et* g *sint natura sua permutabiles).*

Atqui in quovis numero primo $1+4efg = a^2 + b^2$ *verum est prius (nam poni potest* $e = 1$, $P = a$, $Q = b$, *ergo et posterius).*[1]

Auf der überschrifft dieses Briefes wird, wie auf den vorhergehenden, stehen *franco* biß Berlin; ich will aber auch hoffen daß meine Briefe Eurer Hochedelgeb. nach solcher Vorschrifft werden zugestellet werden, widrigenfalls mir darüber eine kleine *notam* ausbitte.[2] *S.t Petersbourg* den 27. *Mart.* 1756.

R 894 Postscript to n° 179
Petersburg, March (16th) 27th, 1756
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 173r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 644; *Euler-Goldbach* (1965), p. 390

181
Euler to Goldbach
Berlin, April 17th, 1756

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Die von Eur. Hochwohlgeb. verlangten Bücher hat H. *Spener* zu überliefern und Dero *Ordre* gemäß binden zu lassen übernommen, hat auch versprochen, dieselben nächstens nebst dem *Clef du cabinet* nach Lübeck zu schaffen. Weil sich darunter so viel teutsche Bücher befanden, so möchte *M.r Neaulme* wenig davon zu verschaffen im Stande gewesen seyn; dahingegen H. *Spener* noch nach der letsten Versendung einige von denen so Eur. Hochwohlgeb. das vorige mal verlangt, und die sich in dem jetzigen Aufsatz wiederum befinden, erhalten.[1]

Es hat seine völlige Richtigkeit, daß wann $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$, auch seyn werde

$$(P - 2efyx)^2 + e\,(Q - x)^2 = 1 + 4ef\left(g + efy^2x^2\right),$$

posita $x = 4fPy + 2Q$, und allso auch daß, so offt $e\left(g + efy^2x^2\right)$ ein *quadratum* ist, diese *Form* in $M^2 + fN^2$ verwandelt werde. Hieraus aber möchte wenig zu folgern seyn: dann da e, f und g *numeri inter se primi* zu seyn pflegen, so sind die *factores* e und $g + efy^2x^2$ *inter se primi*, folglich kan ihr *product* kein *quadratum* seyn; es wäre dann daß man für y, x *numeros fractos* zulassen wollte, in welchem Fall man sich in noch grössere Schwierigkeiten verwickeln würde. Dann es sey $e = 2$, $f = 5$ und $g = 1$, allso $1 + 4efg = 41 = 3^2 + 2 \cdot 4^2$; dahero $P = 3$ und $Q = 4$. Nun nehme man $x = 4fPy + 2Q = 60y + 8$, so ist allerdings

$$1 + 40\left(1 + 10y^2x^2\right) = (3 - 20yx)^2 + 2\,(4 - x)^2\,.$$

Es wäre allso die Frage ob $e\left(g + efy^2x^2\right) = 2\left(1 + 10y^2x^2\right)$ ein *quadratum* seyn könnte: welches aber unmöglich ist so lang für x und y nur *numeri integri* angenommen werden. Wollte man aber auch Brüche zulassen, und für x seinen Werth $60y + 8$ setzen, so wäre $yx = 60y^2 + 8y$, allso $y^2x^2 = 3600y^4 + 960y^3 + 64yy$; und dahero geriethe man auf diese Frage, ob folgende *Formul*

$$72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$$

ein *quadrat* seyn könne. Wann sich aber auch solches nach vieler Mühe finden sollte, so sehe ich nicht, was man damit gewonnen hätte. Inzwischen ist aber gewiß daß diese *Formul* auch in gebrochenen Zahlen niemals ein *quadrat* werden könne. Dann ehe man noch den Werth für x *substitui*rt, so setze man $yx = m$, allso $2 + 20m^2 = \Box$. Ferner sey $m = \dfrac{n}{4}$, folglich $2 + \dfrac{5}{4}nn = \Box$ oder $5nn + 8 = \Box$ welches offenbahr unmöglich ist.

Das von Eur. Hochwohlgeb. angeführte *Argument*, daß, wann $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$, auch seyn müsse

$$1 + 4efg = M^2 + fN^2 = R^2 + gS^2,$$

weil kein Grund vorhanden wäre, warum eine solche Auflösung bey einem der *factoren* e, f, g mehr Platz haben sollte als bey den anderen, würde in der *Metaphysic* für eine herrliche *Demonstration passi*ren können, wo man sich mit Beweisthümmern zu begnügen pflegt, welche bey weitem nicht so bündig sind. Allein in der *Mathematic* kommen mir dergleichen Schlüsse immer verdächtig vor. Eur. Hochwohlgeb. dehnen zwar diesen Satz auf alle *numeros rationales* überhaupt aus, in welchem Fall ich denselben für wahr halte, wann nur $1 + 4efg$ ein *numerus primus* ist: Welche nothwendige Bedingung gleichwohl im *Argumento* nicht enthalten ist, und auch nicht erhellet warum dieselbe hinzugesetzt werden sollte. Ohne diese Bedingung aber ist der Satz falsch, dann $1 + 4 \cdot 1 \cdot 5$ ist wohl $= P^2 + 5 \cdot Q^2$, und doch ist $1 + 4 \cdot 1 \cdot 5 = M^2 + 1 \cdot N^2$ unmöglich. Hernach wann man auch Mittel fände die Bedingung, daß $1 + 4efg$ ein *numerus primus* seyn müße, in den Beweiß einzuflechten, so sehe ich keinen Grund warum der Satz nicht auch wahr seyn sollte, wann für P, Q, M, N, R, S nicht nur *numeri rationales*, sondern auch *integri* genommen würden; dann wann die *reduction* $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$ *in integris* Platz hat, so enthält der angegebene Beweiß keinen Grund, warum die andern *reduction*en nicht auch *in integris* Platz haben sollten. Allein in diesem Fall ist der Satz nicht mehr der Wahrheit gemäß, wie aus diesem *Exempel* erhellet: Es sey $e = 3$, $f = 5$, $g = 11$, so wird $1 + 4efg = 661$ (*numero primo*). Nun ist zwar

$661 = 19^2 + 3 \cdot 10^2$ und auch $661 = 16^2 + 5 \cdot 9^2$; doch aber kan die dritte *Resolution* $661 = R^2 + 11 \cdot S^2$ *in integris* auf keinerley Art bestehen. In Brüchen findet dieselbe aber statt, indem $661 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 11 \left(\frac{15}{2}\right)^2$; woraus klar abzunehmen, daß in dergleichen *Ratiociniis* die gröste Behutsamkeit gebraucht werden müsse.[2] Ich habe solches bey einigen über einige *Theoremata Fermatiana* gegebenen *Demonstration*en zur Gnüge erfahren. Als zum *Exempel* war der Beweiß sehr leicht, daß wann zwey *summae duorum quadratorum* mit einander *multiplicir*t werden, das *product* auch eine *summa* 2 *quadr*[*atorum*] seyn müsse, indem

$$(aa + bb)\,(cc + dd) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2\,;$$

wer sollte nun daraus nicht schliessen, daß wann eine *summa* 2 *quadr*[*atorum*] durch eine andere *summam* 2 *quadr*[*atorum*] getheilt werden kan, der *Quotient* nicht auch eine *summa* 2 *quadr*[*atorum*] seyn müsse? Die Sache ist zwar wahr, allein der erwehnte Schluß ist unrichtig; dann wann derselbe richtig wäre müsste auch dieser richtig seyn: *Productum ex duobus numeris paribus semper est par: ergo si numerus par per alium parem sit divisibilis, quotus quoque erit par*: welches doch offenbahr falsch wäre.

Nächst gehorsamster Empfehlung aller der meinigen habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren

Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 17ten *April.*
1756.

Eur. Hochwohlgeb. letste Briefe sind mir gantz *Franco* zugestellet worden.[3] Ungeacht es mir in der Statt an *Distraction*en nicht fehlet, so gehe ich doch öffters auf mein Guth um meine Muter zu besuchen.[4]

R 895 Reply to n° 179 and n° 180
Berlin, April 17th, 1756
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 119–120v
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 645–648; *Euler-Goldbach* (1965), p. 390–391

182
Goldbach to Euler
Petersburg, May (7th) 18th, 1756

HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*,

Zuforderst ersuche ich Ew. HochEdelgebohrne dienstlich nicht übel zu deuten daß ich wiederum ein kleines *avertissement* an H.n *Spener* beyfüge.[1]

Was die *aequation* $1 + efg = P^2 + eQ^2 = M^2 + fN^2 =$ *&c.* betrifft bin ich mit Eurer HochEdelg. einerley meinung indem die Natur der Zahlen P, Q, M, *&c.* nemlich ob es *numeri integri*, oder *fracti* oder *surdi* seyn sollen, nicht bestimmet wird, ohngeachtet die *numeri integri* e, f, und g *permutabiles* sind.[2] Daß aber die grosse Zahl $72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$ kein $\square$ seyn kan folget also fort wenn man dieselbe als ein *exemplum regulae* von $4n + 2 \neq \square$ betrachtet.

Indessen bekenne ich daß ich noch nicht recht einsehe warum Ew. HochEdelgeb. zur wahrheit dieser *aequation* $1 + 4ef = P^2 + eQ^2$ erfordern daß $1 + 4ef$ ein *numerus primus* sey wenn P *et* Q *rationales* seyn sollen, da allein in dem *casu ubi* $f = e + k^2 - 1$, unzehliche Exempel vorhanden sind daß auch *numeri non-primi* diese Eigenschafft haben können als *posita* $e = k = 3$, *fit* $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11 = 5^2 + 3 \cdot 6^2$.

Nachfolgendes *theorema* halte ich *pro demonstrabili*: *Sit* $p = a^2 + b^2$ *et sit* $1+mQ^2$ *summa duorum quadratorum, erit etiam* $p = a^2+b^2 = P^2+\left(x^2 - mp\right) Q^2$, *ita ut, si reliqui numeri sint rationales, fiat etiam* x *rationalis*.[3]

Hiernechst verharre ich mit vieler hochachtung
Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 18. *Maii st. n.*
1756.

R 896 Reply to nº 181
Petersburg, May (7th) 18th, 1756
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 174rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 649–650; *Euler-Goldbach* (1965), p. 392

183
Euler to Goldbach
Berlin, June 11th, 1756

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats* Rath

Eur. Hochwohlgeb. Einschluß habe ich sogleich bey dem H. Spener richtig bestellt,[1] zugleich aber mit dem grösten Unwillen gesehen, daß der Kasten mit den schon vorher verlangten Büchern noch nicht abgefertiget gewesen;[2] er schob die Schuld auf den Buchbinder, welcher ihn so lang aufgehalten hätte, und er hätte auch noch erst neulich einige Bücher bekommen welche er mit senden müsse. Da ich ihm aber angedeutet, daß noch ein andrer Kasten müsse nachgeschickt werden, so hat er mir heilig versprochen, daß dieser mit der ersten Fuhren nach Lübeck abgehen werde; *La Clef du Cabinet* ist darinn, und stund völlig in dem Gedanken, daß derselbe schon längst von hier abgeschickt worden.

Daß diese grosse Zahl $72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$ kein *Quadrat* seyn könne, folget nur alsdann aus der *Formul* $4n+2 \neq \square$, wann y ein *numerus integer* ist; so viel ich mich aber erinnere, begriff y auch *numeros fractos*, und da wird allerdings eine besondere *Demonstration* erfordret. Man darf nur diese *Formul* $8xx + 2$ betrachten, welche wann x auch ein Bruch seyn kan, *infinitis modis* ein *Quadrat* seyn kan; als $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{7}{2}$, *etc.*; daß nun ein gleiches bey der obigen *Formul* nicht statt finde muß besonders bewiesen werden.

Daß ich zur Wahrheit dieser *Aequation* $1 + 4ef = PP + eQQ$ erfordere daß $1 + 4ef$ ein *numerus primus* seyn müsse, ist die Ursach, weil wann $1 + 4ef$ kein *numerus primus* ist, solche Fälle vorkommen, da $1 + 4ef$ nicht dieser *formul* $PP + eQQ$ gleich seyn kan; dann es sey zum *Exempel*: $e = 1$, $f = 5$, so ist gewiß $1 + 4ef = 21$ nicht gleich $PP + QQ$. Inzwischen gebe ich gern zu, daß $1 + 4ef = PP + eQQ$ in unendlich vielen Fällen wahr ist, wann gleich $1 + 4ef$ kein *numerus primus* ist; wann aber auch nur ein einiger Fall *in contrarium* könnte angeführt werden, so wäre derselbe hinlänglich die Wahrheit des Satzes zu zernichten. Hingegen wann diese Bedingung hinzugesetzt wird, daß $1+4ef$ ein *numerus primus* seyn müsse, so kan kein Fall *in contrarium* angeführt werden, wann man nehmlich für P und Q die Brüche nicht ausschliesst, und deswegen glaube ich, daß der Satz wahr sey, ungeacht ich denselben nicht beweisen kan. Wann aber die Bedingung, daß $1+4ef =$ *numero primo*, weggelassen wird, so kan man sicher behaupten, daß der Satz $1 + 4ef = PP + eQQ$ nicht wahr sey, weil die Anführung eines einzigen *exempels in contrarium* hinreichend ist denselben umzustossen.

Wann man aber für P *et* Q nur *numeros integros* zulässt, zugleich aber die *condition* fest setzt, daß $1 + 4ef$ ein *numerus primus* seyn müsse, so ist die *aequation* $1+4ef = PP+eQQ$ *in genere* gewiß nicht *demonstrabel*, indem ich unendlich viel Fälle *in contrarium* anführen kan. Ja das von Eur. Hochwohlgeb. angeführte *Exempel*, daß $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11 = 133 = 5^2 + 3 \cdot 6^2$, ungeacht 133 kein *numerus primus* ist, reichet eine *exception* dar indem $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11$ nicht ist $P^2 + 11Q^2$, welches gleichwohl seyn müste wann der Satz allgemein wahr wäre.

Das *Theorema*, so Eur. Hochwohlgeb. anführen,[3] daß wann $p = aa + bb$ und $1 + mQ^2$ *summa duorum quadratorum*, auch seyn werde $p = aa + bb = P^2 + (xx - mp)\,Q^2$, ist nicht nur *demonstrabel*, sondern man kan auch *in genere* die Werthe für P und x anzeigen, welche dieser *aequation* ein Genügen leisten. Dann es sey $1 + mQ^2 = rr + ss$, so nehme man $P = ar - bs$ und $x = \dfrac{as + br}{Q}$, alsdann wird augenscheinlich $aa + bb = P^2 + (xx - mp)\,Q^2$. Dann da

$$\begin{array}{c} P^2 = aarr - 2abrs + bbss \\ xxQQ = aass + 2abrs + bbrr \\ \underline{-\,mpQQ = -\,maaQQ - mbbQQ} \end{array}$$

ob $p = aa + bb$, folglich

$$P^2 + (xx - mp)\,Q^2 = (aa + bb)\,(rr + ss) - m\,(aa + bb)\,QQ = aa + bb$$

weil $rr + ss = 1 + mQ^2$ *per hypothesin.*

Hiemit habe die Ehre mit der schuldigsten Hochachtung zu verharren
Eur. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 11 *Junii* 1756.

R 897 Reply to n° 182
Berlin, June 11th, 1756
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 121–122r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 651–653; *Euler-Goldbach* (1965), p. 392–393

184

Euler to Goldbach

Berlin, April 26th, 1757

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr *Etats*-Rath

Bey den gegenwärtigen Umständen, da ich mich seit geraumer Zeit der Ehre Dero Zuschrifft beraubet sehen muß,[1] würde ich Bedencken getragen haben, Eur. Hochwohlgeb. mit meinen Schreiben aufzuwarten, wann es mir nicht unverantwortlich geschienen hätte diese erwünschte Gelegenheit vorbey zu lassen, um Eur. Hochwohlgeb. meine schuldigste Ehrfurcht zu bezeugen. Der H. *Professor Aepinus*, welcher die Ehre zu haben wünschet, dieses Blatt Eur. Hochwohlgeb. einzuhändigen, ist nicht nur mein sehr guter Freund, sondern hat auch ausser seiner gründlichen Gelehrsamkeit solche Verdienste, welche mir die Versicherung geben, daß seine Bekanntschaft Eur. Hochwohlgeb. nicht unangenehm seyn wird; dahero ich mich unterstehe Denselben Eur. Hochwohlgeb. bestens zu empfehlen.[2]

Mein Sohn, welcher das Glück hat Eur. Hochwohlgeb. als seinen H. Pathen zu verehren, hat sich auch erkühnet bey dieser Gelegenheit Eur. Hochwohlgeb. seinen schuldigsten *Respect* zu bezeugen, und sich zu Dero Gewogenheit und Gnade gehorsamst zu empfehlen, welche Freyheit ich auch meiner Seits nicht übelzunehmen bitte.[3]

Die Erinnerung einer mir vormals vorgelegten Aufgabe hat mir neulich zu artigen Untersuchungen Anlaß gegeben, auf welche sonsten die *Analysis* keinen Einfluß zu haben scheinen möchte. Die Frage war: man soll mit einem Springer auf einem Schach Brett alle 64 Plätze dergestalt durchlaufen, daß derselbe keinen mehr als einmal betrette.[4] Zu diesem Ende wurden alle Plätze mit Marquen belegt, welche bey Berührung des Springers weggenommen wurden. Es wurde noch hinzugesetzt, daß man von einem gegebenen Platz den Anfang machen soll: Diese letstere Bedingung schien mir die Frage höchst schwehr zu machen; dann ich hatte bald einige Marsch*rout*en gefunden, bey welchen mir aber der Anfang musste frey gelassen werden; ich sahe aber, wann die Marsch*route in se rediens* wäre, also daß der Springer von dem letsten Platz wieder auf den ersten springen könnte, alsdann auch diese Schwierigkeit wegfallen würde. Nach einigen hierüber angestellten Versuchen habe ich endlich eine sichere *Methode* gefunden, ohne zu *probi*ren so viel dergleichen *Marchrout*en außfündig zu machen als man will (doch ist die Zahl aller möglichen nicht unendlich): eine solche wird in beygehender Figur vorgestellt. Der Springer springt nehmlich nach der Ordnung der Zahlen; weil vom letsten 64 auf *n.*° 1 ein Springe-Zug ist, so ist diese Marsch*route in se rediens*.

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Hier ist noch diese Eigenschaft angebracht daß *in areolis oppositis* die *differentia numerorum* allenthalben 32 ist.

Alle die meinigen lassen sich Eur. Hochedelgeb. gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Ehrfurcht lebenslang zu verharren

Eur. Hochwohlgeb.

gehorsamster Diener

L. Euler

Berlin den 26 *April* 1757.

R 898 Berlin, April 26th, 1757
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 126–127r
Address: "*A Monsieur / Monsieur de Goldbach / Conseiller d'Etat actuel de S*[*a*] *M*[*ajesté*] *Imp*[*eriale*] */ au Departement des Affaires Etrangeres / &c. &c. / à / S.*^t^ *Petersbourg.*"
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 654–655; *Euler-Goldbach* (1965), p. 393–394

184a

Johann Albrecht Euler to Goldbach[1]

Berlin, April 20th, 1757

Hochwohlgebohrener Herr
Hochgeehrtester Herr Etats-Rath

Die besondere Güte und Gewogenheit, die Dieselben jederzeit gegen unser gantzes Haus haben blicken lassen, macht mich so kühn, Eur. Hochwohlgebohrnen mit diesen Zeilen aufzuwarten und zugleich meines gehohrsamsten Respects zu versichern: Es ist freylich wahr, daß dieses schon längst meine Schuldigkeit gewesen; aber, da ich es schon einmahl versäumet hatte, so habe mich nicht unterstehen dörfen dieselbe in der späteren Zeit zu beobachten: Denn so gewiß ich auch jederzeit von Eur. Hochwohlgebohrnen besondern Gewogenheit versichert gewesen, so groß war auch allezeit meine Ehrfurcht gegen Dieselben, und überdem machte mich die Furcht, Eur. Hochwohlgebohrnen beleidiget zu haben, so blöde, daß ich mich nicht mehr unterstehen dörfte Denselben mit einem Brief aufzuwarten. Dennoch hat das große Vertrauen, so ich zu Eur. Hochwohlgebohrnen Gewogenheit jederzeit geheget, meiner Blödigkeit obgesieget, und eine grössere Furcht, meine für sich schon schlimme Sache durch Fortfahrung in derselben noch schlimmer zu machen, hat mich endlich zu dem Endschluß gebracht, Eur. Hochwohlgebohrnen bey dieser schönen Gelegenheit durch diese wenige Zeilen zu zeigen, wie sehr ich Dieselben verehre und wie sehr es mich reue, dieses Bekentnüß meiner Schuldigkeit gemäß nicht eher abgelegt zu haben.

Der Herr Professor Aepinus als Überbringer dieses Briefes, einer von meinen besten Freunden, so ich hier in Berlin gehabt, reißt anjetzo nach Petersburg;[2] er war so gütig und both sich selber an Briefe mit nach Petersburg zu nehmen um dadurch Gelegenheit zu bekommen bey Eur. Hochwohlgebohrnen aufzuwarten: Dieser Umstand schien mir hinreichend zu seyn die Freyheit zu entschuldigen, welche ich nehme an Eur. Hochwohlgebohrnen zu schreiben und dasjenige wieder gut zu machen zu suchen, was ich so schändlich versäumet. Ich schmeichele mir der süssen Hoffnung, es werden Eur. Hochwohlgebohrnen meine vorige Nachlässigkeit gütigst verzeihen und diesen gegenwärtigen Brief also aufnehmen, wie ich es zu meinem Glücke immer wünschen möge.

Ich werde mich höchst glücklich schätzen, wenn Eur. Hochwohlgebohrnen dieses geringe Merckmahl meiner schuldigsten Ehrfurcht gnädig aufnehmen; und ich erkühne mich Dieselben um Dero Gewogenheit und Gnade gehohrsamst anzuflehen, der ich mit dem schuldigsten Respect lebenslang verharre

Eur. Hochwohlgebohrnen
unterthänigster und Gehohrsa[mster]
Diener
Johann Albrecht Euler

Berlin den 20[ten] Aprill
1757

n° 184[a] Enclosure in n° 184
Berlin, April 20th, 1757
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 128–129r

185

Euler to Goldbach

Berlin, June 29th, 1762

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Etats Rath
Hochgeneigtester Gönner

Nach dem so schwehren Ungewitter, welches mich ausser Stand gesetzet, meine schuldigste Ehrerbietung *Ew. Hochwohlgeb.* schrifftlich zu bezeugen,[1] habe ich mich in der völligen Ungewißheit *Dero* Zustands noch nicht unterstehen dörfen meine gehorsamste Pflicht bey *Ew. Hochwohlgeb.* abzustatten; ich hatte deswegen den H. *Prof.* Müller ersuchet mir darüber die nöthigen Erläuterungen zu ertheilen.[2] Um soviel lebhafter war demnach meine Freude, als ich vorgestern *Ew. Hochwohlgeb.* gütigstes Schreiben[3] zu erhalten das Glück hatte, und ich kan so wenig mein Vergnügen über *Dero* Wohlseyn als die danckbarsten Empfindungen meines Herzens über *Dero* fortdaurende gantz ungemeine gnädige Gesinnung gegen mich und die meinigen mit Worten ausdrücken; insonderheit bin ich über das huldreiche Andenken, dessen *Ew. Hochwohlgeb.* meinen ältesten Sohn haben würdigen wollen, innigst gerührt, und derselbe ist darüber auch vor Freude gantz ausser sich selbst. Nachdem ihm von S[eine][r] K[öniglichen] M[ajestät] eine Stelle bey unserer *Academi*e Allergnädigst ertheilet worden, so hat er sich schon vor einigen Jahren [zu] unserem Vergnügen verheurathet, und da sein Einkommen wegen der [Krie]gs Unruhen noch sehr gering, so lebt er mit seiner Frau bey uns und wir haben die Freude ein artiges Großtöchterleyn erlebet zu haben:[4] die *Göttliche* Vorsehung hat bißher bey so mancherley Trübsaalen so gnädiglich und wunderbar über uns gewaltet, daß wir auch wegen des künftigen unser festes Vertrauen auf *Dieselbe* setzen. Mein zweyter Sohn der auch noch in *Petersburg* gebohren hat sich mit allem Fleiß auf die *Medicin* gelegt, und ist gegenwärtig in Halle, wohin ich ihn vor einem Jahre gebracht habe, und gedencket daselbst auf künftigen Herbst zu *promovi*ren;[5] ich habe den Trost, daß seine HH. *Professores* seinen Fleiß und gute Aufführung nicht genug rühmen können. Mein jüngster Sohn der hier *A.* 1743 gebohren, hat sich dem Kriegswesen gewidmet, und ist nun *Lieutenant* bey der *Artillerie*, wo man ungemein wohl mit ihm zu frieden ist;[6] ausser diesen haben wir noch zwey Töchtern;[7] und leben hier in dem Grösten Vergnügen durch die Gnade Gottes beysammen ungeacht hier jederman über die ausgestandenen harten Drangsaale die bittersten Klagen führt; und ich auch das Unglück gehabt, daß mein Landguth in *Charlotten*burg, als unsere Statt in Russischen Händen war, rein ausgeplündert worden. Der H. *General Tcherni*scheff, welcher mich vormals daselbst besucht hatte, schickte mir zwar sogleich eine *salvegard*e, sie kam aber doch zu späth; und ich habe meine Hoffnung zu Ersetzung des erlittenen Verlusts noch nicht aufgegeben, da ich deswegen so wohl von des H. *Hettman*s als des H. Großkantzlers Hochgräfl[icher] *Excellenz* die gnädigsten Versicherungen erhalten habe, und mir von der *Academi*e angerathen worden mich auch deswegen bey unserem Gesandten dem H. *Baron* von *Golz* zu melden: doch scheinen mir die gegenwär[tigen] Umstände dazu noch nicht die günstigsten zu seyn.[8] Doch überwigt unseren Kummer himmelweit unsere inbrünstigste Freude über die höchst wunderbahre und *Göttliche* Errettung unsers Allertheursten *König*s, und unsere Kirchen ers[ch]allen immer von den herzlichsten Lobeserhebungen *Seiner Glorwürdigst regierenden* Russisch Kaiserl[ichen] *Majestät*, *Welchen* der *Allerhöchste* mit allem nur möglichen Segen überschütten wolle! [9]

Ich habe das feste Vertrauen zu *Ewr. Hochwohlgeb.* gnädiger Zuneigung, daß *Dieselben* über die weitläufige Erzählung meiner Umstände nicht ungeduldig werden, sondern uns noch ferner *Dero* hochgeschätzte Wohlgewogenheit zuzuwenden geruhen werden, zu welcher ich mich samt den meinigen auf das inständigste gantz gehorsamst empfehle. Der *Allmächtige Gott* wolle *Ewr. Hochwohlgeb.* bey beständiger Gesundheit und allem wahrhaften Wohlseyn immerfort erhalten, und in allen Stücken S*einen* reichen und Herzerquickenden Segen verspühren lassen!

Ich habe die Ehre mit der vollkommensten Ehrerbietung zu seyn

Ew. Hochwohlgebohrnen

gehorsamstverpflichtetster Diener

L. Euler

Berlin den 29$^{\text{ten}}$ *Junii* 1762.

R 899 Berlin, June 29th, 1762
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 130–131r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 656–658; *Euler-Goldbach* (1965), p. 394–395

186
Euler to Goldbach
Berlin, September 25th, 1762

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath

Der H. *Prof.* Müller ist Schuld daran daß ich mich unterstehe nochmals an *Ew. Hochwohlgeb.* zu schreiben, da solches schon vor einigen Monathen geschehen, gleich nachdem ich *Dero* Geehrtestes Schreiben erhalten; derselbe meldet mir, daß *Ew. Hochwohlgeb.* mir allbereit geantwortet hätten;[1] weil ich nun seitdem von *Denselben* kein Schreiben erhalten, so komme ich auf die Gedanken, daß sich diese Nachricht auf das erstere beziehen, und allso mein gehorsamstes Schreiben nicht einmal eingelaufen seyn möchte; so wenig mir aber dieses wahrscheinlich vorkommt, da mir auch bey den grösten Verwirrungen noch kein Brief verlohren gegangen, so würde es mir um so viel schmerzlicher fallen, wann dieses Schicksaal denjenigen Brief betroffen hätte, worinn ich nach einer recht unerträglich langen Zeit *Ew. Hochwohlgeb.* meine unveränderte und vollkommenste Ehrerbietung wiedrum habe bezeugen dörfen. Über dieses entschuldiget sich auch der H. P*rof.* Müller gegen mich, daß er vergessen, mich zu seiner Zeit zu benachrichtigen, daß *Ew. Hochwohlgeb.* zu der Würde eines Geheimen Raths erhoben worden;[2] ich empfinde darüber allso nun erst die lebhafteste Freude, und ersuche *Ew. Hochwohlgeb.* gehorsamst diese meine allzuspäthe aber herzlichste Glückwünschung nicht zu verschmähen. Der *Allmächtige Gott* wolle *Dieselben* die damit verknüpfte Vortheile und Vorzüge bey vollkommner Gesundheit und allem Vergnügen biß in das spätheste Alter in dem reichsten Maasse geniessen lassen!

Meine gantze *Famille* lässt sich nebst mir *Ew. Hochwohlgeb.* auf das gehorsamste empfehlen, und insonderheit mein ältster Sohn seine tiefste Ehrfurcht bezeugen; ich aber habe die Ehre mit der vollkommensten Ehrerbietung lebenslang zu verharren

Ew. Hochwohlgebohrnen
gehorsamstverpflichtetster
Diener *L. Euler*

Berlin den 25$^{\text{ten}}$ *Sept.* 1762.

Theorema. Si habeantur numeri quotcunque inaequales a, b, c, d, etc. ex iisque formentur sequentes fractiones:

$$\frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\ \mathit{etc.}};\qquad \frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\,(b-d)\ \mathit{etc.}};$$
$$\frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\,(c-d)\ \mathit{etc.}};\qquad \frac{d^n}{(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\ \mathit{etc.}};\ \mathit{etc.}$$

earum summa semper est $= 0$, si exponens n (quem integrum intelligi oportet) minor sit numero factorum in singulis denominatoribus; sin autem ei sit aequalis summa fit $= 1$.[3]

Exempl[um]. Sint numeri propositi 10, 9, 7, 4, 2, *erit*

$$\frac{10^n}{1\cdot 3\cdot 6\cdot 8}-\frac{9^n}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 7}+\frac{7^n}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-\frac{4^n}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}+\frac{2^n}{8\cdot 7\cdot 5\cdot 2}=0$$

si $n<4$; *at si* $n=4$ *summa est* $=1$; *sit* $n=0$ *erit*

$$\frac{1}{144}-\frac{1}{70}+\frac{1}{90}-\frac{1}{180}+\frac{1}{560}=0;$$

est manifestum; in genere fractionibus ad communem denominatorem reductis fit

$$35\cdot 10^n-72\cdot 9^n+56\cdot 7^n-28\cdot 4^n+9\cdot 2^n=0$$

dummodo $n<4$.

Dieses *Theorema* scheint nicht wenig merkwürdig zu seyn; es deucht mich aber, *Ew. Hochwohlgeb.* haben mir schon längst dergleichen etwas mitzutheilen geruhet.[4]

R 900 Berlin, September 25th, 1762
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 132–133r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 659–660; *Euler-Goldbach* (1965), p. 396

187
Goldbach to Euler
Petersburg, October (8th) 19th, 1762

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Director*

Eurer HochEdelgebohrnen beyde letztere briefe sind mir den 15. *Jul.* und 11. *Oct. st. n.* allhie richtig abgegeben worden.[1] Für Dero an mich abgestattete geneigte *gratulation* wie auch für das mir *communicir*te schöne *theorema* sage ich schuldigsten Danck, befinde mich aber jetzo gäntzlich ausser Stande selbiges *pro dignitate* zu betrachten.

Ich habe unlängst einige *tomos* vom *Hamb[urgischen] Magaz[in]* durchgeblättert und darin die grossen *éloges* welche Eurer HochEdelgeb. an unterschiedenen orten so billig beygeleget werden,[2] mit ungemeinem Vergnügen beobachtet. Dero Herrn Sohne *gratuli*re ich von gantzem hertzen zur abermahligen Petersburgischen *piece victorieuse*,[3] bitte meine Empfehlung an Dero sämtliche [Familie] zu machen und verharre Eurer HochEdelgebohrnen

ergebenster Diener
Goldbach.

S.[t] *Petersbourg*
den 19. *Oct. st. n.* 1762.

vert[*e*]

P. S. Ich habe *observi*ret daß der *aequation* $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$, allezeit ein gnügen geschiehet *positis* $P = \frac{b^2 - a^2}{b}$, $e = 3b^2 - a^2$, $Q = \frac{\pm a}{b}$ woraus unzehliche dergleichen *valores pro summa* $a^2 + b^2$ *formi*ret werden können.[4]

R 901 Reply to n° 185 and n° 186
Petersburg, October (8th) 19th, 1762
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 175r, 176r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 661–662; *Euler-Goldbach* (1965), p. 397

188
Euler to Goldbach
Berlin, November 9th, 1762

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath

Die Frage, welche *Ew. Hochwohlgeb.* zu berühren belieben,[1] was für Zahlen in einer jeden von diesen *Formuln* $aa + bb$ und $pp + eqq$ zugleich enthalten sind, ist in der Lehre von den Zahlen nicht nur von der grösten Wichtigkeit, sondern fasset auch solche besondern Schwierigkeiten in sich welche dieselbe höchst merkwürdig machen insonderheit wann mehr als zwey *Formuln* vorgeschrieben werden.[2] Wann nur zwo gegeben sind, und man sucht alle Zahlen N so zugleich in diesen beyden *Formuln* $aa + mbb$ und $cc + ndd$ enthalten sind, wo m und n gegebene Zahlen sind,[3] so finde ich

$$N = (mpp + nqq + rr + mnss)^2 - 4mn\,(pq - rs)^2\,,$$

dann daraus wird

$$\begin{aligned} N &= (mpp - nqq - rr + mnss)^2 + m\,(2pr + 2nqs)^2 \\ &= (mpp - nqq + rr - mnss)^2 + n\,(2qr + 2mps)^2\,. \end{aligned}$$

Wann aber mehr als zwey dergleichen Formeln vorgegeben sind, in welchen die Zahlen N enthalten seyn sollen, so hört die *algebra*ische Hülfe fast gäntzlich auf, und eben deswegen ist es um so viel merkwürdiger, daß alsdann dergleichen Fragen auf eine gantz andere Art gantz leicht aufgelöset werden können, wobey aber der Beweiß noch fehlet. Allso wann solche Zahlen verlangt werden, so zugleich in diesen *Formuln* $aa + bb$, $cc + 2dd$, $ee + 3ff$, $gg + 5hh$ enthalten sind, so darf man nur die

Zahl nehmen die sich durch die gegebenen 1, 2, 3, 5 theilen lässt: diese ist nun 30. Alsdann so oft $4\cdot 30x+1=120x+1$ ein *numerus primus* ist, so hat man eine Zahl für N, und zwey oder mehr dergleichen *numeri primi* mit einander *multiplicir*t geben ebenfals Zahlen für N. Dahero sind diese *numeri primi* $120x+1$ folgende: 241, 601, 1201, 1321, 1801, *etc.* von welchen der erste

$$241 = 15^2+4^2 = 13^2+2\cdot 6^2 = 7^2+3\cdot 8^2 = 14^2+5\cdot 3^2,$$

wobey dieses ins besondere zu merken ist, daß diese Eigenschaft nur den in der *Formul* $120x+1$ enthaltenen *numeris primis* zukommt. Hernach da *Ew. Hochwohlgeb.* gezeigt, daß eine *summa duorum quadratorum* $aa+bb$ auch in dieser *Form* $PP+eQQ$ enthalten ist, wann $e=3bb-aa$ oder $3aa-bb$; ja noch allgemeiner wann $e=(2\alpha+1)\,bb-\alpha\alpha aa$, so können daher noch gar schöne Erläuterungen der obigen Eigenschaften gezogen werden, als zum Exempel, daß eine solche Zahl $aa+nbb$ auch zugleich in dieser *Form* $PP+((2\alpha+n)\,aa-\alpha\alpha bb)\,QQ$ enthalten ist, wo es sich aber fügen kan, daß P und Q Brüche seyn müssen. Als es sey $a=7$, $n=3$, $b=8$, und die Zahl $aa+nbb=241$, so ist dieselbe auch in dieser *Form* $PP+eQQ$ enthalten, *sumto*

$$e=(2\alpha+3)\ 49-64\alpha\alpha = 147+98\alpha-64\alpha\alpha = 147+49\beta-16\beta\beta$$

(*posito* $2\alpha=\beta$); solche Zahlen für e sind demnach 147, 82, 181, 150, 87, 180, -15, oder (*per* $\square$ *dividendo*) 3, 5, 6, 82, 87, 181, wobey allso sehr merkwürdig ist daß die Zahl 241 auch in dieser *Form* $PP+82QQ$ enthalten ist, welches aus obiger Regel nicht kan erkannt werden, dann hier ist $P=\frac{81}{7}$ und $Q=\frac{8}{7}$.

Der Beweiß von dem *Theoremate numerico*, wovon letstens *Ew. Hochwohlgeb.* Erwehnung zu thun die Ehre gehabt,[4] ist auch gantz sonderbar. Ich betrachtete diesen Bruch $\dfrac{x^n}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ etc.}$, von welchem bekannt ist daß sich derselbe in diese einfache Brüche $\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x-b}+\dfrac{C}{x-c}$ *etc.* auflösen lässt, und die Zahlen A, B, C *numeri constantes* werden, wann nur der *exponens* n kleiner ist als der *numerus factorum in denominatore*. Nun aber bestimme ich die Zähler A, B, C *etc.* folgender gestalt: Um A zu finden *multiplici*re ich alles mit $x-a$ und bekomme:

$$A=\frac{x^n}{(x-b)\,(x-c)\ etc.}-\frac{B\,(x-a)}{x-b}-\frac{C\,(x-a)}{x-c}\ etc.$$

und weil ich weiß daß A nicht von x *dependir*t, so muß für A immer einerley Werth herauskommen, ich mag für x annehmen was ich will. Ich setze allso $x=a$, und da bekomme ich $A=\dfrac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\ etc.}$; eben so wird $B=\dfrac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\ etc.}$,

$C = \dfrac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\ etc.}$. Allso ist *in genere*

$$\frac{x^n}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\ etc.} = \frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\cdots(x-a)} + \frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\cdots(x-b)} + \frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\cdots(x-c)}\ etc.$$

und diese letsteren Brüche auf die andere Seite hinübergetragen

$$\frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\cdots(a-x)} + \frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\,(b-d)\cdots(b-x)} + \frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\,(c-d)\cdots(c-x)} + etc. = 0.$$

Ew. Hochwohlgeb. lässt sich mein gantzes Haus und insonderheit mein ältester Sohn, der dieser Tagen auch den Preiß in München erhalten,[5] gantz gehorsamst empfehlen, und ich verharre mit der tiefsten Ehrerbietung

Ew. Hochwohlgebohrnen
gehorsamster Diener
L. Euler.

Berlin den 9ten *Nov.* 1762.

R 902 Reply to n° 187
Berlin, November 9th, 1762
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 135–136r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 663–666; *Euler-Goldbach* (1965), p. 397–399

188a
Johann Albrecht Euler to Goldbach[1]
Berlin, November 9th, 1762

Hochwohlgebohrner Herr
HochzuEhrender Herr Geheimer Rath

Das gütige Andencken, womit Ew. Hochwohlgebohrnen mir durch Dero schmeichelhaffte Zuschrifft vom 7ten *Junii a[nni] c[urrentis]* beehret haben,[2] macht mich so verwegen daß ich mich Denenselben nochmahls schrifftlich zu empfehlen unterstehe.

Ew. Hochwohlgebohrnen haben jederzeit einen so liebreichen Antheil an allem demjenigen genommen, welches mir und den meinigen nur im geringsten angegangen ist, daß ich nicht zweiffele Dieselben werden mir nicht übel nehmen sondern es viel mehr als eine Beobachtung meiner Schuldigkeit ansehen, wenn ich

Ew. Hochwohlgebohrnen hiermit die wenige Veränderungen, die mit mir seit der Abreise des H. Raths *Aepinus* nach Petersburg vorgegangen,[3] kürtzlich berichte.

Es geht bereits schon in das dritte Jahr daß ich mit der ältesten Tochter des Hoffraths Hagmeister allhier, in dem heil[igen] Stand der Ehe vergnügt und beglückt lebe, und bißhero hat der Seegen dieser Ehe in einem Töchterlein bestanden, welches uns der gütige Himmel vergangenes Jahr zu unserer grossen Freude geschencket hat.[4] Mit dieser kleinen *famil*le lebe ich in dem Hause meiner Eltern und warte auf den schon so längst erwünschten Frieden oder vielmehr auf eine Bedienung, die mir zu meinem Eigenen verhelffen soll. Unterdessen geniesse ich der schönen Gelegenheit meine geringe Fähigkeit unter der Führung meines Vaters immer mehr und mehr zu erweitern. Ausser denen Abhandlungen welche ich in den Versamlungen der hiesigen *Academie* vorzulesen verfertige, suche ich noch immer über diejenige Preiß-Fragen zu arbeiten welche die verschiedenen *Academi*en der Wissenschafften der gelehrten Welt vorlegen und es ist mir durch Hülffe meines Vaters nicht selten geglückt einen Preiß zu erschleichen. Noch kürtzlich habe ich die angenehme Nachricht erhalten, daß mir die Müncher *Academi*e den Preiß ertheilet hat, welche dieselbe auf dieses Jahr demjenigen versprochen hatte, der die Verhältnüß der mittleren Bewegung des Mondes und s[einer] mittleren Entfernung von der Erde gegen die Kräffte, welche auf den Mond wü[rcken,] am besten bestimmen würde.[5] Dieser Preiß besteht in einer goldenen *M[edaille]* von 50 Dukaten und ich hoffe dieselbe gegen das Ende der Neujahrs-messe [zu] bekommen.

Meine Frau empfiehlt sich samt unserm Kinde der Wohlgewogenheit Ew. Hochwoh[lgeb.] und ich verbleibe mit einer wahren Ehrfurcht

Hochwohlgebohrner Herr
Hochzuehrender Herr Geheimer Rath
Ew. Hochwohlgebohrnen
unterthänigster Diener
J Albrecht Euler

Berlin den 9ten Winter Monaths
1762.

nº 188ª Berlin, November 9th, 1762
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 137–138r
Address (fol. 138): "*À Monsieur / Monsieur de Goldbach / Conseiller Privé de S*[*a*] *M*[*ajesté*] *Imp*[*ériale*] */ au Département des Affaires / Etrangères &c. &c. à / Petersbourg*"

189
Euler to Goldbach
Berlin, October 1st, 1763

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath
Hochgeneigter Herr und *Gönner*

So wohl aus *Ewr. Hochwohlgeb.* Stillschweigen als aus den Erzählungen des jungen Herrn Stähelins[1] habe mit der grösten Betrübnüß *Dero* kräncklichen und so gar bettlägerigen Zustand vernommen; als ich aber heute die Ehre hatte über eine Stunde mit des H. Groß Cantzlers *Hochgräfl*[*ichen*] *Excellenz* zu sprechen,[2] so waren *Ew. Hochwohlgeb.* meistentheils davon der Vorwurf, und S[ein]e *Excell*[*enz*] sagten mir, daß *Dieselben* im Stande gewesen noch vor *Dero* Abreise persönlich Abschied zu nehmen. S[ein]e *Excell*[*enz*] haben mir auch ausdrücklich aufgetragen heute noch an *Ewr. Hochwohlgeb.* zu schreiben, und *Dieselb*en nebst der Nachricht von *Dero* glücklichen Ankunft allhie *Dero* beständigen und aufrichtigsten Freundschaft zu versichern; ich habe auch Befehl *Ewr. Hochwohlgeb.* auf das inständigste um bessere Vorsorge vor *Dero* uns so theure Gesundheit zu bitten, als zu deren Erhaltung *Ew. Hochwohlgeb.* Selbst viel mehr beytragen könnten als würklich geschieht, indem *Dieselben* Sich meistentheils in *Dero* Zimmer eingeschlossen halten, da doch gewißlich öffteres Ausfahren und Verändrung der Lufft die herrlichste Würkung haben würde. *Ewr. Hochwohlgeb.* können leicht erachten, daß ich nun auch eben diese Bitte von Grund meines Herzens auf das beweglichste wiederhohle, da die Nachricht von *Dero* völligem Wohlseyn bey mir die unaussprechlichste Freude erwecken würde.

In meinem Hause steht Gott sey Dank alles wohl, und ich habe dieser Tagen meine jüngste Tochter an einen Holländischen Edelman von grossem Vermögen nahmens *Baron* von *Delen* versprochen; derselbe ist hier *Officier* unter den *Gens d'armes*, und ist kürzlich von einer nach Holland gethanen Reise wieder zurükgekommen, wohin er meinen zweyten Sohn, der *D*[*octo*]*r Medicinae* ist, mit sich genommen hatte, um ihn bey seiner gantzen *Famille* bekannt zu machen.[3]

Noch hat sich hier der Anschein noch nicht verlohren, daß die hiesige *Academie* in eine *Academie Françoise* verwandelt werden soll: so sehr ich mich vor einer nochmaligen Orts Verändrung entsetze, so würde ich mich doch in diesem Fall dazu entschliessen müßen,[4] und nichts würde mich dabey herzlicher erfreuen als *Ewr. Hochwohlgeb.* nochmals sehen zu können.

Alle die meinigen, und insonderheit mein ältester Sohn lassen uns zu *Ewr. Hochwohlgeb.* beständigen Gewogenheit und Gnade auf das gehorsamste empfehlen, und ich habe die Ehre mit der tiefsten Ehrerbietung zu seyn

Ewr. H*ochwohlgeb.*
unterthänigstgehorsamster
Diener *L. Euler*

Berlin den 1ten *Octobr* 1763

R 903 Berlin, October 1st, 1763
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 139–140r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 667; *Euler-Goldbach* (1965), p. 399

190
Euler to Goldbach
Berlin, October 11th, 1763

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath
Hochgeneigtester Gönner

S[ein]^{e} *Hochgräfl*[*iche*] *Excellenz* der H. Gross *Canzler* haben mir bey *Dero* Abreise von hier nochmals aufgetragen an *Ewr. Hochwohlgeb.* zu schreiben und *Dieselben* Dero beständigen und aufrichtigsten Freundschaft zu versichern, welches mir auch der Frau Groß *Cantzlerin* Erlaucht besonders von Ihrer Seite auf das angelegentlichste befohlen auszurichten. *Ewr. Hochwohlgeb.* kan ich nicht genug anpreisen, wie einer grossen Gnade ich von Ihro *Excellenz*en allhier gewürdiget worden: da ich täglich daselbst speisen müssen; und als vorgestern Mittag der Prinz *Dolgoruki Denselben* nach verrichtetem *Gottes*-Dienst die Abschieds Mahlzeit gab, hatten mich der H. Groß *Canzler* ausdrücklich dazu eingeladen, und darauf auf das huldreichste von mir Abschied genommen. Mehrentheils wurde von *Ewr. Hochwohlgeb.* gesprochen, und S[ein]^{e} *Hochgräfl*[*iche*] *Excell*[*enz*] bezeugten bey aller Gelegenheit *Dero* gantz besondere Gewogenheit und Freundschaft gegen *Dieselben*, beklagten dabey aber immer *Dero* kränkliche Umstände mit dem herzlichsten Wunsch bald erfreuliche Nachrichten von *Dero* Besserung zu vernehmen. *Ihro Excellenz* denken noch in Wien zu seyn, wann ich von *Ewr. Hochwohlgeb.* auf mein voriges Schreiben Antwort erhalten werde, und ich habe *Ordre* sogleich davon Nachricht zu geben, und hernach auch ferner nach *Itali*en, wo Ihro *Excell*[*enz*] Sich biß künftige Ostern zu *Florenz* aufzuhalten, und alsdann nach *Neapolis* zu gehen willens sind.[1]

Diese mir gnädigst aufgetragene *Commission* verrichte ich mit so viel grösserer Freude, da diese Versicherungen bey *Ew. Hochwohlgeb.* ein gantz besonderes Vergnügen erwecken werden, und ich wünsche von Grund meines Herzens daß dadurch auch ein heilsamer Einfluß auf die Gesundheit *Ew. Hochwohlgeb.* gewürket werden möge.

Als sich letstens *M.*^{r} *D'Alembert* einige Zeit hier aufhielt und von S[eine]^{r} *Majestät* dem König mit den Höchsten Gnadenbezeugungen überhäuffet wurde, hatte ich auch Gelegenheit denselben persönlich kennen zu lernen, nachdem schon seit geraumer Zeit unser Briefwechsel wegen einiger gelehrten Streitigkeiten unterbrochen gewesen, in welche ich mich nicht einlassen wollte. Nun aber ist unsere Freundschaft auf das vollkommenste wiederhergestellet worden; und man kan mir nicht genug beschreiben, mit wie grossen Lobeserhebungen er beständig mit S[eine]r Königl[ichen] *Majestät* von mir gesprochen. Unter der Hand wird versichert, daß er doch künftigen *May* wieder herkommen und die *Praesidenten* Stelle unserer *Academie* antretten werde.[2]

Mein gantzes Hauß empfiehlt sich gehorsamst zu *Ew. Hochwohlgeb.* beständigen Gewogenheit und Gnade, und ich verbleibe mit der tiefsten Ehrerbietung

Ewr. Hochwohlgeb.
unterthänigster Diener
L. Euler

Berlin den 11ten *Octobr.* 1763.

R 904 Berlin, October 11th, 1763
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 141rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 668; *Euler-Goldbach* (1965), p. 400

191
Goldbach to Euler
Petersburg, October (7th) 18th, 1763

HochEdelgebohrner Herr,
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*,

Eurer HochEdelgebohrnen will ich mit erzehlung meiner bey dem nunmehro über $73\frac{1}{2}$ Jahr gestiegenen alter erfolgten sehr natürlichen Schwächlichkeit nicht besch[w]erlich fallen. Daß des H.n GroßCantzlers *Excell*[*enc*]^e glücklich in Berlin angelanget und sich mit Eurer H. über eine Stunde lang zu besprechen die güte gehabt[1] gereichet mir zu ungemeiner Freude; Ihro *Ex*[*cellenc*]^e sonderbare gewogenheit gegen mir habe ich schon seit 20 Jahren fast ohne unterlaß zu rühmen ursach gehabt.

Zu der *avantageu*sen Verlöbniß Dero Jungfer Tochter[2] *gratuli*re ich Eurer HochEdelgeb. und der Frau *Professo*rin imgleichen Dero H.n Sohn und sämmtlichen *Famili*e von gantzen hertzen und verharre nechst aufrichtigstem anwunsch alles ferneren vergnügens

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.t Petersbourg
den 18. *Oct. st. n.* 1763.

R 905 Reply to n° 189
Petersburg, October (7th) 18th, 1763
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 178rv
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 400–401

192
Goldbach to Euler
Petersburg, October (16th) 27th, 1763

HochEdelgebohrner Herr
Insonders Hochgeehrter Herr *Professor*

Auf Eurer HochEdelgebohrnen Schreiben vom 1. *Oct.* habe ich den 18. geantwordtet, und das andere vom 11. giebt mir gelegenheit inliegendes an den H.n Groß Cantzler zu senden woraus Ihre *Exc*[*ellence*] ersehen werden wie *ponctuel* Ew. HochEdelgeb. in der aufgetragenen *commission* gewesen.

Dero sämmtlichen *Famili*e insonderheit Dero ältestem H.n Sohne bitte ich meine schuldige Empfehlung zu machen, wünsche Ihnen allerseits fernere glückliche *progress*en und verharre mit sonderbarer hochachtung

Eurer HochEdelgebohrnen
ergebenster Diener
Goldbach.

S.^{t} Petersburg
den 27. *Oct. st. n.* 1763.

R 906 Reply to n° 190
Petersburg, October (16th) 27th, 1763
Original, 1 fol. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 177r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 401

193
Euler to Goldbach
Berlin, November 15th, 1763

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath
Hochgeschätztester Gönner

So bald ich das erstere geehrteste Schreiben von *Ew. Hochwohlgeb.* erhalten, habe ich nicht ermangelt der empfangenen Order gemäß des H. *Groß Cantzler*s *Hochgräfl*[*icher*] *Excellenz* von *Dero* Zustand Bericht abzustatten, wobey ich von Herzen beklage, daß *Dero* herannahendes Alter mit so viel Beschwehrlichkeiten verknüpfet ist. S[ein]^e *Hochgräfl*[*iche*] *Excell*[*enz*] behaupten aber mit dem grösten Grunde daß *Ew. Hochwohlgeb.* Selbst sehr viel zu Erleichterung derselben beytragen könnten, wann *Dieselben* sich nur entschliessen wollten, Sich mehr Bewegung zu geben, und öffters der freyen Luft zu geniessen. *Ew. Hochwohlgeb.* werden auch dieses Selbst am Besten einsehen; da mir aber *Dero* Wohlseyn so sehr am Herzen ligt, so unterstehe ich mich *Ew. Hochwohlgeb.* auf das sehnlichste zu bitten, alle mögliche Mittel zu

Dero Besserung anzuwenden, wozu ich allen *Göttlichen* Seegen von Grund meiner Seele anwünsche.

Ew. Hochwohlgeb. Schreiben an des H. Groß Cantzlers *Hochgräfl*[*iche*] *Excellenz* werde ich heute dem Prinzen *Dolgoruki* zur weiteren Bestellung einhändigen da nun solches über Wien nach *Itali*en wird gehen müssen.[1]

Ew. Hochwohlgeb. mit dem ersteren Schreiben überschriebenes *Theorema*[2] hat bey mir die lebhafteste Freude erwecket, weil ich daraus schliessen zu können glaube, daß *Dero* Gemüth besonders aufgemuntert und vergnügt gewesen; ich habe dasselbe mit allem Fleiß untersuchet und endlich gefunden, daß sich dasselbe folgender Gestalt gantz leicht beweisen lässt:

Si $P^2 + 2eQ^2$ *est quadratum, ponatur* $P^2 + 2eQ^2 = R^2$*, addatur utrinque* P^2*, erit* $2P^2 + 2eQ^2 = R^2 + P^2$*, et per* 2 *dividendo*

$$P^2 + eQ^2 = \frac{1}{2}\left(R^2 + P^2\right) = \left(\frac{R+P}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-P}{2}\right)^2$$

ideoque $P^2 + eQ^2$ *summa duorum quadratorum. Q. E. D.*

Ewr. Hochwohlgeb. statten wir insgesammt für *Dero* Gütigsten Glückwunsch zu der bevorstehenden Heurath unserer jüngsten Tochter den gehorsamsten Dank ab; weil der Bräutigam noch jung und *Cornet* unter den *Gens d'armes* ist so muß die Vollziehung noch so lang ausgesetzt werden, biß dazu die Königl[iche] Erlaubnüß kan ausgewürket werden.[3] Mein ältester Sohn lässt sich *Ew. Hochwohlgeb.* auf das demüthigste empfehlen; er hat nun ausser seinem Töchterlein auch ein Söhnlein, so nun schon über ein Jahr alt;[4] er hat die feste Versicherung zu einer guten Besoldung, da er bißher mehr nicht als 200 Rthl. gehabt, und in dieser Hoffnung hat er auf Weynacht eine Wohnung gemiethet, da er bißher bey uns gewohnet.[5] Mein zweyter Sohn hat die Stelle als *Medicus* bey dem Französischen ArmeenWesen erhalten mit 200 Rthl. Besoldung. Mir hat die hiesige Französische *Coloni*e auch die Ehre angethan und mich *Ancien* Ihrer Kirchen und Mitglied des *Consistorii* erwählet;[6] ob ich aber diese Ehre lang geniessen werde ist sehr zweyfelhaft. Auf künftige Ostern muß sich der H. von Haller erklären, ob er seine Stelle als *Praesident* der Göttingischen *Academi*e wieder antretten will oder nicht? im letstern Fall dörfte ich genöthiget werden eine sehr grosse Verändrung vorzunehmen.[7]

Mein gantzes Haus lässt sich zu *Ewr. Hochwohlgeb.* beständigen Gewogenheit und Gnade auf das demüthigste empfehlen, und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Ehrerbietung lebenslang zu seyn

Ewr. Hochwohlgebohrnen

unterthänigster gehorsamster

Diener *L. Euler*

Berlin den 15^{ten} *Nov.* 1763.

R 907 Reply to n° 191 and n° 192
Berlin, November 15th, 1763
Original, 2 fols. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 142–143r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 669–670; *Euler-Goldbach* (1965), p. 401–402

194
Euler to Goldbach
Berlin, December 17th, 1763

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath
Hochgeschätzter Herr und *Gönner*

Es geschieht wiedrum auf Ordre des H. *Groß Cantzlers Hochgräfl*[*ichen*] *Excellenz* daß ich mir die Ehre gebe an *Ewr. Hochwohlgeb.* zu schreiben; Dieselben sind über Wien glücklich in Venedig angelangt, und haben die Gnade gehabt mir von da zu schreiben: wovon ich die Freyheit nehme folgende Abschrifft beyzufügen.[1]

> *Venise ce* 24 9*bre* 1763
>
> *Monsieur*
>
> *J'ai trouvé ici où je suis arrivé Dimanche passé votre lettre du* 5 *du courant.*[2] *Je suis fort sensible aux sentimens que Vous m'y temoignés; ce me sera toujours une veritable satisfaction de vous donner des preuves des miens; ce sont aussi les dispositions dans lesquelles je suis pour M.*r *de Goldbach à qui je vous prie de faire un mot de compliment de ma part au sujet de ce que vous me mandés de ses travaux litteraires, dans lesquels son age avancé ne l'empeche pas de s'exercer et de reussir. J'ai l'honneur d'etre avec estime*
>
> *Monsieur*
>
> *Votre très humble et très obeïssant serviteur*
>
> *C*[*omte*] *Mich*[*el*] *Woronzow.*

Ich wünsche hiebey nichts mehr als daß *Ewr. Hochwohlgeb.* dieses *Compliment* bey guten Umständen *Dero* Gesundheit erhalten, und von den vormaligen Beschwerden gäntzlich befreyt in allem Vergnügen leben mögen!

Schon vor einigen Monathen habe ich mein Werk von dem *Calculo integrali*, woran ich schon seit vielen Jahren gearbeitet, völlig zu Stande gebracht, und die *Hauden*sche Buchhandlung allhier ist willens dasselbe nächstens zu verlegen.[3] Das Gerücht davon hatte einen jungen lehrbegierigen Menschen aus der Schweitz hieher getrieben, welcher sich nichts anders als die Erlaubnüß ausgebeten, dieses Werk abzuschreiben, und ist darauf wieder zurükgereiset; das wunderbarste dabey ist daß dieser Mensch von seiner *Profession* ein Kürschner gewesen.[4]

Hätte ich dieses Schreiben nur um einen Posttag aufschieben dörfen, so wäre ich vielleicht im Stande gewesen, *Ewr. Hochwohlgeb.* einige Nachricht von der neuen Einrichtung der hiesigen *Academie* zu geben, weil der junge H. *Bernoulli* ein Sohn des *Joh*[*annis*] *Bernoulli* der in *Petersburg* gewesen, der vor einiger Zeit hieher verschrieben worden, die Versicherung erhalten, daß um die Mitte dieses Monaths bey der Ankunft S[eine]r K[öniglichen] *M*[*ajestät*] alles bei der *Academi*e *regulir*t werden soll.[5] Mein ältester Sohn, der bißher mehr nicht als 200 Rthl. hat, wartet insonderheit darauf mit dem grösten Schmerzen.[6] Derselbe wie auch mein gantzes Hauß lässt sich *Ewr. Hochwohlgeb.* gantz unterthänigst empfehlen und ich habe die Ehre mit der schuldigsten Ehrerbietung zu verharren

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gantz gehorsamster Diener
L. Euler

Berlin den 17ten *Dec.* 1763.

Meinen herzlichsten Glückwunsch zu dem bevorstehenden neuen Jahr bitte auch gütigst anzunehmen.

R 908 Berlin, December 17th, 1763
Original, 1 fol. – RGADA, f. 181, n. 1413, č. V, fol. 144rv
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 671–672; *Euler-Goldbach* (1965), p. 402–403

195
Goldbach to Euler
Petersburg, (December 30th, 1763) January 10th, 1764

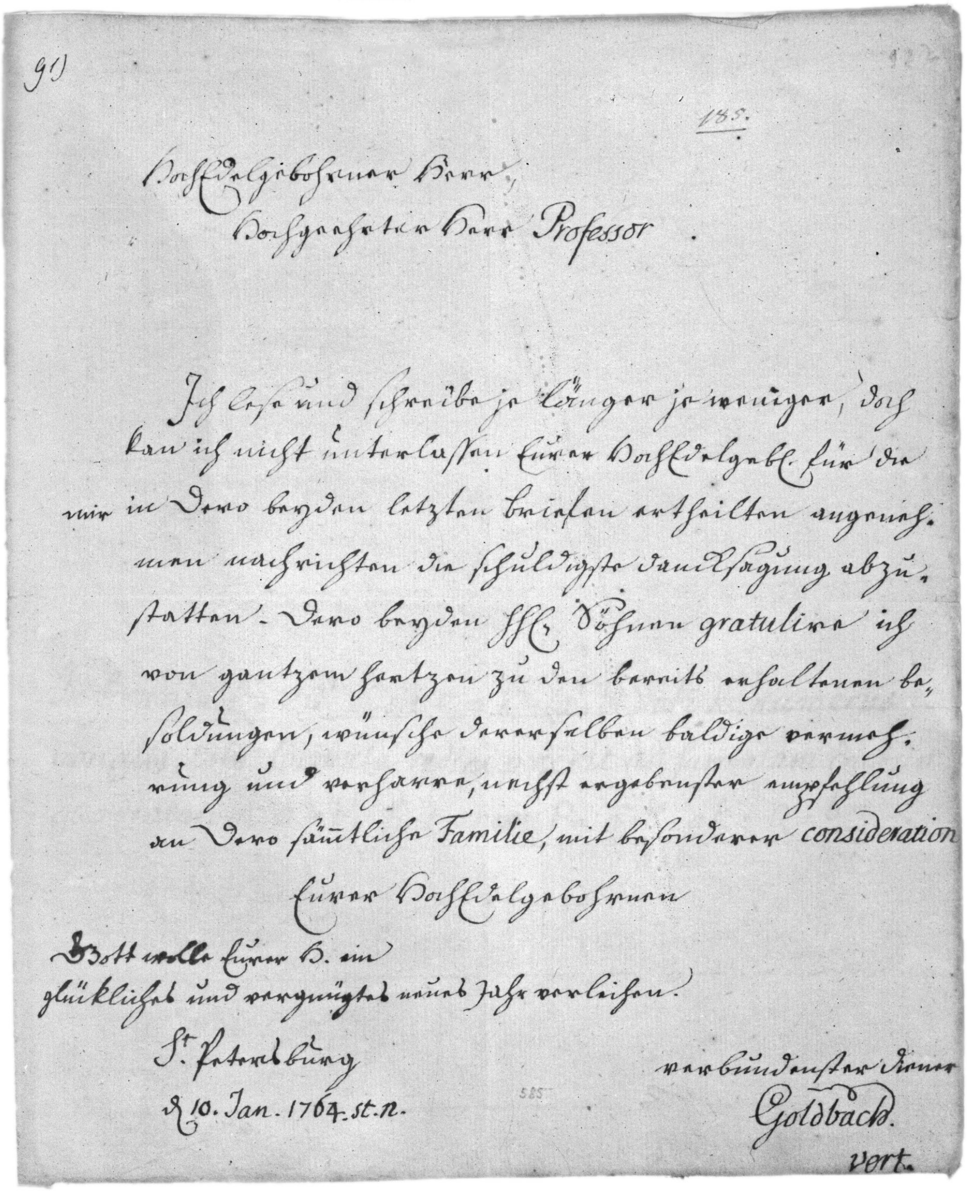
HochEdelgebohrner Herr
Hochgeehrter Herr *Professor*

Ich lese und schreibe je länger je weniger, doch kan ich nicht unterlassen Eurer HochEdelgeb. für die mir in Dero beyden letzten Briefen ertheilten angenehmen nachrichten die schuldigste dancksagung abzustatten. Dero beyden HH.n Söhnen *gratuli*re ich von gantzem hertzen zu den bereits erhaltenen besoldungen,[1] wünsche dererselben baldige vermehrung und verharre, nechst ergebenster empfehlung an Dero sämmtliche *Familie*, mit besonderer *consideration*

Eurer HochEdelgebohrnen
verbundenster Diener
Goldbach.

Gott wolle Eurer H. ein glückliches und vergnügtes neues Jahr verleihen.

S.t Petersburg
den 10. *Jan.* 1764 *st. n.*


91)

185.

HochEdelgebohrner Herr,
Hochgeehrtester Herr Professor.

Ich lese und schreibe je länger je weniger, doch kan ich nicht unterlassen Euer HochEdelgeb. für die mir in Dero beyden letzten briefen ertheilten angenehmen nachrichten die schuldigste dancksagung abzustatten. Dero beyden HH. Söhnen gratulire ich von gantzem hertzen zu den bereits erhaltenen besoldungen, wünsche dererselben baldige vermehrung und verharre, nebst ergebenster empfehlung an Dero sämtliche Familie, mit besonderer consideration

Euer HochEdelgebohrnen

Gott wolle Euer H. ein glückliches und vergnügtes neues Jahr verleihen.

St. Petersburg d. 10. Jan. 1764. st. n.

verbundenster Diener
Goldbach.

vert.

Goldbach's last letter to Euler, (December 30th, 1763) January 10th, 1764: reproduction of the first page (PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 179r)

This New Year's wish for Euler and his family may well be one of the last items Goldbach wrote, ten months before his death.

vert[e]

In formula $P^2 + eQ^2$, si sit $e = k^2 - (a^2 + b^2)$ ubi k numerus rationalis, tota formula redigi poterit ad summam duorum quadratorum $a^2 + b^2$, fiat enim $P = \dfrac{a^2 + b^2 - ak}{a - k}$; $Q = \dfrac{b}{a - k}$.[2]

R 909 Reply to n° 193 and n° 194
Petersburg, (December 30th, 1763) January 10th, 1764
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 136, op. 2, n. 8, fol. 179r, 180r
Published: *Correspondance* (1843), t. I, p. 673; *Euler-Goldbach* (1965), p. 403

196
Euler to Goldbach[1]
Berlin, March 17th, 1764

Hochwohlgebohrner Herr
Hochgeehrtester Herr Geheimer Rath

Da *Ewr. Hochwohlgeb.* je länger je weniger lesen und schreiben so muß ich billig zuvorderst gehorsamst um Vergebung bitten daß ich mich gleichwohl unterstehe an *Dieselben* zu schreiben; ich würde meine schuldigste Pflicht hintan setzen, wann ich nicht von Zeit zu Zeit die Gelegenheit ergriffe, *Ewr. Hochwohlgeb.* meiner vollkommensten Ehrerbietung zu versicheren, und mich samt den meinigen zu *Dero* beständigen Gnade gehorsamst zu empfehlen: ich habe aber das feste Vertrauen zu der Göttlichen Barmherzigkeit, daß *Ewr. Hochwohlgeb.* Sich von der vorigen Schwachheit wiederum erhohlet, und mit der herrannahenden guten Jahrszeit wiedrum zu dem Genuß einer vollkommnen Gesundheit gelangen werden, welche Hoffnung der *Allmächtige* Gott in Gnaden erfüllen wolle!

Ewr. Hochwohlgeb. Betrachtungen über die *formel* $P^2 + eQ^2 = aa + bb$ zeugen noch zu meinem grossen Trost von einer besonderen Munterkeit des Geistes,[2] und daß diese Gleichung immer statt finde so offt $e = kk - (aa + bb)$ ist um so viel merkwürdiger da man sonsten sich um dergleichen *Theoremata* nicht bemühet. Es können daher in der That sehr schöne Eigenschaften der Zahlen erläutert werden: als wann man auf eine noch allgemeinere Art annimmt $e = mk^2 - m\left(a^2 + mb^2\right)$, so lassen sich auf gleiche Art auch die Zahlen P und Q bestimmen daß $P^2 + eQ^2$ gleich wird der formel $aa + mbb$ oder dieser $c^2\left(a^2 + mb^2\right)$: dann man setze

$$P^2 + \left(mk^2 - m\left(a^2 + mb^2\right)\right)Q^2 = c^2\left(a^2 + mb^2\right)$$

so wird

$$P^2 + mk^2Q^2 = \left(a^2 + mb^2\right)\left(c^2 + mQ^2\right) = (ac \pm mbQ)^2 + m\,(aQ \mp bc)^2\,,$$

folglich kan man setzen $P = ac \pm mbQ$ und $kQ = aQ \mp bc$; hieraus wird: $Q = \dfrac{\pm bc}{a-k}$ und $P = ac + \dfrac{mbbc}{a-k}$, und daher entsteht der von *Ewr. Hochwohlgeb.* betrachtete Fall wann man setzt $c = 1$ und $m = 1$.

Wir haben nun hier den geschickten H. *Lambert*, welcher dem *Chur*fürsten in Bayern die neue *Academi*e in München errichtet;[3] derselbe *excellir*t nicht nur in allen Wissenschaften sondern hat es auch in der *Analysi* sehr weit gebracht: er hat mir eine *Seriem communicir*t darüber ich erstaunet bin da dieselbe von einer gantz anderen Beschaffenheit ist, als alle diejenigen, so bißher betrachtet worden. Wann m und n beliebige Zahlen, und a eine *quantitas quaecunque* ist, so ist die *Series* diese:

$$\begin{aligned} z \;=\;& 1 + \frac{a}{n} + \frac{2m-n+1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{3m-n+1}{2} \cdot \frac{3m-2n+1}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ &+ \frac{4m-n+1}{2} \cdot \frac{4m-2n+1}{3} \cdot \frac{4m-3n+1}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} \\ &+ \frac{5m-n+1}{2} \cdot \frac{5m-2n+1}{3} \cdot \frac{5m-3n+1}{4} \cdot \frac{5m-4n+1}{5} \cdot \frac{a^5}{n^5} + etc. \end{aligned}$$

solche *Series* sind mir noch niemals vorgekommen, und ich wüsste es nicht anzugreiffen um die *Summ* derselben zu erforschen. Um so viel wunderbarer ist es demnach daß die *Summ* derselben, oder der Werth von z sogar *algebraice* kan angegeben werden; dann nach der Erfindung des H. *Lambert*s gibt diese *aequation* $z^n = az^m + 1$ den wahren Werth derselben *Summ* z. Es ist auch merkwürdig daß eine jegliche *Dignität* von z sich durch eine ähnliche *Seriem* ausdrucken lässt, dann es wird

$$\begin{aligned} z^\lambda \;=\;& 1 + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{a}{n} + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+2m-n}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+3m-n}{2} \cdot \frac{\lambda+3m-2n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ &+ \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+4m-n}{2} \cdot \frac{\lambda+4m-2n}{3} \cdot \frac{\lambda+4m-3n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} + etc. \end{aligned}$$

Setzt man nun erstlich $\lambda = n$ so wird:

$$z^n = 1 + a + \frac{2m}{2} \cdot \frac{a^2}{n} + \frac{3m}{2} \cdot \frac{3m-n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^2} + \frac{4m}{2} \cdot \frac{4m-n}{3} \cdot \frac{4m-2n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^3} + etc.;$$

hernach setze man $\lambda = m$ so wird:

$$\begin{aligned} z^m \;=\;& 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{a}{n} + \frac{m}{1} \cdot \frac{3m-n}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{m}{1} \cdot \frac{4m-n}{2} \cdot \frac{4m-2n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ &+ \frac{m}{1} \cdot \frac{5m-n}{2} \cdot \frac{5m-2n}{3} \cdot \frac{5m-3n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} + etc. \end{aligned}$$

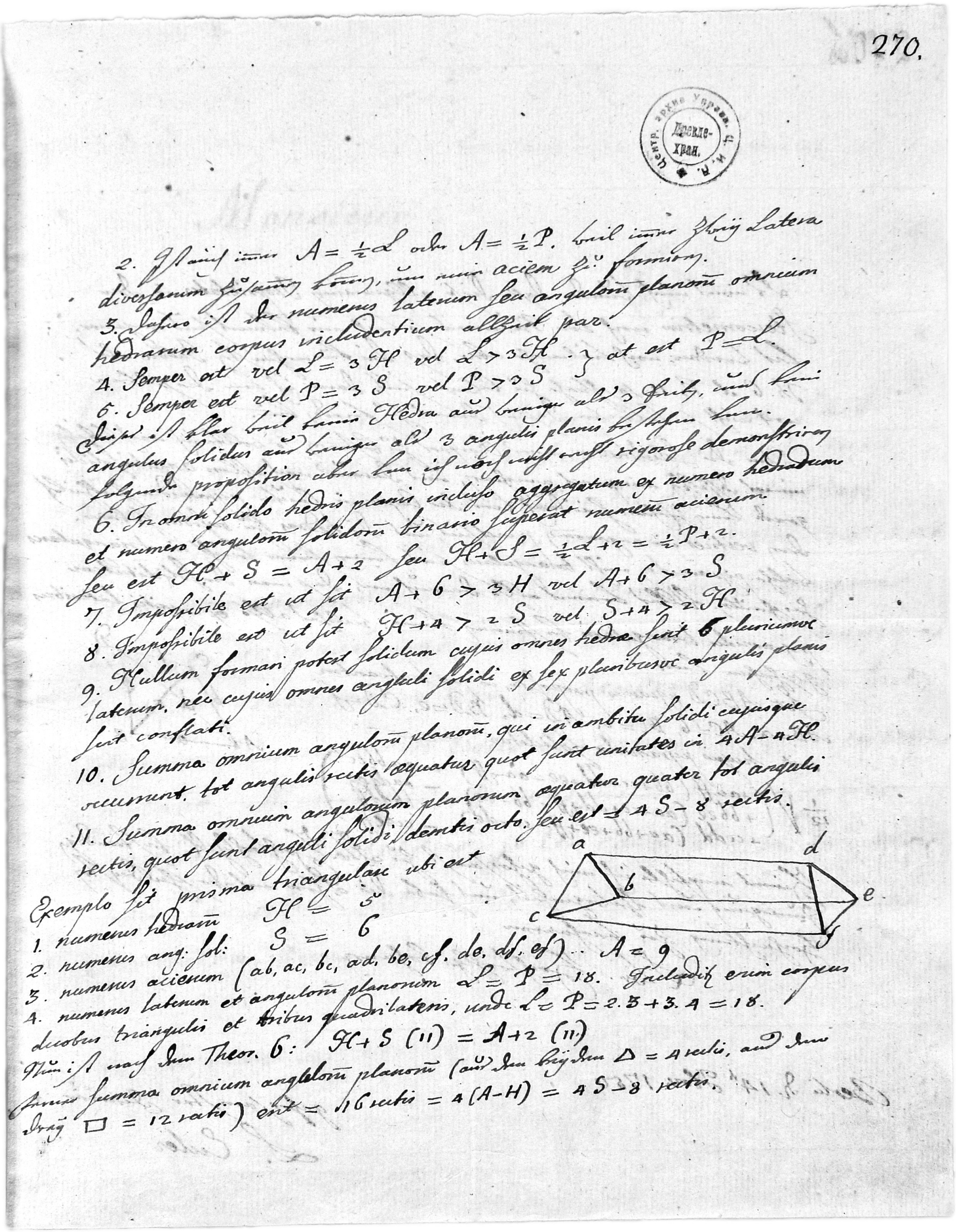
woraus offenbar folgt daß $z^n = az^m + 1$. Diese Entdeckung ist allso meiner Meynung nach von der grösten Wichtigkeit.[4]

Mein gantzes Haus lässt sich zu *Ewr. Hochwohlgeb.* beständigen Gnade gantz gehorsamst empfehlen, und ich habe die Ehre mit der tiefsten Ehrerbietung zu seyn

Ewr. Hochwohlgebohrnen
gehorsamstverbundenster
Diener *L. Euler*

Berlin den 17$^{\text{ten}}$ *Martii*
1764.

R 910 Reply to n° 195
Berlin, March 17th, 1764
Original, 2 fols. – PFARAN, f. 21, op. 3, n. 321, fol. 112–113r
Published: *Euler-Goldbach* (1965), p. 404–405



270.

2. Gleichwie nun $A = \frac{1}{2}L$ oder $A = \frac{1}{2}P$, weil immer zwey Latera diversarum hedrarum zusammen kommen, um eine aciem zu formiren.

3. Daher ist der numerus laterum seu angulorum planorum omnium hedrarum corpus includentium allezeit par.

4. Semper est vel $L = 3H$ vel $L > 3H$ $\}$ at est $P = L$.

5. Semper est vel $P = 3S$ vel $P > 3S$

Dieses ist klar, weil keine Hedra aus weniger als 3 Seiten, und kein angulus solidus aus weniger als 3 angulis planis bestehen kann.

Folgende propositiones aber kann ich noch nicht recht rigorose demonstriren:

6. In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex numero hedrarum et numero angulorum solidorum binario superat numerum acierum seu est $H + S = A + 2$ seu $H + S = \frac{1}{2}L + 2 = \frac{1}{2}P + 2$.

7. Impossibile est ut sit $A + 6 > 3H$ vel $A + 6 > 3S$

8. Impossibile est ut sit $H + 4 > 2S$ vel $S + 4 > 2H$

9. Nullum formari potest solidum cujus omnes hedrae sint 6 pluriumve laterum, nec cujus omnes anguli solidi ex sex pluribusve angulis planis sint conflati.

10. Summa omnium angulorum planorum, qui in ambitu solidi cujusque occurrunt, tot angulis rectis aequatur quot sunt unitates in $4A - 4H$.

11. Summa omnium angulorum planorum aequatur quater tot angulis rectis, quot sunt anguli solidi demtis octo. seu est $= 4S - 8$ rectis.

Exemplo sit prisma triangulare ubi est

1. numerus hedrarum $H = 5$
2. numerus ang. sol: $S = 6$
3. numerus acierum (ab, ac, bc, ad, be, cf, de, df, ef) $A = 9$
4. numerus laterum et angulorum planorum $L = P = 18$. Includitur enim corpus duobus triangulis et tribus quadrilateris, unde $L = P = 2.3 + 3.4 = 18$.

Nun ist nach dem Theor. 6: $H + S\ (11) = A + 2\ (11)$

Ferner summa omnium angulorum planorum (aus den beyden $\Delta = 4$ rectis, aus den dreyen $\square = 12$ rectis) erit $= 16$ rectis $= 4(A-H) = 4S - 8$ rectis.

Euler's letter n° 149 to Goldbach, November 14th, 1750: reproduction of the third page (RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 270r)

In the paragraph numbered 6, Euler's Polyhedron Formula appears for the first time; paragraph 11 gives the discrete form of the Gauss-Bonnet theorem (cf. n° 149, notes 5–8).

Correspondence with Christian Goldbach

English Translations

1

Euler to Goldbach

Petersburg, October 13th (24th), 1729

Sir,

when lately I came across a few ideas that apparently could contribute to the interpolation of series having a variable law – as you are wont to call it[1] – I took a closer look and discovered many things regarding that subject. As Mr. Bernoulli hinted that these results might please you, Sir, I decided to write to you and submit them to your judgment. For the series[2] 1, 2, 6, 24, 120, …, which you have treated extensively, as I see,[3] I have found the general term

$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\ldots,$$

which expresses the mth term by a product of infinitely many factors. Indeed this product does not terminate in any case, even when m is an integer, and only approaches the true value more and more (as for fractional m); but one can evaluate any term very exactly, the easier the smaller m is taken to be. If one prefers to use only a few factors, the general term can be given an even simpler form: If we are content with the first two factors, we will have, for the mth term, $\dfrac{1\cdot 2}{(1+m)\,(2+m)}3^m$; considering generally n factors and neglecting the rest, the general term will be

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(1+m)\,(2+m)\,(3+m)\,\cdots\,(n+m)}\,(n+1)^m\,;$$

and this approaches the true value the closer the larger n is taken.[4] I communicated this to Mr. Bernoulli, who by his own method arrived at nearly the same final expression, the difference being that instead of $(n+1)^m$ he applies another power; in determining this, he may have taken into account those factors which I neglected. I believe he recently sent you an approximate value,[5] determined from this method, for the term whose index is $1\frac{1}{2}$. Moreover, the general expression may be of use in determining products of infinitely many factors that are equal to a finite number; thus for $m=2$ one has the product $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{36}{35}\cdot\cdots$, which is equal to 2. In the same way, for $m=3$, $\frac{8}{4}\cdot\frac{27}{20}\cdot\frac{64}{54}\cdot\frac{125}{112}\cdot\cdots=6$. I have found this general expression starting from the fact that the series 1, 2, 6, 24, …, when continued to infinity, ends up becoming geometric. Analogous expressions can be indicated for other series coinciding with geometrical series at infinity.[6] But as in this manner only approximate values for the interpolated terms can be found, I dropped this method of treating series and began to dwell on another, aspiring to find, if possible, not only intermediate terms close to the true values, but those values themselves. However, for this purpose it appeared necessary to have a general expression for the series, and I foresaw that this would take a peculiar form, very different from those hitherto in use. So a certain new form of general expression offered itself, which can be applied to all known series but extends much further: in fact, I can now determine general terms for infinite series following a variable law, for which one could not find general terms by the methods used until now. These expressions are such that any term, whether its index be an integer or a fractional number, can be evaluated exactly by them, in as far as the nature of the question allows this: for usually the evaluation of intermediate terms depends on the quadrature of the circle, on logarithms or on the quadrature of some other curve. The general expressions hitherto used fare no better in this respect than those I am speaking about, both kinds being equally easy to apply. Admittedly I have not yet found a general term for the series 1, 2, 6, 24, 120, …, but I have done so for innumerable similar other cases; by this I have at least been able to determine exactly those interpolated terms whose indices are $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, etc. Thus I have found the term of index $\frac{1}{2}$ to equal $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{-1}\cdot\log(-1)}$ or, which amounts to the same, the side of the square that is equal to the circle of diameter 1.[7] From this it is obvious that the nature of the question does not allow an expression by numbers;[8] but from the ratio of the radius to the circumference, which is as it were given, I have found the term of index $\frac{1}{2}$ to be 0.886 226 9. Multiplying this by $\frac{3}{2}$, one gets the term of index $\frac{3}{2}$, which here is 1.329 340 3; this again multiplied by $\frac{5}{2}$ gives the term of index $\frac{5}{2}$, and so on. I can also indicate the terms whose indices are $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, etc., and those with indices $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, etc.; but their evaluation depends on higher quadratures.[9] I have also calculated the term of index $\frac{1}{2}$ by the rule given at the beginning, and by taking 15 factors, I found it to be 0.8932, a bit larger than the true value. I will add here some of the series for which I have found general expressions, so you, Sir, will be able to judge how far my method extends. First I found a general term for the series $\frac{2}{3}$, $\frac{2\cdot4}{3\cdot5}$, $\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}$, $\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{3\cdot5\cdot7\cdot9}$, …, from which I calculated the terms of index $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, etc. as follows: Let $p:d$ denote the ratio of the circumference to the diameter:[10] then they will be $\overset{\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot p}{2\cdot 2d}}$, $\overset{1\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot3\cdot p}{2\cdot4\cdot2d}}$, $\overset{2\frac{1}{2}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot p}{2\cdot4\cdot6\cdot2d}}$, and so on. Other series for which I have found general terms are $\frac{1}{2}$, $\frac{2\cdot4}{3\cdot5}$, $\frac{3\cdot6\cdot9}{4\cdot7\cdot10}$, $\frac{4\cdot8\cdot12\cdot16}{5\cdot9\cdot13\cdot17}$, $\frac{5\cdot10\cdot15\cdot20\cdot25}{6\cdot11\cdot16\cdot21\cdot26}$, … and $\frac{1}{2}$, $\frac{1\cdot2}{3\cdot4}$, $\frac{1\cdot2\cdot3}{4\cdot5\cdot6}$, $\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{5\cdot6\cdot7\cdot8}$, … as well as 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{50}{24}$, $\frac{274}{120}$, $\frac{1764}{720}$, …; for the first two of these, one will understand at first glance what law they follow, whereas the third, whose law appears less clearly, is the summation series for the harmonic progression[11] 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …. From my general term I have found the term whose index is $-\frac{1}{2}$ to be $-2\log 2$; the term of index $\frac{1}{2}$ is $2-2\log 2$; the one of index $1\frac{1}{2}$ is $2+\frac{2}{3}-2\log 2$, while that whose index is $2\frac{1}{2}$ is $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-2\log 2$, and so on, log 2 denoting the hyperbolic logarithm of 2, which equals 0.693 147 180 56. As the general terms necessarily involve so many quadratures, it is comprehensible that one will have to look to the infinitesimal calculus for their discovery. Consequently, what I have done in this matter is the adaptation of the differential and integral calculus to the investigation of series;[12] I hope that this new use, which I have not yet been able to explore more fully in the short time elapsed, will become even more extensive. You, Sir, who have already enriched the theory of series by so many important discoveries, will therefore judge for yourself what else may be expected from this novel way to deal with series. It would certainly acquire its greatest utility and perfection if you could bring yourself to investigate how the differential calculus can be most conveniently applied to these questions. For up to now my method has the drawback that I cannot find what I want, but rather have to be content with wanting what I find. Fare well and stay well-disposed towards your most respectful

Euler.

Petersburg, October 13th, 1729.[13]

[1] Goldbach had defined "series having a variable law" in his paper *De terminis generalibus serierum*, which Daniel Bernoulli had just presented to the Petersburg Academy on (September 23rd) October 4th, 1729 (cf. Bernoulli's letter to Goldbach in *Correspondance*, t. II, p. 324); obviously Euler had the opportunity to refer to this paper, which was printed only in 1732. According to Goldbach's paper, in sequences (a_n) "having a constant law" the term a_n can be computed by a fixed formula from its preceding terms: examples include arithmetic sequences $(a_{n+1} = a_n + d)$, geometric sequences $(s_{n+1} = a_n \cdot q)$, or recurring sequences such as the one that much later came to be called Fibonacci's $(a_{n+1} = a_n + a_{n-1})$. In sequences "having a variable law" the formula for a_n also involves the index n, as in the "hypergeometric sequence" where $a_n = na_{n-1}$.
The term "interpolation" is nowadays attached to the process of finding the value of a *function* at some point lying between two tabulated (or known) values. In the work of Euler and Goldbach, however, interpolation almost always means finding "intermediate terms" (such as $a_{1/2}$, $a_{1/3}$ ...) for some *sequence* (a_n). Interpolation problems in this sense go back to Wallis, who discovered his product formula for π (see n° 11, note 11) in trying to "interpolate" sequences that involve what we call binomial coefficients. The result $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ is contained implicitly in Wallis's *Arithmetica infinitorum* from 1656 (see Stedall 2004).
The results that Euler mentions in this letter were published in E. 19, where he observed that they had been inspired by Goldbach's paper. At the end of this article, he applied his interpolation technique to sequences such as the n-th derivative of simple functions like x^k. Several decades later, Euler explained in E. 652 how he was led to this discovery.

[2] The term "series" used by Euler and Goldbach often means what we would call a sequence. Here Euler writes the sequence 1, 2, 6, 24, ... in a manner close to ours, whereas Goldbach in his reply denoted the same object by $1 + 2 + 6 + 24 + \ldots$, a notation which Euler then accepted (see *infra* n° 3).

[3] Euler again refers to Goldbach's correspondence with Daniel Bernoulli, where the proposal to interpolate the factorials had surfaced a year earlier (*Correspondance*, t. II, p. 273–274, 283, 285–286, 325 – and also p. 246–247: Bernoulli's letter misplaced as n° XXIII was written in January 1729, not 1728, and should be inserted between n° XXXV and n° XXXVI).
Even earlier Goldbach had claimed he could express arbitrary intermediate values for any sequence at least by infinite series, and proposed, as a challenge for others who might have found something similar, the term intermediate between the first and the second one in the sequence of factorials: see his letter to Nicolaus II Bernoulli from January 2nd, 1722 (*Correspondance*, t. II, p. 128; since Nicolaus II had died in Petersburg in 1726, it is possible that Euler had access to his correspondence, too).
Goldbach's proposal for interpolating the factorials is also sketched in his paper cited *supra* note 1, p. 168–169.
In his *Arithmetica infinitorum* (1656), Wallis had called a sequence of the form $s_n = \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu$ a hypergeometric progression. Euler used the expression"Wallis's hypergeometric series" (see

E. 247) for what we call the sequence of factorials; in E. 421, he used the notation

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \int_0^1 \sqrt[n]{\left(\ell\,\frac{1}{x}\right)^m}\, dx, \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{\sqrt[n]{1-x^n}^{\,n-q}}\, dx$$

and observed the "reciprocity law" $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$. In E. 652, Euler introduced the symbol $\Delta\,:\, n = 1\cdot 2\cdots n$ and called this object a "function" for the first time.

The symbol $n!$ that is universally used today was defined by the Strasbourg mathematician Christian Kramp in his 1808 textbook *Élémens d'arithmétique universelle*; Gauss's (and Riemann's) notation $\Pi\, n$ did not prevail.

Legendre (1811) called the function obtained by Euler's interpolation of the factorials the Gamma function and put $\left[\frac{m}{n}\right] = \Gamma\left(\frac{m}{n}+1\right)$; he kept Euler's symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ for denoting "Euler integrals of the first kind" (later called Beta functions by Binet; actually we have $\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n} B\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$).

[4] Euler's formula, which he later proved in E. 368, can be written in the form

$$m! = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,(n+\alpha)^m}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}$$

for $\alpha = 1$; Gauss (1813) used $\alpha = 0$ for defining $m!$.

[5] In a PS of his letter to Goldbach from October 10th, 1729 (*Correspondance*, t. II, p. 325), Daniel Bernoulli indicates for $x!$ the expression

$$\left(A + \frac{x}{2}\right)^{x-1} \left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdots\frac{A}{A-1+x}\right)$$

where A is an infinite quantity. Setting $A = n+1$ and $x = m$ in this formula we find, in modern notation, that

$$\begin{aligned} m! &= \lim_{n\to\infty} \left(n+1+\frac{m}{2}\right)^{m-1} \frac{2}{1+m}\cdot\frac{3}{2+m}\cdots\frac{n+1}{n+m} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+m}\cdot\frac{2}{2+m}\cdots\frac{n}{n+m}\cdot n\cdot\left(n+1+\frac{m}{2}\right)^{m-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+m}\cdot\frac{2}{2+m}\cdots\frac{n}{n+m}(n+1)^m\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\left(1+\frac{m}{2(n+1)}\right)^{m-1}. \end{aligned}$$

Since the last two terms converge to 1, this yields the same limit as Euler's expression. Evaluating his formula with $a = 8$, Bernoulli finds for $\frac{3}{2}!$ the approximate value 1.3005; as Euler states later in this letter, the exact value is $\frac{3}{4}\sqrt{\pi} \approx 1.3293$.

[6] In modern terms, this means that the quotients of successive terms (which are constant for geometrical series) tend to some limit.

[7] Indeed, both these 18th-century circumlocutions give the value of $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ correctly as $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Observe, however, that taking "the" logarithm of $e^{i\pi} = -1$ would give $\log(-1) = i\pi$, hence $\frac{1}{2}\sqrt{i\log(-1)} = \frac{1}{2}\sqrt{-\pi}$. Similarly loose manipulations of "the" square roots of complex numbers occur even much later along Euler's career: in his textbook *Vollständige Anleitung zur Algebra* from 1770 (E. 387, § 148–149), one finds the – imprecise, to say the least – statements that the product of $\sqrt{-1}$ and $\sqrt{-4}$ is $\sqrt{4} = 2$ or that dividing 1 by $\sqrt{-1}$ yields $\sqrt{-1}$. Cf. Mattmüller 2008, p. 42.

The extension of logarithms to negative numbers had been the subject of a famous controversy between Leibniz and Johann Bernoulli in 1712/13: Bernoulli claimed that $\log a = \log(-a)$, whereas Leibniz thought that $\log(-1)$ does not exist. The question was taken up by Euler in 1727 when he asked his former teacher about the graph of the function $y = (-1)^x$ (see R 190: O. IVA/2, p. 77–81). In the correspondence that followed, Euler gradually developed – despite Bernoulli's lack of interest – the idea that the logarithm is multi-valued,

starting from a quadrature formula that Bernoulli had himself found (see R 191–195: *ibid.*, p. 81–121, esp. p. 88, where one finds the statement "quadrans circuli $= \dfrac{aa}{4\sqrt{-1}}\,\ell - 1$" equivalent to our $\pi = \log(-1)/\sqrt{-1}$).
Euler's expression of π via the logarithm of -1 is perhaps intended as an invitation for Goldbach to discuss this topic; when Goldbach replied that he was not familiar with the "hyperbolic logarithm", Euler dropped the subject.
Logarithms of negative numbers later became a central point in Euler's correspondence with d'Alembert in 1747 (see R 16–22: O. IVA/5, p. 254–274); the topic was also discussed in letters exchanged with Gabriel Cramer in 1746/47 (R 469, 471: to be published in O. IVA/7), with Maupertuis in 1750 (R 1564: O. IVA/6, p. 154–156) and with Segner in 1761 (R 2524–2533: to be published in O. IVA/8).
Euler gave a preliminary account of his theory of logarithms in his *Introductio* (cf. E. 101, T. I, cap. VI: O. I/8, pp. 103–121; T. II, cap. XXI: O. I/9, p. 290–295). In his paper E. 168 from 1749, he addressed the Leibniz-Bernoulli controversy in detail; an earlier version, presented to the Academy in 1747 at the beginning of his correspondence with d'Alembert, was published posthumously as E. 807. A detailed study of the subject can be found in Bradley 2007.

[8] I. e., a rational value (or possibly one expressed by a root of a rational number). Like many of his predecessors and contemporaries, Euler was convinced, although this had not yet been proved (see Goldbach's reply n° 2, note 3), that π is irrational and not even "algebraic in a simple way".

[9] In E. 565, Euler much later observes that many "transcendental" quantities (this must not be confused with the modern notion of transcendental number; here, "transcendental quantity" means little more than a value of some non-algebraic function) can be expressed as quadratures of certain curved lines: Euler gives as examples the integrals of $\dfrac{1}{x}$ (logarithms), $\dfrac{1}{1+x^2}$ (circular arcs) and $\sqrt{\dfrac{f+gx^2}{b+kx^2}}$ (these give rise to elliptic integrals). As an example of a number that he cannot express via quadratures he gives the series $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-1}+\ldots$.
Numbers that can be expressed as areas enclosed by algebraic curves have resurfaced lately as "periods" (see Kontsevich / Zagier 2001): "A period is a complex number whose real and imaginary parts are values of absolutely convergent integrals of rational functions with rational coefficients, over domains in $\mathbb{R}^n$ given by polynomial inequalities with rational coefficients." The set of periods is countable and includes all algebraic numbers as well as certain transcendental numbers such as π, the natural logarithms of algebraic numbers, and values of the zeta function at integers $n \geq 2$, in particular $\zeta(3)$ (which was shown to be irrational by Apéry in 1979 and is believed to be transcendental).
The set of periods carries a ring structure, and one of the most important open problems is showing that it is not a field; in fact it is believed that $1/\pi$ is not a period, but so far no one has been able to write down a number that can be shown not to be a period (some other numbers conjectured not to be periods are $\sqrt{\pi}$, e, and Euler's constant γ).
Euler's result $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ implies that $\Gamma(\frac{1}{2})^2$ is a period; the formula presented in letter n° 3 shows, more generally, that $\Gamma(\frac{p}{q})^q$ is a period for all nonzero integers p and q. The value $\Gamma(\frac{1}{4})$ can be shown to depend on the rectification of the lemniscate (which in turn is connected with Gauss's arithmetic-geometric mean of 1 and $\sqrt{2}$).

[10] The letter π to denote this ratio seems to have appeared in print for the first time in William Jones's *Synopsis Palmariorum Matheseos* (1706): cf. Mattmüller 2008. Euler made his first public use of π (explicitly introducing its meaning) in his *Mechanica*, which was published in 1736 (E. 15, § 283: see O. II/1, p. 92). In the present correspondence, π (in this sense) makes its first appearance in n° 26 from November 1739, where Goldbach employs it as a matter of course: one can thus reasonably assume that by then Euler had introduced the systematical use of the notation at least in the small mathematical community at Petersburg.

[11] The divergence of the harmonic series had already been observed by Nicole Oresme in the 14th century (see Busard's 1961 edition), by Pietro Mengoli in 1650, and by the Bernoulli brothers in 1689 (cf. Jac. B. Op. XXXV: *Werke* 4, p. 36–38, where Jacob Bernoulli writes that his younger brother Johann was first to recognise the divergence). The name "harmonic" was attached to the series by Brouncker (1668); Mengoli (1659) studied connections with logarithms, and Nicolaus Mercator (1668) indicated the "Taylor expansion" of $\log(1+x)$.
In his 1720 paper *Specimen methodi ad summas serierum*, Goldbach found the following formula for the sum s_n of the first n terms of the harmonic sequence:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k(k+n)};$$

since the right-hand side is well defined for fractional values of n, this formula can be used for interpolating the harmonic series. Goldbach's result had already been obtained by Mengoli and was also known to Jacob Bernoulli (see Goldbach's letter to Daniel Bernoulli dated November 4th, 1723: *Correspondance* II, p. 183–187). By evaluating Goldbach's formula with $n = \frac{1}{2}$, we find

$$s_{1/2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k(2k+1)} = 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \pm \ldots\Big) = 2(1-\log 2).$$

(Goldbach, at this point, could not do this calculation since he was as yet unfamiliar with the "hyperbolic logarithm": see his reply to the present letter: n° 2, note 4).
Euler proved his claim $s_{1/2} = 2 - 2\log 2$ for the sum $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ in E. 20, where he started from the equation

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 x^{k-1} dx = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\, dx;$$

the expression on the right-hand side can be evaluated for $n = \frac{1}{2}$. Euler expanded his results in his articles E. 25, E. 43, E. 46, E. 47 and E. 55.
In his proof that arithmetic progressions $am + b$ with coprime integers a and b contain infinitely many primes, Dirichlet later used the same substitution $\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\, dx$ for evaluating L-series attached to "Dirichlet characters".

[12] Cf. n° 3, note 1.

[13] Here the recipient added a note: "Pr[aesentatum?] 3. Nov. 1729.".

2
Goldbach to Euler
Moscow, (November 20th) December 1st, 1729

Sir,

to your very welcome letter I reply in general: When, in evaluating intermediate terms in series, I could not compel them to become rational, I have been satisfied to express them by infinite series of rational numbers in one way or another;[1] and when it could be shown that a series of this kind, which expresses the value of the intermediate term asked for, is connected to some irrational numbers or to logarithms or even to the hitherto unknown quadrature of some curve, I think this is no small feat. While others have worked on expressing the unknown ratio of the diameter to the circle by infinite series, it will also be legitimate to explain conversely some hitherto unknown series by the quadrature of the circle; however, a notable difference lies in the fact that irrational numbers can be easily shown not to be reducible to the rationals,[2] whereas nobody to my knowledge has yet proved that the quadrature of the circle cannot be effected by rational numbers.[3] That the general term of the series $1+2+6+24+\ldots$ for any index m is indeed, as you make it,

$$\frac{1\cdot 2^m}{1+m}\cdot\frac{2^{1-m}\cdot 3^m}{2+m}\cdot\frac{3^{1-m}\cdot 4^m}{3+m}\cdot\frac{4^{1-m}\cdot 5^m}{4+m}\cdot\ldots,$$

I prove in the following way: Let x be the index of each factor; the general formula for the individual factors will be

$$\frac{x^{1-m}\,(x+1)^m}{x+m},$$

and their product from the first up to and including the last, whose index is x, is

$$(x+1)^m : \left(\frac{x+1}{1}\cdot\frac{x+2}{2}\cdot\frac{x+3}{3}\cdots\frac{x+m}{m}\right).$$

As an example, let m be 2: the product up to some arbitrary factor (of index x) will be

$$\frac{2\,(x+1)^2}{(x+1)\,(x+2)}=\frac{2\,(x+1)}{x+2};$$

thus the product of all factors to infinity equals 2. For $m=3$, the analogous product up to a given factor will be

$$6\,(x+1)^3 : \left(\frac{x+1}{1}\right)\left(\frac{x+2}{2}\right)\left(\frac{x+3}{3}\right),$$

and consequently the product of all factors to infinity equals 6, and so on. You have certainly noticed that all algebraic series whose terms are composed in the usual way by an addition sign can be converted to factors of this kind; the products of factors play the same role here as the sums of the individual terms in that case.

I have to admit that I do not clearly understand the nature of hyperbolic logarithms; even Wolff does not mention them at all in his treatment of logarithms.[4]

In the other series you mention, I do not see any great difficulty in expressing the general term by factors in your way; for the series

$$\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10}+\frac{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}{5\cdot 9\cdot 13\cdot 17}+\ldots,$$

the general term is

$$\frac{x}{x+1}\cdot\frac{2x}{2x+1}\cdot\frac{3x}{3x+1}\cdots\frac{mx}{mx+1},$$

terminating when m equals x; if this never occurs, there will be infinitely many factors; thus the term that belongs to the index $\frac{1}{2}$ becomes $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \ldots$.[5] For the series

$$\frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots$$

the general term is

$$\frac{2\,(2n+3)}{3\,(2n+2)} \cdot \frac{4\,(2n+5)}{5\,(2n+4)} \cdot \frac{6\,(2n+7)}{7\,(2n+6)} \cdot \frac{8\,(2n+9)}{9\,(2n+8)} \cdot \ldots ;$$

for the series

$$\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$$

it is

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\,(4n+2)}{6\,(n+1)} \cdot \frac{3\,(4n+6)}{10\,(n+2)} \cdot \frac{4\,(4n+10)}{14\,(n+3)} \cdot \frac{5\,(4n+14)}{18\,(n+4)} \cdot \ldots \right),$$

and it is not so very difficult, taking the numbers expressing the quadrature of the circle to be known from another source, to invent series in which these numbers appear as intermediate terms; obviously you have mastered this skill. I think the methods you communicated to me by examples are quite excellent, and I do not doubt that you will discover many more new and wonderful facts of this kind by following the same path. I have also sent lately to our Mr. Bernoulli a theorem by which I applied the method for summing series to the so-called integral calculus.[6] Farewell.

Your most respectful
Christian Goldbach.

Dec. 1st, 1729. Moscow.

PS. Do you know about Fermat's remark that all numbers of the form $2^{2^{x-1}} + 1$ (i. e., 3, 5, 17, and so on) are prime? He admitted however that he could not prove this, and as far as I know, nobody has proved it subsequently.[7]

[1] Cf. n° 1, note 3, in particular the 1722 letter to Nicolaus II Bernoulli cited there.

[2] Obviously Goldbach refers here to irrationals which satisfy simple algebraic equations (roots of non-square rationals and the like).
In Euler's times, the terms "irrational" and "transcendental" did not yet have their fixed modern meaning. The word "irrational" goes back to Euclid's Book X, where various notions of irrationality were introduced: Euclid called two magnitudes A and B of the same kind commensurable if $A : B = m : n$ for natural numbers m and n, and "not enunciable" (ἄλογος), which was translated into Latin as *irrationalis*, if they are neither commensurable nor commensurable in square, i. e., if there are no numbers m, n with $A^2 : B^2 = m : n$.
Stifel, in his *Arithmetica integra* (1544), observed that irrational numbers can be constructed in geometry. Wallis, in his *Algebra* (1685; 1693), Cap. XXV, called numbers of the form $\sqrt{2}$ or $\sqrt[3]{3}$ "surds" (*radices surdae*; the Latin word *surdus* means dumb, mute or silent, and is a reference to Euclid's "not enunciable").

In his *Introductio* (E. 101), § 105, Euler claims that logarithms of rational numbers cannot be irrational, since if $\log_a b = \sqrt{n}$, then $a^{\sqrt{n}} = b$, which is impossible for rational numbers a, b. He does not provide any proofs; numbers that are neither rational nor irrational (i. e., surds) are called "transcendental".

[3] Cf. nº 1, note 8.
Like everyone else at the time, Goldbach was convinced that π was not rational, and observed that this had not yet been proved.
Aristotle, in Book IV of his *Physics*, was probably the first to state (somewhat vaguely) that the circumference of a circle and its diameter are not commensurable. The Hindu mathematician Nilakantha Somayaji (ca. AD 1500) is credited with the question of why we are giving rational approximations to π instead of its exact value, and also with the answer that this is because the ratio of the circumference and the diameter cannot be expressed as a ratio of two integers (see Brezinski 1991, p. 84, and Ramasubramanian 2011). In 1656, Wallis claimed that π is neither a fraction nor a surd, and in 1685 he called for the invention of new numbers beyond rationals, surds, or roots of polynomial equations. As early as 1647, the Belgian mathematician Grégoire de Saint-Vincent had made a first attempt at *proving* that π is not rational, but his argument contained errors that were criticised e. g. by Huygens (see *infra* nº 5, note 9).
In 1719 Lagny, whose paper is mentioned by Goldbach in nº 8 below, conjectured that $\tan x$ is not rational for any nonzero rational number x; since $\tan(\pi/4) = 1$, this would imply the irrationality of π. Lambert proved Lagny's conjecture in 1761 (see his memoir printed in 1768), making substantial use of Euler's work on continued fractions.
In E. 275 Euler remarked that π belongs to "some higher kind of irrationality that requires taking infinitely many roots", probably referring to the representations of π which follow from Archimedes' construction of inscribing regular $3 \cdot 2^n$-gons: see, e. g., Viète's expression

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

or Euler's own approximation procedure in E. 74: both involve the extraction of infinitely many square roots.
Much later still, Euler proved that the numbers 1, $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$ (since an equation $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c$ with rational numbers a, b, c leads to the contradiction that $\sqrt{6}$ is rational), and then remarked: "However, it still seems to be most uncertain whether transcendental quantities such as those that involve the circumference of the circle or logarithms also cannot be compared with any quantities involving roots; at least nobody has yet shown that such a relation is impossible" ("Utrum autem quantitates transcendentes, veluti qui peripheriam circuli involvunt, sive logarithmi, etiam cum nullis quantitatibus radicalibus comparari queant, adhuc maxime incertum videtur, siquidem a nemine adhuc talis impossibilitas est ostensa": E. 591, § 10). He then went on to study the equation $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\pi = 0$ numerically.

[4] In Christian Wolff's widespread textbook *Elementa Matheseos universae* (1713), the final chapter of the first book *Elementa Arithmeticae* deals with logarithms, but only mentions those with base 10; and in the context of quadratures, it is only stated (*Elementa Analyseos*, § 106) that the total area contained between the hyperbola $xy = a^2$ and its asymptotes is infinite.

[5] This is not correct: cf. nº 3, note 10, and nº 4, note 2.

[6] In his letter to Daniel Bernoulli from November 28th, 1729 (*Correspondance*, t. II, p. 336), Goldbach mentioned that he was sending an enclosure with two theorems on series which, however, has apparently not been preserved. In his reply dated December 28th, Bernoulli remarked that he did not quite see the advantage in transforming integrals into infinite series that can rarely be summed in closed form; Goldbach consequently asked him to put off the presentation of his theorems in the Academy until he could send some more material for a paper (*ibid.*, p. 340, 344). No such publication seems, however, to have materialised.

[7] Goldbach probably learned of Fermat's conjecture from Wallis's *Commercium Epistolicum* (1658), where it appears on p. 186 (in a letter from Fermat to Kenelm Digby from June 1658), or from Wallis's *Opera*, vol. III (1699). In fact, a paper Goldbach published in 1724 deals with another conjecture Fermat had stated in the same letter: no triangular number except 1 is a fourth power. In his letter to Daniel Bernoulli dated September 13th, 1724 (*Correspondance*, t. II, p. 219), Goldbach mentions Ozanam's solution from 1680 of yet another Fermatian challenge; and in his subsequent letters, which have not all been preserved, he seems to have tried his skill at one more theorem on triangular numbers (*ibid.*, p. 237, 239, 261). Altogether, one can certainly say that Goldbach – although he had not read Fermat's *Varia Opera* (cf. n° 6, note 6) – was well aware of the many open conjectures and challenges Fermat had left behind.

Fermat first stated his belief that all numbers $F_n = 2^{2^n} + 1$ are prime in a letter to Frénicle written about August 1640 (Fermat, *Œuvres*, t. II, p. 205–206). In the mid-1650s, after he had discovered proofs of the theorems on two and four squares using descent, he occasionally stated that many of his remaining conjectures could also be proved with this method. In particular, the claim that the primality of all F_n can be proved by descent is found in a letter to Carcavi dated August 1659 (*ibid.*, p. 434). See also Dickson 1919, vol. 1, ch. XV.

Fermat knew that prime divisors p of F_n necessarily have the form $p = 2^{n+1}k + 1$, and there is no doubt that, armed with this knowledge, he could and should easily have found the divisor 641 of $F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$: thus it is surprising that he upheld the conjecture that all F_n are prime throughout his life.

His claim was finally disproved by Euler, who observed in E. 26 (presented to the Petersburg Academy in September 1732) that $641 \mid 2^{32} + 1$. Euler asserted he had just happened to notice this "while occupied with quite other matters"; however, it is more than probable that – as he later stated in E. 134 – his discovery was "immensely simplified" ("ingens compendium sum nactus") by his insight that he did not have to try any other divisors than those of the form $64n + 1$.

On the other hand, there is no doubt that it was the study of divisors of numbers $2^n \pm 1$ that led Euler to his rediscovery of "Fermat's Little Theorem" in 1732. He observed that primes $p = 2m + 1$ always divide $2^{2m} - 1$, that p divides $2^m + 1$ if $m \equiv 1$ or $2 \bmod 4$ (which is equivalent to $p \equiv \pm 3 \bmod 8$), and that p divides $2^m - 1$ if $m \equiv 0$ or $3 \bmod 4$ (i. e., if $p \equiv \pm 1 \bmod 8$). As stated in E. 26, he arrived at these observations by way of an elegant theorem whose demonstration he did not possess, but of whose truth he was quite certain ("Deduxi has observationes ex theoremate quodam non ineleganti, cuius quidem demonstrationem quoque non habeo, verum tamen de eius veritate sum certissimus"): $a^n - b^n$ is always divisible by $n+1$ if $n+1$ is a prime not dividing a or b. (Whether Euler was actually able to *deduce* his results from Fermat's Little Theorem must be doubted, since the proofs involve the second supplementary law of quadratic reciprocity, which was out of reach for Euler at this point.)

The same reasoning, applied to Fermat numbers, yields that primes $p \mid 2^{2^n} + 1$ have the form $p = 2^{n+1}k + 1$, which Euler proved in E. 134; using the second supplementary law, we get the stronger condition that k must be even. This shows that primes dividing $2^{32} + 1$ must have the form $128k + 1$; the two smallest primes of this form are $p = 257 = F_4$, which cannot divide any Fermat number F_n with $n > 4$ (as proved by Euler and Goldbach in n° 7 and 8), and $p = 641$, which turns out to be a divisor of F_5.

$3^{\rm d}$

Euler to Goldbach

Petersburg, January 6th (17th), 1730

To Mr. Goldbach, Jan. 6th, 1730.[1]

Sir,

in applying my method for finding intermediate terms of sequences by quadrature, which I recently wrote about, I do not perform this by means of the infinite series expressing those terms; for in my opinion it is very difficult to state for any given infinite series what quadrature it is associated with, even if I do not deny that in the case of the sequence $1+2+6+24+\ldots$, about which I wrote to you, Sir, I concluded at first from the series expressing the general term that the term of order $\frac{1}{2}$ depends on the quadrature of the circle. But then I considered by what other means, not involving a distinction of different series, I might arrive at the same result. So I hit upon a new and different manner of describing general terms of sequences. I now admit integral formulae in the general terms; whenever these can be integrated, they yield an algebraic term, and whenever they do not allow an integration, the terms cannot be determined algebraically, and simultaneously it is known on what quadrature they depend. I am using integral formulae in the following way: I take $\int p\,dx$ to be the general term of some series, which can be constructed from it. Here p indicates some function of x, of constant quantities, and moreover of the letter n which indicates the order of the term to be determined. Now if n is present in the exponents, it is evidently possible that sometimes $p\,dx$ can be integrated and sometimes not, depending on what number n denotes. Consequently some terms can be expressed algebraically, whereas others will depend on quadratures. In order to actually determine some particular term, I substitute in p the order of that term for n and then calculate the integral of $p\,dx$, adding such a constant that for $x = 0$ the sum vanishes. Then I substitute some constant quantity for x, so that the formula takes a definite value, and this indicates the required term. All this procedure will be understood more easily by an example. I claim that the series $\frac{2}{3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots$ has for its general term $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\,(1-x)^n\sqrt{x}$; for any term of the series can be calculated by integrating this formula and setting x equal to 1. Let, e.g., $n = 1$, in order to determine the first term; then

$$\tfrac{5}{2}\int dx\,(1-x)\sqrt{x} = \tfrac{5}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx - \tfrac{5}{2}\int x^{\frac{3}{2}}dx = \tfrac{5}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{2}};$$

setting $x = 1$, one finds the first term $\frac{2}{3}$. Let $n = 2$; the formula goes over into

$$\tfrac{7}{2}\int dx\,(1-x)^2\sqrt{x} = \tfrac{7}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx - 7\int x^{\frac{3}{2}}dx + \tfrac{7}{2}\int x^{\frac{5}{2}}dx = \tfrac{7}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}}.$$

Setting $x = 1$, the second term $\frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$ results. In a similar way, all those terms which have whole numbers for their indices are found to be the same as those comprised in the series itself; therefore one may legitimately call $\frac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$ the general term of the progression $\frac{2}{3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots$. This is all the more true since all intermediate terms, too, can be determined from it and constructed by the quadrature of curves; so at least a definite value for them is known. If one asks for the term of order $\frac{1}{2}$, setting $n=\frac{1}{2}$ one has $2\int dx\sqrt{x-x^2}$. This expresses the segment of a circle of diameter 1 which has its height equal to x; taking $x=1$, the segment becomes the entire circle, so the required term equals the area of the circle of diameter 1. I can indicate general terms of this kind for all series I have mentioned and for infinitely many similar ones. But in order for you to discern how far this method extends, I will add here some more general results. My foundation, as it were, was the sequence $1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+\ldots$, which has for its general term $\int dx\ (-\log x)^n$; indeed this integral, on setting $x=1$, yields the term of order n. Here $\log x$ denotes the hyperbolic logarithm of x. Before I show how this formula represents the sequence, I shall explain the distinction between hyperbolic and ordinary logarithms, which you profess not quite to understand. If one draws up a geometric sequence

$$A\colon\quad 1,\qquad a,\qquad a^2,\qquad a^3,\qquad a^4,\qquad a^5,\qquad \ldots$$

and below it an arithmetic one

$$B\colon\quad b,\quad b+c,\quad b+2c,\quad b+3c,\quad b+4c,\quad b+5c,\quad \ldots,$$

any term of sequence A – whether one of those written down or an interpolated one – will have a corresponding one in sequence B, and these are called their logarithms. Now, since infinitely many arithmetic sequences can be written below, it is obvious that there are infinitely many systems of logarithms. In the system of ordinary logarithms, for which one has tables computed by Briggs and by Vlacq,[2] for the geometric sequence A they set 1, 10, 100, 1000, …, and for the arithmetic one, B, they took 0, 1, 2, 3, …, so that the logarithm of 1 is 0, that of 10 is 1, and so on. One sees from this that, in order to establish some system of logarithms, the logarithms of two arbitrary numbers can be defined at will; from these the logarithms of all numbers are then determined. Now, in the system of hyperbolic logarithms, the logarithm of 1 is still taken to be 0, and for a number $1+dz$ which exceeds 1 by an infinitely small quantity the logarithm is taken to be dz itself. Stated another way: sequence A is taken to be

$$1,\quad 1+dz,\quad (1+dz)^2,\quad \ldots,$$

and sequence B is

$$0,\qquad dz,\qquad 2\,dz,\qquad 3\,dz,\quad \ldots.$$

The logarithms derived from this are those that are called hyperbolic, since they agree with those found by the quadrature of the hyperbola; they are also called Napierian, since Napier computed tables of this sort.[3] Now, what is stated in Analysis about the differentiation of logarithms and the integration of logarithmic differentials holds true only for hyperbolic logarithms; and for this reason, in the general term $\int dx\ (-\log x)^n$, log denotes the hyperbolic logarithm of x. In order to clarify in what manner this formula yields an arbitrary term, let $n = 3$; then

$$\int dx\ (-\log x)^n = -x\,(\log x)^3 + 3x\left(\log x^2\right) - 6x\,\log x + 6x;$$

setting $x = 1$, because of $\log 1 = 0$ all terms vanish except the last one, which yields 6, the third term of the series. Similarly all terms having integral indices are determined; but for those that have fractional numbers for their indices it seems less clear what their value is.

[1] The letter Euler eventually sent differs from this draft mainly by more detailed explanations for Goldbach's benefit. Moreover, he added a passage on a more general interpolation method (cf. nº 3, starting at note 8) and a sentence on Fermat numbers.
The editors have decided to reproduce the draft as a record of Euler's practice in writing letters; their notes on the mathematical content are attached to the version Euler dispatched to Moscow (*infra* nº 3).

[2] Cf. nº 3, note 6.

[3] This reference to Napier was omitted from the letter Euler eventually sent to Goldbach. In his *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio* (1614), Napier had actually neither defined nor calculated what is today known as natural, hyperbolic or Neperian logarithms; his table, based entirely on the classical, geometrical theory of proportions, lists (in modern terms) values of the function $10^7(\log 10^7 - \log x)$. A table listing some values of $10^6 \log n$ as an aid in calculations with Napier's logarithms appeared in an appendix (probably contributed by William Oughtred) to the second edition of Wright's translation in 1618.

3
Euler to Goldbach
Petersburg, January 8th (19th), 1730

Sir,

in applying my method for finding intermediate terms of sequences by quadrature, which I recently wrote about,[1] I do not perform this by means of the infinite series expressing those terms; for in my opinion it is very difficult to state for any given infinite series what quadrature it is associated with, even if I do not deny that in the case of the sequence $1 + 2 + 6 + 24 + \ldots$, about which I wrote to you, Sir, I concluded at first from the series expressing the general term that the term of order $\frac{1}{2}$ depends on the quadrature of the circle. But then, since I had no confidence that I should be able to deal with other sequences in the same way, I considered by what other means, not involving a distinction of different series, I might arrive at the same result. So I hit upon a new and different manner of describing general terms of sequences, which consists in admitting integral formulae in the general terms. I thought of this by considering the fact that infinite analysis often gives an easy access to results that cannot be accomplished by common algebra. This kind of general term takes the usual form whenever the integral formulae can be expressed algebraically, and in these cases all terms of the sequence – whether the indices be fractional or integer – are displayed algebraically. However, when those formulae do not admit an integration in general, not every term can be determined algebraically, but some of them will depend on the quadrature of curves that are known from the formulae. Thus, when I observed that in several series some intermediate terms depend on the quadrature of the circle, it was obvious that integral formulae necessarily had to figure in their general terms. I am using integral formulae of this kind in the following way: When I state the general term of some series to be $\int p\,dx$, it should be understood that the term for an arbitrary index n can be determined from this. Here p indicates a certain function composed from x and constant quantities, including the index n; I consider n to be constant, so that there is only one variable x present. Now $\int p\,dx$ gives the nth term in this way: either one actually integrates $\int p\,dx$, when this is possible, or one identifies it with the quadrature of some appropriate curve, adding a constant so that it vanishes for $x = 0$. Then, setting x equal to some constant quantity (in the following, I always take $x = 1$), one will have a certain function of constant quantities and of the index n that by itself will be the nth term.[2] Now it is possible, in particular if n is present in the exponents, that when certain numbers are substituted for n, the formula can be integrated, whereas for other values this is impossible. Thus it happens that some terms can be expressed algebraically or by numbers, whereas others depend on quadratures. Thus I found the general term of the sequence $\frac{2}{3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots$ to be[3] $\frac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$; in order to clarify how this applies, let $n = 2$; we will have

$$\tfrac{7}{2}\int dx\ (1-x)^2\sqrt{x} = \tfrac{7}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{7}{2}};$$

taking $x = 1$, the term $\frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$ results. Here the same general term provides all intermediate terms: for $n = \frac{1}{2}$, the required term will be $2\int dx\sqrt{x - x^2}$. But $2\int dx\sqrt{x - x^2}$ expresses the segment having its arrow[4] equal to x, in a circle of radius $\frac{1}{2}$ or diameter 1; taking $x = 1$, the term of order $\frac{1}{2}$ equals the area of the circle of diameter 1. Other intermediate terms are determined similarly. I can indicate general terms of this kind for all series I have mentioned and for infinitely many similar ones. But in order for you, Sir, to discern how far this method extends, I will add here some more general results. My foundation, as it were, was the sequence $1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + \ldots$, whose general term I found to be[5] $\int dx\ (-\log x)^n$, where $\log x$ denotes the hyperbolic logarithm of x. By integrating and taking $x = 1$, we get the term whose index is $\frac{1}{2}$. But before I show how this formula represents the sequence, I will explain the distinction between hyperbolic and ordinary logarithms, which you profess not quite to understand. Let us draw up a geometric sequence

$$A\colon\quad 1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad a^4,\quad a^5\quad \text{etc.}$$

and below it another, arithmetic one,

$$B\colon \quad b, \quad b+c, \quad b+2c, \quad b+3c, \quad b+4c, \quad b+5c \quad \text{etc.}$$

then any term of sequence A – be it one of those written down or an interpolated one – will have a corresponding one in sequence B. These terms of sequence B are called the logarithms of the corresponding terms in sequence A. Now, since innumerable arithmetic sequences can be written below, it is obvious that there are innumerable systems of logarithms. In the ordinary system, for which one has tables computed by Briggs and by Vlacq,[6] for the geometric sequence A they took 1, 10, 100, 1000, …, and for the arithmetic one 0, 1, 2, 3, 4, …, so that the logarithm of 1 is 0, that of 10 is 1, and so on. One sees by this that, in order to establish some system of logarithms, the logarithms of two arbitrary numbers can be defined at will; from these the logarithms of all numbers are then determined. Now, in the system of hyperbolic logarithms, the logarithm of 1 is still taken to be 0, and for a number exceeding 1 by an infinitely small quantity, as $1+dz$, one takes the logarithm to be dz itself. Stated another way: sequence A is 1, $1+dz$, $(1+dz)^2$, $(1+dz)^3$, …, and sequence B comprising the logarithms is 0, dz, $2\,dz$, $3\,dz$, …. The logarithms derived from this definition are those that are called hyperbolic, since they agree with those found by the quadrature of the hyperbola.[7] In this system, the logarithm of 2 is 0.693 147 180 559 945, and the logarithm of 10 is 2.302 585 092 994 045, as I myself found by a calculation repeated several times. However, if one happens to require hyperbolic logarithms, one does not need to have a table of them at hand, but can use Vlacq's logarithms, multiplying the single values by 2.302 585 …. Now, whenever logarithms are mentioned in the infinitesimal calculus, hyperbolic logarithms are implied; and therefore, in the general term $\int dx\ (-\log x)^n$, log denotes a hyperbolic logarithm. In order to clarify how this formula expresses an arbitrary term, let $n=3$; one gets

$$\int dx\ (-\log x)^3 = -\ x\,(\log x)^3 + 3x\,(\log x)^2 - 6x\log x + 6x,$$

no additive constant being needed. Taking $x=1$, the term for $n=3$ is seen to equal 6; for all terms containing $\log x$ vanish, $\log 1$ being 0. Similarly all terms with integral numbers are determined. But the value of those whose indices are fractional numbers is more difficult to establish;[8] for this leads to the quadrature of transcendental curves. The term of order $\frac{1}{2}$, for example, has to be determined by the quadrature of a curve for which one has $y^2+\log x=0$, whereas formerly I had thought it depends on the quadrature of the circle. However, I have yet another method to reduce these same terms to the quadrature of algebraic curves, which is contained in the following theorem: the term whose index is $p:q$ equals[9]

$$\sqrt[q]{\begin{aligned}&1\cdot 2\cdot 3\ \cdots\ p\left[\left(\tfrac{2p}{q}+1\right)\left(\tfrac{3p}{q}+1\right)\left(\tfrac{4p}{q}+1\right)\cdots\left(\tfrac{qp}{q}+1\right)\right]\cdot\\ &\cdot\left[\left(\textstyle\int dx\ (x-x^2)^{\frac{p}{q}}\right)\left(\textstyle\int dx\ (x^2-x^3)^{\frac{p}{q}}\right)\cdots\left(\textstyle\int dx\ (x^{q-1}-x^q)^{\frac{p}{q}}\right)\right]\end{aligned}},$$

an expression which is equivalent to $\int dx\ (-\log x)^{\frac{p}{q}}$. Let, e. g., $p = 1$ and $q = 2$, to calculate the term of order $\frac{1}{2}$; the general formula will then take the form

$$\sqrt[2]{1 \cdot 2 \int dx \sqrt{x - x^2}}\,.$$

On the other hand, it has already been shown that $2 \int dx \sqrt{x - x^2}$ gives the area of a circle of diameter 1; therefore, in the series $1+1\cdot 2+1\cdot 2\cdot 3+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+\ldots$ the term of index $\frac{1}{2}$ equals the square root of the circle of diameter 1. Consequently, as $\int dx\ (-\log x)^n$ is the general term or n-th order term of this series, I have $\int dx\ (-\log x)^n = 1 \cdot 2 \cdot 3\ \cdots\ n$. This is of great importance in evaluating the general terms of many series, including the present example, and no less so is the following formula:

$$m \cdot \overline{m+1} \cdot \overline{m+2}\ \ \cdots\ \ \overline{m+n} = \frac{\int dx\ (-\log x)^{m+n}}{\int dx\ (-\log x)^{m-1}}.$$

The following theorem is even more general and has a vast range of applications:

$$(f+g)\,(f+2g)\,(f+3g)\ \cdots\ (f+ng) = \frac{g^{n+1} \int dx\ (-\log x)^n}{(f+(n+1)\ g) \int x^{\frac{f}{g}} dx\ (1-x)^n};$$

and there is another one easily deduced from it:

$$\frac{(f+g)\,(f+2g)\ \cdots\ (f+ng)}{(h+k)\,(h+2k)\ \cdots\ (h+nk)} = \frac{g^{n+1}\,(h+(n+1)\ k) \int x^{\frac{h}{k}} dx\ (1-x)^n}{k^{n+1}\,(f+(n+1)\ g) \int x^{\frac{f}{g}} dx\ (1-x)^n}.$$

On the basis of this theorem it is easy to find general terms for all series of this kind, viz., those whose terms are products of quantities in arithmetical progression. Take, for example, the series $\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10} + \ldots$, which I recently mentioned.[10] Its nth-order term is

$$\frac{n \cdot 2n \cdot 3n\ \cdots\ n^2}{(n+1)\,(2n+1)\,(3n+1)\ \cdots\ (n^2+1)}.$$

I compare this with

$$\frac{(f+g)\,(f+2g)\,(f+3g)\ \cdots\ (f+ng)}{(h+k)\,(h+2k)\,(h+3k)\ \cdots\ (h+nk)};$$

for this formula to transform into the first one, we must have $f = 0$, $g = n$, $h = 1$, and $k = n$. Substituting these values produces

$$\frac{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot\ \cdots\ n^2}{(n+1)\,(2n+1)\,(3n+1)\ \cdots\ (n^2+1)} = \frac{\left(1+n+n^2\right) \int x^{\frac{1}{n}} dx\ (1-x)^n}{(n^2+n) \int dx\ (1-x)^n};$$

so this is the general term of the proposed series. But $dx\,(1-x)^n$ is integrable, its integral being $C - \dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1}$. The constant C must equal $\dfrac{1}{n+1}$ in order for the sum to vanish for $x = 0$. Setting now $x = 1$, as I suggested before, one will have C or $\dfrac{1}{n+1}$; so $\left(n^2+n\right)\int dx\ (1-x)^n$ equals n, and therefore the general term of the proposed series has the form

$$\frac{1+n+n^2}{n}\int x^{\frac{1}{n}} dx\ (1-x)^n\,.$$

Let $n = 3$, in order to produce the third term $\frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10}$: one will have

$$\tfrac{13}{3}\textstyle\int x^{\frac{1}{3}} dx\ (1-x)^3 = \tfrac{13}{4}x^{\frac{4}{3}} - \tfrac{39}{7}x^{\frac{7}{3}} + \tfrac{39}{10}x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{13}{3}}\,;$$

for $x = 1$, this is $\frac{13}{4} - \frac{39}{7} + \frac{39}{10} - 1 = \frac{162}{280}$, equal to the third term. I now look for the term of order $\frac{1}{2}$; letting $n = \frac{1}{2}$, one will have

$$\tfrac{7}{2}\textstyle\int x^2\ dx\ (1-x)^{\frac{1}{2}} = C - \tfrac{7}{3}\,(1-x)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{14}{5}\,(1-x)^{\frac{5}{2}} - (1-x)^{\frac{7}{2}}\,;$$

so C equals $\frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1$. Setting $x = 1$, the only term that remains will be C or $\frac{7}{3} - \frac{14}{5} + 1 = \frac{8}{15}$. Consequently this term of order $\frac{1}{2}$ can be indicated algebraically. In the same way, all those whose indices are $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\ldots$ can be expressed by numbers, whereas I daresay their values could hardly be established by another method. Moreover, I observe that the term of order $\frac{1}{2}$ is equal to the term of order 2, and generally the term of order $\frac{1}{n}$ is equal to the term of order n. This is more or less the one type of progression which my method has led to; based on it, I have also discovered many things about the summation of series, and particularly about calculating summing terms for all those sequences in which the exponent or index is present in the denominator of the general term, as in the harmonic progression. But about these things I shall write another time, if you are willing.

With regard to Fermat's remark[11] I have been not able to find out anything at all; moreover, I am not yet quite convinced he could legitimately infer it by induction, as, in substituting for x in the formula 2^{2^x}, he certainly did not even reach the number 6.

I eagerly ask you to accept this with benevolence and stay well-disposed, Sir, towards your most obliged

Euler.

Petersburg, Jan. 8th, 1730.

[1] Cf. nº 1, note 12.

[2] Euler's statement is complicated by the fact that he has no consistent standard notation for what, in modern terms, is simply the definite integral $\int_0^1 f(x)\,dx$.

[3] These integrals are special cases of what later became known as the Beta function: cf. *infra* note 9.

[4] I. e., the height of a circle segment perpendicular to the chord.

[5] By $\int dx\ (-\log x)^n$, Euler denotes the function $\int_0^x (-\log t)^n\ dt$. To specify the bounds for definite integrals, Euler used paraphrases such as "$\int f(x)\,dx$ integrated from $x = a$ to $x = b$";

later he occasionally used $\int P\,dx\,\left[\begin{smallmatrix}\text{ab} & x=a\\ \text{ad} & x=b\end{smallmatrix}\right]$. The symbol $\int_a^b f(x)\,dx$ for definite integrals was introduced by Fourier around 1819 and used in his *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Euler found $\int_0^1 (-\log t)^n\ dt = n!$ for natural numbers n, and this allowed him to apply this integral expression for interpolating the factorial function; he published these results in E. 19. The substitution $t = \mathrm{e}^s$ transforms this integral into the more familiar form $\int_0^\infty s^n \mathrm{e}^{-s} ds$, which Euler used in E. 368.

[6] Henry Briggs had edited an extended version of Napier's original work on logarithms (cf. n° 3$^{\mathrm{d}}$, note 3) under the title *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* at Lyon in 1620; an extended version of his *Arithmetica Logarithmica* (1624) was published by the Dutchman Adriaen Vlacq in 1628. Copies of both works are listed, along with several later logarithmic tables, in the catalog of Euler's private library (*CLLE*, n° 28; n° 10).

[7] "Quadrature of the [equilateral] hyperbola" means, in modern terms, integration of the function $1/x$.

[8] Here the text of Euler's draft (n° 3$^{\mathrm{d}}$) ends.

[9] The integrals occurring in this expression are what is today called Beta functions (the name was introduced by Binet in 1839):

$$B(r+1, s+1) = \int_0^1 x^r (1-x)^s dx = \frac{s!}{(r+1)(r+2)\cdots(r+s+1)} = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}.$$

Euler's expression for $\Gamma(\frac{p}{q})$ shows that, for natural numbers p, q, the values $\Gamma(\frac{p}{q})^q$ are periods (cf. n° 1, note 9). Whether the values $\Gamma(\frac{p}{q})$ are themselves periods is not known; in any case they are elements of a larger set called exponential periods, which also contains $\sqrt{\pi}$ as well as all algebraic powers of e.

[10] Euler tacitly corrects Goldbach's flawed calculation: cf. n° 2, note 5, and n° 4, note 2.

[11] Cf. n° 2, note 7.

4
Goldbach to Euler
Moscow, May (11th) 22nd, 1730

To Euler in Petersburg. Moscow, May 22nd, 1730.

In my opinion the results about the general terms of series that you communicated to me in your second letter[1] are outstanding and worthy of their author; the only issue that seems to need some caution is whether the supposed integral $\int P\,dx$ might not take the value zero in both cases, i. e., for $x = 0$ as well as $x = 1$. Secondly, I note for my part that the general term for the series $\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} + \frac{3\cdot 6\cdot 9}{4\cdot 7\cdot 10} + \dots$ which I had given for non-integer exponents, is not appropriate;[2] but it has to be admitted that the general term of type $\dfrac{2n+3}{2}\int dx\ (1-x)^n\sqrt{x}$, in order to become understandable, has to be resolved in the usual way into an infinite series and that the single terms of this series, when integrated, will finally represent an indefinite general term that could evidently also have been produced in innumerable ways without using differential calculations.

Regarding Fermat's observation[3] I agree with you it does not seem credible that he got as far as expressing six terms in that series of his; but that much work is not necessary either for the likelihood of his observation, for it is easy to notice that the remainders of the terms in their natural order, with regard to any fixed divisor, repeat in a cycle. Take, e. g., the term $2^{2^x}+1$, where $x=2$, and divide by 7, then the remainder is 3; therefore the next term leaves the same remainder that is left when the number $(3-1)^2+1$ is divided by 7, viz., 5; the term following this will give the same remainder as $(5-1)^2+1$ divided by 7, viz., 3; therefore[4] all possible remainders of all the terms of the series upon division by 7 (where, of course, the quotient is to be positive) are either 3 or 5. By a similar argument it follows easily that no term of Fermat's series can be divided by any number less than 100. But whatever is the case with Fermat's observation, it is certainly true that any number 2^p+1 where p does *not* equal some number 2^n (n being a positive integer) is non-prime, as its divisors can be very easily determined. Thus the number $2^{84}+1$ has the divisor 17, the number $2^{1736}+1$ the divisor 257, and so on. Farewell.

[1] Cf. n° 3.
[2] Cf. n° 3, note 10.
[3] Cf. n° 2, note 7, and n° 3, note 11.
[4] Goldbach here explains how to compute with remainders: these may actually be the first traces of a calculus of congruences, as later developed in detail in Gauss's *Disquisitiones*. In modern terms, Goldbach shows that $2^4+1\equiv 3 \bmod 7$ implies $2^8+1=(2^4)^2+1\equiv (3-1)^2+1\equiv 5 \bmod 7$. Goldbach also observes that the sequence of remainders is periodic: setting $F_n=2^{2^n}+1$, we have $F_{2n}\equiv 3 \bmod 7$ and $F_{2n+1}\equiv 5 \bmod 7$. In particular, no Fermat number is divisible by 7.
Using this technique Goldbach was able to show that no Fermat number is divisible properly by any prime < 100. The same technique, plus the obvious identity $F_{n+1}-1=(F_n-1)^2$, would have given the proof that all Fermat numbers are coprime, a result which Euler and Goldbach mention in n° 7 and 8.

5
Euler to Goldbach
Petersburg, June 4th (15th), 1730

Sir,

after I had sent my last letter to you, I started to ponder Fermat's theorem[1] more carefully, and saw that it does not rest on as slight a foundation as I had thought at first. For whenever n is a number not in the geometric progression 1, 2, 4, 8, ..., the divisors of 2^n+1 can be indicated, as you, Sir, noted in your last letter.[2] For if n is an odd number, the binomial 2^n+1 or even the more general one a^n+b^n will be divisible by $a+b$. Moreover, if n is an arbitrary multiple of some odd number, as $n=ki$, where i denotes an odd number, a^k+b^k will be a divisor. Consequently, since only the powers of 2 have the property not to be divisible by any odd number except 1, it follows that only in that case where n is some power of 2 no divisor of the binomial $a^n + b^n$ can be indicated by this rule. Now this goes a long way towards establishing the truth of the theorem, but all the same it is not quite sufficient: for one may not conclude from this that $a^n + b^n$ does not have any divisors when n is taken to be some power of 2: let, e. g., $a = 4$ and $b = 3$; then, for $n = 2$, $16 + 9$ can be divided by 5. Consequently it will be profitable to study those cases where divisors occur all the same. Now firstly it is evident that, whenever a and b are numbers with a common factor, viz., cf and df, the binomial $c^n f^n + d^n f^n$ has the divisor f^n. Then, if both a and b are odd numbers, it will always be divisible by 2. Finally, in order to develop those cases more generally, let $a = mc + \alpha$ and $b = mc + \beta$; then

$$\begin{aligned} a^n &= \alpha^n + n\alpha^{n-1}mc + \frac{n \cdot n-1}{2}\alpha^{n-2}m^2c^2 + \dots, \\ b^n &= \beta^n + n\beta^{n-1}mc + \frac{n \cdot n-1}{2}\beta^{n-2}m^2c^2 + \dots, \end{aligned}$$

and consequently

$$a^n + b^n = (\alpha^n + \beta^n) + nmc\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) + \frac{n \cdot n-1}{2}m^2c^2\left(\alpha^{n-2} + \beta^{n-2}\right) + \dots$$

From this it is obvious that every term of the series except the first one can be divided by mc. So whenever $\alpha^n + \beta^n$ and mc have a common divisor, $a^n + b^n$ will also be divisible by the same. Therefore, if this case and the similar cases possibly not comprised here do not include Fermat's case, where $a = 2$ and $b = 1$, it can be safely concluded that $2^n + 1$ is always a prime number. But perhaps some more theorems of the same kind can be found: thus $3^n + 2^n$ seems always to yield prime numbers[3] when n is a power of 2. By the way the present theorem, even if it should fail in some cases, apparently does not fail as often as those stated by some on the differences of powers, such as this one: $2^n - 1$ gives a prime number whenever n is prime.[4] Actually, taking $n = 11$, $2^{11} - 1$, or 2047, has the divisor 23; similarly, 47 divides $2^{23} - 1$ and 223 divides $2^{37} - 1$. This makes me think of a general term or a certain function of x that I once found, which has the property that whenever some number is substituted for x, it yields the number of that number's divisors; here I also allow 1 and the number itself among the divisors,[5] so that prime numbers have two divisors only. Thus, this formula of mine is the general term of the following series:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1, & 2, & 2, & 3, & 2, & 4, & 2, & 4, & 3, & 4, & 2, & 6 \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, \end{array}$$

here any term indicates how many divisors the index written below it has: 6, e. g., has the four divisors 1, 2, 3, 6. Let now x denote an arbitrary number: then the number of the divisors of x will be

$$\frac{3 + (-1)^x + 1 + (-1)^A + 1 + (-1)^B + 1 + (-1)^C + 1 + (-1)^D + \dots}{2}.$$

Here A denotes the general term of the series 1, 1, 4, 7, 13, 22, ..., in which each term is the sum of the two preceding terms $+\,2$, B is the general term of the series 1, 1, 1, 6, 11, 21, 41, ..., in which each term is the sum of the three preceding terms $+\,3$, C the general term of the series 1, 1, 1, 1, 8, 15, 29, 57, ..., in which each term is the sum of the four preceding terms $+\,4$, and the further letters D, E, ... are defined in a similar manner.[6] Calculating the number of the divisors of 6 in this way, one has $x = 6$, $A = 22$, $B = 21$, $C = 15$, $D = 10$, $E = 1$, $F = 1$, and all the further letters will be 1. Substituting this, the number of the divisors of 6 will be

$$\frac{3+(-1)^6+1+(-1)^{22}+1+(-1)^{21}+1+(-1)^{15}+1+(-1)^{10}+1+(-1)^1+1+(-1)^1+\,\ldots}{2};$$

and since -1 taken to an even power yields $+1$ and to an odd power, -1, the number of divisors equals

$$\frac{3+1+1+1+1-1+1-1+1+1+1-1+1-1+1-1}{2} = 4,$$

the divisors being 1, 2, 3, and 6. Consequently, if anybody could equate this formula to 2 and solve for x, one should have a general term for the series of the prime numbers; but I do not have any hope of arriving at that goal. Lately, reading Fermat's works, I came upon another rather elegant theorem stating that "any number is the sum of four squares", or that for any number four square numbers can be found whose sum is equal to the given number.[7] Thus $7 = 1 + 1 + 1 + 4$, but no three squares can be found whose sum equals 7. To prove this theorem it is required to find, in general, four squares z^2, y^2, x^2, v^2 whose sum equals the sum of five given squares[8] $1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. There are other theorems in this book about the resolution of an arbitrary number into triangular and pentagonal numbers, into cubes, and so on; their demonstrations would indeed bring about a great progress in analysis. To fill this page, I will note down a quadrature of the circle which I have deduced from a theorem of Grégoire de Saint-Vincent's and which nobody has yet shown to be faulty. It goes as follows: Denoting the circumference by p and the diameter by d, one will have $\dfrac{p}{d} = \dfrac{3\,(1+A)\sqrt{3}}{2\,(2A-1)}$ where A equals $\left(\frac{11}{5}\right)^{\frac{\log 11\,:\,5}{\log 203\,:\,53}}$, $\log 11 : 5$ denoting the logarithm of the fraction $\frac{11}{5}$ and $\log 203 : 53$ the log. of $\frac{203}{53}$. This expression comes close to $\frac{22}{7}$, and if it were correct, this should indeed be a great invention.[9]

Farewell and stay well-disposed, Sir, towards your most respectful Euler

Petersburg, June 4th, 1730.

[1] Cf. n° 3, note 11.
[2] Cf. n° 4, note 3.
[3] Euler did not take long to find a counterexample: cf. n° 7, note 7.

[4] Dickson 1919, vol. 1, p. 7–11, mentions several mathematicians who believed that $2^n - 1$ is prime (and consequently $2^{n-1}(2^n - 1)$ is perfect) whenever n is odd: Charles de Bouvelles, Michael Stifel, Robert Recorde, and others. Many more subscribed to the view that this is the case if n is prime: even Leibniz repeated this erroneous assertion (cf. Mahnke 1912, p. 53–54). Christian Wolff uncritically adopted it in his widely diffused textbook *Elementa Matheseos universae* (1713) and clung to it through many subsequent editions.
On the other hand, Regiomontanus had assembled in the 1450s a list of perfect numbers in which he correctly determined the primality of numbers $2^p - 1$ for all $p \leq 16$ (Curtze 1899, p. 288–289; see also Picutti 1989). In 1588, Pietro Antonio Cataldi again showed that, whereas $2^p - 1$ is prime for $p = 13$, 17 and 19, $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ is not and thus $p = 11$ does not yield a perfect number (see Cataldi 1603).
In 1752 Goldbach and Euler returned to the topic of perfect numbers and the developments that had occurred in the meantime: see n° 162, note 5, n° 163, notes 13–15, and n° 165, notes 8 and 9.

[5] Euler explicitly mentions that the number itself is counted among its divisors since he deviates from Euclid's terminology in this respect: in the *Elements*, a number b is called a multiple of a if $b = ac$ for some *number* c. Since the unit 1 was not regarded as a number by the ancients, numbers were not multiples of themselves, and the divisors of, say, 6 were 1, 2 and 3.

[6] Euler considers sequences a_m $(m \geq 1)$ defined recursively by $a_1 = \ldots = a_{m-1} = 1$ and $a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + \ldots + a_{k-m+1} + m - 1$ for $k \geq m$. It is easily seen that a_k is even if and only if $m \mid k$, and this observation implies Euler's claim. Apparently this approach did not lead anywhere, and Euler never published it. Euler returned to the subject and, in particular, to sums of divisors in n° 113.

[7] Diophantus already knew how to write squares of rational numbers as sums of four rational squares; in Problem VII.17 he showed how to find the identity

$$\left(\frac{13}{3}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{24}{10}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{32}{10}\right)^2.$$

In his 1621 edition of Diophantus' works, Bachet conjectured that any positive integer is the sum of four integral squares. Fermat made the same statement in a 1636 letter to Mersenne; in the late 1650s he seems to have finally found a proof of the "Four Squares Theorem" using his method of descent, but this was never published and its details are not known.
Euler established his proof of the *rational* Four Squares Theorem (every positive integer – and in fact every positive rational number – is the sum of four rational squares) in 1751, and published it in E. 242. His main ingredients were the following:

– The fundamental identity

$$\begin{aligned}(p^2+q^2+r^2+s^2)(x^2+y^2+z^2+v^2) = \quad & (px+qy+rz+sv)^2 + (py-qx-rv+sz)^2 \\ & + (pz+qv-rx-sy)^2 + (pv-qz+ry-sx)^2,\end{aligned}$$

which he discovered between 1736 and 1740, as his notebooks show. This identity is mentioned in Euler's letter n° 138 to Goldbach.

– For every prime p there exist integers u, v such that p divides $1 + u^2 + v^2$. Euler refers to this result only implicitly in n° 138.

Euler also identified the "missing link": if he could prove that a is a sum of four squares if ab and b are, then the *integer* Four Squares Theorem of Bachet and Fermat would follow.
The first complete proof of the theorem was given by Lagrange (1772); immediately afterwards, Euler simplified Lagrange's proof in E. 445.
See also *infra* n° 141, note 5, Pieper 1993 and Lemmermeyer 2010.

[8] Euler's first idea of attacking the Four Squares Theorem was using induction: if n is a sum of four squares, then so is $n + 1$. Later, Euler and Goldbach extensively discussed the problem of writing $n + 8$ as a sum of four squares: see *infra* n° 151–156.

[9] In Grégoire de Saint-Vincent's *Opus Geometricum Quadraturae Circuli* (1647), Book X is devoted to several attempts at squaring the circle (the voluminous and difficult work has been studied in Hofmann 1942; see also Baron 1969, p. 135–147). Nothing like the formula for π that Euler indicates here – and indeed no numerical calculations at all – can be found in the book, which presents its integration techniques in extremely convoluted, exclusively geometrical terms.
Euler must have tried to make sense of Grégoire's "Quadratura Prima", which culminates in Theorem LII, on his own terms, translating Grégoire's argument into the notation of integral calculus. However, as Hofmann (*op. cit.*, p. 69–72) shows, a fundamental flaw invalidates Grégoire's Theorem XL and all his subsequent results; in addition (cf. *ibid.*, p. 72, note 158), Euler's calculation is applied to a situation where the required conditions are not met. Thus the formula at which Euler arrives here in trying to interpret Grégoire's quadrature is incorrect (as it has to be). Moreover, somewhat surprisingly, it does not even give a good numerical approximation: the expression indicated by Euler yields 3.0976 . . ., which is off by 1.4%.
Apparently Euler and Goldbach were not aware that Christiaan Huygens had made a thorough and very critical study of Grégoire's quadratures (see his *Œuvres*, t. XI).
The debate about expressions and approximations for π will go on for a while: cf. n° 6, notes 8–9, and n° 7, note 11.

6
Goldbach to Euler
Moscow, June 15th / 26th, 1730

Sir,

even if Fermat's proposition may not be true, it appears commendable to me all the same, since in the search for its proof we come upon other theorems whose truth can be established by sound arguments; among these there is, for example, the one you noted about the divisibility of the number $a^n + b^n$ by $a + b$ whenever n is an odd number.

Furthermore (1.) if a, b and n are integers, and the sign $\neq$ expresses the fact that some equation is impossible, from[1] $\dfrac{a \pm n}{n^2+1} \neq b$ it follows that a^2+1 is a prime number, and this can be proved. Indeed it suffices to choose for n those numbers that make n^2+1 a prime, i. e., 2, 4, 6, 10, 14, . . . (2^2+1, 4^2+1, 6^2+1, . . . being prime numbers): thus, e. g., from the obvious fact that the numbers $\dfrac{20 \pm 2}{5}$ and $\dfrac{20 \pm 4}{17}$ are not integers, it follows that $20^2 + 1 = 401$ is a prime.

(2.) It is likely that the smallest divisor (here I exclude 1 and the number itself from the divisors) of any number of the form $a^{2^x} + 1$ has the form $n^{2^x} + 1$; but as I have not yet examined this sufficiently, I cannot state it with any certainty except for the case where $x = 1$, which can be easily proved.[2] By the way, if the statement that I said to be likely were indeed true, a demonstration of Fermat's theorem should follow; for, taking $a = 2$ as an example, n could not be taken to equal 1 (since then $n^{2^x}+1$ should be an even number and so could not divide an odd number), and neither could n equal 2 (as then the divisor $n^{2^x}+1$ should equal the dividend itself): consequently $2^{2^x}+1$ could not have any divisor.

I could not say whether the numbers 3^n+2^n (where n denotes some power of 2) are prime;[3] if one fancies conjectures, $(2\cdot 3)^{2^n}+1$ may possibly represent prime numbers, too, and so may $(2p)^{2^x}+1$ whenever p is prime[4] but who has ever asserted that the numbers 2^n-1 are prime when n is prime?[5]

Your explanation about how a general term for prime numbers might be found from the formula that expresses the number of the divisors of any number, is admittedly an ingenious train of thought, even if – as you note yourself – it can hardly be applied.

I am sorry to say that I have read neither Fermat's nor Grégoire de Saint-Vincent's works. I should like to see a proof of that theorem of Fermat's that you quoted: "Any number is the sum of four squares"; from this it is easy to infer that "any number is the sum of $3n+1$ squares, where the number n is arbitrarily chosen".[6] I have several theorems of this kind at hand, but even if they are very easy to come by, not even the most experienced mathematician will find their proofs except by pure chance. Thus, for example, no triangular number increased by 4 has a rational eighth or tenth root,[7] or – which amounts to the same – for integer a and n the term $\dfrac{n^2+n+8}{2}$ never equals $a^{9\pm1}$.The quadrature of the circle by logarithms of numbers that you mention in your letter appears very dubious to me, even if it comes close to the true value.[8] There are simple algebraic numbers as well that differ little from the truth, as if we should state the circumference for diameter 1 to be $3+\dfrac{\sqrt{2}}{10}$: this number differs from the true one by less than[9] $\dfrac{2}{100\,000}$, and I suppose no method has ever been invented that determines the ratio of diameter and circumference in a geometrical way as closely as this one; for what is easier than to divide the diagonal of the circumscribed square into ten parts and add one tenth to the triple of the diameter? Fare well and stay well-disposed towards

your

Christian Goldbach.

Moscow, 15/26 June 1730.

[1] As Euler's proof in his reply shows (see nº 7, note 2), the fraction in the formula that follows ought to be the inverse: $\dfrac{n^2+1}{a\pm n}\neq b$ (i. e., $\notin\mathbb{Z}$).

[2] As Euler shows in his reply (see nº 7, note 4), Goldbach's assertion is not true even for $x=1$: for $a=34$, $a^2+1=1157=13\cdot 89$, and none of the divisors is of the form n^2+1.

[3] In his reply (see nº 7, note 7), Euler indicates the counterexample $3^8+2^8=6817=17\cdot 401$.

[4] For the general case, Euler again gives a counterexample (see n° 7, note 6); he does not decide the special case $p = 3$, but in fact, $6^{2^3} + 1 = 1\,679\,617 = 17 \cdot 98\,801$ is not prime either.

[5] Cf. n° 5, note 4.

[6] Cf. n° 5, note 7.
As to the "generalisation" of the Four Squares Theorem proposed here, Goldbach's thoughts probably were along the following lines: Write $a = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Applying the Four Squares Theorem to x_1^2, one has $x_1^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$, and substituting this into the expression for a, obviously a is also a sum of seven squares. Repeating this procedure gives representations of a as a sum of $3n + 1$ squares for any n, as claimed (at least if one counts 0^2 among the allowable squares – but then the statement is trivial anyway).
A few months later Goldbach saw (see n° 10, note 1) that the same reasoning, when applied to $a - 1$, allows one to state even more generally: "If it is true that every number can be split into four squares, any number can also be split into an arbitrary number, greater than 3, of squares".

[7] This claim of Goldbach's is nontrivial at least in the sense that the term $\frac{n^2+n}{2} + 4$ yields infinitely many *squares*.

In 1724, Goldbach had published without proof a list of similar statements – including the present one – at the end of a short paper in the *Acta Eruditorum* that mainly dealt with his proof of Fermat's assertion that no triangular number is a fourth power (cf. n° 7, note 13). He affirmed that for triangular numbers T

– $T + 2$ cannot be a square,
– $T + 3$ cannot be a 5th power,
– $T + 4$ cannot be a 8th or 10th power,
– $T + 5$ cannot be a square,

and alleged that many more such exclusion theorems could be proved.

All of these claims are correct and can be verified using congruences. With $T = \frac{n(n+1)}{2}$, the equation $T + a = x^m$ is equivalent, after multiplying through by 8 and completing the square, to $(2n+1)^2 + 8a - 1 = 8x^m$. The individual cases proposed by Goldbach can be resolved as follows:

– $a = 2$: Consider the equation $(2n+1)^2 + 15 = 8x^2$ modulo 5; since 8 is a nonsquare, we must have $5 \mid x$. But then $5 \mid (2n+1)$, and we get a contradiction mod 25.
– $a = 3$: Consider the equation $(2n+1)^2+23 = 8x^5$ modulo 11; then $y^2+1 \equiv 0$ or ± 8 mod 11 is easily seen not to have a solution.
– $a = 4$: This is the claim mentioned in the present letter. The first equation $(2n+1)^2+31 = 8x^8$ is unsolvable modulo 17, and the second equation $(2n+1)^2+31 = 8x^{10}$ can be shown to be nonsolvable by reducing it mod 11.
– $a = 5$: The equation $(2n+1)^2 + 39 = 8x^2$ can be shown to have no solutions mod 13.

Thus Goldbach's claims are elementary, but show that he is familiar with working with congruences, at least in the sense of checking all possible residue classes. His calculations may well have led him to observe congruences such as $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \bmod p$. All the same, it does not seem likely that he had general facts about squares or powers modulo primes at his disposal, much less that he had valid proofs for them. Otherwise it would be hard to explain the erroneous and easily disproved assertion made in his next letter that $n = 1$ is the only triangular number which is a square (see n° 8, note 7, and Euler's reply n° 9, note 5). Goldbach's claims are nontrivial since the equation $\frac{n^2+n+8}{2} = a^2$ has infinitely many solutions. In fact this equation can be written in the form $(2n+1)^2 - 8a^2 = -31$. The solutions (n_m, a_m) of this equation are obtained by multiplying the fundamental solutions

$1 \pm 4\sqrt{2}$ by powers of the unit $3+2\sqrt{2}$; there are two sequences of solutions (n_m, a_m) in natural numbers:

$$(1+4\sqrt{2}\,)(3+2\sqrt{2}\,)^m = (2n_m+1) + 2a_m\sqrt{2}$$

gives, for $m = 0, 1, 2, \ldots$, the solutions $(0,2)$, $(9,7)$, $(56,40)$, $(329,233)$, … (see Euler's reply nº 7, note 15), and

$$(-1+4\sqrt{2}\,)(3+2\sqrt{2}\,)^m = (2n_m+1) + 2a_m\sqrt{2}$$

produces, for $m = 1, 2, 3, \ldots$, the solutions $(6,5)$, $(39,28)$, $(230,163)$, ….
For showing that the equation $n^2+n+8 = 2a^4$ is impossible we have to prove that a_m cannot be a square. This can be done by showing that a_m is not a quadratic residue modulo appropriately chosen primes. In fact, the congruence $(3+2\sqrt{2}\,)^3 = 99+70\sqrt{2} \equiv -1 \bmod 5$ implies $a_m \equiv 0$ or $\pm 2 \bmod 5$ (congruences involving numbers of the form $a+b\sqrt{2}$ can all be replaced by congruences in the integers, with proofs by induction). Since ± 2 are quadratic nonresidues modulo 5, we see that a_m can only be a square if it is divisible by 5, which happens if and only if $m \equiv 2 \bmod 3$. From $(3+2\sqrt{2}\,)^3 \equiv 1 \bmod 7$ we find that $a_m \equiv 5 \bmod 7$ whenever $m \equiv 2 \bmod 3$. Since 5 is a quadratic nonresidue modulo 7 this implies that a_m is never a square.
For showing that $n^2+n+8 = 2a^{10}$ has no solution in integers, we use the fact that $(3+2\sqrt{2}\,)^3 \equiv 4\sqrt{2} \bmod 11$. Thus $(3+2\sqrt{2}\,)^6 \equiv -1 \bmod 11$, which implies, after a little calculation, that the a_m are not congruent to $\pm 1 \bmod 11$ (they are never divisible by 11 since 2 is a nonsquare modulo 11), hence cannot be fifth powers.

[8] Cf. nº 5, note 9.

[9] As Goldbach will indicate in his next letter (nº 8, note 2), the fraction that follows should be $\frac{2}{10\,000}$.

7
Euler to Goldbach
Petersburg, June 25th (July 6th), 1730

Sir,

the truth of Fermat's theorem[1] appears every day more evident to me, but still I have not achieved its proof. However, I now have found some of its properties that may possibly be useful in completing the proof. Take the series 3, 5, 17, 257, …, whose general term is $2^{2^{x-1}}+1$; according to Fermat, each of its terms is a prime number. I can prove at any rate that no term can be divided by any of those preceding it; and moreover if some term were to have a certain factor, then none of those following could be divided by the same, but the remainder would always be 2. So for this reason it is certain that all terms of the series are mutually prime, i. e., that no two of them can be found which have a common factor.

I can also prove that a^2+1 is prime whenever no number can be found that substituted for n in[2] $\dfrac{a \pm n}{n^2+1}$ makes the fraction into an integer, in the following way: I examine those cases in which a^2+b is a prime (taking $b < 2a+1$). This will be true if there are no divisors; but if there were divisors, they should be of the form $a+m$ and $a-n$; now, since $a^2+b=(a+m)\,(a-n)$, we should have[3]

$$n=\frac{ma-b}{a+m}=m-\frac{m^2-b}{a+m}=a-\frac{aa-b}{a+m}.$$

So whenever no number can be found which substituted for m makes either $\dfrac{ma-b}{a+m}$ or $\dfrac{m^2+b}{a+m}$ or $\dfrac{a^2+b}{a+m}$ an integer, a^2+b has no divisors and consequently is a prime number.

You state further, Sir, that the smallest divisor of a^2+1, if it has any divisors, is of the form n^2+1.[4] But then, I think, one should have to count 1 as the smallest divisor, for else the statement would not be true: If, e. g., $a=34$, one has $a^2+1=1157$, and this has its smallest divisor equal to 13. For $a=76$, $a^2+1=5777$, and the smallest divisor is 53. However, even when these smallest divisors do not exceed a square by 1, possibly all of them are sums of two squares.[5] Whether $6^{2^x}+1$ is a prime number I can neither assert nor deny; but with regard to the general formula $(2p)^{2^x}+1$ I deny it, even when p is prime.[6] For when $p=5$ and $x=2$, one gets 10001, and this is not prime but has the divisor 73. Moreover, it is not even true – as I suspected at first – that $3^{2^x}+2^{2^x}$ is a prime number, since, for $x=3$, 3^8+2^8 is divisible by 17.[7]

I have to admit I cannot name any book in which I have found it stated that 2^n-1 is a prime number whenever n is prime. However I clearly remember that this theorem is usually invoked in the search for perfect numbers, since for finding these it is required to have all cases where 2^n-1 is a prime number.[8]

I cannot prove the theorem that any number is the sum of four squares, and Fermat himself does not assert that he could. At least I have reduced the question to the case where x^2+7 has to be resolved into four squares.[9]

I have examined the quadrature of the circle indicated by Grégoire de Saint-Vincent and have ascertained that it rests on an incorrect lemma. And if it is not true, it must be held to be of no worth at all, even if it came a hundred times closer to the true value. On the other hand, if it were actually true, it would no doubt be a outstanding discovery. As regards your approximation for the ratio of the circumference to the diameter, Sir, I take this to be very useful in practice.[10]

With regard to your theorem that no triangular number increased by 4 has a rational eighth or tenth root, I have examined the series of those triangular numbers which, increased by 4, give a square.[11] I found the roots of these triangular numbers to make up the following sequence: -7, 0, 9, 56, 329, ...; this has the property that any term, say the nth one, is equal to 6 times the $(n-1)$th term diminished by the $(n-2)$th term and increased by 2. There is a similar law in the sequence of those numbers whose squares are triangular numbers,[12] which is 0, 1, 6, 35, 204, ...; here any term is 7 times the preceding term minus the sum of the two preceding terms. Following these clues I can generally indicate the series of those whole numbers that substituted for x make $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ a square, although one case where that expression gives a square has to be known.

When I recently came upon another theorem of Fermat's, viz., that no triangular number except 1 is a fourth power,[13] I began to investigate whether perhaps $\dfrac{x^2+x}{2}$ cannot be a fourth power at all[14] except for $x = 1$ or $x = 0$. First I made $\dfrac{x^2+x}{2} = p^2x^2$; then $x = \dfrac{1}{2p^2-1}$ and $\sqrt{\dfrac{x^2+x}{2}} = \dfrac{p}{2p^2-1}$. Now in order to make a fourth power, $\sqrt{\dfrac{x^2+x}{2}}$ will have to be a square again; consequently, $2p^3 - p$ has to be a square. Letting $p = q + 1$, one has $2q^3 + 6q^2 + 5q + 1$. Take the root of this to be $1 + \frac{5}{2}q$, then $2q^3 + 6q^2 = \frac{25}{4}q^2$. Thus $q = \frac{1}{8}$, $p = \frac{9}{8}$ and $x = \frac{32}{49}$. Therefore the triangular number whose root is $\frac{32}{49}$ will be the fourth power of the root $\frac{6}{7}$. Once this case is known, infinitely many others can be calculated from it.[15] However, this does not invalidate the truth of the theorem, as Fermat wanted it to be understood only of whole numbers. I have been asked to send you Mr. Bernoulli's regards.[16]

Farewell and be well-disposed, Sir, towards your most respectful

Leonhard Euler

Petersburg, June 25th, 1730.

[1] Cf. n° 2, note 7.

[2] Cf. n° 6, note 1. Here again the fraction that follows, copied from Goldbach's letter, ought to be the inverse one, $\dfrac{n^2+1}{a \pm n}$; the fractions Euler writes subsequently in the course of his proof are correct.

[3] The formula in Euler's original letter uses an older notational convention for sums in the numerators of fractions, where the minus sign in front of the fraction only affects the first term; in today's notation, the formula should be understood as

$$n = \ldots = m - \frac{m^2+b}{a+m} = a - \frac{a^2+b}{a+m}.$$

[4] Cf. n° 6, note 2.

[5] Euler's construction of counterexamples to Goldbach's claim is related to his solution of the congruence $x^2 \equiv -1 \bmod p$ (cf. *infra* n° 70, note 11, and E. 283).
The remark following it shows that, at that time, Euler had not yet discovered Fermat's statement of the "Two Squares Theorem", the characterisation of those integer or rational numbers that can be written as sums of two (integer or rational) squares. Indeed Euler's observation would immediately follow from the fact that no prime $4n-1$ can divide a number a^2+1, which is something he first proved in 1742 (see n° 47, note 2).
Diophantus (Problem III.19) had observed that 65 can be written as the sum of two integral squares in two distinct ways because its prime factors 5 and 13 are sums of two squares; this indicates that he was familiar with the content of the identity $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad-bc)^2$. He also remarked (Problem VI.14) that 15 is not the sum of two (rational) squares, which is already nontrivial, and that consequently $15x^2 - 36 = y^2$ does not have solutions, which is quite remarkable (see Weil 1984, p. 30).
In his annotations to Simon Stevin's *Arithmetique* (1625), Albert Girard was possibly the first to state that primes of the form $4n+1$ can be written as sums of two squares. Fermat mentioned that assertion and some related ones in several of his letters (e. g., to Roberval in August 1640, and to Frénicle on June 15th, 1641: see Fermat, *Œuvres*, t. II, p. 202–205,

221–226) and later claimed he had proofs (to Pascal, September 25th, 1654, and to Digby, June 1658: *ibid.*, p. 310–314, 402–408). For more background concerning the Two Squares Theorem prior to Euler, see Dickson 1919, vol. 2, ch. VI.
Euler seems to have been aware of Fermat's *Varia Opera* (1679) and of that part of his correspondence that had been printed in Wallis's *Algebra* (1693), which includes the abovementioned letter to Digby; only much later does he quote Samuel de Fermat's 1670 edition of Diophantus (cf. n° 127, note 10). Fermat's hints concerning a proof of the Two Squares Theorem by descent are, however, contained in a letter to Carcavi from August 1659 (Fermat, *Œuvres*, t. II, p. 431–436), which was not published during Euler's lifetime.

[6] Cf. n° 6, note 4.

[7] Cf. n° 5, note 3, and n° 6, note 3.

[8] Cf. n° 5, note 4, and n° 6, note 5; see also *infra* n° 162, note 5.

[9] Cf. n° 5, notes 7–8.
The numbers x^2, x^2+1, …, $x^2+6 = x^2+2^2+1^2+1^2$ are evidently sums of four squares, whereas for x^2+7 this is far from obvious. However, we do not know how Euler proposed to deduce the Four Squares Theorem from the recursive procedure that his observation suggests; indeed it is not clear in what way a representation, e. g., of x^2+15 would follow from it.

[10] Cf. n° 5, note 9, and n° 6, note 8.

[11] Cf. n° 6, note 7.

[12] Strangely, Goldbach challenged the statement that there are such numbers beyond 1 and 36: cf. his reply n° 8, note 7.

[13] In the letter from 1658 to Digby already cited *supra* note 5 (*Œuvres de Fermat*, t. II, p. 406), Fermat had challenged Brouncker and Wallis to prove that the only fourth power among the triangular numbers is 1, and claimed to possess a proof.
In his 1724 paper in the *Acta Eruditorum* (cf. n° 6, note 7), Goldbach had published his attempt at a proof of that statement.
In E. 29, which dates from January 1733, Euler studied squares in the sequences of triangular, pentagonal, and general polygonal numbers (the n-th k-gonal number being defined by $f_n^k = \frac{1}{2}[(k-2)n^2 - (k-4)n]$). He first observes that he has to solve the "Pell equation" $(2l-4)p^2+1 = q^2$, so the cases where $2l-4$ is a perfect square must be treated separately. In these cases he finds:

– $l = 4$: obviously all "tetragonal numbers" $f_n^4 = n^2$ are squares;
– $l = 10$: no "decagonal number" $f_n^{10} = 4n^2 - 3n$ is a square except for $n = 0$ and $n = 1$;
– $l = 20$, $l = 34$, …, $l = 2m^2+2$: the same conclusion holds.

Five years later, in E. 98, Euler characterised all Pythagorean triples by parameters and applied this to prove, among others, the following results:

– The sum of two fourth powers is never a square (this directly implies "Fermat's Last Theorem" for the exponent 4).
– There are no non-trivial integral solutions (with b, $c \neq 0$) of $a^4 - b^4 = c^2$.
– No integral triangular number except 1 is a fourth power (Euler calls this last result "Theorema Fermatianum").

In his last paper on the subject, E. 739 from 1778 (printed posthumously in 1815), Euler discusses – as examples of his new method for finding common values of two quadratic forms – the problems of determining all triangular numbers that are squares, squares minus 1, or triangular numbers multiplied by 3.

[14] By this turn of phrase ("prorsus non" / "not at all"), Euler implies that he is now examining whether $\dfrac{x^2+x}{2}$ can ever be the fourth power of a rational number for a *rational* x.

[15] The equation $\dfrac{x(x+1)}{2} = a^4$ in integers can be solved using descent: if x is odd, then x and $\dfrac{x+1}{2}$ are coprime integers whose product is a fourth power; thus $x = r^4$ and $\dfrac{x+1}{2} = s^4$ must be fourth powers, which leads to the equation $2s^4 - r^4 = 1$. This shows that the problem is connected with those solutions (x, y) of the "Pell equations" $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ for which y is a square (see nº 9, note 8).
In his 1724 paper, Goldbach had tried to transform the original identity in a similar way, but then introduced an unwarranted integrality condition, as he seems later to have understood: in letters to the Bernoulli brothers from 1725 he tried another version of his argument that seems to be lost, but did not convince Daniel Bernoulli anyway (cf. *Correspondance*, t. II, p. 161, 168, 169–170 and 237).
Euler proved Fermat's original claim in E. 98 by reducing the question whether $2s^4 \pm 1 = r^4$ to the problem of showing that the more general equation $q^2 = 2r^4 \pm 2t^4$ (with $a = 2s^2$) only has the obvious solutions. Lagrange (1779a) later also worked on the Diophantine equation $2x^4 - y^4 = \pm z^2$.
The equation $\frac{1}{2}(y^2 + y) = x^4$ is equivalent to $(2y + 1)^2 = 8x^4 + 1$; the problem of making a quartic into a square is treated in Euler's *Algebra*, Part II (E. 388), Section II, §§ 128–146, in particular § 138 (O. I/1, p. 400–401).
The geometric interpretation of this problem – as that of finding rational points on the plane algebraic curve $\frac{1}{2}(y^2 + y) = x^4$ – did not emerge before the end of the 19th century, and the connections between Euler's substitutions and the group law on the Jacobian of cubic and quartic curves were understood even later. The quartic can also be transformed (by a birational transformation) into the Weierstraß cubic $y^2 = x^3 - 2x$. Modern methods (cf. Weil 1984, ch. II, Appendix V) show that this elliptic curve has rank 1 and that its group of rational points modulo torsion is generated by $(-1, -1)$.

[16] Daniel Bernoulli, to whom Euler no doubt refers, was at this time also frequently exchanging letters with Goldbach, both on scientific questions and on his position at the Petersburg Academy. In April he had still planned to leave Russia as soon as possible (cf. *Correspondance*, t. II, p. 366), but in his letter dated July (6th) 17th, 1730 (*ibid.*, p. 371–376), he informed Goldbach that he had decided to accept President Blumentrost's offer to renew his (improved) contract; he remained in Petersburg for another three years.

8
Goldbach to Euler
Moscow, July 20th / 31st, 1730

Sir,

I already noted a long time ago that any number $2^{2^{x+p}} + 1$, where x and p are integers, divided by $2^{2^x} + 1$ leaves the remainder 2, because $\left(2^{2^x} + 1\right)\left(2^{2^x} - 1\right)$ equals $2^{2^{x+1}} - 1$; again, $\left(2^{2^{x+1}} - 1\right)\left(2^{2^{x+1}} + 1\right) = \left(2^{2^{x+2}} - 1\right)$ and so on, until we arrive at $2^{2^{x+p}} - 1$, a number that is smaller than $2^{2^{x+p}} + 1$ by 2; now, from this it certainly follows that all the numbers of Fermat's series are relatively prime, as you state; but how small a step is this towards proving that all these numbers are *absolutely* prime?

I acknowledge that my statement that the smallest divisor of the number a^2+1 is of the form $n^2 + 1$ was quite unfounded, as it can be refuted by the example of the number $a = 34$. Now this erroneous conjecture generated another that was none better, namely that the number $a^2 + 1$ is prime whenever $\dfrac{a \pm n}{n^2 + 1}$ cannot become an integer; as this is sufficiently disproved by making $a = 34$, it did not deserve the new proof by which you distinguished it.[1] This same example you indicated makes me more than ever doubt the truth of Fermat's theorem, as it is possible that the smallest divisor of some number $2^{2^x} + 1$ is a number with a hundred, or a hundred thousand, digits, which nobody will find until the end of the world.

I do not quite understand why Fermat stated that every number is the sum of four squares, if he did not have any method for splitting any given number into four squares; and if that method was correct, this was enough to prove his theorem.

In my last letter I should have written $\frac{2}{10\,000}$ instead of $\frac{2}{100\,000}$; please correct this.[2] Incidentally I congratulate you on noticing the fallacy in Grégoire's lemma; no doubt this was also the source of the error that Descartes noted when he had studied Grégoire's volume for barely three days, as Lipstorp reports in his *Specimens of Descartes' Philosophy*,[3] Part 2, p. 87. If one looks at the facility with which the approximation proceeds, I daresay nothing more elegant has ever been invented for the quadrature of the circle than Leibniz's series;[4] but if we ask for a method of approximation that works as fast as possible, the one Mr. Lagny applied (in the *Memoirs* of the Paris Academy for 1719) must be judged to be superior to all others by the admirable example he presented,[5] although, at that time, he hid the trick he had used, and I do not know whether he explained it subsequently, as I do not recall seeing the *Memoirs* for later years. If you know anything about his method, please write to me about it.

I have communicated my proof of the theorem that no triangular number except 1 is a fourth power to our Mr. Bernoulli in a letter sent from Moscow, which he will pass on to you with pleasure if he has it at hand;[6] from this proof you will see that not only no number of the form n^{2p+2}, but even no square number n^2 at all (except 1 and 36) is to be found in the sequence of triangular numbers; so the squares of root 0, 1, 6, 35, 204, … in the sequence that you wrote down in your letter are by no means triangular.[7]

I once chanced upon the solution of the following problem: To any whole number a, however large, of which only the last two digits are indicated, add another integer b, so that the sum does not have a rational root of any degree. Take, e. g., the number 543 664, of which I suppose only the last two digits 64 to be known, the remaining digits 5436 (or any other digits) being hidden; now if we add 2 to get 543 666, that number has no rational root. I am afraid the problem would be entirely boring because of its simplicity if I added at once the method of solution and the proof; therefore I postpone them to a future letter.[8]

Farewell and stay well-disposed towards your
Christian Goldbach.

Moscow, July 20th / 31st, 1730.

[1] Goldbach is misled into this sarcastic remark by the error in notation he committed himself (see nº 6, note 1, and nº 7, note 2); indeed Euler's proof is irreproachable, and the pretended counterexample does not work: $\frac{55^2+1}{34+55}=34$ and $\frac{21^2+1}{34-21}=34$ yield integers, so 34^2+1 must be composite: in fact, one has $34^2+1=1157=13\cdot 89$.
[2] Cf. nº 6, note 9.
[3] In Daniel Lipstorp's *Specimina Philosophiae Cartesianae* (1653), an *Appendix* to the second part presents a sketch of Descartes' life. In this panegyric, Descartes' perspicacity for the bounds of human knowledge is backed up by the story that within three days he had been able to identify the crucial error in Grégoire de Saint-Vincent's quadrature of the circle (cf. nº 5, note 9).
[4] Leibniz had rediscovered the series $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$ (which had already been known to Madhava of Sangamagrama around 1400) in the 1670s, almost simultaneously with James Gregory; it was published in his 1682 paper *De vera proportione Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeribus rationalibus*.
[5] Thomas Fantet de Lagny (1721) had rediscovered another arctan series that also seems to have been known to Madhava and used it to compute 127 digits of π (cf. nº 66, note 10).
[6] Cf. nº 7, note 15. The letter Goldbach mentions here cannot now be identified with certainty: If he is referring to one of the letters from 1725 he sent to Daniel Bernoulli directly and by way of his brother (cf. *Correspondance*, t. II, p. 237, 170), the place of origin is in error. Alternatively, the proof could also have been among the enclosures in Goldbach's letter from November (17th) 28th, 1729, which seem to be lost (cf. *ibid.*, p. 336).
[7] Cf. nº 7, note 12, and Euler's reply nº 9, note 5.
In Goldbach's copybook, there is a marginal note: "emendanda" ("to be corrected").
[8] For Euler's solutions of this elementary problem, see his reply nº 9, note 9.

9
Euler to Goldbach
Petersburg, August 10th (21st), 1730

Sir,

as far as I know, Fermat himself apparently did not have either a proof of his theorem that any number is the sum of four squares, or a general method for splitting an arbitrary number into four squares, but rather seems to have come by it only by observation and to have asserted it because he had found no counterexample.[1] Now even if this statement is true, it appears to me to be very difficult to find its proof; for I could perceive no law in the splitting of the most recalcitrant numbers, those of the form n^2+7, and their resolution into four squares seems to succeed always by mere chance, containing no regularity at all.

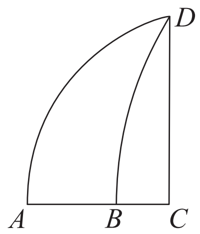
The *Memoirs* of the Paris Academy for 1719 and the following years are not available in our library here, so I cannot explain anything about Mr. Lagny's method.[2] But regarding a convenient and easy approximation to the area of the circle, I recall that our late Mayer had a strongly convergent series, of which three or four terms suffice to calculate the longest numbers indicated by Ludolph van Ceulen.[3] The series 0, 1, 6, 35, 204, ..., which I recently communicated to you, has the property that the square of its every term is a triangular number;[4] so this is not only true of 0, 1 and 6. The square of the term 35, for example, is 1225, and this is the triangular number of root 49. Universally, as the general term of this series is[5] $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}}{4\sqrt{2}}$, its square is the triangular number on the root $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{n-1}-\left(3-2\sqrt{2}\right)^{n-1}-2}{4}$. Thus, starting from the series I indicated, one can find innumerable integers that are at once square and triangular. This discovery is based on the following general theorem: If the formula az^2+bz+c represents a square in the case where z is set equal to p, it will also become a square for the case where

$$z=\frac{-\,b+b\sqrt{1+a\lambda^2}}{2a}+p\sqrt{1+a\lambda^2}+\lambda\sqrt{ap^2+bp+c}$$

(where one has to take for λ some number that makes $1+a\lambda^2$ a square). Consequently, if a single case is known where az^2+bz+c becomes a square, innumerable instances – even in whole numbers – will be found, whenever λ is chosen so that $\dfrac{-\,b+b\sqrt{1+a\lambda^2}}{2a}$ becomes an integer.[6] Moreover, all the numbers determined in this manner constitute a sequence composed from two geometric series. Problems of this kind, where whole numbers must be determined, were once discussed between Wallis and Fermat. Their most difficult example was: find whole numbers that, substituted for x, make the expression $109x^2+1$ a square. For solving this kind of question, an Englishman named Pell invented a particular method that is expounded in Wallis's works.[7] I need this for my problem in order to make $1+a\lambda^2$ a square. However, this method works only for cases proposed numerically; it is no use for resolving formulae that contain arbitrary coefficients, as in my case az^2+bz+c.

I have tried to find a similar method for formulae in which the variable has three dimensions. However, I could not achieve this equally as for quadratic formulae: at least it suffices for finding all whole numbers, but it does not exhibit the law according to which they proceed. Let the following examples illustrate this: To find pyramidal integers that are squares or plane triangular numbers.[8] Your solution, Sir, of the problem you wrote about, to add to a given number another one so that the sum does not have a rational root of any degree,[9] I perceived at once to be deduced from the principle that no power of any degree can be divided by 2 only once, or that no power is an oddly even number. On the other hand, it is known from the last two digits of any number whether it is divisible by 4 or not. Therefore, if one adds some number that makes the sum divisible by 2 but not by 4, one has what is asked for. The same thing can be achieved in several other manners, for example by making the last digit a 0 and the next but last different from 0; or by letting the last two digits be 05, 15, 35, 45, 55, 65, 85, 95; for no power has any of these endings. Similarly it is obvious what kind of number should be added to a proposed number, however large, of which only the sum of the digits is given, in order for the result not to be any power. Indeed, a number must be added that together with the digit sum makes it divisible by 3 but not by 9.

I have seen your method for the discovery of squareable lunes,[10] and have liked it very much for its great simplicity and shortness. A long time ago I had investigated the same problem in a purely analytical manner, as follows:



Take some half-lune ABD, and drop the perpendicular DC from D on the extension of AB; this gives the sine of the arcs AD and BD. Call DC y, the radius of the arc AD a and the radius of the arc BD b; after an integration by logarithms one will have

$$\text{area } ACD = \frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\log, \frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{a^2-y^2}}{2}$$

and

$$\text{area } BCD = \frac{b^2\sqrt{-1}}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2-b^2}}{b\sqrt{-1}} - \frac{y\sqrt{b^2-y^2}}{2}.$$

Consequently the area of half the lune will be[11]

$$\begin{aligned} ADB \quad = \quad & \frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a\sqrt{-1}} - \frac{b^2\sqrt{-1}}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2-b^2}}{b\sqrt{-1}} \\ & - \frac{y\sqrt{a^2-y^2}+y\sqrt{b^2-y^2}}{2}. \end{aligned}$$

It is thus evident that the lune is squareable whenever in this expression the logarithmic quantities vanish: for then ADB will be equal to $\dfrac{y\sqrt{b^2-y^2}-\ y\sqrt{a^2-y^2}}{2}$. Consequently, in order to find squareable lunes, it is necessary that

$$\frac{a^2\sqrt{-1}}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a\sqrt{-1}} = \frac{b^2\sqrt{-1}}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2-b^2}}{b\sqrt{-1}},$$

or, taking the numbers,[12]

$$\left(\frac{y+\sqrt{y^2-a^2}}{a\sqrt{-1}}\right)^{a^2} = \left(\frac{y+\sqrt{y^2-b^2}}{b\sqrt{-1}}\right)^{b^2}.$$

From this equation, given the relation between a and b, one can determine y, i. e., the half-chord that subtends the squareable half-lune. Although the equation that has been found contains imaginary quantities, when it is reduced they drop from the calculation and a real value for y is exhibited. This solution agrees with yours, Sir, for they both give all the cases that exist.[13]

Farewell and be well-disposed, Sir, towards your most obliged
Leonhard Euler.

Petersburg, Aug. 10th, 1730.

[1] Cf. nº 5, note 7.
[2] Cf. nº 8, note 5.
[3] At the end of his paper *Propositiones cyclometricae aliquot* that had been read to the Petersburg Academy in September 1726 (cf. *Protokoly* 1897, t. I, p. 7) but was published posthumously only in 1732, F.Ch. Mayer had proposed a recursively computable series for π that is "rather good for calculating" ("calculo satis apta"); this is in fact the same one (based on $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$) which Newton had used and Euler "reconstructed" in his next letter (see nº 11, notes 5–6). However, as Euler remarks at this latter occasion, the convergence is not as strong as he assumes here: as Mayer candidly states, five terms yield only four correct digits of π. In order to obtain "Ludolph's longest numbers" (i. e., the 35-digit decimal expansion of π that Ludolph van Ceulen had calculated in the early 17th century), one would need about 50 terms.
[4] Cf. nº 8, note 7.
[5] Finding triangular numbers that are squares means solving the equation $\frac{x^2+x}{2} = y^2$. Euler discusses the more general problem of making $ax^2 + bx + c$ a square in E. 29, where he reduces it to solving a "Pell equation". Another method for solving indeterminate equations of this type can be found in the second part of Euler's *Algebra* (E. 388, Section II, § 88: O. I/1, p. 373). There Euler writes $\frac{x^2+x}{2} = y^2$ in the form $(2x+1)^2 = 8y^2 + 1$ and then solves the equation $X^2 - 8Y^2 = 1$. Formulae similar to the one given here occur in E. 739 from 1778, where Euler determines all triangular numbers whose triples are also triangular.
Explicit formulae for the terms of recursively defined series were also studied by Daniel Bernoulli during his years in Petersburg: see his *Observationes de seriebus recurrentibus* printed in 1732. Euler computed what is today called "Binet's formula" for "Fibonacci numbers" by using generating functions in his *Introductio*: cf. E. 101, T. I, § 216 (O. I/8, pp. 232–235).
[6] Cf. nº 7, note 13, last paragraph.
[7] As has often been noted (cf., e. g., Konen 1901, Eneström 1902), Euler's attribution of the equation $Dx^2 + 1 = y^2$ and its solution to John Pell is in error: The solution of the challenge problem that Fermat had proposed to his English colleagues in 1657 is in fact due to William Brouncker, and in Wallis's *Algebra* (Cap. XCIII, p. 418–426 of the *Opera* edition from 1693) it is explicitly attributed to him. Euler's error is partly explained by the fact that in the same book Wallis indeed credits Pell with some other techniques for solving indeterminate equations (*ibid.*, Cap. LIX–LX, p. 238–246).
However, neither Goldbach nor anyone else seems to have brought the mistake to Euler's attention: so he continued to refer to "Pell's problem" and "Pell's method" whenever he worked on Fermat's challenge problem and Brouncker's solution: see, e. g., E. 29, letter nº 173 below, E. 323 (where the designation makes it into the title), Part II of Euler's *Algebra* (E. 388, Section II, § 98: O. I/1, p. 380, where the "sinnreiche Methode" is again explicitly attributed to a "gelehrter Engelländer, Namens Pell"), and finally E. 559 from 1773.
It is an indication of Euler's prominence as a mathematical author that his misnomer permanently stuck, in spite of several mathematicians' awareness that it was in error (see Section 2.1.1 of the Introduction, note 26).

[8] The general problem Euler discusses here is that of solving in integers an equation $y^2 = f(x)$, where f is a polynomial of degree 3. Euler solved the cases $y^2 = x^3 + 1$ and $y^2 = x^3 - 2$: the first one – the easiest case of "Catalan's conjecture" – figures as *Theorema* X in E. 98 from 1738 (see O. I/2, p. 56–58). It resurfaces in Part II, Section II of Euler's *Algebra*, § 121 (E. 388: O. I/1, p. 373) and, very clearly, in E. 778 from 1780, § 12 (cf. O. I/5, p. 164). The latter case also has only one solution in natural numbers, namely $x = 3$, $y = 5$, as Fermat had already claimed. Euler indicated a proof by introducing numbers of the form $a + b\sqrt{-2}$, but left an important gap since he did not think it was necessary to show that these numbers enjoy unique factorisation (cf. again Part II, Section II of the *Algebra*, § 193: O. I/1, p. 432). Similar questions go back to Diophantus and were studied extensively by Fermat. In modern terms, these questions are about rational and integral points on elliptic curves and other curves of genus 1. Jacobi (1835b) explicitly wondered whether Euler had already seen the connection with elliptic integrals (see also Kummer 1848). An extensive theory, formulated in geometric terms, for dealing with these problems was developed, starting around the beginning of the 20th century, by Poincaré (see, e. g. Poincaré 1901), Mordell, Weil and many more.

Pyramidal numbers, a three-dimensional analog of triangular numbers, are numbers of the form $\binom{a}{3} = \frac{a(a-1)(a-2)}{6}$; they form the sequence 1, 4, 10, 20, 35, 56, ... Finding the pyramidal numbers that are squares or triangular numbers means solving the Diophantine equations $a(a-1)(a-2) = 6b^2$ or $a(a-1)(a-2) = 3b(b+1)$. These equations describe curves of genus 1 (elliptic curves), which explains why Euler was having problems extending his methods for finding rational points on conics to this case. For finding all integral solutions to the first equation one has to observe that the factors of the left hand side must be squares, up to common divisors and factors of 6.

The related problem with pyramidal numbers (on a triangular base) replaced by the number of balls that can be stacked in a *square* pyramid was posed by Édouard Lucas in 1875: it leads to the Diophantine equation $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + x^2 = y^2$ (see G.N. Watson 1918). In this case the expression on the left-hand side is the sum of two consecutive pyramidal numbers since $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \binom{n}{3} + \binom{n+1}{3}$.

[9] Cf. n° 8, note 8.

[10] The exploration of "squareable lunes", i. e., those (non-convex) figures bounded by two circular arcs which can be transformed into a polygon of equal area by straight-edge and compass, goes back to antiquity: Eudemus (in a text preserved by Simplicius) attributes the first three examples to Hippocrates of Chios. Some medieval and early modern mathematicians extended the problem in several directions, and around 1720, Johann I Bernoulli and his circle were provoked by a challenge in John Craig's book *De calculo fluentium* to reopen the investigation.

Goldbach heard of the problem from Nicolaus II Bernoulli in October 1722 and at once reduced it to a Diophantine condition: the ratio of the squared radii (and the inverse ratio of the angles at the centers) must be of the form $p : (p-1)\,q$ for integers p, $q > 1$ (see *Correspondance*, t. II, p. 156–158). On the subsequent discussions with Daniel Bernoulli and the latter's publication of the results in his *Exercitationes* (1724) see Bottazzini's introduction to Daniel Bernoulli *Werke* 1, p. 188–194.

Now, on July (6th) 17th, 1730, Goldbach had just sent a new memoir on squareable lunes to Daniel Bernoulli since he thought he had discovered a mistake in one of Bernoulli's constructions from 1724. Bernoulli calmly recapitulated his argument; Goldbach admitted that his critique had been precipitate and retracted his memoir (see *Correspondance*, t. II, p. 377–381, 388–389). It is certainly this (apparently lost) memoir of Goldbach's to which Euler refers here.

In his paper E. 73 from 1737, Euler solved another related problem that Goldbach had proposed to Daniel Bernoulli in 1722 and that had found its way into the *Exercitationes*.

[11] In the formula that follows in Euler's original letter, the last term uses an older notational convention for sums in the numerators of fractions, where the minus sign in front of the fraction only affects the first term; in today's notation, the term should be understood as

$$-\frac{y\sqrt{a^2-y^2}-y\sqrt{b^2-y^2}}{2}.$$

[12] I. e., inverting the logarithmic function.

[13] Euler returned to the question which lunes can be squared in E. 423 from 1771. Here he found that the equation $m : \sin^2 m = n : \sin^2 n$ admits exactly five solutions where m and n are rational multiples of an angle ω for which $\cos\omega$ is reducible to quadratic irrationalities and, consequently, yields a constructible lune.
Three of these lunes – not only the right-angled one that Euler and his contemporaries ascribed to Hippocrates – had in fact been known in antiquity; the two remaining cases had been discovered, shortly before Euler's resuming the subject, by the Swedish mathematician Martin Johan Wallenius in a thesis presented at Åbo in 1766. Since Wallenius's student Anders Lexell had arrived at Petersburg to collaborate with Euler in 1768, the question seems legitimate whether news of Wallenius's discoveries played a part in motivating Euler's return to the question.
After Clausen's rediscovery of the five squareable lunes in 1840, the interest shifted to the question whether these were all the allowable cases. Landau (1903) specified the problem more precisely and eliminated many possibilities; and using methods from Galois theory, Chakalov, Chebotarëv and Dorodnov completed the proof that no other squareable lunes exist (see Scriba 1987, 1988, Postnikov 2000).

10
Goldbach to Euler
Moscow, (September 28th) October 9th, 1730

Sir,

I have noted that those numbers which can be split into as many squares as a contains ones, can also be split into any number greater than a, i. e., into $a+n$ squares where n denotes any positive integer. So, if it is true that every number can be split into four squares, the theorem can be stated more generally: "Any rational number can be split into an arbitrary number, greater than 3, of squares".[1] Moreover it seems that any number that is neither a sum of two nor of three squares can be split not just into four squares but also into a 1 and three squares;[2] thus, e. g.,

$$\begin{array}{lll} 7=1+1+1+4, & 23=1+4+9+9, & 39=1+1+1+36, \\ 15=1+1+4+9, & 28=1+9+9+9, & 47=1+1+9+36, \end{array}$$

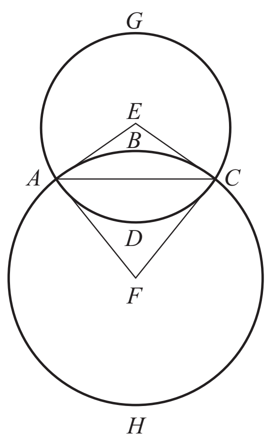
and so on. You will not be able to indicate any counterexample; but I admit, with Fermat, that this kind of theorem is not easily proved.

That series of Mayer's which allowed him to calculate Ludolph's numbers from three or four terms[3] appears to be very important, if these three or four terms can be written down and added in a shorter time than one should need to determine the same numbers by Ludolph's method; as long as this is not proved, there is nothing greatly admirable in such a series, as Leibniz's series, too, may be transformed into another one that converges as much faster as you like, by taking, e. g., a thousand terms of this series for each single term of the other series; but by a shortcut of this kind we gain, as I stated, nothing, because for evaluating and adding two terms of the series that converges faster quite as much time is needed as for collecting two thousand terms of the more slowly converging series into a sum.

You have proved to my satisfaction that there are infinitely many squares that are triangular;[4] and therefore Fermat's statement that no triangular number except 1 is a fourth power is all the more remarkable.

That a number which upon division by 9 leaves 3 or 6 cannot have a rational root, as you noted, I had already written to a friend more than twelve years ago; a passage quoted from this letter is to be found in the *Supplement* of the Leipzig *Acta*.[5]

I am very pleased that you approve of my solution for the problem of squaring lunes, even if I myself do not like it any more since I have learned that it is not new, but has been explained a long time ago by Mr. Daniel Bernoulli in his *Exercitationes Mathematicae*. Your solution particularly appeals to me because you reduce the equation to finite expressions that are definitely more elegant than infinite series. By the way, whatever solutions of this problem may be devised, all the substance lies in removing from the expression that describes the lune's area those quantities that depend on the quadrature of the circle; thus, when the late Nicolaus Bernoulli first mentioned the problem to me in a letter seven years ago, I sent him the following solution:[6]



Take two circles intersecting in A and C,

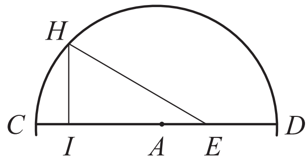
$$\begin{array}{llll} \text{circle} & AGC = \alpha, & & AHC = \beta, \\ \text{sector} & ADCE = \dfrac{\alpha}{p}, & & ABCF = \dfrac{\beta}{q}, \\ \text{triangle} & AEC = b, & & ACF = c, \end{array}$$

then

$$\text{segment} \quad ADC = \frac{\alpha}{p} - b, \qquad ABC = \frac{\beta}{q} - c;$$

consequently the lune $ABCG$ equals $\alpha - \frac{\alpha}{p} + b - \frac{\beta}{q} + c$, and making $\alpha - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q} = 0$ (in order to destroy the quantities that involve the quadrature of the circle) the same lune $ABCG$ will equal $b + c$.

Kepler's problem about dividing a semicircle CHD from a given point E in such a way that the three-sided domain CHE is to the area of the semicircle in a given ratio[7] gave me the occasion to consider another problem:



Given

(1.) the radius $AC = 1$,

(2.) the ratio of the diameter to the circumference, 1 to p,

(3.) the ratio of a given arc to its sine, $\frac{p}{n}$ to e,

(4.) the ratio of the area of the three-sided domain CHE to the semicircle CHD, 1 to n,

determine the distance of the point E from the center A or the line $AE = c$ in infinitely many ways so that the sine HI is expressed by the quantities p, n and c, where a solution is demanded that determines the lines AE and HI not by series but by definite expressions.[8]

Solution: Let m be an arbitrary number; for

$$AE = c = \frac{2p\,(1-m)\sqrt{-1}}{n\left[\left(\sqrt{1-e^2}+e\sqrt{-1}\right)^m - \left(\sqrt{1-e^2}-e\sqrt{-1}\right)^m\right]},$$

HI will equal $\frac{p\,(1-m)}{nc}$.

Moscow, October 9th, 1730.

Yours most respectfully, Ch. Goldbach.

[1] Cf. n° 6, note 6.
[2] This is not true: see Euler's reply n° 11, note 5.
[3] Cf. n° 9, note 3.
[4] Cf. n° 9, note 4, and n° 7, note 12.
[5] Goldbach refers to a short paper which he had published in 1717, in the form of an extract from a letter (addressed to Th.S. Bayer), in a supplement volume of *Acta Eruditorum*. There he indicated several elementary observations on power residues modulo 9 and drew the consequences pointed out by himself and by Euler in n° 8, note 8, and n° 9, note 9. Goldbach mentioned that he had made these discoveries when at London (in autumn 1712) and communicated them to Nicolaus I Bernoulli and Abraham de Moivre.

[6] Cf. nº 9, note 10.
Goldbach's letter to Nicolaus II Bernoulli, written from Bratislava on October 17th, 1722 (see *Correspondance*, t. II, p. 157–158), indeed contains much the same argument.
In his copy of the present letter, he left it out and replaced it by the note "*vid*[*e*] *Litt*[*eras*] *A*", presumably referring to an earlier copybook from which he transcribed the passage that follows in the original.

[7] Kepler had posed this problem, in the context of his Second Law (the area theorem), at the end of Part IV of his *Astronomia Nova* (1609); he thought it unsolvable because of the "heterogeneous nature" of a circular arc and its chord. Christopher Wren and several other English mathematicians, including Newton, indicated constructions by means of prolate cycloids.
Goldbach's interest in the problem may have been prompted by a paper that Jacob Hermann – then the Petersburg Academy's senior professor of mathematics – had published in t. I of its *Commentarii* printed in 1728. In this paper, Hermann proposed using for the construction of the problem a *quadratrix* (in today's terminology, a sine curve), since this was easier to trace than the cycloid and a manageable series development was available.

[8] Kepler had asked for a construction for dividing the semicircle in a given ratio $1 : n$ by a line through the given point E. Now Goldbach asks for what points E (the ratio n still being given) that construction will yield an explicit expression for the height IH. His solution is indicated in a remarkably "modern" formula for AE that relies on the link between trigonometry and the powers of complex numbers, as codified by de Moivre's theorem from 1722. It translates into the condition that the angle subtended by the arc CH at the center A must be a rational multiple of π/n.

11
Euler to Goldbach
Petersburg; October 17th (28th), 1730

Sir,

the fact that any number which can be split up into as many squares as a contains ones can also be split up into a greater number[1] is easily understood by considering that an arbitrary square number can be split up into two or more squares. In this manner the number of squares that added together make up the given number can be increased, but not decreased, at will. I have observed and am able to prove that no number expressed in the form $m^2\,(4x+3)$ can be split into two squares and that no number of the form $m^2\,(8x+7)$ is a sum of three squares.[2] But whether all the rest can be split into three or fewer, I could not say; nor whether all numbers contained in that formula can be split into four squares. At least I have not been able to find any example. On the other hand, if another theorem, also by Fermat, is true, viz., that any number is the sum of three triangular numbers,[3] then it follows from this, too, that every number $m^2\,(8x+7)$ is the sum of four squares.[4] For by virtue of that theorem all numbers are comprised by the formula $\dfrac{a^2+a}{2}+\dfrac{b^2+b}{2}+\dfrac{c^2+c}{2}$. Therefore eight times this number, $4a^2+4a+4b^2+4b+4c^2+4c$, comprises all multiples of 8 or all numbers of the form $8x$. Consequently the formula $(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$ contains all numbers of the form $8x+3$, and thus all numbers $8x+3$ are sums of three squares. For this reason all numbers of the form $8x + 4$ or also $8x + 7$ can be resolved into four squares. Moreover, so are $m^2\,(8x + 4)$ and $m^2\,(8x + 7)$. The formula $m^2\,(8x + 4)$ is equivalent to $m^2\,(2x + 1)$, and from that formula all oddly even numbers and only these are excluded, i. e., the numbers of the form $4x + 2$. Consequently, even if Fermat's theorem on triangular numbers were true, in order to show ours to be correct, one has to prove additionally that all numbers $4x + 2$ can be resolved into four squares. Regarding your observation that any number that can be split up into four squares can also be split into 1 and three squares,[5] or – which amounts to the same – that when such a number is decreased by 1, the difference can always be broken up into three squares: while that property is indeed valid for all numbers smaller than 100, among larger numbers I can produce countless counterexamples. One of them is 112, for although that number cannot be split into fewer than four squares, it is not possible to have 1 among these four squares, as 111 can never be split into three squares. The same is true of all numbers contained in the form $16n^2(8x + 7)$; for in these cases neither the number itself nor the number decreased by 1 can be split into three or fewer squares. Moreover, when breaking up the numbers $16n^2(8x+7)$ into four squares, it is not only impossible to have a 1 present among those squares, but neither can any square of the form $(2m + 1)^2\,\dfrac{n^2}{d^2}$ be included (here d denotes some number dividing n).

About your other question, in what manner the digits of Ludolph van Ceulen's longest expansion expressing the quadrature of the circle can be determined most easily, I will write down my own ideas, as I am no longer allowed to inspect Mayer's manuscripts.[6] Let the diameter of the circle equal b, some arbitrary chord x and the corresponding arc s; then

$$s = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3 \cdot b^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot b^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot b^6} + \ldots$$

This series[7] converges the faster, the smaller x is taken. But in order to determine the ratio of the circumference to the radius, it is necessary that s be commensurable with the whole circumference, and x with the diameter. No rational chord satisfying this condition has yet been found that is smaller than the one on an arc of 60 degrees, which equals $\frac{1}{2}b$. But as in this case the series does not converge fast enough by far,[8] one has to think about finding some finite expression that approximates it as well as possible. Now $s = \dfrac{60b^2x - 17x^3}{60b^2 - 27x^2}$ comes close, and $s = x + \dfrac{840b^2x^3 - 122x^5}{120b^2\,(42b^2 - 25x^2)}$ or $s = x + \dfrac{x^3}{6b^2}\left(\dfrac{420b^2}{420b^2 - 311x^2}\right)^{\frac{189}{311}}$ even closer; but all of these do not very strongly approach the true value[9] unless x can be taken smaller than $\frac{1}{2}b$. It will therefore be most advisable to consider the chords on smaller parts of the circumference, even if they are irrational.[10] Furthermore I have another formula that allows me to determine the circumference of the circle.

Making the diameter equal to 1, the circumference will be equal to

$$\frac{16 \cdot 36 \cdot 64 \cdot 100 \cdot \ldots \cdot 4n^2}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2} \cdot \frac{8n+2}{2n^2+n}$$

or more accurately to

$$4\,(1+n)\,\frac{4 \cdot 16 \cdot 36 \cdot \ldots \cdot 4n^2}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot \ldots \cdot (2n+1)^2}\sqrt{\frac{2n+2}{2n+3}};$$

this last expression is always larger than the true value, and the greater n is taken, the more exact a value for the circumference will result.[11]

I have noticed that our Mr. Bernoulli mentioned in a letter to you a theorem of mine, which states that the formula $\dfrac{a\,dx}{\sqrt[m]{b+cx^m}}$ can always be transformed into a rational expression and consequently integrated.[12] Now he has hinted to me that you have generalised this formula in several ways. Mr. Bernoulli, the father, has achieved something similar by reducing not only this, but also $\dfrac{a\,dx}{\sqrt[m]{ax^m+bx^n}}$ to rational terms. When I saw this, I started to ponder whether possibly altogether every formula could be integrated in the same way, if one just allows logarithms. For since $\dfrac{dx}{x}$, which can be integrated by the help of logarithms, is comprised in $x^m dx$, it should be deemed to be absolutely integrable.[13] But even admitting logarithms, I could by no means integrate the formula $\dfrac{a^2\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$ which expresses the curve element of the rectangular elastic curve, or rectify the ellipse.[14] However I do not know whether these cases might be comprised in one of your formulae.

Farewell and be well-disposed, Sir, towards your most obliged

L. Euler

Petersburg, Oct. 17th, 1730.

[1] Cf. n° 10, note 1.

[2] Both these problems go back to Fermat: according to a letter Mersenne wrote to Descartes on March 22nd, 1638 (which is attested by Descartes' reply: see Mersenne, *Correspondance*, t. VII, p. 129–130), Fermat has a theorem that no number $4n-1$ is a sum of two squares (in integers or in fractions) and another one that no number $8n-1$ is a sum of three squares. The first assertion is again mentioned in Fermat's letter to Roberval from August 1640, which Euler could have read in Fermat's *Varia Opera Mathematica* (1679), p. 161–162.
It is less clear where Euler got his information about the second claim: This is stated in a letter from Fermat to Mersenne, which should probably be dated June 1638 (not September 1636: see Mersenne, *op. cit.*, p. 272–279); however, this letter was only published in 1894. The edition by Clerselier of Descartes' reply mentioned above (*Lettres de Descartes* (1657), t. III, p. 378–379) does not seem a likely source either, since Descartes only deals with the integer case, invoking a simple argument about square residues modulo 8 and bypassing the real difficulty with the phrase "... et pour les fractions, c'est la mesme chose". There

is indeed also a link to Fermat's *Observatio* XXVII published in his notes on Diophantus (1670), but connecting this with Euler's present statement requires considerable hindsight. Thus the question of Euler's source for Fermat's second assertion must remain open for the moment.

[3] This theorem and the more general one that any number can be composed from n figurate (n-gonal) numbers were also stated in Fermat's letter to Mersenne, which Euler presumably could not have known (see *supra* note 2), but Fermat repeated it several times: Euler could have found this claim, e. g., in *Observatio* XVIII of Fermat's notes on Diophantus or in his letter to Digby from June 1658 that was published as n° XLVI at the end of vol. II of Wallis's *Opera Mathematica* (1693).

[4] Actually Fermat's Triangular Numbers Theorem implies the Four Squares Theorem in full generality: as Euler and Goldbach knew (see this letter as well as n° 73), the Triangular Numbers Theorem implies the statement that every number $8n+3$ is the sum of three squares. Thus $8n+4 = a^2+b^2+c^2+1^2$ is a sum of four squares, and a, b, c must obviously be odd. Choose their signs so that they are all $\equiv 1 \bmod 4$ and use the identity

$$\frac{a^2+b^2+c^2+1^2}{4} = \Big(\frac{a+b+c+1}{4}\Big)^2 + \Big(\frac{a+b-c-1}{4}\Big)^2 + \Big(\frac{a-b+c-1}{4}\Big)^2 + \Big(\frac{a-b-c+1}{4}\Big)^2$$

to show that $2n+1$ – i. e., an arbitrary odd number – is also a sum of four squares. Since the identity $2(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b)^2+(a-b)^2+(c+d)^2+(c-d)^2$ shows that $2n$ is a sum of four squares whenever n is, the result follows. See also Béguelin 1776 (cf. Dickson's *History of the Theory of Numbers* (1919), vol. II, p. 15).

In the third edition (1830) of his *Théorie des Nombres*, Legendre showed that the inverse is also true: the result $8n+3 = x^2+y^2+z^2$ implies Fermat's polygonal number theorem in full generality.

[5] Cf. n° 10, note 2.

[6] Cf. n° 9, note 3.

[7] For $b=1$, this is the power series expansion of $\arcsin x$. Newton had found it as early as 1666 by applying his binomial theorem to $(1-x^2)^{-1/2}$ and integrating termwise (see his *Analysis per quantitatum series ...* published in 1711, p. 15) and used it, "having no other Business at that Time", to compute π to an accuracy of 15 digits.

[8] Actually the four terms shown yield $\pi \approx 3.141\,155$; ten terms of the same series sum to $\pi \approx 3.141\,592\,647$, which is correct to 8 decimal places.

[9] In fact, for $b = 2x$, $s = \frac{\pi}{3}x$ these approximations yield $\pi \approx 3.140\,845$, $\pi \approx 3.141\,521$, and $\pi \approx 3.141\,560$.

[10] This idea generated several more sophisticated ways of approximating π by arctan formulae, as discussed later in the present correspondence: see n° 66, note 10.

[11] In his 1656 *Arithmetica Infinitorum*, Wallis had attempted to attack the quadrature of the circle by computing the integral $\int_0^1 (1-x^2)^k dx$ for $k=\frac{1}{2}$; to this end, he computed the integral for $k = 0, 1, 2, \ldots$, obtaining the sequence $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{15}, \frac{48}{105}, \ldots$ (this was actually the idea that inspired Newton to derive his binomial theorem). Using his interpolation method, Wallis then computed a value for the term corresponding to $k=\frac{1}{2}$ and found $\frac{4}{\pi} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdots$. In his *Treatise of Algebra* (1685), p. 318, he formulated this result as follows: "We say therefore; that the Circle is to the Square of the Diameter, as 1 to $1 \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \cdot$ &c, *infinitely*".

[12] Daniel Bernoulli had sent Euler's claim that $\dfrac{dx}{\sqrt[n]{a+bx^n}}$ could always be made rational to Goldbach as a challenge on December 28th, 1730 (January 8th, 1731), boasting that he himself had won a bet by solving the problem instantly. Two attempts of Goldbach's to find an easy solution failed; on April (6th) 17th, 1730, Bernoulli communicated his method. He then went on to promote an even more general transformation which his father had sent him,

to caution Goldbach that surely not every algebraic differential would prove rationalisable, and to criticise a condition which Jacob Hermann had stated in his paper *De Calculo Integrali* (1728b) published in the *Commentarii*. Goldbach insisted on the correctness and generality of his own transformations; Bernoulli agreed but still thought they were unnecessarily involved. On July (6th) 17th, 1730, Bernoulli finally conceded that Goldbach had outdone all his competitors by finding a way to rationalise the differential $\frac{dx}{(1+x^a)^{\frac{1}{n}}}$ whenever $a = \frac{n}{1 \pm mn}$ for some integer m, and told Goldbach that he had given the problem to Euler as an exercise. The discussion about the most general formulae of this sort dragged on until the end of the Goldbach-Bernoulli correspondence in November 1731 (all these letters are available in Fuß's *Correspondance* edition, t. II, p. 339–405), along with the parallel dialogue in the present correspondence (see n° 11–16).

[13] Euler's suggestion to admit logarithms ("the quadrature of the hyperbola") and, by implication, inverse trigonometric functions ("the quadrature of the circle") among legitimate integration methods, on the same footing as algebraic integrals, was by no means revolutionary by then; in fact it prevailed almost universally during the first half of the 18th century. A few decades after the first public hints at the powers of calculus (both in its English and its continental incarnation), the integration of algebraic functions and algebraic differential equations was a very active area of research and competition. Conditions for the integrability of binomial algebraic differentials – such as those mentioned here – had been already formulated by Newton, who remarked that $x^m(a+bx^n)^p dx$ (where m, n and p are rational numbers) can be integrated algebraically if either $\frac{m+1}{n}$ or $\frac{m+1}{n} + p$ is an integer. Leibniz (1853), Jacob (see *infra* note 14) and Johann Bernoulli (1728), then Hermann (*op. cit. supra* note 12), the second Bernoulli generation, Goldbach and finally Euler took the question up. Euler brought it – by way of several dozen papers – to its provisional codification in his textbook *Institutiones calculi integralis* (E. 342), where he describes the integration of elementary "irrational" (i. e., algebraic) differentials in Ch. 2 of Book I.1 (O. I/11, p. 52–75), but then goes on to propose a plethora of analytical, geometrical and numerical tools for dealing with more complex problems.

[14] Jacob Bernoulli had already seen that the differential $\frac{z^2\,dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$ belongs to the next class of integrands that should be studied after those connected to the areas delimited by the circle and the hyperbola (cf. his Op. LX from 1694: *Streitschriften*, p. 190); it is related to the arclength of the ellipse, the hyperbola and the lemniscate and to the *elastica*, the curve that a homogeneous beam bent by a load describes. Shortly before his death, Bernoulli made a copy, intended for publication, of his remarkably systematic study of algebraic differentials (*Varia Posthuma*, n° II: Jac. B. *Werke* 5, p. 269–278; n° III: *Streitschriften*, p. 437–446), but this was only printed much later with his *Opera* (1744). On Jacob Bernoulli's contribution to the beginnings of a systematic theory of algebraic integration, cf. also Mattmüller 1999.

12

Goldbach to Euler

Moscow, (October 26th) November 6th, 1730

Sir,

in your last letter I marvelled at the diligence which you apply in investigating the mysteries of numbers.

When I had another look at my remarks to Mr. Bernoulli about the differential formula that you mention,[1] I noticed at once that those rational cases can be sorted out much more concisely than I had thought. First it should be pointed out that the formula

$$A \qquad \ldots \qquad \frac{dx}{(x^m + x^n)^{\frac{1}{m}}}$$

is no more general than the formula

$$B \qquad \ldots \qquad \frac{dv}{(v^m + 1)^{\frac{1}{m}}},$$

since B is obtained from A by merely substituting $x = v^{\frac{m}{m-n}}$; Mr. Daniel Bernoulli acknowledged this too.[2] Now I shall consider a differential of the form

$$C \qquad \ldots \qquad \left(1 + x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$$

(where p is to be a non-integer rational number). I say this becomes rational if n is any integer; for by setting $x = (z-1)^n$, C is changed into

$$D \qquad \ldots \qquad n\,(z-1)^{n-1}\, z^p dz,$$

and this is obviously rational whenever n is an arbitrary integer. Again, by setting $z = v\,(v-1)^{-1}$, D will go over into

$$E \qquad \ldots \qquad -\,n\,(v-1)^{-\,n-p-1}\, v^p dv,$$

which can be brought to rational terms whenever $-\,n - p$ is an arbitrary integer. This agreement between the integrable and the rationalisable cases (as I should call them) is remarkable, for the former require the number n or $-\,n-p$ to be a positive integer, the latter only to be any integer.[3]

Farewell. Moscow, November 6th, 1730.

Yours most respectfully,
Christian Goldbach.

[1] Cf. n° 11, note 12.
[2] Here, Goldbach refers in particular to his letter to Daniel Bernoulli from (May 20th) June 1st, 1730, and Bernoulli's reply from July (6th) 17th (see *Correspondance* edition, t. II, p. 367–370, 373).
[3] In the lower margin of Goldbach's letter, Euler noted: "$\frac{dx}{\sqrt[m]{bx^m + ax^n}}$ fit rationale si ponatur $\left(b + ax^{n-m}\right)^{\frac{1}{m}} = z$. $\frac{dx}{x^p \sqrt[m]{1 + x^{-n}}}$ est integrabile si $p - 1$ dividi potest per n" ("$\frac{dx}{\sqrt[m]{bx^m + ax^n}}$ becomes rational by setting $\left(b + ax^{n-m}\right)^{\frac{1}{m}} = z$. $\frac{dx}{x^p \sqrt[m]{1 + x^{-n}}}$ is integrable if $p - 1$ can be divided by n").

13
Euler to Goldbach
Petersburg, November 9th (20th), 1730

Sir,

every rational differential formula has the property that its integration can be reduced to the integration of $x^m dx$. Therefore, if we take $x^m dx$ to be absolutely integrable, we can state that all rational formulae are integrable. However, as for $m = -1$ the integral of $x^{-1}dx$ is $\log x$ and expressions of that kind are not held to be algebraic, if we regard only those formulae as integrable that yield algebraic integrals, the above proposition must be somewhat restricted and stated in the following way: all differential formulae that can be transformed into rational expressions shall be said to be integrable, except those that depend on logarithms. From this fact arises the great agreement between the integrable and the rational cases that you remarked on in your last letter. However, I do not know why we do not want to take the formulae that depend on logarithms to be integrable. The reason that it is equally hard to say what $\log x$ is as it is for $\int \frac{dx}{x}$, is obviously insufficient; the difference appears similar to me as that between $\int 2x\,dx$ and x^2. Moreover, it is a proven fact that no algebraic quantities can be indicated that are equal to logarithmic ones;[1] consequently, logarithms are as necessary for expressing every kind of quantity as the algebraic quantities, and when a formula has been transformed by integration to logarithms, we have to be as content with it as if it had been reduced to an algebraic one. So, if logarithms are admitted as being comprised among the quantities $\int x^m dx$, all rational differential formulae are integrable, and so are all irrational formulae that can be transformed into rational ones. For this reason, all the care and the effort that is made in reducing irrational formulae to rational ones is very useful. Now, considering that all rational formulae can be reduced to $x^m dx$, one might perhaps suspect that any differential formula whatsoever could be reduced in the same way, or that any irrational formula at all could be transformed into a rational one. I should be very hopeful about reaching this goal if only somebody could teach how to reduce the expression $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}}$ to rational terms. Your formula $\left(1+x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$, Sir, that becomes rational whenever either n or $n+p$ is an integer, is widely applicable; for I have noticed that several formulae, as $\dfrac{dx}{\sqrt[m]{1+x^m}}$ and $\dfrac{dx}{\sqrt[m]{x^n+x^{m+n}}}$, are contained in it that I should not have supposed to be. This theorem of yours is equivalent to the following of mine, which appears to be more general: $\dfrac{dz}{\sqrt[m]{z^p+z^q}}$ can be reduced to rational terms whenever either $\dfrac{p-m}{m\,(p-q)}$ or $\dfrac{q-m}{m\,(q-p)}$ is a rational number.[2] For integrating arbitrary rational formulae I have found the following theorem:[3]

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx\,(a-x)\,(b-x)\,(c-x)\,(d-x)\,\ldots}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\,(\gamma+x)\,(\delta+x)\,\ldots} \\
&= \frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\,\ldots}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\,\ldots}\log\frac{x+\alpha}{\alpha} + \frac{(\beta+a)\,(\beta+b)\,(\beta+c)\,\ldots}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)\,(\delta-\beta)\,\ldots}\log\frac{x+\beta}{\beta} \\
&\quad + \frac{(\gamma+a)\,(\gamma+b)\,(\gamma+c)\,\ldots}{(\alpha-\gamma)\,(\beta-\gamma)\,(\delta-\gamma)\,\ldots}\log\frac{x+\gamma}{\gamma} + \ldots \pm Ax \mp \frac{Bx^2}{2} \pm \frac{Cx^3}{3} \mp \ldots
\end{aligned}$$

None of the latter algebraic terms is present, if (letting the number of the factors $a-x$, $b-x$, $c-x$ in the numerator be m and the number of factors in the denominator n) $n=m$ or $m<n$. If $m=n+1$, only the first term Ax is present. For $m=n+2$, two terms Ax and $\dfrac{Bx^2}{2}$ have to be added; for $m=n+3$, three, and so on. Of the double signs the upper ones will be taken if n is an even number, but the lower ones if n is odd. The upper-case letters, which are valid for $m>n$, have the following values: A denotes the sum of all products that consist of as many factors among the letters α, β, γ, δ, $\ldots$, a, b, c, d, $\ldots$ as $m-n$ contains ones; B denotes the sum of all products that have as many factors, taken among those letters, as $m-n-1$ contains ones; C the sum of all products of $m-n-2$ factors, etc., all those products being excluded in which some Latin letter figures to a greater power than the first. Now this general formula for the integral comprises all rational differential formulae, as the number of factors both in the numerator and the denominator is arbitrary. The fact that x figures only to the first power in every factor does not restrict its generality, for all algebraic formulae in which x has more than one dimension can be divided into simple factors of this kind. Finally, it is easily seen that it is no obstacle to universality that x has only the coefficients $+1$ and -1.

Farewell, Sir, and be well-disposed towards your most respectful
Leonhard Euler

Petersburg, Nov. 9th, 1730.

[1] The first attempt of a proof that $\log x$ cannot be expressed as an algebraic function was given by James Gregory in *Vera Circuli & Hyperbolae Quadratura* (1667), Prop. X (cf. Dehn / Hellinger 1943). The problem was obviously impregnable – by today's standards of rigour – even in Euler's time.

[2] There is an obvious mistake: the condition ought to read "est numerus integer" ("is a whole number").
In his *Institutiones Calculi Integralis* (E. 342, Part I, § 104: O. I/11, p. 61–62), Euler later stated the three sufficient conditions for the integrability of a binomial differential (the third, trivial one is, in the present notation, $m = 1$) in almost the same form. The statement that these conditions are also necessary (so Euler's three cases of integrability are the only possible ones) was proved, for rational exponents, by Chebyshëv in 1853: if p, q and r are rational numbers and a, b are real with a, b, $r \neq 0$, then $\int x^p(a+bx^r)^q dx$ can be expressed by elementary functions if and only if at least one of the numbers $\frac{p+1}{r}$, q, and $\frac{p+1}{r}+q$ is an integer. A corresponding result for irrational exponents was obtained by Mordukhaĭ-Boltovskoĭ in 1926.

[3] The method of integrating rational functions $R(x)$ by decomposition into partial fractions was first indicated by Leibniz in 1702 and 1703; however, Leibniz was not able to remove all obstacles and in particular could not find the decomposition of $x^4 + a^4$ into real quadratic factors (for a discussion in the context of the Fundamental Theorem of Algebra, see *infra* n° 58, note 14). This led him to the assertion that $\int R(x)\,dx$ could not always be expressed using quadratures of the circle and the hyperbola (in modern terms: by algebraic, trigonometric and logarithmic functions), but that an infinitely ascending order of independent, transcendental quadratures of rational formulae would be needed.
Johann I Bernoulli (1704) circumvented Leibniz's difficulties by a different method of integration and succeeded in solving his examples; in his final paper on the subject, Op. CXIV from 1719, he also shows how to proceed with partial fraction decomposition when the denominator has complex zeros and multiple factors.
Euler discussed the decomposition into partial fractions in his *Introductio* (E. 101, t. I, §§ 39–45bis and §§ 199–210: O. I/8, p. 41–58, 213–228) and in Part II, chapter 18 of the *Institutiones calculi differentialis* (E. 212: O. I/10, p. 648–676). The integration of rational functions is described in §§ 56–86 of the first chapter of the *Institutiones calculi integralis* (E. 342: O. I/11, p. 28–51).
Euler and Goldbach resume the discussion in 1742: cf. *infra* n° 52, 58 and 66.

14

Goldbach to Euler

Moscow, November 18th / 29th, 1731

Sir,

already in a letter I wrote to Mr. Bernoulli on June 1st, 1730,[1] I remarked that the formulae

$$A \ldots \frac{dx}{(x^a+1)^{\frac{1}{n}}}, \qquad B \ldots \frac{u^b du}{(u^c+1)^{\frac{1}{n}}}, \qquad C \ldots \frac{dv}{(v^e+v^f)^{\frac{1}{n}}}$$

can be taken to be the same, and therefore I should prefer to use formula A, in which only two arbitrary exponents are present, while in both other formulae three exponents occur.

In the formula which you indicate for $\int dx\,\frac{(a-x)\,(b-x)\ \ldots}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\ \ldots}$, I do not see what happens when the denominator in the expression $\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)}\ldots$ equals 0 for $\beta=\alpha$, $\gamma=\alpha$ etc.[2]

Regarding $\int \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$, I think the integral will not be found easily except for the cases which I already mentioned in my last letter, if indeed by integrable cases we understand only those that people ordinarily say to be so; however if we pay attention rather to the nature of the matter than to the usage that has become current among mathematicians, it will become clear that, by exactly the same reason that $\frac{-2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$ can be stated to be the true integral of the differential $(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$, $\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ can also be integrated in any other case; for since $\int \left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ can be transformed, as is known, into[3]

$$A \ldots \quad \left(x + \frac{p+n+1}{n+1} A x^{\frac{n+1}{n}} + \frac{p+n+2}{n+2} B x^{\frac{n+2}{n}} + \ldots\right)\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^{p+1},$$

into

$$B \ldots \quad \left(\frac{-n}{p+1} x^{\frac{n-1}{n}} + \frac{n-1}{p+n-1} A x^{\frac{n-2}{n}} + \frac{n-2}{p+n-2} B x^{\frac{n-3}{n}} + \ldots\right)\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^{p+1}$$

or into

$$C \ldots \quad x - \frac{pn}{n+1} x^{\frac{n+1}{n}} + \frac{p \cdot p-1 \cdot n}{2 \cdot n+2} x^{\frac{n+2}{n}} - \frac{p \cdot p-1 \cdot p-2 \cdot n}{2 \cdot 3 \cdot n+3} x^{\frac{n+3}{n}} + \ldots,$$

nothing else is required in order to find the integral than to determine the general formula for the sum of the series

$$\frac{-n}{p+1} x^{n-1} + \frac{n-1}{p+n-1} A x^{\frac{n-2}{n}} + \ \ldots$$

by an expression that remains finite if n is taken to be any number that is not an integer. But how such a formula may be devised I have stated in my dissertation,[4] the only difference between these new integrals and other irrational ones that were already known (as, e. g., $(1-x)^{\frac{3}{2}}$) being that those have not yet been accepted by mathematicians, while the latter have been borne out by long use. By the way, the equation $\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx = dy$ is easily reduced to the form

$$dz = (p+1)\, z\, dv + n\, (1-z)\, v^{-1} dv,$$

in which the former's exponents n and p appear as coefficients.[5]

Farewell and be well-disposed towards me, your most devoted
Christian Goldbach.

Moscow, November 18th / 29th, 1731.

[1] See *Correspondance*, t. II, p. 367–370 (cf. n° 11, note 12, and n° 12, notes 1–2).
[2] For Euler's – somewhat tentative – answer to this legitimate question, see his reply n° 15, note 1.
[3] The first two expressions that follow were probably derived using integration by parts; the values of A, B, ... can be determined by setting the derivatives equal to $(1-x^{\frac{1}{n}})^p$.
The derivative of the third power series (C) is the binomial development of the function

$$(1-x^{\frac{1}{n}})^p = 1 - \binom{p}{1}x^{\frac{1}{n}} + \binom{p}{2}x^{\frac{2}{n}} - \binom{p}{3}x^{\frac{3}{n}} + \ldots.$$

[4] With his letter to Daniel Bernoulli from (May 20th) June 1st, 1730 (cf. *supra* note 1) Goldbach had enclosed a paper in which he must have described his results on the integration of algebraic differentials. Even though this was explicitly intended for the Academy's printers, it was never published: indeed it did not leave any trace in the Petersburg Academy's records and does not seem to have been preserved.
[5] This is not correct: see Euler's reply n° 15, note 2, and Goldbach's amendment n° 16, note 1.

15
Euler to Goldbach
Petersburg, November 25th (December 6th), 1731

Sir,

indeed it is difficult to see what happens to the integral of the formula

$$dx\,\frac{(a-x)\,(b-x)\,(c-x)\ \ldots}{(\alpha+x)\,(\beta+x)\,(\gamma+x)\ \ldots}$$

when some of the letters α, β, γ, ... are equal.[1] In that case, the denominators in some terms of my integral vanish, and consequently the integral itself appears to become infinite. On the other hand, if we pay attention to the signs of those terms, they will rather seem to destroy one another and to amount to nothing. However, none of these two considerations is right; for all those terms that increase to infinity taken together will actually give a definite finite value, which I investigate in the following way: Let $\beta = \alpha$; then the difficulty resides in these two terms of the integral

$$\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \ldots}{(\beta-\alpha)\,(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \ldots}\log\frac{x+\alpha}{\alpha} + \frac{(\beta+a)\,(\beta+b)\,(\beta+c)\ \ldots}{(\alpha-\beta)\,(\gamma-\beta)\,(\delta-\beta)\ \ldots}\log\frac{x+\beta}{\beta}.$$

Now, in order to determine their value I set $\beta = \alpha + d\alpha$, where $d\alpha$ denotes some infinitely small quantity; so this means the same thing as if I had set $\beta = \alpha$. For shortness I write P for $\dfrac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \ldots}{(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \ldots}$. Then I take the differential of this fraction, taking only α to be variable, and call this $Q\,d\alpha$. Obviously $\dfrac{(\beta+a)\,(\beta+b)\,(\beta+c)\ \ldots}{(\gamma-\beta)\,(\delta-\beta)\ \ldots} = P + Q\,d\alpha$. But $\beta - \alpha = d\alpha$, $\alpha - \beta = -\,d\alpha$, and

$$\log\frac{x+\beta}{\beta} = \log\frac{x+\alpha+d\alpha}{\alpha+d\alpha} = \log\frac{x+\alpha}{\alpha} - \frac{x\,d\alpha}{\alpha\,(\alpha+x)}.$$

When this is substituted, the two terms in question will change into

$$\frac{P}{d\alpha}\log\frac{x+\alpha}{\alpha}-\frac{P}{d\alpha}\log\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{Px}{\alpha\,(\alpha+x)}-Q\,\log\frac{x+\alpha}{\alpha}+\frac{Qx\,d\alpha}{\alpha\,(\alpha+x)}.$$

Now the first two terms of this cancel each other, and the last one vanishes with respect to the rest, so that we get $\dfrac{Px}{\alpha\,(\alpha+x)}-Q\,\log\dfrac{x+\alpha}{\alpha}$ for the value of the two terms in question, which must be substituted for them in the integral. But as I have defined

$$P=\frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \dots}{(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \dots},$$

we will have

$$Q = \frac{(\alpha+a)\,(\alpha+b)\,(\alpha+c)\ \dots}{(\gamma-\alpha)\,(\delta-\alpha)\ \dots} \left(\frac{1}{\alpha+a}+\frac{1}{\alpha+b}+\frac{1}{\alpha+c}+\dots+\frac{1}{\gamma-\alpha}+\frac{1}{\delta-\alpha}+\dots\right).$$

Here it must be noted that for $\beta=\alpha$ not all of this quantity is transcendental, but part of it is algebraic, while in general both terms are transcendental. When moreover $\gamma=\alpha$, the value of the infinite terms will be determined in the same way by setting $\gamma=\alpha+d\alpha$.

Regarding the formula $\int\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx$ I do not doubt, Sir, that all its integrable cases have been found by you; but with respect to the reduction of the equation $\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^p dx=dy$ to the form $dz=(p+1)\;z\,dv+n\,(1-z)\;dv:v$, I have some doubt,[2] as the latter equation is never absolutely integrable, at least if we do not neglect to add a constant. Let us take the simplest case, where $p=1$ and $n=1$; then we have $dz-2z\,dv+\dfrac{z\,dv}{v}=\dfrac{dv}{v}$. Multiplying this[3] by $\mathrm{e}^{\log v-2v}$ or, what is the same, by $\mathrm{e}^{-2v}v$ (e denoting the number[4] whose hyperbolic logarithm equals 1), we get $\mathrm{e}^{-2v}v\,dz-2\mathrm{e}^{-2v}zv\,dv+\mathrm{e}^{-2v}z\,dv=\mathrm{e}^{-2v}dv$, which by integration gives $\mathrm{e}^{-2v}vz=\text{const.}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2v}$ or $2vz+1=a\mathrm{e}^{2v}$; unless $a=0$, this is not algebraic and can therefore not be reduced to the form $x-\frac{1}{2}x^2=y+b$ by algebraic substitutions. The argument for the general formula is similar, for this cannot either be integrated to yield an algebraic equation in any case, except by setting the constant to be added equal to 0.

Recently, when I considered the cases of separability of Riccati's formula,[5] I discovered the following universal substitution, by which the equation $a\,dq=q^2dp-dp$ can be reduced to the form $a\,dy=y^2dx-x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$. Let

$p = (2n+1)\,x^{\frac{1}{2n+1}}$ and

$$q = -\frac{a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-5a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{-7a}{p} + \cfrac{1}{\dots \cfrac{1}{\cfrac{-(2n-1)\,a}{p} + \cfrac{1}{x^{\frac{2n}{2n+1}}y}}}}}}.$$

This substitution works only when n is a positive integer; I have a separate one when it is negative. Whenever n is a positive integer, this sequence of fractions breaks off and it is easily determined what has to be substituted for q. Conversely I can also transform the equation $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}dx$ into $a\,dq = q^2dp - dp$ by the substitutions $x = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$ and

$$y \quad \left((p:2n+1)^{2n}\right) = \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)\,a}{p} + \cfrac{1}{\dots \cfrac{3a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{a}{p} + q}}}}}.$$

Here it is easily seen that, if only the values of these continued fractions could be determined when n denotes a fractional number, then the formula $a\,dy = y^2dx - x^m dx$ could universally be constructed. But this interpolation depends on finding a general term for the series defined by the following property: if the xth term is A and the one following it B, then the $(x+2)$-th term[6] must be $(2m+1)\,B + A$, i. e., for the numbers in the series 1, 1, 4, 21, 151, 1380, ...

I have thought some more about the form $2^n - 1$ that cannot be a prime number unless n is prime, and examined those cases where $2^n - 1$ is not prime although n is. These exceptions are $n = 11$, $n = 23$, and $n = 83$; all other prime numbers smaller than 100, when substituted for n, make $2^n - 1$ a prime.[7] Now $2^{11} - 1$ can be divided by 23, $2^{23} - 1$ by 47, and $2^{83} - 1$ by 167. The reason for this lies in the following rather elegant theorem: $2^n - 1$ is divisible by $n+1$ whenever $n+1$ is a prime number.[8] Thus $2^{22} - 1$ is divisible by 23. Frequently $2^{\frac{n}{2}} - 1$, $2^{\frac{n}{4}} - 1$, etc. can also be divided by $n+1$, and on this basis, the examination of the cases in which $2^n - 1$ is a prime number is not difficult.[9]

Farewell and be well-disposed, Sir, towards your most obliged
Leonhard Euler

Petersburg, Nov. 25th, 1731.

[1] Cf. nº 14, note 2.

[2] Cf. nº 14, note 5.

[3] The first examples of using integrating factors for solving differential equations can be traced to the work of Johann I Bernoulli (from the early 1690s, but published only in 1742 as Op. CXLIX in his *Opera*, t. III, p. 365–558), his nephew Nicolaus I and his eldest son Nicolaus II (1720/21: see Engelsman 1984, Jardine 2010). Euler, who had already employed this technique in E. 10, later substantially developed it in *Institutiones calculi integralis* (E. 342: see in particular Section II, Ch. II–III of Part I: O. I/11, p. 282–343).

[4] Leibniz seems to have been the first to note that it would be useful to have a special, fixed sign for the base of the natural logarithm: in his letters to Huygens from 1690/91 he used b to denote this and wrote explicitly: "b estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1". Johann Bernoulli initially employed a, later c with this meaning; his sons and Euler in E. 10 from 1728 followed suit.
The letter e to denote the base of the natural logarithm appears for the first time in a paper on ballistic experiments written in the late 1720s, but published only in 1862. In analyzing data from 1727, Euler writes: "Let us write e for the number whose logarithm is 1; this is 2.718 281 8 . . .; its logarithm according to Vlacq [i. e., in Adriaan Vlacq's 1628 table of base 10 logarithms] is 0.434 294 4" ("Scribatur pro numero, cujus logarithmus est unitas, e, qui est 2, 7182818 . . ., cujus logarithmus secundum Vlacq[ium] est 0, 4342944": E. 853: O. II/14, p. 468–469).
There has been a lot of speculation about the reasons for this momentous change in notation: in fact, c had already been used in the paper in question for the diameter of the cannonball, but a or b (for "base") would still have been available. The conjecture that Euler wanted to leave a memorial to himself by using his family name's first letter is inconsistent both with the private nature of the note and with everything we know about his self-perception; all things considered it seems most plausible he just alluded to the word "exponential". In any case, from 1728 onwards Euler mostly (but not exclusively) denoted the base of the natural logarithm by e. After the 1736 *Mechanica* (E. 15/16), the systematic and clearly explained account of exponential and logarithmic calculation in t. I of the *Introductio* (E. 101, ch. VI–VII) resulted in the almost general acceptance of the notation in the second half of the 18th century.
The questionable designation "Euler's number" for e seems to have arisen only in the 20th century: the classical works on the history of mathematics by Cantor (1880), Cajori (1928) and Tropfke (1930) do not use it, and Eli Maor's recent monograph *e: the Story of a Number* (1994) also does without it. Euler's own remark in an earlier letter of the present correspondence (see *supra* nº 3^{d}, note 3) would rather suggest using "Napier's number" for e; however, the table in the second English edition of Napier's *Descriptio* (1618) that Euler mentions is probably by William Oughtred!
In scientific usage expressions such as "Euler's number", "Euler's constant", and "Eulerian numbers" refer to other items: the ("Euler-Mascheroni") constant γ that occurs in summing the harmonic series, a dimensionless quantity describing pressure drop in fluid flow, and several sequences of integers arising in combinatorics.

[5] The first special case of what was later called "Riccati's differential equation", namely $xx\,dx + yy\,dx = aa\,dy$ (i. e., in modern notation, $a^2y' = x^2 + y^2$), occurred in Johann I Bernoulli's Op. XX from 1694. Jacob Bernoulli solved the problem (see his letters to Leibniz dated November 15th, 1702, and October 3rd, 1703: Jac. B. *Briefe*, p. 103, 113–114) and indicated the more general form $y' + P(x)\,y + Q(x)\,y^n = 0$ now known as the "Bernoulli equation".
In a publication in the *Acta Eruditorum* that appeared in 1722, the Venetian amateur mathematician Count Jacopo Riccati rekindled the question by asking for which values of n the differential equation $y' + ay^2 = bx^n$ can be solved by the separation of variables. Solutions were found – besides Riccati himself – by four members of the Bernoulli family: Johann I, Nicolaus I, Nicolaus II and Daniel. In his *Exercitationes quaedam mathematicae* (1724),

Daniel showed that Riccati's equation can be solved by elementary functions for $n = -2$ and for $n = -\dfrac{4k}{2k \pm 1}$ (where k is any non-negative integer).
During the same period, the problem had been discussed extensively in the correspondence between the Bernoulli brothers and Goldbach (see, e. g., Goldbach's letter to Nicolaus II from September 11th, 1721: *Correspondance*, t. II, p. 106–109).
Euler studied the Riccati equation in E. 11 and E. 31; he published his solution using continued fractions – as sketched here – in E. 71 (see also n° 17 and n° 19 of the present correspondence). Later he continued his exploration in E. 595 and E. 751; his methods were taken up by Lagrange in 1779. Only in 1841, Liouville succeeded in proving that the Riccati equation cannot be solved by elementary functions for any other values of n than those found by the Bernoullis.
The Riccati equation and its generalisations remained an important testing ground for methods in the field of non-linear differential equations, and there is an extensive literature. For a study of the historical background, see in particular Bottazzini 1996, p. 142–188.

[6] In the following recursion formula, x and m denote the same index; Goldbach was misled by this and only understood when Euler elaborated (cf. n° 16, note 2, n° 17, note 3, and n° 18, note 1).

[7] Cf. n° 5, note 4.
Euler's claim is not correct as stated: in fact the Mersenne number $2^n - 1$ is also composite for several other values of n smaller than 100 (actually Euler had already observed in n° 5 that M_{37} is divisible by 223, and E. 26 from 1732 indicates three more cases). The following would be a correct version of Euler's assertion: $q = 11, 23, 83$ are the only primes $q < 100$ with the property that $p = 2q + 1$ is also prime and $p \mid M_q$.
The reason why the largest known primes usually are Mersenne primes is the fact that there is a very efficient primality test (the Lucas-Lehmer test) for numbers of the form $N = 2^n - 1$ based on the fact that all factors of $N + 1$ are known. It is believed that there are infinitely many Mersenne primes (in 2013, 48 were known); heuristic arguments due to Wagstaff, Lenstra and Pomerance (see, e. g., Wagstaff 1983) suggest that the number of Mersenne primes less than x should be approximately $\dfrac{\mathrm{e}^\gamma}{\log 2} \log\log x$. For the history of Mersenne primes and factorisation techniques, see H.C. Williams 1998.
Euler returned to the search for Mersenne primes (and the even perfect numbers that result from them) much later in his career: see *infra* n° 163, notes 13–15.

[8] The observation that $2^n - 1$ is divisible by $n + 1$ whenever $n + 1$ is an odd prime is a special case of "Fermat's Little Theorem" (cf. n° 2, note 7). Euler stated his results without proof in E. 26. For the general statement of the theorem and Euler's various proofs, see n° 47, note 3.

[9] The question whether the expressions $2^{(p-1)/2} - 1$ and $2^{(p-1)/4} - 1$, for odd primes p, are divisible by p is connected with the quadratic and the biquadratic character of 2 modulo p. Euler gives explicit criteria for the cubic and quartic characters of small numbers in his project for a systematic treatise on number theory that was, however, published only in 1849 (see E. 792, *Tractatus de numerorum doctrina*, § 370–461: O. I/5, p. 243–259).

16
Goldbach to Euler
December 6th / 17th, 1731

Sir,

first of all I have to correct an equation that has been badly copied in my last letter.[1] I should have written: in any instance of the numbers p and n where the equation $(A.)$ $(1-v)\,v\,dz = (n+p+1)\,zv\,dv + n\,(1-z)\,dv$ is integrable, the equation $(B.)$ $(1-x^{\frac{1}{n}})^p dx = dy$ is also integrable, as you will recognise upon examination.

The other equation $(C.)$ $x^{\frac{\mp 4n}{\pm 2n+1}} dx - y^2 dx = dy$ is transformed into $(D.)$ $dz - v^2 dz \pm 2nvz^{-1} dz = dv$ in a similar way; but I do not see in what manner the separation of the variables in equation $(C.)$ or $(D.)$ depends on the general term of the series that has $A + (2m+1)\,B = C$ for its law of progression.[2] More about the rest later.

Farewell. Moscow, December 6th / 17th, 1731.

Yours most respectfully,
Christian Goldbach.

[1] Cf. n° 14, note 5, and n° 15, note 2.
[2] Cf. n° 15, note 6, Euler's reply n° 17, note 3, and n° 18, note 1.

17
Euler to Goldbach
[Petersburg], January 3rd (14th), 1732

Sir,

any equation that consists of three terms is easily reduced to the form

$$x^m dx + ay^n dx + b\,dy = 0;$$

by the substitution

$$x = v^{\frac{1}{mn+n-m}} z^{\frac{n-1}{mn+n-m}} \qquad \text{and} \qquad y = v^{\frac{m+1}{mn+n-m}} z^{\frac{-1}{mn+n-m}},$$

this is transformed into the second-degree equation

$$z^2 dv + (n-1)vz\,dz + avz\,dv + a\,(n-1)\,v^2 dz + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0.$$

If $n = 2$, we have Riccati's formula $x^m dx + ay^2 dx + b\,dy = 0$, and the corresponding second-degree equation is

$$z^2 dv + vz\,dz + avz\,dv + av^2 dz + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0;$$

here, however, the examination of the separable cases appears more difficult to me than for $x^m dx + ay^2 dx + b\,dy = 0$ itself. For $n = 1$, the equation into which $x^m dx + ay\,dx + b\,dy = 0$ is transformed is

$$z^2 dv + avz\,dv + b\,(m+1)\,z\,dv - bv\,dz = 0;$$

here one should think of z as having only one dimension.[1]

The universal reduction of the equation $a\,dy = y^2 dx - x^{\frac{-4n}{2n+1}}\,dx$, where n denotes any number,[2] to the form $a\,dq = q^2 dp - dp$ depends on finding a general term for the series $\overset{m}{A}$, $\overset{m+1}{B}$, $\overset{m+2}{(2m+1)\,B + A}$, as I show thus: The reduction is effected by substituting $x = \left(\dfrac{p}{2n+1}\right)^{2n+1}$ and

$$y\left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n} = \cfrac{1}{\cfrac{(2n-1)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-3)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{(2n-5)\,a}{p} + \cfrac{1}{\cdots\ \cfrac{1}{\cfrac{1a}{p} + q}}}}}.$$

This continued-fraction formula yields for $n = 1$ the value $\dfrac{1}{\dfrac{a}{p} + q}$ or (setting $r = \dfrac{a}{p}$) $\dfrac{1}{r+q}$. For $n = 2$, we get $\dfrac{1}{3r + \dfrac{1}{r+q}} = \dfrac{r+q}{3r^2 + 3rq + 1}$. For $n = 3$, it becomes

$$\cfrac{1}{5r + \cfrac{1}{3r + \cfrac{1}{r+q}}} = \cfrac{1}{5r + \cfrac{r+q}{3r^2+3rq+1}} = \frac{3r^2 + 3rq + 1}{15r^3 + 15r^2 q + 6r + q}.$$

Setting, for brevity's sake, $r + q = s$ or $q = s - r$, and collecting the values of the letter n corresponding to the given formula into a series, we get

$$\begin{array}{lcccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \dfrac{1}{s}, & \dfrac{s}{3rs+1}, & \dfrac{3rs+1}{15r^2 s + 5r + s}, & \dfrac{15r^2 s + 5r + s}{105r^3 s + 35r^2 + 10rs + 1}, \quad \text{etc.} \end{array}$$

In this series, the numerator of any fraction is evidently the denominator of the preceding one; and if the term of order m is $\dfrac{A}{B}$, the following one of index $m+1$ equals $\dfrac{B}{(2m+1)\,B + A}$. By this argument it is obvious, as I stated in my last letter,[3] that if a general term for the series $\overset{m}{A}$, $\overset{m+1}{B}$, $(2m+1)\overset{m+2}{B}+A$ were known, one should have a universal separation and integration of Riccati's formula. In order for this series to be determined, the first term 1 and the second term s must be indicated. Then, by making $n = m$ and calculating A and B from the general term, the substitution $x = \left(\frac{p}{2m+1}\right)^{2m+1}$, $y\left(\frac{p}{2m+1}\right)^{2m} = \frac{A}{B}$ will reduce the equation $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ to the form $a\,dq = q^2dp - dp$; thus it can generally be integrated by using logarithms. The equation $a\,dy = y^2dx - x^{\frac{-4m}{2m+1}}dx$ is reduced, in the manner indicated at the beginning, to

$$z^2dv + vz\,dz - vz\,dv - v^2dz + a\frac{-2m+1}{2m+1}zdv - av\,dz = 0.$$

Consequently, it will be reduced to the form $a\,dq = q^2dp - dp$ by the substitution $v = \frac{Ap}{(2m+1)\,B}$, $z = \frac{Bp}{(2m+1)\,A}$.

Farewell and be well-disposed, Sir, towards your most respectful
Leonhard Euler

At home, Jan. 3rd, 1732.

[1] In the original equation y and x^m are added, so they are considered to be "quantities of the same dimension"; consequently, $z = \frac{x^{m+1}}{y}$ and x are of the same dimension (in the general case, a similar argument shows that z has the same dimension as $x^{1+m\cdot\frac{n-1}{n}}$).

[2] As several earlier authors had already noted (cf. n° 15, note 5), the Riccati equation $a\,dy = y^2dx - x^m dx$ has an elementary solution whenever the exponent m is of the form $\frac{-4n}{2n+1}$ for some integer n.
Modern accounts of its solution by continued fractions can be found in Khovanskiĭ 1963, p. 130, Ku 1972 and Khrushchev 2006; see also Bittanti 1996.

[3] See n° 15, note 6.

18
Goldbach to Euler
Moscow, January 15th / 26th, 1732

Sir,

in your last letter but one I had not noticed that in explaining the formula A, B, $(2m+1)\,B + A$, you take m to be the index pertaining to the term A; now, from the last letter you recently wrote to me, I understand this perfectly[1] and I likewise see that $\int(1-y^{\frac{1}{n}})^p dy$ depends on the general formula for the sum of the series that has $((p+n+x) \gtrless (n \pm x))\ A = B$ for its law of progression;[2] here by x I mean the index corresponding to the term A, and by $\gtrless$ the sign for an ambiguous division, so that $n+x$ is the denominator when of the signs $\pm$ the upper one is taken, $n-x$ is the numerator when the lower one is taken.[3] Moreover, the same integral also depends on the general term for the sum of the series that has $-\dfrac{(n+x-1)(p-x+1)}{x(n+x)}A = B$ for its law of progression; but I suppose it happens very rarely that such a general term can be found in an easier way than the integral itself which is sought.

Recently I happened to notice that for fifth-degree equations of the form[4]

$$x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(\frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p}$$

an algebraic root can be calculated, whatever numbers are given for m and p; I think this is not to be scorned in all those instances where the number p in some given equation $x^5 + \dfrac{5m}{2}x = n$ can be easily determined from m and n.[5]

Farewell. Yours most respectfully,
Christian Goldbach.

Moscow, January 15 / 26, 1732.

[1] Cf. n° 15, note 6.

[2] This series and the one that follows come from the development of $\int_0^x (1 - t^{\frac{1}{n}})\,dt$ which Goldbach had indicated in n° 14, note 3.

[3] The recurrences that Goldbach refers to are, in modern notation,

$$a_{k+1} = \frac{p+n+k}{n+k}a_k \qquad \text{and} \qquad a_{k+1} = \frac{n-k}{p+n+k}a_k.$$

The term "divisio ambigua" and the notation $s \gtrless t$ used here for "either $\frac{s}{t}$ or $\frac{t}{s}$" seem to be *ad hoc* inventions of Goldbach's; the editors have not found them in any other source.

[4] In Goldbach's copy, the text breaks off here in mid-sentence: In the margin he noted: "vid. inf. p. " ("see below p. "), but the intended reference is missing and could not be identified.

[5] Let $\alpha = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}$ and $\alpha' = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}$; observe that $\alpha + \alpha' = p$ and $\alpha\alpha' = m^5$, so α and α' are the roots of the quadratic resolvent $z^2 - pz + m^5$.

The equation $\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\alpha'} + 4p} = n$ is equivalent to $\sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\alpha'} = 4n^2 - 4p$. Setting $x = \sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\alpha'}$, we find

$$\begin{aligned} x^3 &= \sqrt[5]{\alpha}^{\,3} + \sqrt[5]{\alpha'}^{\,3} + 3m\left(\sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\alpha'}\right), \\ x^5 &= \alpha + \alpha' + 5m\left(\sqrt[5]{\alpha}^{\,3} + \sqrt[5]{\alpha'}^{\,3}\right) + 10m^2\left(\sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\alpha'}\right) \\ &= p + 5m(x^3 - 3mx) + 10m^2x = 5mx^3 - 5m^2x + p. \end{aligned}$$

Since $x = 4n^2 - 4p$, we have $p = n^2 - \frac{x}{4}$, and this implies

$$x^5 - 5mx^3 + \left(5m^2 + \tfrac{1}{4}\right)x - n^2 = 0.$$

Solving this fifth-degree equation for $x = 4(n^2 - p)$ then gives p.

See Euler's reply n° 19, where he takes the opportunity to present his ideas on the solution of algebraic equations of degree ≥ 5 by approximation.

19

EULER TO GOLDBACH

Petersburg, January 31st (February 11th), 1732

Sir,

you have written[1] that you can indicate a root of the fifth-degree equation

$$x^5 + \frac{5m}{2}x = \frac{n}{2}$$

whenever

$$n = \sqrt{\left(\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{pp}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - m^5}\right)^{\frac{1}{5}} + 4p},$$

where, however, the calculation of the letter p depends again on finding a root of a fifth-degree equation. I think this invention gives me a convenient opportunity to communicate to you what I myself have observed about approximations to the roots of equations. I have noticed that just two methods are usually applied to this question: for the first, one substitutes in some places where the unknown x appears in the equation, another quantity that differs not much from it, then calculates this x, inserts the value for x just found in some places for x, and finally calculates x again. By means of this operation, the more often it is repeated the closer the quantity determined will be to x itself. Take, for example, the equation $x^2 = 3x + 20$ and substitute 6 for x; the resulting equation is $x = \frac{3x+20}{x} = 6\frac{1}{3}$; now by making $x = 6\frac{1}{3}$, you will get $x = 6\frac{3}{19}$ and again in the same manner $x = 6\frac{29}{117}$, and finally x will be determined very exactly. The same also applies in general: putting in at the start $x = a$, after one operation $x = 3 + \frac{20}{a}$ will result, after two $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}$, after three $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{a}}}$, and after infinitely many $x = 3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{3 + \cfrac{20}{\cdots}}}}$. Consequently the value of this quantity, a continued fraction, is known:[2] it is $3 + \frac{\sqrt{89}}{2}$. The quantity I proposed for constructing the Riccati formula is of the same kind.

The method our Mr. Bernoulli gave for determining very closely the roots of equations by recurrent series, as he calls them, also rests on the same idea.[3] This is how I deduce it: Starting with the quadratic equation $x^2 = ax + b$, write it as

$x = a + \dfrac{b}{x}$, insert, in place of x, $\dfrac{p}{q}$, which is close to it; substituting this, $x = \dfrac{aq + bp}{q}$ is even closer; when this is inserted for x, one gets $x = \dfrac{a^2q + abp + bq}{aq + bp}$, which is again much closer, and so on. From these values for x one can easily form the series p, q, $aq + bp$, $a^2q + abp + bq$, ..., which has the property A, B, $aB + bA$,[4] and thus is recurrent. If any of its terms is divided by the preceding one, the quotient will therefore give a value for x that is the closer the longer the series is continued. The same thing also happens if arbitrary numbers are taken for p and q; but the more $\dfrac{q}{p}$ differs from x the longer the series must be continued. If the proposed equation is cubic, $x^3 = ax^2 + bx + c$, change it into $x = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$. To find its root, one has to suppose for x two arbitrary values of the form $\dfrac{q}{p}$ and $\dfrac{p}{n}$; from these one will have $x^2 = \dfrac{q}{n}$, and consequently $x = \dfrac{aq + bp + cn}{q}$. This leads to the series n, p, q, $aq + bp + cn$, ..., which is again recurrent, and its every term divided by the preceding one gives x approximately. In a similar way, the series m, n, p, q, $aq + bp + cn + dm$, ... serves to calculate a root of the equation $x = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{d}{x^3}$. A considerable simplification results here from supposing at the start not one but several values for x; for this makes it unnecessary to take so many powers, and therefore the series can easily be continued. Possibly there are also other convenient ways in which equations can be displayed and reasonable values for x assumed, so that an even simpler series results by which the root may be calculated.

The other approximation method is the one used most frequently; it consists in first guessing some value close to x and then calculating a correction for it as precisely as possible. Consider in this way the equation $x^2 = ax + b$, and let it be known that x nearly equals c. Therefore set $x = c + z$, where z will be very small with respect to c; so for x^2 one can assume $c^2 + 2cz$, and consequently $c^2 + 2cz = ac + az + b$, $z = \dfrac{c^2 - ac - b}{a - 2c}$, and $x = \dfrac{c^2 + b}{2c - a}$. Therefore, substituting now $\dfrac{c^2 + b}{2c - a}$ for c, the much more exact value $x = \dfrac{c^4 + 6bc^2 + b^2 - 4abc + a^2b}{4c^3 + 4bc - 6ac^2 + 4a^2c - 2ab - a^3}$ is produced, and so on. This method has been greatly promoted by Mr. Taylor.[5] He proposes to reduce the equation in which the unknown x occurs to the form $X = 0$, where X denotes any quantity composed from x and known quantities. Then he assumes some quantity z to be close to x, and substitutes this for x in X; there results a quantity composed of z and known quantities, which is called y; for as z is not equal to x, the quantity that results cannot be 0 either. After this, compute the differentials, taking y and z to be variable; according to him, x will be nearly equal to $\dfrac{z\,dy - y\,dz}{dy}$, and this holds not only for algebraic, but also for transcendental equations. In order to solve $\sqrt[2]{7x-x^2}-\sqrt[3]{9+x^3}=0$, let $x=z$; then $\sqrt[2]{7z-z^2}-\sqrt[3]{9+z^3}=y$; from this,

$$dy=\frac{7dz-2z\,dz}{2\sqrt[2]{7z-z^2}}-\frac{z^2dz}{\sqrt[3]{(9+z^3)^2}},$$

and therefore

$$x=z-\frac{2y\sqrt[2]{7z-z^2}\cdot\sqrt[3]{(9+z^3)^2}}{(7-2z)\sqrt[3]{(9+z^3)^2}-2z^2\sqrt{7z-z^2}};$$

setting $z=1$, y will equal $\sqrt{6}-\sqrt[3]{10}$, and consequently[6]

$$x=1-\frac{12\sqrt[3]{100}+20\sqrt{6}}{5\sqrt[3]{100}-2\sqrt{6}}=\frac{18\sqrt{6}-7\sqrt[3]{100}}{5\sqrt[3]{100}-2\sqrt{6}}.$$

After this, he treats the same problem even more precisely, taking x to be equal to $z+v$. Now v has to be calculated from the equation

$$y+\frac{v\,dy}{1\cdot dz}+\frac{v^2ddy}{1\cdot 2\cdot dz^2}+\frac{v^3d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dz^3}+\ \dots\ =0.$$

If v could be determined exactly from this equation, x should also be truly equal to $z+v$; but in second differentiations dz is taken to be constant. I have found v to be approximately equal to

$$\frac{-\,y\,dz}{dy}\cdot\frac{\dfrac{-\,y^2dz\,d^2y}{1\cdot 2\cdot dy}+\dfrac{y^3dz\,d^3y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dy^3}-\dfrac{y^4dz\,d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot dy^4}+\dots}{dy-\dfrac{y\,d^2y}{1\cdot dy}+\dfrac{y^2d^3y}{1\cdot 2\cdot dy^2}-\dfrac{y^3d^4y}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dy^3}+\dots}$$

For $x^3-a=0$, we have $z^3-a=y$, $dy=3z^2dz$, $ddy=6z\,dz^2$ and $d^3y=6dz^3$. Consequently,

$$v=\frac{-\,y}{3z^2}\cdot\frac{\dfrac{-\,y^2}{3z^3}+\dfrac{y^3}{27z^6}}{3z^2-\dfrac{2y}{z}+\dfrac{y^2}{3z^4}}=\frac{-3yz^2+\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{2y^3}{9z^4}}{9z^4-6yz+\dfrac{y^2}{z^2}}$$

and

$$x=\frac{16z^9+51az^6+11a^2z^3+2a^3}{36z^8+36az^5+9a^2z^2}.$$

Indeed this method is too cumbersome if you want to repeat it several times, inserting again for z what has been found for x; but perhaps some simplifications will be devised to make it just as easy to handle as the first method.[7]

On the other hand, in order to carry both methods further, one needs the series defined by the property $\overset{n}{x}$, $\overset{n+1}{P}$, $\overset{n+2}{X}$; this means X is determined by P in the same way that P is determined by x. For the equation $x^2 = ax + b$, the values for x that are successively calculated are

$$c,\ \frac{c^2+b}{2c-a},\ \frac{c^4+6bc^2+b^2-4abc+a^2b}{4c^3+4bc-6ac^2+4a^2c-2ab-a^3},\ \ldots,\ A,\ \frac{A^2+b}{2A-a}.$$

Now, in whatever way P is given by x, I have found that

$$X = P + \frac{(P-x)\,dP}{1\cdot dx} + \frac{(P-x)^2\,ddP}{1\cdot 2\cdot dx^2} + \frac{(P-x)^3\,d^3P}{1\cdot 2\cdot 3\cdot dx^3} + \ldots .$$

An equation of this kind can also be given for the curve which for the arguments 1, 2, 3, 4, ... has the corresponding values 1, 2, 6, 24, 120, ...; obviously, its equation will contain differentials of every degree.[8]

Farewell and be well-disposed, Sir, towards your most respectful
Leonhard Euler

Petersburg, Jan. 31st, 1732.

[1] Cf. nº 18, note 5.

[2] Continued fractions have a long history; since they are intimately related to the Euclidean algorithm, it is difficult to determine when exactly they first occurred. Fowler 1987 attempts a fascinating search for traces in antiquity. Brezinski's *History of Continued Fractions* (1991) mentions the work of Leonardo da Pisa (Fibonacci), Bombelli (who cites al-Khwarizmi and Pacioli as his sources), Cataldi, Wallis and Huygens.
The first explicit example of a "fraction having a continually fractional denominator" appears in Wallis's *Arithmetica Infinitorum* (1656), p. 182, where it is attributed to Brouncker. The regularity of the simple continued fraction for $\mathrm{e}-1$, generated by the Euclidean algorithm, was first noted by Cotes in 1714 (see Gowing 1983, Fowler 1992).
Euler was the first to study continued fractions systematically: see, e. g., E. 71 and t. I, ch. XVIII of the *Introductio* (E. 101: O. I/8, p. 362–390).

[3] In 1728, Daniel Bernoulli had proposed a method for approximating roots of polynomials that was published in 1732 in the Petersburg *Commentarii*; before that, it had been discussed in his correspondence with Goldbach (cf. *Correspondance*, t. II, p. 271–286). Bernoulli's method was further developed by Euler in the *Introductio* (E. 101, ch. XVII: O. I/8, p. 339–361) and by Jacobi (1835a); it is still being used today (see, e. g., Mignotte and Stefanescu 2003).
On the other hand, Euler also noted that there are many cases where Bernoulli's method does not work. This question was later studied by Lagrange (1808), Dandelin (1826), Lobachevski (1834), Gräffe (1837) and Encke (1841).

[4] In modern notation: $x_{k+2} = ax_{k+1} + bx_k$.

[5] The iterative method that Euler attributes to Taylor was originally discovered by Newton around 1668/69 (see Newton 1711, 1736); a brief exposition can be found in Wallis's *Treatise of Algebra* (1685). In his 1690 *Analysis Aequationum Universalis*, Joseph Raphson developed a slightly different, handier form. Halley (1694) suggested using quadratic polynomials for approximating the function. The account of the method that Euler is referring to here was published by Brook Taylor in his *Methodus Incrementorum Directa & Inversa* (1715). It was not until 1740 that Thomas Simpson discovered what we today call "Newton's method" for finding approximations of roots (see Kollerstrom 1992).

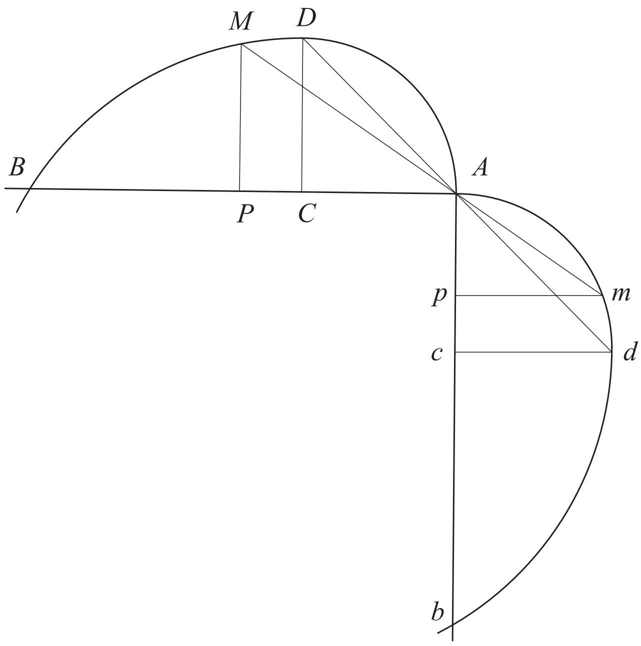
[6] In the next formula, the second term follows an older notational convention for sums in the numerators of fractions, where the minus sign in front of the fraction only affects the first term; in today's notation, the formula should be understood as

$$x = 1 - \frac{12\sqrt[3]{100} - 20\sqrt{6}}{5\sqrt[3]{100} - 2\sqrt{6}} = \ldots .$$

[7] Euler later developed this idea further: see *Institutiones calculi differentialis*, Part II, chapter 9 (E. 212: O. I/10, p. 422–445).
[8] The differentiation of what is now called the Gamma function will resurface later in the present correspondence: see *infra* nº 80, note 11.

20
Euler to Goldbach
[Petersburg], after January 1732[1]

Problem: The curve Amb being formed from the curve AMB by taking the line segment MAm through the fixed point A to be always of the same length, find the cases in which these two curves turn out to be similar and equal with respect to the mutually perpendicular axes AB and Ab.[2]



Solution: Setting the constant length $Mm = Dd = AB$ equal to $2a$, let $AP = x$, $PM = y$, and take another variable z; let Q be some function of z which goes over to its negative when z is made negative (some such functions are mz, $mz^3 + nz$, etc.). The coordinates x and y will be determined from z in the following way:

$$x = \frac{(a+z)\sqrt{a^2+z^2+2Q}}{\sqrt{2}\,(a^2+z^2)};$$

$$y = \frac{(a+z)\sqrt{a^2+z^2-2Q}}{\sqrt{2}\,(a^2+z^2)}.$$

Thus by eliminating z and Q, there will result an infinity of equations between x and y, and consequently innumerable curves AMB satisfying the condition of the problem, which is what was to be found.

Corollary 1: $\sqrt{x^2+y^2}=a+z$ and $x:y=\sqrt{a^2+z^2+2Q}:\sqrt{a^2+z^2-2Q}$.

Corollary 2: Taking $AC=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $CD=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ and $AD=a$, for every point D there is a homologous point d on the other curve which corresponds to it by its formation.

Example: Let $Q=naz$; then $x^2:y^2=\left(a^2+2naz+z^2\right):\left(a^2-2naz+z^2\right)$ or

$$\begin{aligned} & x^2\begin{pmatrix} 2a^2+x^2+y^2 & -2a\sqrt{x^2+y^2} \\ +2na^2 & -2na\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} \\ = \quad & y^2\begin{pmatrix} 2a^2+x^2+y^2 & -2a\sqrt{x^2+y^2} \\ -2na^2 & +2na\sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$2a\left((n+1)\,x^2+(n-1)\,y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}=2a^2\left((n+1)\,x^2+(n-1)\,y^2\right)+x^4-y^4;$$

hence the following equation for a curve satisfying the problem arises:

$$\begin{aligned} x^8 \quad & - \quad 2x^4y^4+y^8-4na^2\left((n+1)\,x^2+(n-1)\,y^2\right)\left(x^2+y^2\right)^2 \\ & + \quad 4a^4\left((n+1)\,x^2+(n-1)\,y^2\right)^2=0, \end{aligned}$$

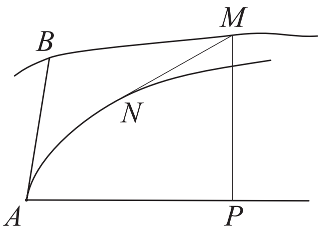
and this already exhibits the innumerably many curves that were asked for.

[1] This undated note in Euler's hand has been preserved in a file that contains letters addressed to Goldbach in the period from 1728 to 1741, inserted in front of Euler's letter n° 24 from July 23rd (August 3rd), 1737.
The editors of the 1965 edition suggest that it may have been sent to Goldbach for presentation to the Petersburg Academy at some unknown date in the 1730s, when he often chaired its meetings. However, the topic of the note does not seem to have left a trace either in the Academy's minutes or in Euler's manuscripts or publications.

[2] The present editors have not been able to identify either an explicit source or any published solutions of this problem. Its elementary character and the insistence on algebraic solutions suggest, however, the context of some of Euler's earliest work on algebraic trajectories, in particular the drafts from 1725–1727 discussed in Andreas Speiser's introduction to O. I/23, p. VII–XVII, the paper E. 3 sent to the *Acta Eruditorum* when Euler still lived at Basel, and his first Petersburg publication E. 5.

21
Euler to Goldbach
[Petersburg], before March 17th (28th), 1735[1]

Construction of the equation $dy + y^2dx = X\,dx$, where X is given in an arbitrary way by x and constants, by dragging motion.[2]



Describe on the axis AP a curve BM by making the value PM for the abscissa $AP = 2b \int dx\sqrt{X}$ equal to $\frac{b}{2}\log X$. Then lead a string BA of length b along on the curve BM by a dragging motion, so that its end A describes a curve AN; then NM will everywhere be equal to b. Denoting the tangent of half the angle NMP by t (setting the total sine equal to 1),[3] one has $y = t\sqrt{X}$. Therefore, as the curve BM is constructed from x and X and t is also known from x and X, the ordinate y, too, will be given by x; for this reason the proposed equation $dy + y^2dx = X\,dx$ is constructed by a dragging motion. Setting $X = x^m$, we have the case proposed by Riccati;[4] here, $AP = \dfrac{4bx^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}$ and $PM = \dfrac{mb}{2}\log x$. For $m = -2$, AP equals $2b\log x$ and $PM = -b\log x$. Thus in this case the curve BM becomes a straight line and the curve AN the common tractrix.[5]

[1] This undated note in Euler's hand has been preserved in a collection of the Petersburg Academy's Archive that mainly contains letters addressed to Euler, but not in the same file as Goldbach's originals. The reason for its inclusion in the 1965 edition of the Euler-Goldbach letters is thus *prima facie* not clear, and the editors did not present any justification in their notes.
However, the case for inclusion of this note in the Goldbach correspondence can be substantiated: At the end of his report on a letter that Daniel Bernoulli had sent to him on October 26th, 1735 (see *infra* note 2), Euler wrote that he had communicated his solution of the problem of the generalised curve of pursuit to Goldbach a few months earlier ("Hic autem denuo ante aliquot menses idem problema in latiore sensu sum contemplatus, loco viae rectilineae alterius navis curvilineam quamcunque substituens, et solutionem meam jam tum cum Cel[eberrimo] D. Goldbach communicavi": *Recensio Litterarum a Cl*[*arissimo*] *D. Bernoullio ... ad me datarum una cum annotationibus meis*: PFARAN, f. 136, op. 1, n. 61, fol. 4v). This sentence was, however, crossed out in the manuscript of Euler's report and omitted from its publication in the *Opera Postuma* (and, as E. 830, in O. II/11.1, p. 373–377).
A *terminus ante quem* for the content of the present note is established by the comprehensive paper E. 51 that was presented to the Petersburg Academy on March 17th (28th), 1735. Euler's reference to his note for Goldbach in the report quoted above should probably be understood as a (justified) claim of priority with respect to Bouguer and Maupertuis (see *infra* note 2); he and Goldbach may well have deposed the present copy of the note in the Academy's archive for the same reason.

[2] The *tractrix* AN with respect to a curve BM is characterised by the property that the segment NM of its tangent is constant (interpreting NM as the leash that forces a dog at N to follow its master walking along BM, it is sometimes called a dog's curve). The first example of such a dragging motion, with BM a straight line (and NM interpreted as a watch chain), was proposed to Leibniz in 1670 by Claude Perrault. After Leibniz and Huygens, Jacob Bernoulli (1696) was the first to realise the potential of this "inverse method of tangents" for the construction of transcendental curves (see Bos 1988).

Euler had already appropriated this method during his studies with Johann Bernoulli, as an entry on pursuit curves in his first notebook from 1726/27 shows. Now he discovered that a sophisticated substitution transforms the condition on the tangents into an equation of Riccati type, as sketched here and elaborated much more fully in his paper E. 51 that was presented to the Petersburg Academy on March 17th (28th), 1735. (A sound analysis of this important paper can be found in Sandifer 2007b, p. 176–187).

A few months later Euler received a letter that Daniel Bernoulli had sent from Basel on October 26th, 1735 (R 109: to be published in O IVA/3); here Bernoulli drew his attention to the recently published tome of the Paris Academy's *Mémoires* for 1732, and in particular to two papers by Bouguer and Maupertuis on "a new sort of curve" which the former had dubbed *courbe de poursuite* and defined as the trajectory of a ship that follows another one with constant velocity, setting its course at every instant towards the other's location. Accounts of dragging and pursuit curves with some information on their history can be found in Schierscher 1997 and Nahin 2007; Euler's contribution seems, however, to have been consistently overlooked in the literature.

On December 22nd, 1735 (January 2nd, 1736), Euler read at the meeting of the Petersburg Academy a report on Bernoulli's letter that has survived in manuscript and was published as E. 830 in 1862. In the last paragraph of his report, Euler summarises Bernoulli's indications (apparently he has not yet seen the *mémoires* themselves) and remarks: "This problem is purely geometrical, and one arrives easily at a differential equation for the curve which is sought; except for the case when the velocities of both ships are equal, this can always be integrated. For my part I remember that I already hit upon this problem several years ago when I still lived at Basel (except that instead of ships I considered two hikers), and that I then solved it" (*op. cit. supra* note 1: O. II/11.1, p. 377). As quoted in note 1, the original report contained one more sentence in which Euler substantiated the independence of his discovery by mentioning its communication to Goldbach.

Some additional documentation, including Euler's early notes on pursuit curves, will be presented in the editorial comment on Bernoulli's letter in volume O. IVA/3.

[3] The explication in parentheses was added later, apparently by another 18th-century hand. The term "total sine" ("sinus totus") denotes the radius of the circle in which the segments representing the trigonometric functions are considered: thus the convention used here (and made explicit by the inserted clause) is the modern one, whereas 17th-century tables often used *sinus totus* $= 10^7$ or *sinus totus* $= 10^{10}$.

[4] Cf. nº 15, note 5.

[5] I. e., the simplest case that was considered by Leibniz and also by Bouguer (whereas Maupertuis investigated the general case).

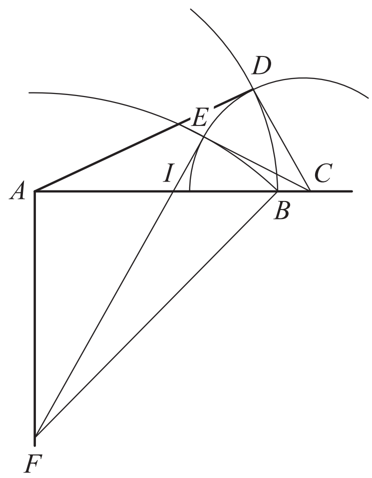
22
Goldbach to Euler
Petersburg, October (1st) 12th, 1735

Sir,

last night I imagined the following proof of the theorem you presented yesterday,[1] which in the morning I saw to be correct: Given an arbitrary rectangle ADC, draw an indefinite line AF perpendicular to AC, and mark on it AB equal to AD; if from the point C one describes an arbitrary line $CE = CD$ and erects in E the perpendicular that meets AF in F, then $EF = BF$.

Let $AB = AD = a$, $CD = CE = b$, $AC = \sqrt{a^2+b^2} = f$, $AF = e$, $AI = x$. Then

$$AF : AI \quad :: \quad CE : EI = \frac{bx}{e};$$
$$AF : FI \quad :: \quad CE : CI = \frac{b\sqrt{e^2+x^2}}{e} = f - x,$$



therefore

$$x = \frac{e^2 f \pm e\sqrt{e^2 f^2 + (b^2 - f^2)\,(e^2 - b^2)}}{e^2 - b^2}.$$

Consequently

$$FE = FI + IE = \sqrt{e^2 + x^2} + \frac{bx}{e} = \sqrt{a^2 + e^2} = FB;^{[2]}$$

for this reason, since the points E and F are arbitrary, it is clear that any circle of radius FE is intersected by the circle of radius CE at a right angle.

Petersburg, October 12th, 1735.

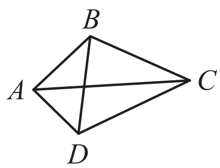
Yours most eagerly,
C. G.

[1] On the day before this note was written, September 30th (old style), 1735, no official meeting of the Petersburg Academy was held according to its minutes; so Euler seems to have proposed in a personal conversation the theorem on normally intersecting circles that Goldbach proves here. Apparently the theorem and its proof did not leave a trace either in the Academy's minutes or in Euler's manuscripts or publications.
[2] Here Euler noted on Goldbach's letter: "Fit $FE = e\sqrt{2}$" ("One has $FE = e\sqrt{2}$").

23
Goldbach to Euler
[Petersburg], February 1736

To Leonhard Euler[1]

A problem brought to my attention.



In a quadrilateral $ABCD$ all sides and one diagonal AC are given; determine the other diagonal BD. I think this can be solved as follows. Let $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $BD = y$. Since, when either diagonal is given, the area of the quadrilateral, which I set equal to $\frac{e}{4}$, is also given, one has

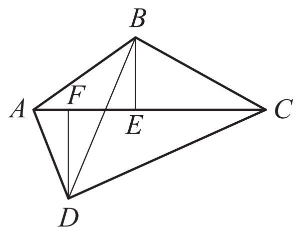
$$\left(-\left(a^2-b^2\right)^2+2\left(a^2+b^2\right)y^2-y^4\right)^{\frac{1}{2}}+\left(-\left(c^2-d^2\right)^2+2\left(c^2+d^2\right)y^2-y^4\right)^{\frac{1}{2}}=e;$$

hence, by defining $-\left(a^2-b^2\right)^2 = \alpha$, $2\left(a^2+b^2\right) = \beta$, $-\left(c^2-d^2\right)^2 = \gamma$, $2\left(c^2+d^2\right) = \delta$,

$$\begin{aligned}\frac{2e^2\delta-\left(\alpha-\gamma-e^2\right)(\beta-\delta)}{(\beta-\delta)^2+4e^2} &= \pi,\\ \frac{4e^2\gamma-\left(\alpha-\gamma-e^2\right)^2}{(\beta-\delta)^2+4e^2} &= \tau,\end{aligned}$$

one arrives at the two values $y = \left(\pi \pm \sqrt{\pi^2+\tau}\right)^{\frac{1}{2}}$, of which one expresses the known diagonal AC, the other the line BD that was asked for.

Alternatively:



Since, given the four sides and the diagonal AC, the perpendiculars to that diagonal, $BE = f$ and $DF = g$, and their intercept, $FE = h$, are also given, the requested diagonal is $BD = \sqrt{(f+g)^2 + h^2}$.

[1] In Goldbach's copybook, this text is entered under the heading "1736. d.   Febr."; the precise date is omitted, possibly because the letter was not sent after all. In any case, no original has been preserved among Euler' papers.

24
Euler to Goldbach
[Petersburg], July 23rd (August 3rd), 1737

Sir,

when thinking more carefully about the formula that you kindly brought to my attention yesterday,[1] I came upon the following not only quite general, but also extremely convenient expressions, from which all your formulae, Sir, can be easily inferred. Indeed, setting the common abscissa $= x$, let the elements of the ordinates for the two curves be

$$dx\left(\sqrt{RS} \pm \sqrt{(R+1)(S-1)}\right);$$

then the curve elements themselves will be

$$dx\left(\sqrt{(R+1)S} \pm \sqrt{R(S-1)}\right).$$

Therefore, in order for both curves to be algebraic, one will need to suppose for R and S such functions of x for which both $dx\sqrt{RS}$ and $dx\sqrt{(R+1)(S-1)}$ admit integration. Then, in order for the sum of the arcs to be algebraically expressible, the formula $dx\sqrt{(R+1)S}$, too, has to be integrable. Now this will be easily achieved in several ways by taking for R and S functions for which RS, $(R+1)(S-1)$ and $S(R+1)$ are quantities consisting of either one or two terms; for then the exponents can be chosen so that they satisfy what was asked for.

I. Let $R = ax^m - 1$ and $S = \frac{1}{ax^m}$; the elements of the ordinate will be

$$dx\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{ax^m} - ax^m}\right)$$

and the curve elements

$$dx\left(\sqrt{1+\frac{1}{ax^m}} \pm \sqrt{1 - ax^m}\right),$$

so m will have to be equal to $\frac{-1}{ai+1}$, where i denotes any positive integer.

II. Let $R = ax^m - 1$ and $S = bx^n$; the ordinate elements will be

$$dx\left(\sqrt{abx^{m+n} - bx^n} \pm \sqrt{abx^{m+n} - ax^m}\right)$$

and the curve elements

$$dx\left(x^{\frac{m+n}{2}}\sqrt{ab} \pm \sqrt{(ax^m-1)(bx^n-1)}\right).$$

Now in order for both ordinates as well as the sum of the arcs to be algebraic, one must have either $m = \frac{4i+2}{4ik-1}$ and $n = \frac{4k+2}{4ik-1}$, or $m = \frac{-2i}{2ik+i+k}$ and $n = \frac{-2k}{2ik+i+k}$, where i and k are positive integers.

III. Let $R = \frac{ab}{c}x^m - \frac{ab^2}{c^2}$ and $S = \frac{c}{b}x^m + 1$; the ordinate elements will be

$$dx\left(\sqrt{x^m\left(\frac{c}{b} - \frac{ab}{c} + ax^m\right)} \pm \sqrt{ax^{2m} - \frac{ab^2}{c^2}}\right)$$

and the curve elements

$$dx\left(\sqrt{x^m\left(ax^m - \frac{ab}{c}\right)} \pm \sqrt{(b+cx^m)\left(\frac{1}{b} - \frac{ab}{c^2} + \frac{a}{c}x^m\right)}\right);$$

so one should take $m = \frac{-1}{2i+1}$.

IV. Let $R = a^2x^{2m} + 2ax^m$ and $S = bx^m$; the ordinate elements will be

$$dx\left(x^m\sqrt{a^2bx^m + 2ab} \pm (ax^m+1)\sqrt{bx^m - 1}\right)$$

and the curve elements

$$dx\left(bx^m(ax^m+1) \pm \sqrt{x^m(a^2x^m+2a)(bx^m-1)}\right);$$

so either $m = \frac{1}{i}$ or $m = \frac{-2}{2i+3}$.

Several more formulae of this kind can be deduced from this by substituting suitable values for R and S. Farewell and stay well-disposed, Sir, towards your most respectful

L. Euler

July 23rd, 1737.

[1] On July 22nd (old style), 1737, no official meeting of the Petersburg Academy was held according to its minutes. Goldbach seems to have proposed the formula personally, possibly after inspecting the still unpublished paper E. 48 that Euler had presented to the Petersburg Academy on September 6th (17th), 1734.
This paper addressed the problem of determining pairs of algebraic curves which taken separately could not be rectified algebraically, but for which the sum of corresponding arcs was described by an algebraic expression. As Euler admitted in the final paragraph of E. 48 and – even more clearly – in a letter he wrote to Daniel Bernoulli on May 25th (June 5th), 1734 (R 98: to be edited in O. IVA/3), his solution was general but technically so involved that he could not indicate any specific examples.
Goldbach's communication seems to have encouraged Euler to resume the problem. A few weeks later, on August 27th (September 7th), 1737, he wrote again to Basel – this time to Johann I Bernoulli – and reported that he had found a new way to discover curves that satisfied all the conditions; as the simplest example he indicated the pair of curves defined by $64ay^3 = 27x^4$ and $(4az - 8x^2)^3 = 729a^2x^4$ (see R 202: O. IVA/2, p. 161–175, in particular p. 166–167). The day before this letter was sent, Euler read it to the Petersburg Academy (see *Protokoly* 1897, t. I, p. 416).
In the 1750s Euler again dealt with this question, within a much more general framework of algebraically integrable differentials: see E. 245, § 74 (O. I/22, p. 291–294).

25
Goldbach to Euler
[Petersburg], (September 30) October 11th, 1738

This morning[1] I found a general formula, which continues to infinity but breaks off whenever the index of the terms is a positive integer, for the series[2]

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{30} - 0 + \frac{1}{42} + 0 - \dots;$$

if this formula is already known to you, Sir, I shall be satisfied with the glory of being the second inventor; otherwise I shall gladly communicate the formula to you.

October 11th (new style), 1738.
C. G.[3]

[1] Goldbach and Euler attended the Petersburg Academy's meetings both five days before and two days after the present message was written (cf. *Protokoly* 1897, t. I, p. 502–504); its separate communication – presumably by messenger – suggests a certain urgency on Goldbach's part. This is explained by the fact that Euler had produced and read at the

meeting held on September 25th (October 6th) his reply to a letter from James Stirling (cf. R 2622–2623, published by T.A. Krasotkina in 1957), in which Bernoulli numbers were mentioned in the context of Euler's summation formula and MacLaurin's possible priority. Although Euler's letter to Stirling is dated July 27th (August 7th), it may well have been dispatched only after the Academy had taken note of it; thus Goldbach may have sent his note in order to have Euler include his formula in the reply – if it were indeed new.

Neither a reply of Euler's nor an explicit reference to Goldbach's communication in his subsequent work on Bernoulli numbers has been identified.

[2] On the sign that has been rendered by ∺ in the original text of the formula that follows, see Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.

The sum $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{30} \pm \ldots$ of the Bernoulli numbers is divergent, but – here as in some other letters (cf., e. g., n° 1, note 2) – Goldbach presumably uses this notation just to refer to the sequence $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, \ldots$. With this interpretation Goldbach's claim amounts to the following: there is a formula for the n-th Bernoulli number as an infinite series, which only has finitely many nonzero terms if n is a positive integer. One such formula is the well known identity

$$B_n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} B_r,$$

which, after cancelling B_n on both sides, provides us with a recursion formula for the Bernoulli numbers. Summing over all $r \geq 0$ does not change the formula for integers, but provides us with an infinite series for B_n for non-integral values of n (but then again, the series that result are divergent).

Although the sum $\sum B_n$ of the Bernoulli numbers diverges, it can be assigned a finite value by some summation methods. In n° 64, Euler writes that he has proved the "identity"

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\sum (n+1)B_n\Big)$$

using what we today call the Euler-MacLaurin summation formula. With the help of Borel summation (see Varadarajan 2006, p. 152–158, and *infra* n° 64, note 9) it can be shown that

$$\sum B_n = \int_0^\infty \frac{t}{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}\, dt = \zeta(2) - 1;$$

Euler proved an equivalent result in 1743 (see n° 68, note 4).

Bernoulli numbers show up in formulae for the summation of kth powers and were first explicitly noted by Jacob Bernoulli around 1685 (see his posthumous work *Ars Conjectandi* (1713), p. 95–98 – Jac. B. *Werke* 3, p. 164–167).

In Euler's work, Bernoulli numbers are implicitly used in the summation of the series $\zeta(2k) = \sum_{n\geq 1} n^{-2k}$ for integers $k \geq 1$, in the summation formula nowadays named after Euler and MacLaurin (see E. 25, as well as *infra* n° 64 and 66), and in the summation formulae for kth powers given in E. 47. Explicitly Bernoulli numbers occur in E. 125; in E. 130 Euler indicated their generating function. Cf. also Faber's introduction to O. I/16, p. XVI–XXXIX.

[3] The small sheet that contains Goldbach's note was folded once and sealed. On the exterior there is, besides the address, a short calculation in Euler's hand, which, however, does not seem to be linked with Goldbach's communication.

In the same file of Goldbach letters from Euler's estate, the present note is followed by another folded envelope sheet (fol. 20) on which Euler noted a calculation involving logarithmic series. However, this envelope is addressed to Euler "à Berlin" and consequently belongs to a later letter; its inclusion in the editorial notes to n° 25 in the 1965 edition does not seem warranted.

26
Goldbach to Euler
[Petersburg], (October 27th) November 7th, 1739

Sir,

from your results[1] it can be shown that, if the sum of the series

$$\begin{aligned}\frac{1}{1^n} &- \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n}\\ &+ \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \frac{1}{12^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{14^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{16^n}\\ &- \frac{1}{17^n} - \frac{1}{18^n} - \frac{1}{19^n} - \frac{1}{20^n} + \frac{1}{21^n} + \frac{1}{22^n} - \frac{1}{23^n} + \frac{1}{24^n} + \dots,\end{aligned}$$

which I can continue as far as I like, is set equal to $\alpha\pi^n$, the number α is rational and can be indicated when n is an even positive number; in the case $n = 1$, the entire series equals 0.

November 7th (new style), 1739.
Yours most respectfully,
C. G.

How is it to be decided whether any given term $\frac{1}{x^n}$ needs the $+$ or the $-$ sign? I answer: if x is a prime number, the $-$ sign is appropriate; if x is a product of two primes, the $+$ sign is appropriate; if x is a product of three primes, the $-$ sign is appropriate, and so on.

$\frac{1}{18^n}$, for example, needs the $-$ sign, as it is made up from the three 2, 3, 3; $\frac{1}{24^n}$ needs the $+$ sign, as it is made up from the four 2, 2, 2, 3.

[1] Five days before the present note was written, Euler had presented at the meeting of the Petersburg Academy held on October 22nd (November 2nd), 1739 (cf. *Protokoly* 1897, t. I, p. 577) his important paper E. 130, *De seriebus quibusdam considerationes*, where several series of the form $\sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-s}$ are investigated. Thus Goldbach knew about Euler's newest results on the summation of "zeta-type" functions (the notation $\zeta(s)$ and the name zeta function for $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ were introduced much later by Riemann).
Mathematicians such as Mengoli, Wallis and Leibniz had tried in vain to find a closed formula for $\zeta(2)$; in 1689; Jacob Bernoulli had highlighted the problem as a particularly difficult one that deserved attention (one of his editors later called the exact determination of $\zeta(2)$ the "Basel problem": see Spiess 1945). In a letter to Goldbach dated August 29th (September 9th), 1728, Daniel Bernoulli reported that he had found $\zeta(2) \approx \frac{8}{5}$; on January (20th) 31st, 1729, Goldbach replied with the much better estimate

$$1\frac{16\,223}{25\,200} = 1.6437\ldots < \zeta(2) < 1\frac{30\,197}{46\,800} = 1.6452\ldots,$$

which he had obtained by summing the first few terms separately and enclosing the tail between two series he could sum exactly by algebraic means (cf. *Correspondance*, t. II, p. 263, 281–283). In E. 20 from 1731, Euler introduced a sophisticated transformation and found

$\zeta(2) \approx 1.644\,934$; independently, Stirling (1730, p. 29) had published the even more exact value 1.644 934 065.
In 1735, Euler finally succeeded in determining the exact values $\zeta(2s)$ for small integers $s \geq 1$ by studying the roots of $1 - \sin x$; these results were presented to the Petersburg Academy in December 1735 and published in E. 41. In E. 63 and E. 130, Euler extended his calculations and found the connection with the Bernoulli numbers; see also *Introductio*, t. I (E. 101), § 168, and *Institutiones calculi differentialis* (E. 212), Pars II, § 151.
For $\zeta(2n+1)$ Euler found only approximate values (cf. n° 64) and suspected that these numbers depend on log 2 and perhaps π. The values of $\zeta(s)$ at odd integers $s \geq 3$ remain mysterious; a conjecture by Lichtenbaum connects them with orders of Quillen's higher K-groups and Borel regulators (see Lichtenbaum 1973).
As Goldbach claims, his assertion in the present note follows from Euler's summation of $\zeta(2s)$ for even integers $s > 1$: Let $\nu(n)$ denote the number of prime factors of the integer n (counted with multiplicity); then $\lambda(n) = (-1)^{\nu(n)}$ is a multiplicative function, and we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n)\, n^{-s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}$$

for all s with real part > 1 (see, e. g., Zagier 1981, p. 13); Euler already derived this in his *Introductio*, t. I (E. 101, § 277: O. I/8, p. 289–290). Letting $s \to 1$ on both sides suggests that $\sum \lambda(n)/n = 0$; this equation was published by Euler as *Theorema* 18 in E. 72 (however, not all heuristic arguments of the sort Euler presents here yield correct results: some examples to the contrary are displayed in Conrad 2005). The theorem was proved rigorously by von Mangoldt in 1897.

27
Euler to Goldbach
[Petersburg, November 23rd / December 4th, 1739][1]

Sir,

considering an arbitrary series a, b, c, d, e, ..., let

$$\begin{aligned} P &= a + b + c + d + e + \ldots \\ Q &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots \\ R &= a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + \ldots \\ S &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 + \ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

and furthermore form from the terms a, b, c, d, ...

1. the products of one factor, whose sum will be called A and equals P,
2. the products of two factors, whose sum will be B,
3. the products of three factors, whose sum will be C,
4. the products of four factors, whose sum will be D,

and so on.

Now, denoting by e (not to be confused with the term e) the number whose logarithm equals 1,[2] we will have[3]

$$1 + A + B + C + D + \ldots = \mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\ldots};$$

on the other hand, taking every second term one has

$$1 + B + D + F + H + \ldots = \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\ldots} + \mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S-\ldots}}{2}$$

and

$$A + C + E + G + I + \ldots = \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\ldots} - \mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\ldots}}{2}.$$

Now, taking for the series $a+b+c+d+\ldots$ the series of the prime numbers raised to some arbitrary power, i. e.,

$$\begin{aligned}
P &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \ldots \\
Q &= \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \ldots \\
R &= \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \ldots \\
S &= \frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \frac{1}{11^{4n}} + \ldots \\
&\ldots,
\end{aligned}$$

A will again be the series of the prime numbers P, B the series of the products of two factors, C the series of the products of three factors, and so on; therefore, $1 + A + B + C + D + \ldots$ becomes the series of all numbers, i. e.,

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \ldots = \alpha\pi^n.$$

Consequently,

$$\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S+\ldots} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots = \alpha\pi^n,$$

and in a similar way,

$$\mathrm{e}^{Q+\frac{1}{2}S+\frac{1}{3}V+\frac{1}{4}X+\ldots} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots = \beta\pi^{2n};$$

dividing the latter expression by the former gives

$$\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\frac{1}{4}S-\frac{1}{5}T+\frac{1}{6}V-\ldots} = \frac{\beta\pi^n}{\alpha},$$

and thus the remarkable series

$$1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \ldots,$$

can be demonstrated to have its sum equal to $\dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}$, as you, Sir, proved.[4]

Once this has been established, since A is the series of the prime numbers themselves, B the series of the products of two primes, C of three and so on, that is to say,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\dots \\ B &= \frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{14^n}+\dots \\ C &= \frac{1}{8^n}+\frac{1}{12^n}+\frac{1}{18^n}+\frac{1}{20^n}+\frac{1}{27^n}+\dots \\ D &= \frac{1}{16^n}+\frac{1}{24^n}+\frac{1}{36^n}+\frac{1}{40^n}+\frac{1}{54^n}+\dots \\ E &= \frac{1}{32^n}+\frac{1}{48^n}+\frac{1}{72^n}+\frac{1}{80^n}+\frac{1}{108^n}+\dots \\ &\dots, \end{aligned}$$

it follows that

$$1+A+B+C+D+\dots = \mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\dots} = \alpha\pi^n$$

$$\begin{aligned} 1+B+D+F+\dots &= \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\dots}+\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\dots}}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n \\ A+C+E+G+\dots &= \frac{\mathrm{e}^{P+\frac{1}{2}Q+\frac{1}{3}R+\dots}-\mathrm{e}^{-P+\frac{1}{2}Q-\frac{1}{3}R+\dots}}{2} = \frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{\beta}{\alpha}\right)\pi^n \end{aligned}$$

and therefore

$$1-A+B-C+D-E+F-G+\dots = \frac{\beta}{\alpha}\pi^n,$$

which is the same series that you, Sir, were the first to find. Finally it is clear that the sum of the series $1+B+D+F+\dots$, which comprises the products of an even number of primes, is to the sum of the series $A+C+E+G+\dots$, which comprises the prime numbers themselves and the products of an odd number of primes, as $\alpha^2+\beta$ is to $\alpha^2-\beta$; this is the ratio that you proposed today[5] for me to determine. Farewell, Sir, and stay well-disposed towards me.

[1] The date is established by Goldbach's reply nº 28.
[2] Cf. nº 15, note 4.
[3] The identity below is derived easily (neglecting questions of convergence) by multiplying identities of the form

$$1+a+a^2+\dots = \exp\left(\log\frac{1}{1-a}\right) = \exp\left(a+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3+\dots\right).$$

The relations first considered in this and the next letter opened the path towards a more systematical study of symmetric functions in infinitely many variables (see E. 158, E. 542), which led Euler to his results on partitions and his famous "Pentagonal Number Theorem" (see *infra* nº 74, note 13).
[4] Cf. nº 26, note 1.
[5] Presumably Euler and Goldbach had just met in person at the session of the Petersburg Academy (cf. *Protokoly* 1897, t. I, p. 583).

28
Goldbach to Euler
[Petersburg], November 24th (December 5th), 1739[1]

Sir,

the letter you wrote yesterday[2] was most welcome. My own solution is as follows: Let

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\ldots &= \alpha\pi^n \\ 1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots &= \beta\pi^{2n} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{11^n}+\ldots = M,\text{[3]}$$

where the denominators, for $n=1$, are the products of an odd number of primes, and

$$1+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{10^n}+\ldots = N,$$

where the denominators, for $n=1$, are the products of an even[4] number of primes; then one has $\alpha\pi^n+\dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}=2M$, $\alpha\pi^n-\dfrac{\beta\pi^n}{\alpha}=2N$. On the other hand I do not know whether your method works, e. g., for the calculation of the ratio between the positive and the negative terms of this series:

$$\frac{1}{4^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}-\frac{1}{12^n}+\frac{1}{16^n}-\frac{1}{18^n}-\frac{1}{20^n}+\ldots,$$

where the denominators, for $n=1$, are all the powers of numbers and all their multiples; the terms taken with a + sign contain those denominators that are products of an even number of primes, the terms with a − sign those of an odd number; for my part, I could determine this ratio if you think it worth the trouble.[5]

But I suppose you will like much better what I found yesterday: Let

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\ldots = \alpha\pi^n,$$

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{11^n}+\ldots = P$$

(in this series, the denominators comprise all prime numbers); then

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\frac{1}{11^{2n}}+\ldots = (P-1)^2+1-\frac{2}{\alpha\pi^n}$$

if only $n>1$.[6]

Farewell and be well-disposed towards your C. G.[7]

November 24th, 1739.

[1] The copy Goldbach kept is dated "*d*[*ie*] 5. *Dec. st. n.*"; thus the date in the note sent to Euler is indicated in the old (Julian) style.
[2] This refers to n° 27, thus establishing the date of that note.
[3] In Goldbach's copy, the third term of this series erroneously reads $\frac{1}{4^n}$.
[4] In Goldbach's copy, this erroneously reads "imparium" ("odd").
[5] The preserved text of Goldbach's copy ends here: the lower part of fol. 49 of the copybook was cut out.
[6] This is not correct: see Euler' reply n° 29.
[7] On the inner side of the folded "envelope" sheet that contains the address (fol. 24r), Euler noted some calculations:

$$\begin{aligned} A &= 1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{8^n}+\text{etc.}\\ \frac{1}{A} &= 1+\frac{\alpha}{2^{2n}}+\frac{\beta}{3^{2n}}+\frac{\gamma}{4^{2n}}+\frac{\delta}{5^n}+\frac{\varepsilon}{6^n}+\frac{\zeta}{7^n}+\frac{\eta}{8^n}+\text{etc.} \end{aligned}$$

$\frac{\mu}{p^n}$ term[inus] generalis.

Si p	est numerus primus erit	$-\frac{1}{p^n}$
Si p	prod[uctum] ex 2 numeris primis inaequalibus:	$+\frac{1}{p^n}$
	prod[uctum] ex 2 numeris primis aequalibus:	$+\frac{0}{p^n}$
Si p	prod[uctum] ex 3 inaequalibus $\underline{a\,b\,c}$ erit	$-\frac{1}{p^n}$
	$a\,a\,b$	$+\frac{0}{p^n}$
	$a\,a\,a$	$+\frac{0}{p^n}$

Si p	prod[uctum] ex 4 ...	$a\,b\,c\,d$	erit	$+\frac{1}{p^n}$
		$a\,a\,b\,c$		$+\frac{0}{p^n}$
		$a\,a\,b\,b$		$+\frac{0}{p^n}$
		$a^3\,b$		$+\frac{0}{p^n}$

This is followed by another scheme of letters and numbers, in which Euler apparently continued to calculate the values of the numerators that should be used for various combinations of factors. However, since the reasoning behind this scheme could not be convincingly reconstructed, the editors have decided to omit it here.
Altogether Euler's note amounts to a sketch of the important identity

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, n^{-s},$$

where $\mu(n)$, as is customary today, denotes the "Möbius function". This is defined just as in Euler's note: for a product of k different primes it takes the value $(-1)^k$, and for all numbers divisible by the square of some prime it is 0. The number-theoretic properties of this function were studied in detail by Möbius (1832); the notation $\mu(n)$ was apparently introduced by Mertens (1874a).

29

Euler to Goldbach

[Petersburg], November 26th (December 7th), 1739

Sir,

when I pondered the ratio that holds between the sum of the series

$$\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\dots$$

and the expression $(P-1)^2+1-\dfrac{2}{\alpha\pi^n}$, I noticed that the series is somewhat smaller;[1] indeed,

$$(P-1)^2+1-\frac{2}{\alpha\pi^n}=\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\dots$$

$$\left.\begin{array}{l} +\,2\cdot\ \text{the sum of all the products of three} \\ -\,2\cdot\ \text{the sum of all the products of four} \\ +\,2\cdot\ \text{the sum of all the products of five} \\ \qquad\qquad\dots \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{different terms of the series} \\ \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\dots\end{array}$$

However, when the values known by your calculation are substituted for those sums of products of three, four, or more factors, an identical equation results; I do not doubt that you, Sir, have meanwhile noticed this by yourself.

Yesterday I came upon this very curious series:

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{2}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{2}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{3}{8^n}+\frac{2}{9^n}+\frac{2}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\frac{4}{12^n}+\dots,$$

where the numerators indicate in how many ways the corresponding denominators either occur themselves in $2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+\dots$ or are products of two, three, four or more terms. Thus the denominator 60^n has the numerator 11, because 60 can be composed in the following eleven ways:

I.	60	V.	$5\cdot 12$	IX.	$2\cdot 5\cdot 6$
II.	$2\cdot 30$	VI.	$6\cdot 10$	X.	$3\cdot 4\cdot 5$
III.	$3\cdot 20$	VII.	$2\cdot 2\cdot 15$	XI.	$2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$
IV.	$4\cdot 15$	VIII.	$2\cdot 3\cdot 10$		

I have found that the sum of this series, in the case where $n=2$, equals 2. At first I thought that the sum could be indicated as a rational number also for other cases; but when I investigated the matter more carefully, I found that in the case $n=4$ the sum is $\dfrac{8e^\pi\pi}{e^{2\pi}-1}=\dfrac{8\pi}{e^\pi-e^{-\pi}}$, where e^π is approximately 23.1407.[2]

Apart from that, I observed that nearly all theorems on series of prime numbers and other cognate matters which you, Sir, put forward, can be extended much further. For, defining $A = \alpha = a + b + c + d + \ldots$,

$$\left.\begin{array}{l} B = \text{the sum of products of two} \\ C = \text{the sum of products of three} \\ D = \text{the sum of products of four} \\ \qquad\qquad \ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{terms of the series } A \\ \text{(not excepting equal terms),} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \text{the sum of products of two} \\ \gamma = \text{the sum of products of three} \\ \delta = \text{the sum of products of four} \\ \qquad\qquad \ldots \end{array}\right\} \text{different terms of the series } A \text{ or } \alpha,$$

and

$$\begin{aligned} 1 + A + B + C + D + E + \ldots &= s \\ 1 - A + B - C + D - E + \ldots &= t, \end{aligned}$$

one has

$$\begin{aligned} 1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots &= \frac{1}{s} \\ 1 - \alpha + \beta - \gamma + \delta + \ldots &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

and consequently

$$\begin{aligned} 1 + B + D + F + \ldots &= \frac{s+t}{2} & \qquad 1 + \beta + \delta + \zeta + \ldots &= \frac{s+t}{2st} \\ A + C + E + G + \ldots &= \frac{s-t}{2} & \qquad \alpha + \gamma + \varepsilon + \eta + \ldots &= \frac{s-t}{2st}, \end{aligned}$$

and also

$$\begin{aligned} (B-\beta) + (C-\gamma) + (D-\delta) + \ldots &= s - \frac{1}{t} \\ (B-\beta) - (C-\gamma) + (D-\delta) - \ldots &= t - \frac{1}{s} \\ (C-\gamma) + (E-\varepsilon) + \ldots &= \frac{1}{2}(s-t)\left(1 - \frac{1}{st}\right) \\ (B-\beta) + (D-\delta) + \ldots &= \frac{1}{2}(s+t)\left(1 - \frac{1}{st}\right). \end{aligned}$$

Moreover, if in place of the terms a, b, c, d, $\ldots$ one takes their squares, sets $A'' = \alpha'' = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots$ and forms the series B'', C'', D'', $\ldots$ and β'', γ'', δ'', ε'' $\ldots$ in a similar way as B, C, D, $\ldots$, β, γ, δ $\ldots$ were formed above from the series $A = \alpha$, then

$$1 + A'' + B'' + C'' + D'' + \ldots = st$$

and

$$1 - \alpha'' + \beta'' - \gamma'' + \delta'' - \ldots = \frac{1}{st};$$

therefore, generally,

$$1 - A + B - C + D - \ldots \quad = \frac{1 + A'' + B'' + C'' + D'' + \ldots}{1 + A + B + C + D + \ldots}$$

and

$$(1 + \alpha + \beta + \gamma + \ldots)(1 - \alpha + \beta - \gamma + \delta - \ldots) = 1 - \alpha'' + \beta'' - \gamma'' + \delta'' - \ldots$$

Now if one substitutes for the series $a + b + c + d + \ldots$ the series $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \ldots$, which progresses according to the prime numbers, all the theorems that you were so kind as to communicate to me, Sir, follow at once.

Farewell, Sir, and stay well-disposed towards your most respectful
L. Euler

Nov. 26th, 1739

[1] This tactfully corrects Goldbach's assertion in his previous note; cf. n° 28, note 6.

[2] Set $E(s) = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^s}{k^s - 1}$; expanding the factors in a geometric series and multiplying out we find $E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\, n^{-s}$, where $f(n)$ is the number of different factorisations of n. Now

$$E(2) = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1} = \frac{2}{1}\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}\frac{4}{5} \cdots = 2$$

(alternatively, in Euler's product formula for the sine function, let $x \to 1$ and use L'Hôpital's rule). The formula for the product $E(2)$ occurs explicitly in Euler's E. 72 as Cor. 2 to Theorem 7; in fact, it also can already be found in n° 1 in connection with extending the factorial function. Next we have

$$\begin{aligned} E(4) = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^4}{k^4 - 1} &= \prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 - 1} \cdot \prod_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2 + 1} \\ &= E(2) \cdot \prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k^2}} = 2 \cdot \frac{2}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)} = 2 \cdot \frac{2i\pi}{\sin i\pi} = \frac{8\pi}{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}, \end{aligned}$$

using the product expansion of the sine.

30
Euler to Goldbach
[Petersburg, ca. December 1739][1]

Sir,

the series whose general term is $\frac{1}{64x^2 - 64x + 15}$ or $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8x - 5} - \frac{1}{8x - 3}\right)$ has for its sum

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(z^2 - z^4\right) dz}{1 - z^8} = \frac{1}{2}\int \frac{z^2\, dz}{(1 + z^2)(1 + z^4)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dz}{1 + z^2} + \frac{1}{4}\int \frac{\left(1 + z^2\right) dz}{1 + z^4},$$

where after the integration $z = 1$ is to be substituted.[2] Again, the series whose general term is

$$\frac{3m}{64x^2 - 64x + 7} = \frac{m}{2}\left(\frac{1}{8x-7} - \frac{1}{8x-1}\right)$$

has for its sum

$$\frac{m}{2}\int \frac{\left(1 - z^6\right) dz}{1 - z^8} = \frac{m}{2}\int \frac{\left(1 + z^2 + z^4\right) dz}{\left(1 + z^2\right)\left(1 + z^4\right)} = \frac{m}{4}\int \frac{dz}{1 + z^2} + \frac{m}{4}\int \frac{\left(1 + z^2\right) dz}{1 + z^4},$$

where after the integration $z = 1$ is to be substituted. Indeed, $\displaystyle\int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{\pi}{4}$, $\displaystyle\int \frac{dz}{1 + z^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left(1 + \sqrt{2}\right)$ and $\displaystyle\int \frac{z^2\, dz}{1 + z^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Therefore, if from the series which has the general term $\dfrac{1}{(8x-5)(8x-3)}$ the series $\dfrac{3m}{(8x-7)(8x-1)}$ is subtracted, the sum of the resulting series will equal $-\dfrac{(1+m)\,\pi}{16} + \dfrac{(1-m)\,\pi}{8\sqrt{2}}$.

Again, the sum of the series which has its general term equal to $\dfrac{3m}{64x^2 - 64x + 7} - \dfrac{1}{64x^2 - 64x + 15}$ equals $\dfrac{(m+1)\,\pi}{16} + \dfrac{(m-1)\,\pi}{8\sqrt{2}}$. Consequently, for $m = 1$ the sum will be $\dfrac{\pi}{8}$; to have the sum equal to 0, one needs $m + 1 + m\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, or $m = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$.

II. If in the series $\dfrac{1}{x^2\,(2x-1)\,(4x-1)}$ the sum of the even-order terms is subtracted from the sum of the odd-order terms, the following series results:

$$\frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 11} - \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 15} + \ldots;$$

this can be split up into these three:

$$\begin{aligned}
+1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots &= \int \frac{dz}{1+z} \\
+\frac{2}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} + \ldots &= \int \frac{2\,dz}{1+z^2} \\
-\frac{8}{3} + \frac{8}{7} - \frac{8}{11} + \frac{8}{15} - \frac{8}{19} + \frac{8}{23} + \ldots &= -\int \frac{8z^2\,dz}{1+z^4}.
\end{aligned}$$

Thus the overall sum equals $\log 2 + \dfrac{\pi}{2} - \pi\sqrt{2} + \dfrac{4}{\sqrt{2}} \log\left(1 + \sqrt{2}\right)$; so I cannot see how the sum can equal[3] $\pi - 4\log 2$. Indeed, if this were the case, we should have $\pi = \dfrac{10\,\log 2 + 4\sqrt{2}\log\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2} + 1}$.

III. The series $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\ldots$ has for its sum

$$\int\frac{dz\left(1-z+z^2-z^3\right)}{1+z^4}=\int\frac{dz\left(1+z^2\right)}{1+z^4}-\int\frac{z\,dz}{1+z^4}-\int\frac{z^3dz}{1+z^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}-\frac{\log 2}{4}.$$

IV. If $\int d\cdot\frac{x^2\,dz}{dx}=\int\frac{dx}{1+x^3}$, one necessarily has

$$dz=\frac{dx}{x^2}\int\frac{dx}{1+x^3}=\frac{dx}{x^2}\left(x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\ldots\right)$$

and

$$z=C+\log x-\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^6}{6\cdot 7}-\frac{x^9}{9\cdot 10}+\ldots$$

But in order for z to vanish when x does, the constant C would have to be infinite; on the other hand, if one leaves C indefinite, then the quantity z also, for $x=1$, will have an indefinite value, i. e., any value at all.

V. The sine of an angle of 18° equals $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, and $\sin 54^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$; consequently $\frac{1}{\sin 18^\circ}-\frac{1}{\sin 54^\circ}=2$ (this is also apparent from tables of sines, since $\frac{1}{\sin 18^\circ}=\sec 72^\circ$ and $\frac{1}{\sin 54^\circ}=\sec 36^\circ$).

VI. The sums of the series that follow are:[4]

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{8x-5}-\frac{1}{8x-3}\right)&=\int\frac{dz\left(z^2-z^4\right)}{1-z^8}=\int\frac{z^2\,dz}{(1+z^2)\,(1+z^4)}\\&=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{8},\\\left(\frac{1}{8x-1}-\frac{1}{8x+1}\right)&=\int\frac{dz\left(z^6-z^8\right)}{1-z^8}=\int\frac{z^6\,dz}{(1+z^2)\,(1+z^4)}\\&=1-\int\frac{dz\left(1+z^2+z^4\right)}{(1+z^2)\,(1+z^4)}=1-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{dz\left(1+z^2\right)}{1+z^4}\\&=1-\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}=1-\frac{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)}{8},\\\left(\frac{1}{6x-5}-\frac{1}{6x-2}\right)&\\&=\int\frac{dz\left(1-z^3\right)}{1-z^6}=\int\frac{dz}{1+z^3}=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{1+z}+\frac{1}{3}\int\frac{2dz-z\,dz}{1-z+z^2}\\&=\frac{1}{3}\int\frac{dz}{1+z}-\frac{1}{6}\int\frac{2z\,dz-dz}{1-z+z^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dz}{1-z+z^2}=\frac{\log 2}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

VII. A long time ago I also conjectured that the sum of the series $1 - \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{3^{2n-1}} - \ldots$ equals $p\,(\log 2)^{2n-1}$; but in the case $n = 2$ I have easily seen at once that the value of p cannot possibly be indicated rationally.[5]

[1] Fuß already proposed that this letter, which bears no date, should be inserted here in the chronological order of the correspondence. The short form of the address on the envelope suggests that it may have been delivered by messenger.
During the late 1730s, Euler and Goldbach met regularly – up to twice a week – at the meetings of the Petersburg Academy, so any of the topics mentioned in their letters from that period may have been proposed and pursued further in personal discussion.

[2] The basic idea behind these calculations is the following (cf. E. 20, § 14): Starting from

$$\frac{1}{p-q+1+nq} = \frac{1}{p+(n-1)\,q+1} = \int_0^1 z^{p+(n-1)q}\,dz;$$

and setting $p = a - b - 1$, $q = a$, we get

$$\frac{1}{an-b} = \int_0^1 z^{p+(n-1)q}\,dz.$$

Summing over all natural numbers $n \geq 1$ and interchanging the summation and the integration we would get

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{an-b} = \int_0^1 \sum z^{p+(n-1)q}\,dz = \int_0^1 \frac{z^p}{1-z^q}\,dz,$$

but this diverges. Subtracting $\sum \frac{1}{an-c}$ from this sum we get (completely neglecting the problems coming from conditional convergence)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{an-b} - \frac{1}{an-c}\Big) = \int_0^1 \frac{z^p - z^r}{1-z^q}\,dz = \int_0^1 \frac{z^{a-b-1}(1-z^{b-c})}{1-z^a}\,dz,$$

where we have set $p = a - b - 1$, $q = a$ and $r = a - c - 1$. Taking, in particular, $a = 8$, $b = 5$ and $c = 3$ we find

$$\sum \Big(\frac{1}{8n-5} - \frac{1}{8n-3}\Big) = \int_0^1 \frac{z^2(1-z^2)}{1-z^8}\,dz.$$

[3] Apparently Goldbach had suggested this value.

[4] The formulae that follow are linear combinations of Dirichlet L-series at $s = 1$: we have

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \ldots &&= \frac{\pi(\sqrt{2}-1)}{8}, \\ B &= \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} + \ldots &&= 1 - \frac{\pi(\sqrt{2}+1)}{8}; \end{aligned}$$

this implies

$$1 - A - B = L(1,\chi_4) = \frac{\pi}{4} \qquad \text{and} \qquad 1 - A + B = L(1,\chi_{-8}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4},$$

where χ_4 is the Dirichlet character with conductor 4 defined by $\chi_4(n) = \Big(\frac{-1}{n}\Big)$, and where $\chi_{-8}(n) = \Big(\frac{-2}{n}\Big)$. Observe that $L(1,\chi_4)$ is Leibniz's series; in E. 41, Euler credits the value of

$L(1, \chi_{-8})$ to Newton (in fact, it appears in his *Epistola posterior* to Oldenburg for Leibniz). Setting $a = 6$, $b = 5$ and $c = 2$ in the general result given above in note 2 we get

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{6x-5} - \frac{1}{6x-2} \Big) = \int_0^1 \frac{1-z^3}{1-z^6}\, dz.$$

See also *infra* n° 52.

[5] Euler often worked with the function

$$\varphi(s) = (1 - 2^{1-s})\, \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s}$$

(without, of course, using this notation or calling this object a function). It is easy to show that $\varphi(1) = \log 2$, but explicit formulae for $\varphi(2n+1)$ similar to those for $\varphi(2n)$ are not known. See *supra* n° 26, note 1, and Dutka 1996.

31
Goldbach to Euler
[Petersburg], (November 28th) December 9th, 1739[1]

Sir,

I noticed yesterday that it is possible in infinitely many ways to assign algebraic numerators to the denominators 1, $1 \cdot 2$, $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$, ..., so that the entire series becomes summable; thus, e. g.,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{19}{1 \cdots 6} + \frac{29}{1 \cdots 7} + \frac{41}{1 \cdots 8} + \frac{55}{1 \cdots 9} + \ldots$$

equals

$$\frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{5}{1 \cdots 6} + \frac{6}{1 \cdots 7} + \frac{7}{1 \cdots 8} + \frac{8}{1 \cdots 9} + \ldots = \frac{1}{2},$$

and

$$\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{6}{1 \cdots 5} + \frac{7}{1 \cdots 6} - \frac{8}{1 \cdots 7} + \frac{9}{1 \cdots 8} - \frac{10}{1 \cdots 9} + \ldots = 1.$$[2]

Indeed this is easily demonstrated; but from the same source one can also derive other results that are much more recondite. For example, in order for the series

$$\frac{a+1}{n} + \frac{2a+3}{1 \cdot 2\, n^2} + \frac{3a+7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n^3} + \frac{4a+13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 n^4} + \ldots,$$

which has $\dfrac{ax + x^2 - x + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots x\, n^x}$ for its general term, to equal -1 for some arbitrary number a, I say one has to take $n = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ to satisfy the equation.

C. G.

December 9th, 1739.

[1] The date indicated in this letter and in Euler's reply n° 32 is the same. Since both correspondents lived in the same district of Petersburg, on Vasilevsky Island, it is not impossible that Euler indeed drew up his reply on the same day Goldbach had sent his short missive. However, the present editors think it more likely that both correspondents used their customary dating style, with Goldbach dating his letter according to the Gregorian calendar and Euler replying – eleven days later – with the date indicated in the "old style", according to the Julian calendar that officially held in Russia.

[2] On the sign that has been rendered by ∺ in the original text of this formula, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.

32
Euler to Goldbach
[Petersburg], December 9th (20th), 1739[1]

Sir,

all the series comprised by the general formula $\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\ldots}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots x\cdot n^x}$ can be summed by algebraic and exponential quantities taken together.[2] Consequently, if either the coefficients α, β, γ, δ, … or the number n are determined in such a way that the exponentials vanish, one will obtain all series of this form that can have an algebraic sum. In order to make this appear more clearly, I will proceed by steps.

The series with general term …	has for its sum …
$\dfrac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\alpha-\alpha$
$\dfrac{\beta x}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\beta\cdot\dfrac{1}{n}$
$\dfrac{\gamma x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\gamma\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$
$\dfrac{\delta x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\delta\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)$
$\dfrac{\varepsilon x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\varepsilon\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^2}+\dfrac{6}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)$
$\dfrac{\zeta x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\zeta\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{15}{n^2}+\dfrac{25}{n^3}+\dfrac{10}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}\right)$
$\dfrac{\eta x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$	$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\eta\cdot\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{31}{n^2}+\dfrac{90}{n^3}+\dfrac{65}{n^4}+\dfrac{15}{n^5}+\dfrac{1}{n^6}\right).$

The law according to which these sums progress is such that the sum corresponding to the general term $\dfrac{\psi x^{k+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$ is the following:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\psi\left(\frac{1}{n}+\frac{2^k-1}{1\cdot n^2}+\frac{3^k-2\cdot 2^k+1}{1\cdot 2\cdot n^3}+\frac{4^k-3\cdot 3^k+3\cdot 2^k-1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^4}+\frac{5^k-4\cdot 4^k+6\cdot 3^k-4\cdot 2^k+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot n^5}+\ldots\right).$$

From this one perceives that the series whose general term is $\dfrac{\alpha}{1\cdot 2\cdot 3\,\cdots\, x\cdot n^x}$ can on no account have an algebraic sum.[3] So, let the general term be $\dfrac{\alpha+\beta x}{1\cdot 2\cdot 3\cdots x\cdot n^x}$; then the sum will equal $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\dfrac{\beta}{n}\right)-\alpha$, and the sum will be algebraic and $=-\alpha$ whenever $\alpha n+\beta=0$, or $n=-\dfrac{\beta}{\alpha}$; and this comprises the first two cases about which you, Sir, wrote to me, and which you stated to be easy to prove.

Now, taking the general term to be $\dfrac{\alpha+\beta x+\gamma x^2}{1\cdot 2\cdot 3\,\cdots\, x\cdot n^x}$, the sum will equal $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\alpha+\dfrac{\beta+\gamma}{n}+\dfrac{\gamma}{n^2}\right)-\alpha$. It will therefore be algebraic and equal to $-\alpha$ when $\alpha n^2+(\beta+\gamma)\,n+\gamma=0$ and

$$n=\frac{-\beta-\gamma\pm\sqrt{\beta^2+2\beta\gamma+\gamma^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

This also covers your rather recondite series

$$\frac{a+1}{n}+\frac{2a+3}{1\cdot 2\cdot n^2}+\frac{3a+7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}+\dots,$$

which has the general term $\dfrac{1+(a-1)\;x+x^2}{1\cdot 2\cdot 3\,\cdots\, x\cdot n^x}$; since here $\alpha=1$, $\beta=a-1$, $\gamma=1$, its sum is $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)-1$, and this becomes algebraic and $=-1$ when $n^2+an+1=0$ or $n=\dfrac{-a\pm\sqrt{(a^2-4)}}{2}$.

In a similar manner one can proceed further: since the series whose general term is

$$\frac{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,\cdots\, x\cdot n^x}$$

has for its sum

$$-\alpha+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta}{n}+\frac{\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta}{n^2}+\frac{\delta+6\varepsilon+25\zeta}{n^3}+\frac{\varepsilon+10\zeta}{n^4}+\frac{\zeta}{n^5}\right),$$

this sum cannot be algebraic if it does not at the same time equal $-\alpha$; but the sum will be $-\alpha$ if n is a root of the equation

$$\alpha n^5+(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta)\,n^4+(\gamma+3\delta+7\varepsilon+15\zeta)\,n^3+(\delta+6\varepsilon+25\zeta)\,n^2+(\varepsilon+10\zeta)\,n+\zeta=0.$$

By this method therefore not only innumerable series of the form $\dfrac{X}{1\cdot 2\cdot 3\,\cdots\, x\cdot n^x}$, where X denotes any rational algebraic function of x, can be shown to be algebraically summable, but it is also understood that besides those that are determined in this way, no others exist at all.

Farewell, Sir, and be well-disposed towards your most respectful

L. Euler

Dec. 9th, 1739

[1] Cf. n° 31, note 1.
[2] This statement generalises the instances presented by Goldbach in n° 31.
[3] Euler does not claim that e^r is not algebraic for rational r; he simply observes that the summation of the series $\sum \frac{\alpha}{x!\, n^x} = \alpha(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ cannot be expressed by algebraic functions since $e^{\frac{1}{n}}$ is, by definition, transcendental.
Similarly, the expression $e^{\frac{1}{n}}\left(\alpha + \frac{\beta}{n}\right) - \alpha$ will be algebraic if and only if the term involving the exponential function vanishes, i. e., if $n = -\frac{\beta}{\alpha}$.

33
Goldbach to Euler
[Petersburg], (February 21st) March 3rd, 1740

Sir,

I have just learnt that your salary has been fixed, with the approval of His Excellency Count Ostermann, in the way that you wished for.[1] I congratulate you whole-heartedly on this and remain most respectfully, Sir,

your most humble and most obedient servant
Goldbach.

March 3rd (new style), 1740.

[1] On January 12th (23th), 1740, Euler had submitted an application to the Petersburg Academy for a new employment contract, requesting a substantial raise in salary from the 660 roubles which he had received since his first engagement as a professor in 1731, to the 1200 roubles which Daniel Bernoulli had got until his departure (and Delisle still did). Apparently this did not fit into the Academy's budget, and a special appeal had to be made – "in consideration of [Euler's] special merits" – to "higher instances", i. e., to Vice-Chancellor Ostermann. On March 14th (25th), the new contract, on the terms of Euler's request, was signed and filed (cf. *Materialy*, t. IV, p. 297–298, 351–352).
This short note is the only text in the Euler-Goldbach correspondence written in French; apparently Goldbach, in his function as Secretary of the Academy, wanted his approval of Euler's contract to go on record with the authorities.

34
Euler to Goldbach
[Petersburg], August 21st (September 1st), 1740

Sir,

Geography is fatal to me. As you know, Sir, I have lost an eye working on it;[1] and just now I nearly risked the same thing again. This morning I was sent a lot of maps to examine,[2] and at once I felt the repeated attacks. For as this work constrains one to survey a large area at the same time, it affects the eyesight much more violently than simple reading or writing. I therefore most humbly request you, Sir, to be so good as to persuade the President by a forceful intervention that I should be graciously exempted from this chore, which not only keeps me from my ordinary tasks, but also may easily disable me once and for all.[3] I am with the utmost consideration and most respectfully, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Aug. 21st, 1740.

[1] Euler had lost the use of his right eye in 1738, probably due to an abscess following an infectious illness – R. Bernoulli (1983) suspects a recurrent scrofula infection Euler may have contracted in his youth. The present note shows that Euler himself ascribed his ophthalmological problems to excessive stress caused by his work in the geographical department; however, this attribution – which recurs, this time with reference to an excessive effort in astronomical calculations, in the *Lobrede* by Fuß 1786 (along with the erroneous date 1735) – is almost certainly wrong.

[2] On May 24th (June 4th), 1740, Euler and Heinsius had been rather abruptly ordered to submit at once a – long delayed – project for a general map of the Russian empire. Their expert report, which was turned in on June 2nd (13th), called for an inspection of all the regional maps in the Petersburg Academy's collection; and indeed a list of such maps and plans was produced on September 6th (17th), 1740 (cf. *Materialy*, t. IV, p. 405–406, 412–414, 459–461).
The requested general chart of Russia, which had originally been commissioned by Peter I from the Academy, finally appeared, along with 19 regional maps, under Delisle's responsibility in the 1745 *Atlas Russicus*. From the catalog of Euler's private library (*CLLE*, n° 2a) we know that he owned a copy of the work in the late 1740s.

[3] No explicit order by President Brevern releasing Euler from his tasks in the department of geography has been retrieved; however, after missing several meetings Euler was able to return to the Academy on October 6th (17th), 1740 (see *Protokoly* 1897, t. I, p. 622–631).

35
Goldbach to Euler
[Petersburg], August 21st (September 1st), 1740

Sir,

As soon as I have occasion to speak to (*plenis titulis*)[1] State Councillor von Brevern, I will not fail to make an appropriate intervention about the poor state of your health; but as I am not sure whether this will be possible tomorrow or only in a few days, and on the other hand there is an urgent risk in this matter, I think you should do well to inform both the President and Councillor Schumacher immediately by letter that you cannot go on with the geographical work without an obvious risk to your health, but will have to interrupt it until you are better.[2] Meanwhile I have gladly heard today from Secretary Tiedemann that you already feel somewhat better; I sincerely wish to see you soon quite recuperated.

With special respect, I remain, Sir, your most obedient servant Goldbach.

August 21st, 1740 (in haste)

[1] The abbreviated insertion means Goldbach did not want to take the time to actually write down all the titles that courtly etiquette would require him to give to the Academy's President, Count (etc.) von Brevern.

[2] Cf. nº 34, note 3.

36
Euler to Goldbach
[Petersburg], April 18th (29th), 1741

Sir,

in case Professor Krafft has not yet sent you Schooten's *Exercitationes*, I am honoured to present them to you; I have copied the prime numbers of the form $4n + 1$ up to 3000 from this book and found no exception to your observation.[1]

Mr. Delisle leaves me this instant. He told me that a bloody battle has already been fought near Neuss, where on the Prussian side two princes and several generals, and on the Austrian side General Lentulus and many others were killed; but finally the Prussians won the day.[2] Besides, Mr. Maupertuis, who wanted to take his leave from the King in Silesia, is said to have been lost in this action.[3]

I am honoured to be most respectfully, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Apr. 18th, 1741

[1] Apparently Goldbach had asked Krafft and Euler for the loan of a copy of Frans van Schooten's *Exercitationum mathematicarum Libri quinque* (1657), in order to verify some conjecture. That compilation, which is in great part devoted to Cartesian geometry and to combinatorics, indeed contains (p. 393–403) a list of the prime numbers up to 10 000 (*Syllabus numerorum primorum, qui continentur in decem prioribus chiliadibus*).
The observation Goldbach wanted to check may well have been the Two Squares Theorem (cf. *supra* nº 7, note 5, *infra* nº 47, note 4, nº 70, notes 10–11, nº 83, note 10, and nº 115, note 8).

[2] The first big battle of the First Silesian War had taken place on April 10th, 1741, near the village of Mollwitz (now Małujowice, Poland), about 40 km north of the town Neisse (Nysa) to which Euler refers. The Swiss-born general major Cäsar Joseph von Lentulus, who fought on the Austrian side, was in fact only wounded at Mollwitz, and of the several commanders from the higher Prussian nobility who participated in the battle none seems to have been killed, either.

[3] Maupertuis, to whom Frederick II had appealed for help with the establishment of his new Academy, had arrived in Berlin in September 1740; but when it became clear that the king's military activities would delay this project indefinitely, he asked for leave to return to France. On March 17th, Frederick ordered Maupertuis in a peremptory message to join him in Silesia. When the battle of Mollwitz seemed to take a bad turn, the king left the field with his immediate entourage, and Maupertuis was taken prisoner by the Austrians. However, he was treated very considerately at the court in Vienna and even indemnified for the loss of his watch; on his release, he went back to Berlin for a short time in May and then returned to Paris.

37
Goldbach to Euler
[Petersburg], June (7th) 18th, 1741

Sir,

when you arrive at Berlin, please find out from Privy Councillor Vockerodt whether my two letters of Nov. 12th, 1740, with an enclosure to Mr. von Wartenberg, and of Jan. 10th, 1741, with an enclosure to Mr. von Podewils, have been handed over to him.[1]

For the rest, I wish you again a happy journey[2] and remain, Sir, with all imaginable respect

your most obedient servant

Goldbach.

June 18th (new style), 1741.

[1] J.G. Vockerodt, who hailed from Halle, had lived in Petersburg from 1715 to 1733, first as a private tutor in General Bruce's and Prince Kantemir's households, then as secretary to Ambassador Mardefeld. His report on Russian history and society (published by Herrmann in 1872) shows him as one of the best-informed German experts of his time on Russia. Some letters Vockerodt wrote to Goldbach in 1739/42 have survived, but Goldbach's letters and the enclosures mentioned here have not been retrieved.

[2] Euler and his family left Petersburg by sea on the following day (cf. nº 38).

38
Euler to Goldbach
Berlin, August 1st, 1741

Sir,

your kindness and friendship towards me has always been ever so uncommonly great that I do not feel able to thank you adequately for them. Thus I take the liberty to send you a short report of our voyage and my present standing here; I'm doing so all the more since you have been so good to ask for it explicitly when I was taking leave from you.

After leaving Petersburg on June 19th in the afternoon and lying at anchor among all the Russian fleet on the 20th at Kronstadt, on the 21st we wound our way through the battleships, against an utterly contrary wind, and sailed very slowly until we arrived at the Fire Guard at midnight. On the 23rd, we saw the entire Swedish fleet on the coast of Finland and were stopped by a Swedish frigate. Its officer questioned our captain at great length about the state of the Russian marine; I quite marvelled at the lies which our captain told the Swedish officer, doubling the number of the Russian vessels and pretending there were 130-gun ships among them.[1] On the evening we sailed along Hogland in good weather.

We passed the island of Dagö on the 26th, after weathering a rather heavy storm for 24 hours; another similar wind arose on the 27th and persisted until the next day when we finally arrived near the northern coasts of Gotland. The following days we had nice weather but contrary winds or none at all, so that we spent several days until July 5th before passing the southern coast of Gotland – a distance amounting to no more than 18 miles. After that the wind was always favourable but very weak, and we sighted Bornholm on the 8th, the island of Rügen and the estuary of the Oder on the 10th. From there I went alone on a boat two miles upriver to Wolgast, where on the 11th the ship also arrived happily, after we had spent three weeks at sea and all the company except for myself had lain miserably sick most of the time. On the 12th we transferred to a boat hailing from Stettin that had also come from Petersburg, and in the best of weather we sailed through a lovely countryside up the river to Stettin where we gladly arrived on the 13th. There I had the opportunity to strike up a close acquaintance with Superintendent Court Chaplain Mauclerc, to whom I conveyed the parcel from the Academy and a dutiful compliment from Secretary Tiedemann.[2] On the recommendation of Councillor Heinzelmann I also met Secretary Bulle, who proved very well-disposed towards me. President von Grumkow invited me for dinner, and on the 20th I visited a disputation at the high school, chaired by Professor Stisser; there I met most of the local professors. For July 22nd I had ordered a coach and some freight wagons; by these we left Stettin in the evening and finally arrived here at Berlin happily on the afternoon of the 25th. In Stettin I had already received the news that on Mr. Stähelin's orders, an apartment had been rented for me at the Royal Address Office from Court Councillor Wilke; accordingly we moved in at once. We have all of the ground floor, consisting of eight rooms, a kitchen and all commodities.[3] Baron von Mardefeld[4] had recommended me to His Excellency Cabinet Minister von Borck, who received me very graciously and promised to submit at once a report to His Royal Majesty on my behalf. I have also written to His Excellency Cabinet Minister von Podewils, and sent the letter of recommendation which the French Ambassador Marquis de Chétardie had given me for him. I had two more letters from the Ambassador, recommending me to Mr. von Brand, the Queen Mother's majordomo, and to Mr. Achard; both have received me very courteously. The Russian Minister von Brackel also assured me of his good grace. By the way, I have already struck up a good acquaintance with Councillor Eller, the Court physician, with Count Algarotti, with Councillor Jariges who occupies the post of Secretary at the Royal Society, and with Professors Naudé and Wagner; thus my arrival here has been up to now most pleasing, and, God helping, I have reason to hope for a life in the greatest ease. I have not yet been able to present your compliments, Sir, to Privy Councillor Culemann and his wife, as they are staying in the country.

I have received no letters from Petersburg and consequently do not know how the business I left behind is faring. Firstly, I am afraid that the salary owed me for the period from January 1st to June 1st may not be paid out without chicanery, as the affair about my house appears so ominous to me.[5] For, as I have already had the honour to hint to you, Sir, I signed a writ at the Chancellery engaging myself to cede my house to the Academy for the price that the architects would fix; at the same time, I stated voluntarily that I would not ask for more than 400 roubles, even if the architects should value the house more highly, because – as you are well aware – I had not asked for more than 400 roubles from outside buyers. Now the architects valued the house in good and due form at 400 roubles; but this notwithstanding, Councillor Schumacher, without speaking a word to me about this matter, had only 300 roubles credited to my account. At first I thought this to be a mistake, but the day before my departure, Schumacher told me that it had been done intentionally, because, when I signed the writ and spoke about 400 roubles, he had understood only 300 roubles. I made no other answer to this than that it had never entered my mind to sell for that price. At the same time I declared the time of my departure to him and asked him to send some of his men to take possession of the house; but when in Kronstadt, I heard that he had not sent anyone for an entire day after my departure. Likewise, as in the Imperial Cabinet it has been most bountifully decided to grant me a gratuity, according to the Academy's opinion, I now fear that this also might be obstructed by Mr. Schumacher. Therefore I humbly beseech you, Sir, to kindly let me have a copy of the resolution the Cabinet passed on my behalf.[6] Taking the liberty to recommend these affairs of mine to you most strongly, I remain for all my lifetime with all the most dutiful respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Aug. 1st, 1741.

[1] Euler's journey across the Baltic occurred at a time of great political and military tension between Russia and Sweden. Since May 1741 the Swedes, who wanted to reclaim the territories lost in the Great Northern War (1700–1721), had deployed ground troops and almost all their naval forces near the Russian border. In late July they declared war, but neither the Swedish fleet, which had been struck by an epidemic, nor the Russian navy, which was badly in disrepair, could actually take a substantial part in the operations. After some Russian advances and a long ceasefire in winter the Swedes were defeated in 1742 at Helsingfors (now Helsinki) and finally had to cede the Southern part of Finland to the Russians in 1743.

[2] As documented in the Petersburg Academy's records (*Protokoly* 1897, t. I, p. 683), Euler had undertaken to deliver a parcel of books published in Russia that Mauclerc had ordered from the Academy.

[3] A Russian translation of this report on Euler's travel to Berlin was published in Yushkevich 1957, p. 9.
The "Royal Prussian Intelligence and Address Counter" – inspired by similar offices in Paris and London – had been founded in 1727. It served as a brokering agency for sales on commission, a public pawnshop and lost property office, and it also published a gazette that ran advertisements and job applications.
The intermediary through whom Euler had applied to the counter in his search for suitable accommodation cannot now be unambiguously identified. However, the merchant Johannes Stähelin-Bader (1693–1764), who hailed from Basel and had lived both at Berlin and at Petersburg in the 1720s, is a likelier candidate than the Petersburg professor of rhetoric Jacob (von) Stählin, who is mentioned in other places in the correspondence. Johannes Stähelin also seems to have acted as a clearing agent for Euler and for the Petersburg

Academy on other occasions (see, e. g., Euler's letter R 2661 to Volchkov from 1743: JW 3, p. 253; cf. also n° 40, note 9).
Some questions also remain about the owner of Euler's first lodgings in Berlin, *Hofrat* (Court Councillor) Wil(c)ke. No such dignitary could be identified in Berlin, but there are two Saxonian Court Councillors of that name, who may have owned property at Berlin: the Leipzig jurist and civil servant Georg David Wil(c)ke (1679–after 1748) and the Meissen minister, superintendent and archivist Georg Leberecht von Wilcke (1699–1755).
According to the Berlin *Adres-Calender* for 1742 and 1743, Euler lived "auf der Neustadt bey der Potsdamschen Brücke in dem Barbonessischen Hause" (see Valentin 1906; thanks to Ronald Calinger and Rüdiger Thiele for drawing our attention to this hard-to-find note). On today's maps this means a location on Wilhelmstrasse between Unter den Linden and Behrenstrasse (where Euler lived from September 1743 to 1766: cf. n° 56, note 21).

[4] As the Prussian ambassador in Russia, Axel Freiherr von Mardefeld had negotiated, on King Frederick's instructions, Euler's engagement by the Berlin Academy (cf. O. IVA/6, p. 280, 299–301).

[5] According to Petrov 1958, the wooden house that the Eulers had bought in 1733 as their first family home was situated in the 10th line on Vasilevsky Island. On June 4th, two weeks before Euler's departure, the architect Giuseppe Trezzini and the builder Conrad Ossner had inspected the house, and the day after, Schumacher had decreed to pay Euler 300 roubles for it (see *Materialy*, t. IV, p. 684–686). In his letter from October 13th, 1741 (R 2118: JW 2, p. 56), Euler reminds Schumacher that substantial repairs will have to be done before the onset of winter.

[6] Euler's letters to Schumacher from September 9th and October 13th, 1741 (R 2117–2118: JW 2, p. 52–56) show his awareness that his departure from the Petersburg Academy has displeased the authorities in Russia: so he asks for Schumacher's goodwill and offers to continue his services to the Academy as a contact in Western Europe and as an active contributor to its scientific efforts. On the other hand he insists that – regardless of the Academy's financial difficulties – his wages for the first half of 1741, the gratuity he has been promised and the revenue from the sale of his house must be paid, the annual pension of 200 roubles customary for foreign members awarded to him and the reimbursement of his postage expenses guaranteed before he will send in the papers he has ready for the *Commentarii*.
In the months that followed, the dispute seems to have died down: in April 1742 Euler started sending in about half of his work to the Petersburg Academy for publication. He remained on courteous or even amicable terms with Schumacher for many years.

39
Goldbach to Euler
Petersburg, August 19th, 1741

Sir,

I received your letter dated August 1st here on the 13th[1] and was most pleased to learn from it that after your long voyage you are now happily dwelling in Berlin. The acquaintances you have already made there seem to be all of special importance and they do not let me doubt that your stay in Berlin will be fully concordant with your own wishes.

I have not yet seen the resolution of which you request a copy,[2] and with regard to your other financial dealings with the Academy, I think that these will be concluded in the best and shortest manner by appealing to His Imperial Majesty's

High Cabinet. In this, Baron von Mardenfeld, who until now has taken such generous care of your affairs, will be able to assist you more than anyone else; but I shall also contribute my share without failing whenever I think it necessary and profitable for your interests, Sir. I also believe it could not be amiss if you report your claims towards the Academy in all detail to Legation Councillor Groß.

What do you think, Sir, of theorems such as this:[3] "$(3m+2)n^2+3$, where m and n are arbitrary integers, can never be a square"?

In the *Zeitungen von gelehrten Sachen* I have read a short time ago that the two monks who are editing Newton's *Principia mathematica* made extensive use of your *Mechanica*.[4]

When you visit the Royal Library in Berlin, let them show you the *Thesaurus Mathematum* by Johann von Leuneschloß (Padua 1646), in folio,[5] and Pietro Bongo's *De Numerorum Mysteriis*, in quarto.[6] I saw these books in 1718,[7] but only superficially, and I remember next to nothing of their contents.

With my dutiful compliments to your dearest wife and all your family, I remain, Sir, your most assiduous servant

Goldbach.

St. Petersburg, Aug. 19th (n. st.), 1741.

[1] On the mail service between Berlin and Petersburg, see Section 1.3 of the Introduction, note 61.
[2] Cf. n° 38, note 6.
[3] See Euler's reply in n° 40, note 13.
[4] In its issue for July 17th, 1741, the Leipzig *Neue Zeitungen von gelehrten Sachen* had published a short review of Le Seur and Jacquier's edition of Newton's *Principia*, noting that the editors had also included results by later authors. Besides the Genevan collaborators Gabriel Cramer and Jean-Louis Calandrini, the review names Jacob Hermann, Giovanni Poleni and Euler, in particular his 1736 *Mechanica* (E. 15/16).
[5] Cf. n° 40, note 12.
[6] Bongo 1591: cf. n° 40, note 11.
[7] Goldbach had stayed in Berlin for some weeks in the summer of 1718, principally to prepare his diplomatic mission to Sweden (see Section 1.1.1 of the Introduction, p. 5).

40
Euler to Goldbach
Berlin, September 9th, 1741

Sir,

I am doubly obliged to you: first for your own most esteemed letter, but also particularly for the most gracious document that you issued to me on behalf of His Excellency Count Ostermann.[1] My most respectful thanks for your kind advice about my affair; as a result, I do not doubt that it will soon come to a favourable conclusion, as you have certainly been able to speak at length to His Excellency

Count Ostermann about the resolution taken on my behalf by the Cabinet. Meanwhile I do not understand why this resolution has not yet been communicated to you, Sir; I cannot but infer that the Academy has not even answered it yet. Before deciding whether to trouble Baron von Mardefeld with this affair of mine, I wrote, for the time being, in the most obliging terms to Councillor Schumacher,[2] in order to be all the more entitled to address my claim to the higher instance in case there should be a negative reply or none at all. Moreover I considered it to be in accordance with my duty to write to His Excellency Count Golovkin and to thank him for the special bounty granted to me, mentioning not only the gratuity I was awarded, but also my overdue salary and my house.[3]

Privy Councillor Vockerodt, who is still staying at Breslau, asks me to give you, Sir, his most dutiful compliments and to excuse that he has not yet written to you because of his many obligations; he has duly received your two letters and delivered the enclosures.[4]

A few weeks ago Her Majesty the Queen Mother sent for me, and the day after that I had the honour of dining with her; both Her Majesty and the two Royal Princesses received me in a most gracious and affable manner.[5] His Royal Majesty the King also not only assured me, by way of Privy Councillor Jordan, of his most exalted favour and protection, but even was so gracious as to send me in person the following letter:[6]

> "Mr. Euler. I have been glad to learn that you are satisfied with your lot and your present situation. I have given the necessary orders to the Grand Directory for the salary of 1600 thalers which I granted to you. If there is anything you need, you have but to wait for my return to Berlin. I am your benevolent King
>
> Federic.
>
> At the Camp of Reichenbach.[7]
>
> September 4th, 1741."

As His Majesty has decided to erect a new building for the Academy,[8] I was ordered to procure a complete set of plans of the Academy buildings at St. Petersburg. All these plans have indeed just been engraved in copper; but as I can hardly hope to obtain a copy from Mr. Schumacher,[9] I am taking the liberty to humbly request you, Sir, to buy a copy of the plans and have them delivered to Mr. Stähelin; I shall write to Mr. Stähelin by the next post that he is to pay for them with my greatest thanks and forward them here without delay. Please do not take this liberty amiss but ascribe it to my uncertainty whether anyone else can easily obtain a copy; perhaps Secretary Tiedemann, to whom I present my most respectful compliment, will be able to get the plans and to execute all this commission.[10]

I had the two books you mentioned fetched from the Library, but in Pietro Bongo's *Mysteria numerorum*[11] I found nothing at all remarkable; he goes through all numbers in order from 1, 2, 3, to 1000, and notes of each one where it occurs in the Holy Scriptures and in other authors: on 38, e. g., he proffers nothing but the example of the sick man at the pond of Bethesda, who lay there for 38 years. Leuneschloß[12] is a very nice book of its kind, but I have not yet inspected it fully.

Your theorem that $(3m+2)\,n^2+3$ cannot be a square[13] is very pretty, and I can show in the following way that it is correct: Either n is divisible by 3 or not; in the first case n^2 is divisible by 9, and the expression $(3m+2)\,n^2+3$ takes the form $9p+3$, which cannot be a square, as is known. In the other case, where n is not divisible by 3, n^2 is a number represented by $3p+1$, $(3m+2)\,n^2+3$ takes the form $9mp+3m+6p+5$, i. e., $3q+2$, and of this also it is known that it can never be a square. A long time ago I also found some similar theorems, as: $4mn-m-1$ can in no instance be a square, and also: $4mn-m-n$ cannot either be a square, when m and n are taken to be positive integers.[14]

About the divisors of the quantity $a^2 \pm mb^2$, where a and b are relatively prime numbers, I have also discovered some curious properties behind which apparently something lies hidden.[15] They are:

Theorem 1. All prime divisors of the formula a^2-2b^2 are contained in the form $8n \pm 1$.

Theorem 2. All prime divisors of the formula a^2-3b^2 are $12n \pm 1$.

Theorem 3. No prime number can be a divisor of the form a^2-5b^2 except those contained in the form $10n \pm 1$.

I have also found some curious properties of the integrals of the formula $\dfrac{dx}{(1-x^4)^{\frac{p}{q}}}$ and the values that result when one substitutes $x=1$ after the integration.[16] They are:

Theorem: The integral $\int \dfrac{dx}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}}$ is to the integral $\int \dfrac{dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$ in the ratio $\sqrt{2}$ to 1 when after both integrations $x=1$ is substituted.

Theorem: The integral $\int \dfrac{dx}{(1-x^2)^{\frac{5}{6}}}$ is to the integral $\int \dfrac{dx}{(1-x^2)^{\frac{2}{3}}}$ as $\sqrt{3}$ to 1 when again after both integrations $x=1$ is substituted.

These theorems appear the more remarkable as the integrals cannot be compared in the usual manner.

Recommending most dutifully all my family, I have the honour to be with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Sept. 9th, 1741.

[1] The letter Goldbach had written on the instructions of Ostermann – then for a short time the *de facto* ruler of Russia – has not been preserved.

[2] Cf. n° 38, note 6.

[3] Euler's letter to Golovkin has apparently not been preserved either.

[4] Cf. n° 37, note 1.

[5] Queen Mother Sophia Dorothea of Hanover, the widow of Frederick William I, was a forceful and cultured woman, interested in the fine arts and sciences. Her two youngest daughters, who then still lived in Berlin, were Louisa Ulrika (born in 1720), who married in 1744 to become queen of Sweden, and Anna Amalia (born in 1723), an accomplished musician.

[6] The original of this letter, the first one Frederick personally wrote to Euler, has been preserved with Euler's papers at Petersburg. It was first printed in 1852; in the present edition, it is R 622 (O. IVA/6, p. 297).

[7] The Italo-French hybrid form "Federic" is the way King Frederick usually signed his letters and other documents. In the course of his campaign in Silesia, he had set up camp at Reichenbach in Lower Silesia (now Dzierżoniów, Poland) for two weeks.

[8] This plan was going to drag on for a long time: only in June 1752 the Academy could finally move into its new building on Unter den Linden. Until then, the meetings of the old Brandenburg Society of Sciences were held at the Observatory, those of the short-lived *Société littéraire* took place in its protectors' lodgings (cf. n° 72, note 13), and – starting in 1744 – the reformed Academy met in rooms set aside for this purpose in the Berlin Castle (cf. n° 77, note 7).

[9] This remark shows Euler's awareness that the collection of in-folio engravings (*Palaty Sankt-peterburgskoi Imperatorskoi Akademii Nauk, Biblioteki i Kunstkamery*) published by the Academy in spring 1741 had become a cause of embarrassment for political reasons. Indeed the sumptuous volume had been an attempt to search for patronage – for the Academy and Schumacher himself – with the regime established on behalf of the infant Tsar Ivan VI; Schumacher had composed a fulsome dedication to the temporary regent, Ivan's mother Anna Leopol'dovna. However, within a few weeks after its publication, the situation had become so unstable that the *coup d'état* which would set Elizaveta Petrovna on the throne in November 1741 was foreseeable. According to the recent study by Simon Werrett (2010b), "Schumacher scrambled to destroy printed copies of the *Palaty*, but it was too late": the publication that associated the Academy's *de facto* leader with the overthrown regime would bring about his own – temporary – fall from grace (cf. n° 72, note 11).

[10] Euler's cautious approach seems to have been successful: one of the junior members of the Academy, Jacob von Stählin, undertook to procure the engravings and send them to Berlin by messenger (cf. n° 42, note 3, and n° 43, note 2). Indeed a copy is listed in the catalog of Euler's private library from the second half of the 1740s (*CLLE*, n° 2).

[11] Cf. n° 39, note 6.

[12] Cf. n° 39, note 5.

[13] Cf. n° 39, note 3.

[14] This is the starting point of an extensive discussion of expressions representing only non-squares which lasts until February 1745 (cf. n° 87, note 1).
Euler's first claim is a simple consequence of the observation that primes $q \equiv 3 \bmod 4$ can divide a sum of squares $a^2 + b^2$ only if $q \mid a$ and $q \mid b$ (this is proved in E. 134). In fact, from $4mn - m - 1 = a^2$ we get $m(4n - 1) = a^2 + 1$; since any number $4n - 1$ must contain a prime factor $q \equiv 3 \bmod 4$, the claim follows. Euler gives this proof in his letter n° 47.
The second claim is a consequence of the first: since $\frac{4a^2+1}{4n-1}$ is not an integer, neither is $\frac{4a^2+1}{4n-1} + 1 = \frac{4a^2+4n}{4n-1}$; but the equation $4mn - m - n = a^2$ is equivalent to $\frac{4a^2+4n}{4n-1} = 4m$ (see n° 47).

[15] Fermat had already studied the primes $p \nmid 2m$ which divide expressions $x^2 \pm my^2$ for coprime integers x, y. Fermat's and Euler's partial results for $|m| \leq 3$ were explained completely through the work of Lagrange and Gauss:

– Lagrange showed that if a prime p divides $x^2 - my^2$ (as Euler, we will always assume that p is coprime to $2m$), then p is represented by some form with the same discriminant $4m$. To this end, he worked with quadratic forms $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (A, B, C)$ and observed that forms Q and Q' represent the same integers if $Q'(x, y) =$

$Q(rx+sy, tx+uy)$ for integers r, s, t, u with $ru - st = \pm 1$; Gauss later called such forms properly and improperly equivalent according as $ru - st = +1$ or $ru - st = -1$. Lagrange showed that every form (A, B, C) with discriminant $\Delta = B^2 - 4AC = 4m$ is equivalent to the "principal form" $x^2 - my^2$ for small values of m, such as $m = -1, \pm 2, \pm 3$. In these cases (but not for $m = -5$, as already Fermat knew), every prime dividing $x^2 - my^2$ for coprime integers x, y is itself represented by this form.

– If a prime $p \nmid 2m$ is represented by $x^2 - my^2$, then simple congruence considerations imply that p belongs to certain residue classes modulo $4m$ (or is represented by a linear form which Lagrange and Legendre called "linear divisor" of the quadratic form $x^2 - my^2$):

quadr. form	linear form	quadr. form	linear form
$x^2 - y^2$	$4n \pm 1$	$x^2 + y^2$	$4n + 1$
$x^2 - 2y^2$	$8n \pm 1$	$x^2 + 2y^2$	$8n + 1, 3$
$x^2 - 3y^2$	$12n \pm 1$	$x^2 + 3y^2$	$12n + 1, 7$
$x^2 - 5y^2$	$20n \pm 1, \pm 9$	$x^2 + 5y^2$	$20n + 1, 3, 7, 9$

– The final result that primes belonging to these linear forms actually divide $x^2 - my^2$ for some choice of coprime integers x and y requires the quadratic reciprocity law. Fermat, Euler and Lagrange could only prove special cases (corresponding to values with $|m| \le 5$).

The first two points imply Euler's observations in this letter (note that Euler does not mention the condition that the primes should be coprime to $2m$: $a^2 - 2b^2$ can be divisible by 2, $a^2 - 3b^2$ by 2 or 3, and $a^2 - 5b^2$ by 2 or 5 even if a and b are coprime). Euler gives precise statements of these conjectures in E. 164.

[16] The function $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ is called the Beta function; the integrals occurring here were called "Euler integrals of the first kind" by Legendre, who also introduced the notation $\Gamma(x)$ for "Euler integrals of the second kind".

Special cases of the Beta function already occur in the work of Pietro Mengoli, who first (in 1659) computed $B(n+1, m-n+1) = \int_0^1 x^n(1-x)^{m-n}dx$ for integers m, n, and later (in 1672) worked out $B(\frac{n}{2}+1, \frac{m-n}{2}+1)$ (see Massa Esteve / Delshams 2009); Wallis computed $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^n dx = p\,B(p, n+1)$.

Euler studied these integrals in E. 19, in E. 321 and finally in *Institutiones Calculi Integralis*, vol. I, ch. IX, §§ 391 and 393 (E. 342: O. I/11, p. 249–251).

The substitution $x = z^r$, where $r > 0$, gives $B(a,b) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^1 z^{ar-1}(1-z^r)^{b-1}dz$. Choosing $(r, a, b) = (4, \frac14, \frac14)$ and $(4, \frac14, \frac12)$, we find

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac34}} = 4\,B\Big(\frac14, \frac14\Big), \qquad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^4)^{\frac12}} = 4\,B\Big(\frac14, \frac12\Big).$$

The equation $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ now shows that

$$\frac{B(\frac14,\frac14)}{B(\frac14,\frac12)} = \frac{\Gamma(\frac14)\Gamma(\frac34)}{\Gamma(\frac12)\Gamma(\frac12)}.$$

Using $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$ we find

$$\frac{B(\frac14,\frac14)}{B(\frac14,\frac12)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2},$$

as claimed by Euler.

The equation $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$ was known to Euler: in E. 421 he put $[\lambda] = \int_0^1 (\log\frac1x)^\lambda\,dx$ – thus in our notation we have $[\lambda] = \Gamma(1+\lambda)$ – and proved that $[\lambda]\,[-\lambda] = \dfrac{\lambda\pi}{\sin\lambda\pi}$, which gives the desired result since $\Gamma(1+s) = s\,\Gamma(s)$.

41
Euler to Goldbach
Berlin, September 16th, 1741

Sir,

despite the fact that I have written to you only eight days ago, I find myself already obliged again to address the present letter to you; for by the last mail I received a letter from the old Professor Johann Bernoulli,[1] in which he not only recognises the error I noticed in his *Meditations on Hydraulics*, but also sends me the enclosed sheet in which he corrects everything, requesting me to forward it to Petersburg without delay so that it can be inserted in time into his dissertation which should presumably be printed soon. Furthermore he also instructed me to ask the Imperial Academy on his behalf to pay attention to the correct printing of the text of his dissertations as well as to the figures; these are drawn only by a shaky hand, but should be engraved most delicately. I therefore take the liberty to recommend this request of Mr. Bernoulli's most respectfully and to ask you, Sir, to take care that it is executed to his full satisfaction.[2]

A few days ago I had the honour to dine with His Excellency Cabinet Minister von Borck, who acquainted the whole company with His Majesty's august intention to coin some medals commemorating the Silesian campaign; afterwards he asked me in particular to obtain some proposals from those capable persons in St. Petersburg who attend to such matters.[3] Thus I consider it my duty to advise you, Sir, of this matter and to send you the enclosed note, which contains His Majesty's august project, most humbly requesting you to communicate your ideas to me in case you are willing to reflect on the subject; I shall then make such use of them as you yourself think fit.

With this I recommend myself to your continuing goodwill and remain, with all the respect imaginable, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Sept. 16th, 1741.

[1] Johann Bernoulli had written to Euler on February 18th, 1741, but withheld the letter when he heard that Euler was leaving Petersburg. On September 1st, he added a postscriptum and sent the letter to Berlin (see R 220: O. IVA/2, p. 393–405).

[2] Goldbach diligently dealt with this request: at the meeting of the Petersburg Academy held on September 18th (29th), he produced Bernoulli's *Additamentum* to the second part of his *Hydraulica* and had the paper fetched back from the printing shop. On October 21st (November 1st), the amended version was returned to the printers. But on November 23rd (December 4th), Goldbach had to submit another request sent from Basel to Berlin on October 23rd (R 221: O. IVA/2, p. 406–410) and forwarded by Euler with a covering letter that seems to be lost: Bernoulli now asked for the deletion of a substantial – fundamentally erroneous – part of his paper and some more alterations. On December 1st (12th) the final version was sent to the printers (the entire procedure is documented in *Protokoly* 1897, t. I, p. 697–709). Volume X of the *Commentarii*, in which Bernoulli's paper is contained, was finally delivered only in 1747.

[3] As is evident from n° 48, note 2, Goldbach complied also with this request.

42
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 27th) November 7th, 1741

Sir,

the special distinction with which you have been received in Berlin could not but please me very much; in particular I read and admired His Royal Majesty's letter to you[1] with the greatest reverence. A splendid influence of the Sun or Jupiter towards the centre of the heavens or something like that must have acted in your favour, Sir, as one will no doubt be able to establish after the fact.[2]

Professor Stählin has undertaken to obtain the requested engravings for you.[3]

I am very glad that you found something good in Leuneschloß's *Thesaurus*.[4] As early as 1716 in Königsberg, I read another small treatise in octavo by the same author, which he called *Paradoxa de quantitate*. N° 352 reads: "If God were to take away all the matter in a vessel by removing or annihilating it and did not allow any other matter to take its place by moving or creating it, then by this very act the sides of the vessel should become contiguous and be no longer distant by any amount". N° 473: "Monstrous and deformed things also contribute to the beauty of the world". N° 522: "If the Moon were concave, the Earth should perish by fire". N° 946: "The weights of bells are in triplicate ratio of their sounds, whereas the thicknesses of strings that are equal in length and tension are in duplicate ratio of their sounds". N° 589: "From the fact that the radius of the circular waves in water stirred in some way increases in a second's time to a little less than one foot, whereas the radius of the disturbances generated in air in the same time by some percussion equals 1380 feet, it follows that water is 1380 times denser and heavier than air".[5]

The famous antiquarian Mr. Stosch will certainly be known to scholars in Berlin, since he hails, as far as I remember, from Küstrin; if you can learn where he is now staying, please inform me.[6]

This letter has been written some time ago; but since I was prevented by diverse distractions from adding to it, I now just report briefly – in order not to hold up the answer for too long a time – that I cannot tell you more about your pension, Sir, than I did in my last letter;[7] however I hope that you shall already have had more news about it in answer to the letters you sent here.

The requested alteration in the mathematical paper has been effected.[8] I am very much obliged to you, Sir, for the notice you sent me about the medals;[9] I will not fail to make good use of it. More later. I remain with special respect, Sir,

your most obedient servant

Goldbach.

In haste.
St. Petersburg, Nov. 7th (n. st.), 1741.

[1] Cf. n° 40, note 6.
[2] Goldbach reference to discovering *ex post* the astrological influence in Euler's horoscope that is responsible for his good fortune in Berlin is of course ironic.
[3] Cf. n° 40, notes 9–10.
[4] Cf. n° 40, note 12.
[5] Leuneschloß's *Mille De Quantitate Paradoxa Sive Admiranda* were printed at Heidelberg in 1658. The theses in natural philosophy that the booklet presents – Goldbach's samples are quite typical – were intended as intellectual entertainment, but could also be used for exercises in academic disputation.
Cf. also Euler's reply n° 43, note 5.
[6] Goldbach had probably met Stosch when travelling in Italy in 1714 and now wanted to resume their correspondence: see, e. g., n° 56, note 18, and n° 60, note 1.
[7] Cf. n° 39, note 2.
[8] Cf. n° 41, note 2.
[9] Cf. n° 41, note 3.

43
Euler to Goldbach
Berlin, December 9th, 1741

Sir,

with all due respect I acknowledge the special pleasure which you drew from my fortunate establishment; and as you showed me in the past such uncommon proofs of goodwill and friendship, I desire nothing more ardently than the constant continuance of your most esteemed affection. Out of curiosity I should have liked on this occasion to inspect my nativity;[1] but then I remembered that I left it with Professor Krafft. Professor Stählin wrote to me that three copies of the Academy engravings have been entrusted to Brigadier Baudan, who, however, has not arrived here yet.[2]

For your efforts concerning my dealings with the Academy, Sir, I convey my most obedient thanks; presently it is my only intention to obtain the wages due to me and the payment for my house, which I am hopeful to receive before long, when the Academy's silver fleet arrives.[3]

With regard to the pension that some people were goading me to hope for, as I did not ask for it while in Petersburg, I will no more beg for it from here. I have already reported that my obligations here do not prevent me from delivering as many papers to the Academy every year as if I were still residing there; if the Academy deems this modest service useful and deserving of a pension, I shall acknowledge this bounty with the greatest respect and strive with all my might to prove worthy of it.[4]

I am most humbly obliged to you for the communication of Leuneschloß's paradoxes;[5] some of these – e. g., the one about the sound of bells and strings – show a real insight into nature. However, the statement about bells is already in Stifel's notes on Christoph Rudolff's *Coss*.[6] The first one you noted down, Sir, about the annihilation of matter in a vessel, is apparently based on the following argument:

If there is no matter between the vessel's sides, there is nothing between them; but if there is nothing between them, the sides are contiguous, notwithstanding the fact that the vessel retains its original form. However I think this argument is a mere sophism and far from being sufficient to prove the impossibility of a vacuum in the world.

Privy Councillor Wolff or rather his followers have recently been involved in a severe dispute with Mr. Segner, Professor of mathematics at Göttingen, who claims to have discovered several serious blunders in Mr. Wolff's *Elements of Mathematics*; on both sides various writs have been exchanged. But Mr. Segner is right, and the defence on Mr. Wolff's side is so badly flawed that there is little honour for Wolffian philosophy to be gained; they should have done better to acknowledge the mistakes, as they are quite obvious, and to correct them in a new edition, which is indeed under way.[7]

Recently I discovered a curious paradox myself, namely that the value of the expression $\dfrac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ is very nearly equal to $\dfrac{10}{13}$, and this fraction differs from the truth only by some millionth parts, the true value of the expression being the cosine of the arc $0.693\,147\,180\,559\,9$ or the arc of $39^\circ\,42'\,51''\,52'''\,9^{IV}$ in the circle whose radius equals 1.[8]

I also made several important discoveries about the integration of formulae $\dfrac{P\,dx}{Q}$, where P and Q are arbitrary rational functions of x; about these I shall be honoured to write to you more extensively another time.[9]

For now I have the honour to report most respectfully to you, Sir, that a few days ago my wife was happily delivered of a daughter.[10] Humbly recommending myself and all my family to your esteemed goodwill, I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler.

Berlin, Dec. 9th, 1741.

PS. I have enquired here about Mr. Stosch[11] – his sister is married to Professor Muzelius at the Joachimsthal high school; he is really staying at Florence, where he enjoys a generous pension from the Grand Duke; his younger brother, who is reputed to be a great antiquarian, too, is living with him. I have had letters from Mr. Hedlinger at Arlesheim in the Basel diocese; he writes that the present economic situation does not allow him to travel north.[12] He is working, from his own accord, on a medal in honour of His Royal Majesty our Most Gracious Monarch. As the present expectations are rather long-term, His Majesty most graciously decided to defer the inauguration of the Berlin Academy until a better time; by then, Mr. Maupertuis also should return here.[13] Meanwhile I am living in the most welcome quiet and have the pleasure to pursue my studies in such a way that I do not even leave the house once in a while. Thus I have not yet met Privy Councillor Vockerodt,[14] who returned here quite some time ago.

[1] Cf. nº 42, note 2.

[2] Cf. nº 42, note 3.
The Huguenot officer Charles de Baudan had been in Russian service since 1729 and was now leaving to seek employment in Prussia. However, this was unsuccessful (see nº 58, note 5), and in 1743 Baudan was back in Petersburg (see nº 73, note 12).

[3] Cf. nº 38, note 6.
According to a letter Heinsius wrote to Euler on February 10th, 1742 (R 961: JW 3, p. 66–67), Euler's salary for the first half of 1741 had by then been paid to Stähelin for transfer to Berlin. The Academy's exchequer was, however, still temporarily short of funds to clear the debt from the sale of Euler's house; it is not known when this was finally settled.

[4] On May 4th, 1742, Euler was appointed as a foreign member of the Petersburg Academy with the customary annual pension of 200 roubles. On April 17th (28th) Schumacher had written to Euler that this decision was imminent, and on May 25th (June 5th) he informed him that the matter had been settled: see R 2121–2122 (summarised in JW 2, p. 58). Cf. also *infra* nº 50, note 9, and nº 52, note 3.

[5] Cf. nº 42, note 5.

[6] Rudolff and Stifel's traditional manual of arithmetic and algebra (*Coss* is a Renaissance term for the variable quantity to be determined) had been Euler's first textbook of mathematics, as he told his eldest son in 1767: see the short autobiographical note reproduced in Fellmann 1995. In the 1740s Euler still owned the book, as the catalogue of his personal library in his "Notebook VI" shows (cf. *CLLE*, nº 165).

[7] Segner had set off this controversy in March 1741 with an invitation to a public disputation (Segner 1741a), in which he gave an extensive list of errors in Wolff's textbooks, in particular the second edition of *Elementa Matheseos Universae*. Several disciples of Wolff's reacted in scholarly journals; the Halle Master of Arts Christian Albrecht Körber even had a pamphlet (Körber 1741) printed, in which he tried to reject Segner's criticism. Euler approved the substance of Segner's counterattack in another brochure (Segner 1741b), as his letter R 946a to the publisher Haude also shows, but took his distances from Segner's all too open assault (cf. his draft of a letter to Wolff from October 16th, 1741, R 2820: JW 3, p. 377–379).
The dispute has been studied in detail by Thomas Steiner in the context of the edition of the Euler-Segner correspondence for O. IVA/8.
Early in 1742, Euler informed Segner that a new edition of Wolff's *Elementa Matheseos universae*, t. I, had just appeared, where some but not all the mistakes in the second edition had been corrected (see Segner's reply R 2419 from May 27th, 1742, to be edited in O. IVA/8).

[8] The connection between $\frac{1}{2}(2^i+2^{-i})$ and the cosine function shows that Euler is familiar with the formula $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it})=\cos t$; in this way he finds $\frac{1}{2}(2^i+2^{-i})=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{i\log 2}+\mathrm{e}^{-i\log 2})=\cos(\log 2)$. The equation $\dfrac{\sin\pi x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2\pi x}-1}{2\mathrm{e}^{\pi x}}$ was published by Euler in E. 130; the form $\mathrm{e}^{x\sqrt{-1}}+\mathrm{e}^{-x\sqrt{-1}}=2\cos x$ occurs in Euler's letter to Johann I Bernoulli from October 18th (29th), 1740 (R 219: O. IVA/2, p. 389).
Equivalent formulae can be found in Euler's "Notebook IV" – Mikhaĭlov 1959, p. 271, dates this entry to autumn 1741; see also Mattmüller 2008, p. 43 – and in a letter to Nicolaus I Bernoulli from January 16th, 1742 (R 234: O. IVA/2, p. 483–491, esp. note 4).
In his reply from July 13th, 1742 (R 235: *ibid.*, p. 491–510), Nicolaus told Euler that as early as 1728, he had communicated to his cousin Daniel the formula

$$\sin nA=\frac{(\sqrt{1-z^2}+z\cdot\sqrt{-1})^n-(\sqrt{1-z^2}-z\cdot\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

where $z=\sin A$; for infinitely large values of n and $z=\dfrac{s}{n}$, this becomes

$$\sin s=\frac{\left(1+\dfrac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n-\left(1-\dfrac{s\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

A draft of Nicolaus I Bernoulli's letter to Daniel, dated August 27th, 1728, has indeed been preserved at the Basel University Library (Ms UB Basel, L Ia 21.1, fol. 14d–14f): it contains the first, but not the second of the above formulae, with a reference to Johann I Bernoulli's paper *Angulorum arcuumque Sectio indefinita* from 1712 and an invitation addressed to Daniel and to Euler to think about the problem. Daniel included Goldbach in this "study group" by sending him Nicolaus' theorem and his own proof; on November (7th) 18th, 1728, Goldbach replied, pointing out that two years earlier he had discussed with Friedrich Christoph Mayer an expression of de Moivre's which resembled Nicolaus' "like two drops of water" (see *Correspondance*, t. II, p. 272, 275).
Euler published his results in E. 61, which was presented to the Berlin Academy in September 1742, and finally in *Introductio*, T. I, Cap. VIII, § 138 (E. 101: O. I/8, p. 147–148).
As early as 1714, Roger Cotes (see Cotes 1722) knew a result (presented in geometric form) that, in modernised form, reads

$$a^{2m} - x^{2m} = (a-x)(a+x)\prod_{k=0}^{m-1}(a^2 - 2ax\cos(2k\pi/2m) + x^2)$$

(cf. Gowing 1983, p. 65–79). This means that Cotes could have expressed roots of unity in terms of the sine and cosine functions. Note, however, that Cotes did not use the angular measure by arcs of the unit circle (now expressed by radians): this was introduced by Euler.
Euler's first public reference to the real values communicated here to Goldbach can be found in E. 170 from 1746: as *Corollaire* 3 (see O. I/6, p. 129), he indicates the formulae

$$\frac{a^{n\sqrt{-1}} + a^{-n\sqrt{-1}}}{2} = \cos n\,\ell\, a, \qquad \frac{a^{n\sqrt{-1}} - a^{-n\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin n\,\ell\, a.$$

The discussion about values of the exponential function for complex arguments continues in n° 45, 47 and 49–52.

[9] See in particular n° 66.

[10] Katharina Helene was born on November 15th, 1741. She was to be the Eulers' first daughter to reach adulthood, three earlier daughters having died in infancy between 1736 and 1739.

[11] Cf. n° 42, note 6.

[12] No letters between the renowned Swiss medallist Johann Karl Hedlinger and Euler have been preserved. However, the enquiry whether Hedlinger would consider a move to Berlin seems to have been initiated by the king's architect Knobelsdorff: in a note written on December 8th, 1741 (R 1075), Jordan asked Euler to sound Hedlinger out about a possible engagement in Berlin and ask him why he had not replied to a letter from Knobelsdorff about that matter. In spite of his reservations Hedlinger came to Berlin in August 1742 and stayed with the Eulers until May 1743: see the postscriptum of n° 54 and the second paragraph of n° 68.

[13] Indeed, the Berlin Academy's official opening would take place only in January 1744 (see n° 77, note 7), and still in Maupertuis' absence: the designated president did not return to Berlin until late summer 1745 (see n° 91, note 11).

[14] Cf. n° 40, note 4.

44
Euler to Goldbach
Berlin, February 3rd, 1742

Sir,

the enclosed letter to you was sent to me from the palace of Their Graces the Princes of Württemberg. To judge by the writing, it is by Doctor Duvernois; only the envelope was addressed to me.[1]

I have just learned that you feel indisposed; I am very much affected by this news and I hope this accident will be without consequence and the present letter will find you quite recovered.[2]

With this, recommending myself most obediently to your constant goodwill and friendship, I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Feb. 3rd, 1742.

[1] Duvernois had been professor of anatomy at the Petersburg Academy since 1725. He left Russia in June 1741 in order to return to Württemberg; apparently he stayed for some time with the young duke Karl Eugen, who was being educated at Berlin, and his mother (see also n° 47, note 8).
Duvernois' letter to Goldbach dated January 19th, 1742, has been preserved at the Moscow Archive (RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 3–4) along with Euler's covering note.

[2] Cf. Goldbach's reply n° 45.

45
Goldbach to Euler
Petersburg, February (2nd) 13th, 1742

Sir,

I received the enclosed letter from Mr. Poleni[1] by way of Mr. Marinoni already on January 19th; but then I was not only bedridden but quite debilitated by an illness that manifested itself by lack of appetite and persisted for several weeks; I was so weakened that I did not at all feel like writing or reading. Eighteen years ago I suffered from a similar illness, but that lasted only for half as long; in all these eighteen years I have never been confined to bed. Now since eight days ago, a noticeable recovery has set in, and I hope to regain my former strength in two or three weeks' time.

I am very much obliged to you, Sir, for the news about Mr. Stosch;[2] I liked all the better to learn where he is presently staying as I had not had any definite news of him in many years.

The proof[3] of my theorem which you gave in your last letter, Sir, is the very same which I had myself.[4]

The theorem that $4mn-m-1$ cannot be a square pleases me very much, and though I cannot prove it, I have inferred from it the consequence that not only, as you already remarked, Sir, $4mn-m-n$ is not a square either, but that in general the expression $4mn-m-n^a$, where a is any positive integer, can never produce a square.[5]

The observation which you communicated to me, Sir,[6] that $\dfrac{2^{\sqrt{-1}}+2^{-\sqrt{-1}}}{2}$ nearly equals $\dfrac{10}{13}$, suggested to me that if one wanted to make $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=0$,

p would then have to be smaller than 3 and greater than 2; I admit that these bounds are indicated roughly, but I am not inquisitive enough to determine them more closely.[7]

In the 20th letter of Part 1 of Kolb's *Description of the Cape of Good Hope* there are a few remarks on the local tides that might deserve to be read by you, Sir; no doubt the book will be in the Royal Library.[8]

In case you have already spoken to Privy Councillor Culemann, Sir, I should hope that you did not forget the compliment I charged you with.

From Lieutenant Colonel von Damm here I have heard that Brigadier von Baudan has happily arrived in Berlin; I shall always be glad to learn that the Brigadier's affairs are proceeding according to his wishes.[9]

Have you already heard Mr. Achard, Sir, and do you approve of him?[10]

I am most pleased that you are now free to employ your time as you yourself think fit, Sir; I should wish for the progress of the sciences that you could forever remain in that state.

I congratulate your dearest wife, Sir, from all my heart on her happy delivery and the increase of your family;[11] please tell me also how my dear godson, Master Johann Albrecht, is doing and whether his health is quite recovered by now, as I sincerely hope.[12] With the most perfect respect, I remain, Sir,

your most obedient servant Goldbach.

St. Petersburg, Feb. 13th (n. st.), 1742.

[1] Poleni's letter dated April 28th, 1741, has been preserved with Euler's papers at the Petersburg Academy's Archive (R 2010: PFARAN, f. 136, op. 2, n. 2, fol. 257–258v).

[2] Cf. nº 43, note 11.

[3] The extract "*Ex litteris ad Cl*[*arissimum*] *Eulerum*" that Goldbach noted in his copy book starts here.

[4] Cf. nº 40, note 13.

[5] To this paragraph Euler added the following note in the lower margin of fol. 37v, preparing his reply (cf. nº 47, note 2):

"*pp + qq non est divisibile per* $4n-1$ *ergo*

$$\begin{array}{rcll}
pp+qq & \neq & (4nq-q)\,(4mq-q) & \\
pp & \neq & 16mnqq-4mqq-4nqq & \\
4mn-m-n & \neq & \square & \\
pp+qq & \neq & (4n-1)\,mqq & \\
4mn-m-1 & \neq & \square & \\
\dfrac{xx+1}{4n-1} & \neq & \mathit{integ}[\mathit{ro}] & \\
\dfrac{xx+4n}{4n-1} & \neq & \mathit{int}[\mathit{egro}] & \dfrac{xx+n}{4n-1} \neq \mathit{int}[\mathit{egro}] \\
\dfrac{xx+4nn}{4n-1} & \neq & \mathit{int}[\mathit{egro}] & \dfrac{xx+nn}{4n-1} \neq \mathit{int}[\mathit{egro}] \\
\dfrac{xx+1+(4n-1)\,r}{4n-1} & \neq & \mathit{int}[\mathit{egro}] &
\end{array}$$

hinc sequitur

$$4mn - m - n^\alpha \neq \square$$

$xx - p$ divisibile per $4n-1$ *esse nequit nisi sit* $p = n^\alpha - (4n-1)\,q$".

In the margin of his copy, Goldbach noted "*vid*[*e*] *inf*[*ra*]" ("see below"), referring to an addition on fol. 53v: "*quod sic demonstratur: si* $4mn - m - n^\alpha$ *non est quadratus posito pro* m *numero integro quocunque, neque erit quadratus posito* $m = 4p - n^\alpha$, *positis pro* α *et* p *numeris integris quibuscunque; sed posito hoc valore pro* m *transmutabitur formula* $4mn - m - n^\alpha$ *in* $16pn - 4n^{\alpha+1} - 4p$, *et divisa hac formula per* 4 *fit* $4pn - p - n^{\alpha+1}$, *quae perinde quadratum dare non potest; si igitur verum est theorema in casu* $\alpha = 0$, *erit etiam verum in casu* $\alpha = 1$*; si verum est in casu* $\alpha = 1$, *erit etiam verum in casu* $\alpha = 2$, *et ita porro.*" ("This is proved as follows: if $4mn - m - n^\alpha$ is not a square when m is set to be an arbitrary integer, then it will not be a square either if m is set to equal $4p - n^\alpha$, where for α and p arbitrary integers are substituted; but substituting this value for m, the formula $4mn - m - n^\alpha$ is transformed into $16pn - 4n^{\alpha+1} - 4p$, and dividing this by 4 one has $4pn - p - n^{\alpha+1}$, which likewise cannot yield a square; so if the theorem is true in the case $\alpha = 0$, it will also be true in the case $\alpha = 1$; if it is true in the case $\alpha = 1$, it will also be true in the case $\alpha = 2$, and so on."). Cf. n° 49, note 2.

This passage is followed on fol. 53v (p. 108) by the note "*vid*[*e*] *inf*[*ra*] *p.* 108" ("see below p. 108"), which probably refers to the following paragraph added on fol. 54v (= p. 110[!]): "*ad pag.* 108: *deduci etiam inde potest, si m et p sint numeri integri affirmativi, numerum* $\dfrac{p + 2 \pm \sqrt{4p - m + 3}}{m}$ *non esse integrum, si enim esset integer et poneretur* $= n$, *fieret* $4mn - m - 1 = (mn - p)^2$." ("on p. 108: it can also be inferred from this that, if m and p are positive integers, then the number $\dfrac{p + 2 \pm \sqrt{4p - m + 3}}{m}$ cannot be an integer, for if it were and one sets it $= n$, one would have $4mn - m - 1 = (mn - p)^2$."). Goldbach later submitted this to Euler: see n° 51, note 19.

[6] Cf. n° 43, note 8.

[7] To this paragraph Euler added another note in the lower margin of fol. 38r, preparing his reply (cf. n° 47, note 5):

"$2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 2\cos \mathrm{A}.\, p\,\ell\, 2$. *Ergo* $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$ *si fuerit* $p\,\ell\, 2 = (2n+1)\,\dfrac{\pi}{2}$;

$$\pi = 3{,}1415926535 \qquad \frac{\pi}{2} = 1{,}5707963264 \qquad p = \frac{1{,}5707963264}{0{,}6931471805} = \frac{34}{15} = 2{,}26618021\text{''}.$$

The text of Goldbach's copy ends here with the note "*vid*[*e*] *inf*[*ra*]" ("see below"), which refers to another addition noted on fol. 53v: "*quod sic demonstratur: quoniam* $2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$ *est = quam proxime* $\dfrac{20}{13}$, *ex hypothesi erit quadratum* $2^{2\sqrt{-1}} + 2 + 2^{-2\sqrt{-1}}$ *= quam prox*[*ime*] $\dfrac{20^2}{13^2} = \dfrac{400}{169}$, *adeoque* $2^{2\sqrt{-1}} + 2^{-2\sqrt{-1}}$ *= qu*[*am*] *prox*[*ime*] $\dfrac{400 - 338}{169}$ *numero positivo; cubus vero numeri* $2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$ fiet $2^{3\sqrt{-1}} + 3\left(2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}\right) + 2^{-3\sqrt{-1}}$ *seu*

$$2^{3\sqrt{-1}} + 2^{-3\sqrt{-1}} = \frac{20^3}{13^3} - \frac{3 \cdot 20}{13} = \frac{20^3 - 3 \cdot 20 \cdot 169}{13^3},$$

numero negativo, erit ergo numerus quaesitus p in aequatione $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ *major quam* 2, *sed minor quam* 3." ("this is proved as follows: since $2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$ approximately equals $\dfrac{20}{13}$, by the hypothesis its square $2^{2\sqrt{-1}} + 2 + 2^{-2\sqrt{-1}} \approx \dfrac{20^2}{13^2} = \dfrac{400}{169}$; therefore $2^{2\sqrt{-1}} + 2^{-2\sqrt{-1}} \approx \dfrac{400 - 338}{169}$, which is a positive number; but the cube of $2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$ will be $2^{3\sqrt{-1}} + 3\left(2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}\right) + 2^{-3\sqrt{-1}}$ or

$$2^{3\sqrt{-1}} + 2^{-3\sqrt{-1}} = \frac{20^3}{13^3} - \frac{3 \cdot 20}{13} = \frac{20^3 - 3 \cdot 20 \cdot 169}{13^3},$$

a negative number: so the number p to be determined in the equation $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ is larger than 2 but smaller than 3.").

[8] Kolb's account from the Cape of Good Hope, *Caput bonae spei*, had been published in 1719 at Nuremberg. Possibly the book reminded Goldbach of Euler's interest in the theory of tides motivated by the Paris Academy's competition for 1740, which Euler had won with his paper E. 57.

[9] Cf. n° 43, note 2.

[10] Antoine Achard, the Minister of the Reformed French Church at the Werder in Berlin, who hailed from Geneva, was a renowned preacher: see Geißler 1996.

[11] Cf. n° 43, note 10.

[12] See Euler's reply n° 47, note 10.

46
Goldbach to Euler
Petersburg, February (13th) 24th, 1742

Sir,

by this note I wanted to report to you that I have indeed received the letter from Dr. Duvernois you forwarded to me;[1] no doubt my letter to you, which I sent to my correspondent at Königsberg on Feb. 13th,[2] will also have arrived in Berlin by now. Yesterday I went for a drive for the first time since Dec. 23rd (n. st.), 1741; while dressing for this, I observed a noticeable reduction of my former circumference, but notwithstanding this I feel better day by day. I remain with special respect

your most obedient and ready servant
Goldbach.

St. Petersburg, Feb. 24th (n. st.), 1742.

[1] Cf. n° 44, note 1.

[2] I. e., n° 45. The correspondent who forwarded it may well have been J.G. Thegen (cf. n° 74, note 14).

47
Euler to Goldbach
Berlin, March 6th, 1742

Sir,

your indisposition has been reported to me in several letters to my greatest regret;[1] therefore I cannot adequately describe the heartfelt joy I felt on receiving your most welcome letter. I sincerely wish that this accident may by now have entirely vanished and that you, Sir, have been restored to your former strength and a durable health.

Some time ago I had the honour to dine together with Privy Councillor Culemann at Privy Councillor Vockerodt's place; however, since then no convenient opportunity of calling on him has come along. When on that occasion I conveyed your compliment to him, he enquired most meticulously about your present circumstances, Sir; he protested he was very interested in you and desired nothing more ardently than that some convenient position in His Royal Majesty's service could be found for you.

Up to now I also have not been able to prove rigorously that $4mn - m - 1$ or $4mn-m-n$ can never be a square, but I inferred this from a theorem of Fermat's which states that a sum of two squares $a^2 + b^2$ is never divisible by any number of the form $4n-1$.[2] For if this theorem is correct, then $a^2+1 \neq (4n-1)\,m$ (where I am employing your sign $\neq$, Sir, to indicate an impossible equation). Consequently $a^2 \neq 4mn - m - 1$. Further, $\dfrac{a^2+1}{4n-1}$ cannot possibly be a whole number, i.e., $\dfrac{a^2+1}{4n-1} \neq i$; consequently $\dfrac{a^2+1}{4n-1}+1$ or $\dfrac{a^2+4n}{4n-1}$ or $\dfrac{b^2+n}{4n-1} \neq i$, too. Similarly, $\dfrac{b^2+n}{4n-1}+n$ or $\dfrac{b^2+4n^2}{4n-1}$ or $\dfrac{c^2+n^2}{4n-1}$ cannot be a whole number; and if one continues in this way, it follows that $\dfrac{a^2+n^\alpha}{4n-1} \neq m$, and therefore $a^2 \neq 4mn-m-n^\alpha$, which is the consequence you drew from this theorem, Sir. Thus its correctness is based on the truth of the theorem that a sum of two squares a^2+b^2 cannot possibly be divided by $4n-1$ (except if both a^2 and b^2 taken separately are divisible by $4n-1$). But of this I have just now discovered the following proof:

Prop. 1: The form $(a+b)^p - a^p - b^p$ is always divisible by p if p is a prime number.

Proof: Develop the power $(a+b)^p$:

$$(a+b)^p - a^p - b^p = \frac{p}{1}a^{p-1}b + \frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}a^{p-2}b^2 + \ldots + \frac{p\,(p-1)}{1\cdot 2}a^2b^{p-2} + \frac{p}{1}a^{p-1}b^{p-1};$$

the single terms of this expression are whole numbers, so every one of them is divisible by p, whenever p is a prime number: for if p were a composite number, it could happen that in some term some factor of p might be canceled by a factor in the denominator, and that term and consequently the entire expression should no longer be divisible by p. Therefore, if p is a prime number, the expression $(a+b)^p - a^p - b^p$ will always be divisible by p. Q. E. D.

Coroll. 1: Taking $a = b = 1$, $2^p - 2$ will therefore be divisible by the prime number p; thus, unless p equals 2, $2^{p-1} - 1$ is divisible by p.

Coroll. 2: Take $a = 2$, $b = 1$; then $3^p - 2^p - 1$ will be divisible by p. But as $2^p - 2$ is also divisible by p, the sum of these formulae, $3^p - 3$, will also be divisible by p; therefore, unless $p = 3$, $3^{p-1} - 1$ will be divisible by p.

Prop. 2: If $a^p - a$ is divisible by p, $(a+1)^p - a - 1$ will also be divisible by p.

Proof: Taking $b = 1$ in Prop. 1, $(a+1)^p - a^p - 1$ is divisible by p. Now as, by hypothesis, $a^p - a$ is divisible by p, the sum of those two formulae, $(a+1)^p - a - 1$ will also be divisible by p. Q. E. D.

Coroll. 1: Therefore, as $1^p - 1$ is divisible by p, $2^p - 2$ will also be divisible by p, and proceeding further, all the formulae $3^p - 3$, $4^p - 4$, $5^p - 5$, ... will be divisible by p.

Coroll. 2: Thus the formula $a^p - a$ will be divisible by the prime number p in general, whatever whole number is substituted for a; and unless p divides a itself, $a^{p-1} - 1$ will also be divisible by p.[3]

Coroll. 3: As, by the same argument, $b^{p-1} - 1$ is divisible by the prime number p unless b is a multiple of p, it follows that $a^{p-1} - b^{p-1}$ will be divisible by p.

Theorem: A sum of two squares $a^2 + b^2$ is not divisible by any prime number $4n - 1$ unless each of the two squares is separately divisible by the same prime number.

Proof: As, by hypothesis, neither a nor b is divisible by $4n - 1 (= p)$, it follows that the formula $a^{4n-2} - b^{4n-2}$ is divisible by $4n-1$; therefore the form $a^{4n-2} + b^{4n-2}$ will not be divisible by $4n - 1$, and neither will any of its factors. But as $4n - 2$ is an oddly even number, $a^2 + b^2$ is a factor of the formula $a^{4n-2} + b^{4n-2}$: therefore $a^2 + b^2$ cannot possibly be divisible by the prime number $4n - 1$. Q. E. D.

Coroll. 1: If $4n - 1$ is not a prime number, it necessarily has among its divisors some prime number of the form $4n - 1$; from this it follows that a sum of two squares $a^2 + b^2$ cannot be divided by any number of this form $4n - 1$,whether it be prime or composite.

Coroll. 2: Therefore, if a sum of two squares $a^2 + b^2$ has any divisor, this will necessarily be a number of the form $4n + 1$.

Coroll. 3: Consequently, if a sum of two squares $a^2 + b^2$ cannot be divided by any number unless that divisor itself is a sum of two squares (I am confident that this can be proved), it follows that any prime number $4n + 1$ can be split into two squares.[4]

Your interest, Sir, in investigating whether the formula $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}}$ can become equal to zero,[5] gave me occasion to note that this can occur in infinitely many ways: the first value for p is – as you observed, Sir – between 2 and 3, namely $p = 2.266\,180\,21$, the true value being $p = \dfrac{\pi}{2\log 2}$, where $\pi = 3.141\,592\,65$ and $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 0.693\,147\,180\,5$. All the following values for p arise from this one by multiplying it by 3, 5, 7, 9, etc.

Brigadier Baudan has asked me to convey his most obedient compliment to you. He has not yet been presented to the King and consequently is not yet employed.[6]

I have a special acquaintance with Mr. Achard, his wife is even our youngest child's godmother. I heard several of his sermons; he is a great orator. His Majesty has summoned here Dr. Quandt from Königsberg to take the position of the late Mr. Reinbeck with a pension of 2000 thalers;[7] but he asked to be excused from this appointment. My quiet life has now been somewhat disturbed, as I have to see the Prince of Württemberg for an hour every day to give him lessons;[8] I also have to dine almost daily with Privy Councillor Ostermann, who asked me to give his most humble compliment to you.[9] I am very much obliged to you for your kind enquiry after our Albrecht; he had a relapse of his former illness some time ago, but now, by God's help, he feels fairly well again.[10] I have engaged a private tutor, by whom he and the other children are profiting very well. All my family send their most obedient regards to you, Sir, and I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, March 6th, 1742.

[1] Krafft had mentioned Goldbach's serious illness in his letter from January 1st (12th), 1742 (R 1271: see JW 3, p. 134–135), Heinsius – in more reassuring terms – on (January 31st) February 10th, 1742 (R 961: *ibid.*, p. 66–67).

[2] Fermat first stated this fact in August 1740 in a letter to Roberval (cf. *Œuvres* II, p. 204); Euler could have learnt of it from *Varia Opera Mathematica* (Fermat 1679), where the letter is reproduced on p. 161–162.

[3] This result is known as "Fermat's Little Theorem". Fermat claimed, in a letter to Frénicle dated October 18th, 1640, to have a proof for it (cf. *Œuvres* II, p. 208–209), which has, however, never been recovered.
After Euler had published his first proof of the theorem (see E. 54 in the Petersburg *Commentarii* for 1736), Samuel König challenged him in 1752 (see König's *Appel au Public*, p. 104) by mentioning that he had found another proof in Leibniz's manuscripts; Euler immediately acknowledged this in E. 182, declaring himself to be "very contented with being only the third person to have proved this theorem" (cf. O. II/5, p. 141). Leibniz's proof was finally published by Vacca in 1894.
Euler later gave three more proofs for Fermat's Little Theorem: see E. 134 (this is the proof given in the present letter), E. 262 and E. 271, where he proved the more general statement that became known as the Theorem of Euler-Fermat.
For the special case of the theorem where $p = 2$, see also n° 15, note 8.

[4] Euler plans to prove Fermat's Two Squares Theorem as follows:
(a) every prime $4n + 1$ divides a sum of two coprime squares, and
(b) every divisor of a sum of two coprime squares is itself a sum of two coprime squares.
Euler's progress on this problem is reflected in the following letters:
– In n° 52, Euler states that prime numbers $4n+1$ are represented uniquely as a sum of two squares.
– In n° 87 he shows that numbers represented in two different ways as a sum of two squares must be composite.
– In n° 115 he proves the Two Squares Theorem, but is not able to fill the following gap: there exist integers a, b such that $a^n - b^n$ is not divisible by the prime $4n + 1$.
– In n° 138 from April 1749, Euler finally closes the gap. Two versions of the proof were published in E. 228 and E. 241.

[5] Cf. n° 43, note 8, and n° 45, note 7.

[6] Cf. n° 43, note 2.

[7] The theologian J.G. Reinbeck had been the leading official of the Lutheran Church in Prussia and enjoyed the confidence of the Royal family.

[8] Cf. n° 48, note 3.

[9] J.Ch.D. Ostermann, an elder brother of the overthrown regent who had also lived in Russia for a long time, had been allowed to retire to Germany after his brother's fall.

[10] In 1744, Euler will give a fuller report on Johann Albrecht's health that has been precarious for a long time: see n° 85, note 1.

48
Euler to Goldbach
Berlin, March 13th, 1742

Sir,

your letter which I received by the last mail on Feb. 24th gave me the most heartfelt joy, as I learned from it of your complete recovery; so I repeat again my sincere wish that the Almighty may deign to preserve you in constant health, in all prosperity and satisfaction until the highest age.

Recently Privy Councillor Jordan spoke to me very much about you, Sir, and enquired after your state. He told me that he knew you well in person; but as he was still very young at the time when you were staying here, Sir, it may well be that you hardly remember him.[1] Now when I subsequently received the designs for the Silesian medals from you,[2] I had at once the occasion – namely the day before yesterday, in church – to hand them over to Privy Councillor Jordan, who has been given by His Majesty the task to deal with them; whereupon he told me that he had collected a considerable number of such proposals, but for the most part found much fault with them; therefore I doubt even less that you, Sir, will carry the prize. The said Privy Councillor asked me meanwhile to convey his most humble compliment to you, Sir.

I have had the honour to report to you in my last letter that Her Grace the Duchess of Württemberg entrusted me with giving instruction in mathematics and physics to her Princes,[3] which I have been continuing for some weeks. But as I have not yet got any superiors here and could not by rights accept this charge without permission, I wrote directly to His Royal Majesty, who is with the Army, and a few days later got the most gracious permission by a personal letter. The address on the envelope was "To my Professor Euler", and the contents were as follows:[4]

> "Having seen by your letter of the 20th of last month that the Duchess of Württemberg is asking you to give mathematical lessons for the Princes of Her house, I grant you with great pleasure the permission to do so, being for the rest
>
> your well-wishing King Frederick.
>
> Znaim,[5] March 1st, 1742."

By the way I cannot sufficiently admire the special ability and the penetrating intelligence of the Hereditary Prince. My lesson is daily from 10 to 11 o'clock, when Mass starts.

According to Mr. Stähelin's letters, His Excellency Mr. Lestocq is said to favour me so much[6] that he promised to help me by a forceful recommendation to get an annual pension from the Imperial Academy, and now the whole matter allegedly depends on a favourable statement by the Academy. With today's mail, I am therefore also writing to Councillor Schumacher; but particularly, Sir, I take the liberty to ask you most humbly for your firm assistance in this request of mine.[7] By now the President designated for the Academy will without doubt already be appointed, for Mr. Stähelin writes – without naming him – that he recently treated him at his home together with some great nobles.[8]

Last time I had the honour, Sir, to send you a proof of the theorem that $4mn - m - n$ can never be a square. From this fact many other nice speculations on this subject follow, and I am assured that you, Sir, will deduce many marvellous consequences from it. Also I have now discovered a completely different method to find the sums of inverse powers, which is not based, as the first one, on the infinitely many roots of an infinite equation, but flows solely from the rules for differentiation and integration; I should like to write about this more fully next time.[9]

With this, I remain with the most perfect respect and all due admiration, Sir, my most honoured Judicial Councillor, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, March 13th, 1742.

P. S. For the last eight days a comet has been sighted here, but only the day before yesterday one found the opportunity to observe it at the Observatory. It appeared in the northern wing of the Swan at midnight on the 11th; thus its longitude was $12° 30'$ in Aquarius and its northern latitude $71°$. Six hours later it appeared to have progressed by nearly $2°$; from this I conclude that this comet cannot be far from its perihelion, but whether it is approaching it or already returning cannot be deduced from this unique observation. Last night it was cloudy so that one could not observe. Incidentally this nucleus appeared like a star of the 4th order; it had a coma and a tail that was about $3°$ in length. Please report to me, Sir, what has been or will be observed about this in Petersburg. As soon as one is able to make more and more precise observations here, I will have the honour to communicate these at once to the Academy.[10]

[1] When Goldbach had last stayed in Berlin in 1724/25, Jordan had just finished his studies of theology at Geneva and Lausanne.

[2] Cf. nº 41, note 3. The medals were never coined; see nº 99, note 1.

[3] Cf. nº 47, note 8.
Prince Karl Eugen had inherited the throne of Württemberg in 1737, at the age of nine, when his father suddenly died. In order to keep him away from Habsburg influences, he lived in Berlin with his mother and his two younger brothers and was educated at the Prussian court until he reached majority and took over his dukedom in 1744.

[4] The original of this letter has been preserved with Euler's papers at Petersburg. It was first printed in 1852; in the present edition, it is R 624 (O. IVA/6, p. 302).

[5] In the course of his campaign in the First Silesian War, Frederick had set up camp at Znaim in Southern Moravia (now Znojmo, Czech Republic) for two weeks.

[6] Euler probably refers to Johannes Stähelin (cf. nº 38, note 3); however, no letters of Stähelin's (and none of Jacob von Stählin's from that time) have been preserved, and no connection between either of them and Lestocq, then a member of Tsarina Elizabeth's innermost power circle, has been established.

[7] Euler's letter to Schumacher from March 13th, 1742, has apparently not been preserved, but in his reply from April 3rd (14th), Schumacher confirms its reception and assures Euler that his pension will be awarded (R 2119: JW 2, p. 56). See also nº 43, note 4.

[8] A few months later, Euler also heard from Schumacher that the designation of a president was imminent (see R 2123: JW 2, p. 59; cf. also *infra* nº 54, note 6). In December 1742, Euler mentioned to Goldbach that according to rumours circulating in Berlin A.D. Kantemir would return to Petersburg to take up the presidency, and thought this a "most fortunate" solution (cf. nº 56, note 20).
However the academicians' hopes were disappointed: only in 1746 was a new president for the Petersburg Academy nominated – the young Count K.G. Razumovskiĭ who had stayed with Euler at Berlin in 1743/44.

[9] Cf. nº 52, note 14.

[10] In Kronk's *Cometography*, this comet bears the designation C/1742 C1. It was probably first sighted in South Africa around February 5th; by the first days of March there were several observations in the northern hemisphere (England, China, France). Most calculating astronomers, including Euler, agreed on its parabolic orbit; today a perihelion on February 8th at a distance of 0.76 astronomical units is indicated.
Both the fiercely competing astronomers at Petersburg, Delisle and Heinsius, corresponded with Euler about the comet: for Heinsius see R 962–965 (JW 3, p. 67–73), for Delisle R 498–499 (Yushkevich et al. 1968, p. 139–158). Euler sent a preliminary version of his work on the comet to Schumacher on July 11th (cf. R 2124: JW 2, p. 59–60). On September 6th he presented his calculation of the orbit, which was mainly based on Delisle's data, to the Berlin Academy. His treatise E. 58 was finally published in the Berlin *Miscellanea* in 1743 (cf. *infra* nº 64, note 10).

49
Goldbach to Euler
[Moscow], April (1st) 12th, 1742

From my letter to Mr. Euler, April 12th.[1]

My proof of the fact[2] that, if $4mn - m - n^\alpha$ is not a square number, it is also true that $4mn - m - n^{\alpha+1} \neq a^2$ results immediately from the mere supposition $m = 4p - n^\alpha$; for by this, one gets $4n\,(4p - n^\alpha) - 4p \neq 4b^2$, and this equation divided by 4 gives $4pn - p - n^{\alpha+1} \neq b^2$, so that in the equation $x^\alpha = 4px - p - a^2$, where α is an arbitrary integer, x cannot have a positive integer value. Furthermore it also follows that, although $p^2 - p - e^2$ is in infinitely many instances the square of an integer, yet $\dfrac{p \pm \sqrt{p^2 - p - e^2}}{2}$ cannot ever be an integer; moreover, the first formula mentioned above, $4mn - m - n^\alpha$, yields no triangular number, or $x^\alpha = 4px - p - \dfrac{(b^2 - b)}{2}$ can never have a positive integer root.

I do not see any objection against the proof you communicated to me, Sir, and I am very much obliged for it; but perhaps one could say in general that $(a + b)^p - a^p - b^p$ is always divisible by some divisor of p; from this it follows as a particular case that, whenever p is a prime number, the said formula has to be divisible by p itself.[3]

On occasion of your remark about the formula $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-\,p\sqrt{-1}} = 0$, Sir, I have observed that, taking n to be variable, $2^{np\sqrt{-1}} + 2^{-\,np\sqrt{-1}}$ equals 2 whenever n is some evenly even number, and that conversely it becomes $-\,2$ whenever n is an evenly odd number;[4] and if n is a whole number and q an arbitrary rational or irrational number, it is always true that

$$2^{(4n+q)p\sqrt{-1}} + 2^{-\,(4n+q)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-\,qp\sqrt{-1}}.$$ [5]

In my opinion it is also remarkable that, if p is determined by the equation $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-\,p\sqrt{-1}} = 3$, then $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-\,xp\sqrt{-1}}$ will equal

$$\left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2x+1} - \left(-\,1+\sqrt{5}\right)^{2x+1}}{2^{2x+1}}\right) - \left(\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{2x-1} - \left(-\,1+\sqrt{5}\right)^{2x-1}}{2^{2x-1}}\right)$$

whenever x is an integer.

Reading this observation again, I find it to be of no consequence; letting $a = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, the general term will be $a^x + a^{-\,x}$.

[1] Just as previous editors of the Euler-Goldbach correspondence did, we reproduce the mathematical passages that were noted in Goldbach's copybook under the date of April 12th, 1742.
Euler's reply nº 50 clearly shows that this letter reached its destination; however, the original seems to be lost. (Strangely, in the file that contains Goldbach's letters to Euler, the resulting gap in the page numbering has been filled with the three sheets of a letter which is not dated in the original but certainly belongs to the summer of 1752 – see nº 160, note 1). The present letter must have been written in Moscow: according to the biography by Yushkevich and Kopelevich (p. 85 of the 1994 translation), Goldbach traveled there in March 1742, arriving on March 26th and signing his new contract with the College of Exterior Affairs on March 29th.

[2] Cf. nº 45, note 5.

[3] Cf. nº 47, Prop. 1.
Goldbach's proposed generalisation is not true: cf. Euler's reply nº 50, note 14. Accordingly Goldbach noted in the margin of his copy: "*emend*[*andum*] *vid*[*e*] *inf*[*ra*]", ("to be corrected, see below"), probably referring to the copy of nº 51, where he acknowledges his error.

[4] This unusual designation is probably a mistake: a number $\equiv 2 \bmod 4$ was generally denoted as "*impariter par*" ("oddly even").

[5] On this paragraph Goldbach noted in the margin "*v*[*ide*] *p*[*aginam*] 118 *s*[*equentes*]" ("see p. 118 and following"), referring to his copy of nº 51, note 5.

50

Euler to Goldbach

Berlin, May 8th, 1742

Sir,

I have been informed of your departure for Moscow by the two Princes Dolgorukiĭ, who called on me quite unexpectedly;[1] Councillor Schumacher had even written to me that you felt inclined to leave the Academy for good and were to be engaged, to your great advantage, by the Imperial Chancellery or at court.[2] Now as this great change in your circumstances, Sir, impressed me very much, I desire from all my heart that it may succeed to your entire satisfaction and constant welfare. Meanwhile I most humbly thank you, Sir, for the favourable disposition you have always felt towards me, and recommend myself to your continuing special goodwill, hoping that the present change will not deprive me of the heartfelt pleasure to prove to you occasionally my most obedient respect and to profit by your correspondence.

When, before I received this news, I had the honour to dine with Privy Councillor Culemann, his wife in particular asked about your situation in great detail, Sir, and evinced most clearly her special respect and friendship towards you. They both requested me to convey their most humble compliments to you.[3]

I could certainly satisfy your request for catalogues of French books, Sir, if you either were exempt from paying postage or could indicate somebody to whom I should address them, for I can send them off here without paying anything. The Marquise du Châtelet has sent me a copy of the new edition of her *Institutions Physiques* and her portrait.[4] Any books which you might require, Sir, can easily be sent to Petersburg from here, and what is due for them can be paid there, either to Mr. Stähelin or to the Berlin Exchange Counter.[5] I do not know anything at all of Mr. Achard's that might have appeared in print.[6]

As the inscriptions you sent[7] were written in your own hand, Sir, and nothing was stated about their author, I did not suspect that they might be by anybody but yourself; but now I have reported to Privy Councillor Jordan that a good friend communicated them to you.

For several times I was to be introduced to His Royal Majesty's presence, but every time some obstacle came up, until He left here quite suddenly.[8]

Councillor Schumacher has written me that my pension is as good as settled by the Academy and that I should just start sending in my papers; thereupon, on the same mail day, I sent two considerable treatises.[9] However I most humbly take the liberty to further recommend this business to you, Sir.

The corollaries that you, Sir, inferred from my theorem that $4mn-m-n$ cannot be a square, are very curious and surpass the theorem itself by far in importance. For I had not noticed that $4mn-m-n$ cannot either be a triangular number; but now I found, following the same guideline, that the same formula $4mn-m-n$ cannot be a heptagonal number either.[10] I also discovered the general fact that all numbers that cannot equal $4mn-m-n$ are contained in the formula x^2+y^2+y.

Consequently the expression $4mn-m-n+x^2+y^2+y$ has to yield altogether all possible numbers;[11] which theorem is somewhat similar to the one of Fermat's which states that $p^2+q^2+r^2+s^2$ produces all possible numbers. I have many more theorems of this kind: e. g., $3a^2+3b^2+7c^2$ can never be a square; likewise, $2a^2+6b^2+21c^2$ cannot be a square, and so on.[12] However I have not yet been able to discover any formula of this kind which contains four mutually independent variables.[13]

For the rest, I am very pleased that the proof I recently sent to you met with your approval; but your statement that the formula $(a+b)^p-a^p-b^p$ should be divisible by p or by some divisor of p (excepting 1) also in those cases where p is not a prime number,[14] cannot only not be established by my proof, but rather it is untrue in many cases. If, for example, $a=1$, $b=1$, and $p=35$, the term $2^{35}-2$ can be divided neither by 5 nor by 7.

Whenever $a^{p\sqrt{-1}}+a^{-p\sqrt{-1}}=b$, one has

$$a^{xp\sqrt{-1}}+a^{-xp\sqrt{-1}}=\left(\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}\right)^x+\left(\frac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}\right)^x;$$

consequently if $2^{p\sqrt{-1}}+2^{-p\sqrt{-1}}=3$, this becomes

$$\begin{aligned}2^{xp\sqrt{-1}}+2^{-xp\sqrt{-1}} &= \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x\\ &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2x}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2x}.\end{aligned}$$

For the rest, your observations[15] mostly agree with my general theorem that

$$a^{p\sqrt{-1}}+a^{-p\sqrt{-1}}=2\cos p\log a,$$

except that $2^{(4n+q)p\sqrt{-1}}+2^{-(4n+q)p\sqrt{-1}}$ does not equal $2^{qp\sqrt{-1}}+2^{-qp\sqrt{-1}}$ unless either $(2n+q)\,p\log 2$ or $2np\log 2$ equals $m\pi$ (where $1:\pi$ denotes the ratio of the diameter to the circumference).

With this, I have the honour to call myself with the most perfect esteem and all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, May 8th, 1742.

[1] It is not clear to which members of the eminent princely family Dolgorukiĭ (or Dolgorukov) Euler is referring here. From Clairaut's letter to Euler dated July 25th, 1742 (R 399: O. IVA/5, p. 134–136), it is clear that the princes went quickly on to Paris; so they may have been on a *grand tour* for educational purposes.
In the following decades, several more Princes Dolgorukiĭ visited Berlin and kept company with Euler; and when in 1762 Vladimir Sergeyevich Dolgorukiĭ was sent to Berlin as Russian ambassador, Euler told G.F. Müller that he had formerly been one of his best and most

assiduous pupils ("...da wir jetz den fürtrefflichen Prinzen *Dolgorucki* hier haben, welcher vormals einer meiner besten und fleißigsten Discipul gewesen ...": R 1846, JW 1, p. 210–211). See also *infra* nº 190 and 193.

[2] Cf. Schumacher's letter R 2120 from May 17th (28th): JW 2, p. 58.
Goldbach had by then already taken up his new position as head of the Code Department at the "College for Exterior Affairs" (i. e., the Russian Empire's Foreign Office) with the rank of a State Councillor (see Section 1.1.4 of the Introduction and nº 49, note 1).
The Petersburg Academy was officially informed of Goldbach's departure on April 23rd (May 4th); except for some letters to the Academy that were still addressed to Goldbach, his name disappears from the minutes after that date, and even when he was at Petersburg in later years, he seems not to have participated in the Academy's activities any more. Later the Academy declared Goldbach a honorary member: his name figures for the first time on a list of diplomas that have been sent out in June 1747, but with the annotation that it is still in the Academy's archive (*Materialy*, t. VIII, p. 487–488).

[3] Helene Culemann *née* Cupner (born in 1696) hailed from Königsberg, where her father had been a civil servant; Goldbach had corresponded both with him and with Culemann around 1720.

[4] Euler had already been sent by Maupertuis' intermediary the first edition of Mme Du Châtelet's *Institutions* as a gift from the author, as his short letter of thanks to the marquise dated March 1st, 1740, shows (R 383: Smirnov 1963, p. 280–281). Now he outlined another letter, in which he entered more thoroughly into the questions Du Châtelet had raised in the second edition of her book and into her debate with Musschenbroek and Dortous de Mairan. However, it is not clear whether this letter was ever completed and dispatched: only a partial copy of an undated draft has been preserved in a file containing copies of Euler's letters to Clairaut from the same period (see R 384: *ibid.*, p. 275–279).

[5] Apparently Goldbach had asked in his letter of April 12th, of which only the extract he copied for himself survives (cf. nº 49, note 1), about the possibility of obtaining books from Berlin with Euler's help. In the further course of the correspondence such requests will recur in almost every missive.

[6] Except for some theses for academic disputations printed at Geneva between 1717 and 1721, nothing by Antoine Achard had yet been published. In 1745 he read a *Discours sur la Liberté* to the Berlin Academy that was summarised but not reproduced in its *Mémoires* (Achard 1746). In 1762 a sermon of his on the peace between Prussia and Russia was published, and two years after his death a collection of his sermons appeared in two volumes (Achard 1774).

[7] Cf. nº 48, note 2.

[8] As far as is known, Euler met Frederick in person only in September 1749, when he was summoned to Potsdam to give expert advice on the fountains of Sanssouci Palace.

[9] See Schumacher's letter R 2119 from April 3rd (14th) and Euler's reply R 2121 from April (17th) 28th (JW 2, p. 56–57). The treatises Euler submitted, E. 160 and E. 161 (both on frictional motion), were printed only in 1751 in vol. XIII of the Petersburg *Commentarii.*

[10] The equation for triangular numbers, $4mn - m - n = \frac{1}{2}x(x+1)$, is equivalent to $2(4m-1)(4n-1) = (2x+1)^2 + 1$, so its unsolvability follows from the fact that sums of coprime squares are not divisible by numbers of the form $4n-1$. Euler's other claim that $4mn - m - n = \frac{1}{2}x(5x-3)$ is impossible (heptagonal numbers have the form $(5x^2-3x)/2$) follows from the fact that the equation can be written in the form $(4m-1)(4n-1) = (3x-1)^2 + x^2$.
A proof for Euler's first claim is to be found in his notebooks; see Matvievskaya 1960, p. 144.

[11] The Italian number theorist Angelo Genocchi proved Euler's claim in 1853; another proof using the Three Squares Theorem was given by Victor-Amédée Lebesgue in 1854.
Euler's claim can be stated more precisely as follows: For each natural number N, exactly one of the following two statements is true:

(a) $N = 4mn - m - n$, where $m, n > 0$, or
(b) $N = x^2 + y^2 + y$, where $\gcd(x, 2y+1) = 1$.

In fact, these two equations can be written in the form

(a) $4N+1 = (4m-1)(4n-1)$, where $m, n > 0$;
(b) $4N+1 = (2x)^2 + (2y+1)^2$, where $\gcd(x, 2y+1) = 1$.

Since any integer $4N+1$ either is the product of two factors $\equiv 3 \bmod 4$ or can be written as a sum of two squares, Euler's claims follow.

[12] Consider more generally the equation $2pa^2 + 2qb^2 + rc^2 = d^2$: for integers p, q, r satisfying $p \equiv 1 \bmod 8$, $q \equiv 3 \bmod 8$, and $r \equiv 5 \bmod 8$. If the equation has a nontrivial solution, it must have a solution in which not all of a, b, c, d are even.
Clearly we have $c \equiv d \bmod 2$, and this implies $a \equiv b \bmod 2$. If a and b are even, then c and d must be odd, and we find the contradiction $0 \equiv 2pa^2 + 2qb^2 = d^2 - rc^2 \equiv 1 - r \equiv 4 \bmod 8$. If $2 \nmid ab$, then $2pa^2 + 2qb^2 \equiv 2(p+q) \equiv 0 \bmod 8$. Since $r \equiv 5 \bmod 8$, c and d must be even. Setting $c = 2C$ and $d = 2D$ we find $pa^2 + qb^2 + 2rC^2 = 2D^2$. Since $pa^2 + qb^2 \equiv 4 \bmod 8$, we must have $D^2 - 21C^2 \equiv 2 \bmod 4$, which is impossible.
More general conditions on the solvability of equations $ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$ can be found in Dickson 1930, ch. VI.
See also Matvievskaya 1960, p. 158.

[13] Indeed there is no such form in four variables: as Hasse proved in 1923, any form $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 - v^2$ represents 0.

[14] Cf. nº 49, note 3.

[15] Cf. nº 49, note 5.

51
Goldbach to Euler
Moscow, (May 27th) June 7th, 1742

Sir,

in reply to your last letter from May 8th, I inform you by this that, on Feb. 19th already, although I had not looked for a new employment, I was unexpectedly offered by the Imperial Ministry the position of a State Councillor, which I accepted under certain conditions. "Nothing rashly, nothing timidly."[1]

I sincerely wish, Sir, that the diverse promises regarding your pension from here may soon come to be realised; however, I still think the way I proposed shortly after your arrival in Berlin[2] should then have been the best and shortest one, if indeed it had fitted in with the Optimal World System.

Notwithstanding[3] that in my last letter I covered myself by the word "perhaps", I should not have thought that the formula $(a+b)^p - a^p - b^p$ is not always divisible by some divisor of the number p, if this were not clearly borne out by the example you exhibit, Sir.[4]

As far as I remember, in my last letter I had represented the formula $2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-xp\sqrt{-1}}$, where $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, by the ordinates of a curve shaped like a snake, the abscissae being x;[5] this curve intersects the axis whenever the formula equals 0, so that when this same formula equals 2, one gets the maximal ordinate below or above, and consequently innumerable other ordinates have to be equal among themselves. Nonetheless, at the time a mistake crept into my expression, as you rightly remarked, Sir; this can be easily corrected by stating that, if q is an arbitrary number and $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, then, taking n to be any integer,

$$2^{(8n-4-q)\,p\sqrt{-1}} + 2^{-(8n-4-q)\,p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-qp\sqrt{-1}}.\text{[6]}$$

As you have discovered, Sir, all numbers that cannot equal $4mn - m - n$ are comprised by the formula v^2+v+u^2; now I have found out that all $4mn-m-n$ can be transformed into y^2+y-x^2;[7] consequently any given number equals $p^2+p\pm q^2$, where p and q indicate whole numbers or one of the two letters may denote 0; from this it can be seen that any number consists of the double of a triangular number plus or minus a square. However, since any number is also equal to the formula $u^2 + v^2 + v + y^2 + y - x^2$, it follows, by making $u = \dfrac{z^2+z}{4} + 1$, $x = \dfrac{z^2+z}{4} - 1$, $u^2-x^2 = z^2+z$, that half of any given number, $\dfrac{n}{2}$, equals $\dfrac{v^2+v+y^2+y+z^2+z}{2}$, i. e., the sum of three triangular numbers.[8]

From the same principles it follows that in the formula $\dfrac{(p-2)\,x^2 - (p-4)\,x}{2}$ for polygonal numbers, if this is to equal $4mn - m - n$, then p cannot be either 5 ± 2 or 5 ± 1; thus all triangular, tetragonal, hexagonal and heptagonal numbers are excluded.[9]

By the way, I take it not to be useless to note down also such propositions as are very probable, even if a real proof is lacking; for even if afterwards they were found to be erroneous, they could all the same give occasion for the discovery of a new truth. Thus Fermat's idea that all the numbers $2^{2^{n-1}} + 1$ yield a series of prime numbers cannot hold up, as you already demonstrated, Sir; but it should still be remarkable if this series were composed only of numbers that could be split into two squares in a unique way.[10] I should like to risk another conjecture of that kind: any number composed from two primes is the sum of as many prime numbers (including 1) as one wishes, right down to the sum that consists just of ones.[11]

After reading this through again,[12] I see that the conjecture can be proved quite rigorously for the case $n+1$ if it holds for the case n and $n+1$ can be split into two prime numbers. The proof is very easy; and at least it appears to be true that every number greater than 2 is the sum of three prime numbers.[13]

For example,

$$4 = \begin{cases} 1+1+1+1 \\ 1+1+2 \\ 1+3 \end{cases} \qquad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad \ldots$$

In the following, I state a few observations that can be proved:

Let v be such a function of x that when an arbitrary number $v = c$ is substituted, x can be determined from c and the other quantities that appear in the function; then the value of x in the equation $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$ can also be determined.[14]

If one imagines a curve that has as its ordinate, for the abscissa x, the sum of the series $\frac{x^n}{n \cdot 2^{2n}}$, where n denotes the index of the term, i. e., the ordinate equals

$$\frac{x}{1 \cdot 2^2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^4} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^6} + \frac{x^4}{4 \cdot 2^8} + \dots,$$

then, for the abscissa	1,	the ordinate will be equal to	$\frac{1}{3}$ [15]
	2	...	$\log 2$
	3	...	$2 \log 2$
	4	or greater, ...	infinite. [16]

With all the respect imaginable I remain, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, June 7th (n. st.), 1742.

PS. I have not yet investigated the two other formulae for non-square numbers that you mention, Sir; but I think that, by letting $a = hx + k$, $b = lx + m$, $c = nx + p$, they may well be comprised in the following formula, where f, g, γ, δ are positive integers:

$$\left(2f - 4\gamma\delta - 4\gamma^2\right) x^2 + 4\,(f - 2\gamma\delta)\,(2g - \delta^2 - 2f)x + (2g - \delta^2 - 2g)^2,$$

for this can never yield a square.

Notwithstanding the exemption from postage that you enjoy, Sir, here the postage from Berlin to Memel for your letters is being charged for, and 65 kopecks have to be paid for every letter; therefore I will pay the postage for my future letters only as far as Memel. As to the catalogues,[17] these ought to be enclosed only on occasion, when there are other consignments to be sent from there to St. Petersburg, as there is no risk in delay. All the same I should like to know whether the latest edition of the *Dictionaire de Trévoux*, which is said to have appeared this year or last year, is already being sold in Berlin and how much it costs.[18]

Taking m and p to be positive whole numbers, the expression

$$\frac{p + 2 \pm \sqrt{4p - m + 3}}{m}$$

cannot yield a whole number.[19]

In case you still have some copies of your memoir on the tides left, I should like to ask you for one of them.[20] Has your correspondence with the Chevalier de Mouhy quite left off? The review of the Marquise du Châtelet's *Institutions Physiques* that he is going to write should be interesting to read. By the way, Sir, have you found out what the strange expression "*à la trancaise*" that he used is supposed to mean?[21] If there is something noteworthy in Mr. Poleni's letter which I forwarded from St. Petersburg,[22] please send me some information about it; also tell me whether anything has to be changed in the address for sending letters to you.

[1] The motto Goldbach cites derives from an epigram by John Owen (1606), where the first line of n° III/171 reads "Nil temere facias, timide nihil, omnia caute". In various forms this became soon proverbial, being adopted, e. g., for the armorial device of the city of Danzig (Gdańsk) in the form "Nec temere nec timide".

[2] Cf. n° 39, note 2.

[3] The text of Goldbach's copy starts here with the heading "*Ex litt*[*eris*] *ad Cl*[*arissimum*] *Eulerum d*[*atas*] 7. *Jun. Berolinum.*" ("From the letter to Euler written to Berlin on June 7th").

[4] Cf. n° 49, note 3, and n° 50, note 14.

[5] Cf. n° 49, note 5, where, however, the representation by what for us is a cosine curve, is not mentioned.

[6] With respect to this paragraph Euler noted some calculations in the lower margin of fol. 43v, preparing his reply (see n° 52, note 17):

"*Si* $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-p\sqrt{-1}} = 0$, *erit* $p\,\ell\,2 = \dfrac{(2n+1)\,\pi}{2}$

$$\begin{aligned} 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-q\,p\sqrt{-1}} &= 2\,cos.\,A.\,\frac{(2n+1)\,q\pi}{2} \\ 2^{rp\sqrt{-1}} + 2^{-r\,p\sqrt{-1}} &= 2\,cos.\,A.\,\frac{(2n+1)\,r\pi}{2} \end{aligned}$$

$cos.\,s = cos.\,(2m\pi \pm s)$

$$\frac{(2n+1)\,r\pi}{2} = 4m\pi \pm \frac{(2n+1)\,q\pi}{2}$$

ergo $2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-q\,p\sqrt{-1}} = 2^{rp\sqrt{-1}} + 2^{-r\,p\sqrt{-1}}$ *si* $(2n+1)\,(r \pm q) = 4m$".

[7] This is true of any number but trivial since $a = a^2 + a - a^2$: cf. Euler's reply n° 52, note 18.

[8] This is not true, as Euler points out in his reply (cf. n° 52, note 19).
In his copy, Goldbach noted in the margin: "*vid*[*e*] *p.* " ("see p. . . . "), probably referring to n° 53, where he acknowledges his error.

[9] Euler proved this statement for $p = 4$ (no number $4mn - m - n$ is tetragonal, that is, a square) in n° 47 (see note 2) and again in n° 67. The cases $p = 3$ and $p = 7$ are discussed in n° 50 (see note 10); since all hexagonal numbers are also triangular, the claim for $p = 6$ follows from that for $p = 3$.
Euler studied the general question whether $\frac{1}{2}[(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha + \beta)x] = 4mn - m - n$ has solutions in his notebooks (see Matvievskaya 1960, p. 144.) This equation is equivalent to $(2\alpha x + 1)^2 + (2\beta x + 1)^2 = 2(4m - 1)(4n - 1)$, and it can easily be seen that it is solvable if and only if there is a prime $p \equiv 3 \bmod 4$ such that $\alpha \equiv \beta \not\equiv 0 \bmod p$.
In fact, the factor $4m - 1$ must be divisible by a prime number $p \equiv 3 \bmod 4$, and such a prime can divide a sum of two squares only if it divides both squares. Thus p divides both $2\alpha x + 1$ and $2\beta x + 1$, hence it divides their difference $2(\alpha - \beta)x$. Clearly $p \nmid \alpha\beta x$ since p divides $2\alpha x + 1$ and $2\beta x + 1$, and since p is odd we deduce that $p \mid (\alpha - \beta)$. Conversely, if $p = 4m - 1$ is a prime dividing $\alpha - \beta$ but not $\alpha\beta$, then determining x from $2\alpha x + 1 \equiv 0 \bmod p$ provides us with an integral solution of $2(4m - 1)(4n - 1) = (2\alpha x + 1)^2 + (2\beta x + 1)^2$.

[10] As Euler shows in his reply (cf. n° 52, note 20), this conjecture is not really weaker than Fermat's original one.

[11] See again Euler's reply n° 52, note 22.

[12] The paragraph that follows has been added in the margin both of the original letter and of Goldbach's copy; see the reproduction of the original, *supra* p. 581.

[13] This is the original form of the famous Goldbach Conjecture; for Euler's more precise statement, see n° 52, note 23. In this connection, Goldbach and Euler regard the number 1 as a prime.
Descartes had already conjectured that every even number is the sum of at most three primes, but the manuscript in which this figures was published only in 1908 (see *Œuvres de Descartes*, t. X, p. 298).

Today, “Goldbach’s conjecture” – sometimes distinguished by the qualifiers *even* or *binary* – denotes the statement that every even integer $n > 2$ is the sum of two primes. It was checked for all integers up to $4 \cdot 10^{11}$ by Sinisalo in 1993. Chen Jingrun proved in 1973 that every sufficiently large number is the sum of a prime and a product of at most two primes.
The *odd* (*ternary*) Goldbach conjecture claims that every integer > 5 is the sum of three primes. Vinogradov proved in 1937 that this conjecture holds for all integers $< 3^{3^{15}}$. In 1998, Saouter verified the conjecture for all $n < 10^{20}$, and in 2002, M.-C. Liu and T.-Z. Wang showed that it holds for all $n > 10^{1346}$. In 2013, Harald Helfgott announced that he had closed the remaining “size gap”, thus completing the proof of the ternary Goldbach conjecture, which should consequently now be called the Goldbach-Helfgott Theorem.
See also Y. Wang 2002 and Guy 2004, Section C1.

[14] On this formula, Euler noted between the lines, preparing his reply (cf. n° 52, note 25):

$$\begin{array}{lcl} v^{2n+1} - & (vv+v)(v+1)^{n-1} & \textit{divis[ibilis] per } vv-v-1 \\ \textit{add[atur]} & \underline{(vv-v-1)(v+1)^{n-1}} & \\ v^{2n+1} - & (2v+1)(v+1)^{n-1} & \textit{divis[ibilis] per } vv-v-1. \end{array}$$

[15] Here Euler added: “$= \ell\,\frac{4}{3}$. *Sit haec applicata* $=$ *y erit* $y = \ell\,\frac{4}{4-x}$” (“$= \log\frac{4}{3}$. If the ordinate is y then one has $y = \log\frac{4}{4-x}$”).
In his copy, Goldbach noted in the margin: “*v*[*ide*] *p.* ” (“see p. . . . ”), probably after having read Euler’s reply (cf. n° 52, note 26).

[16] The text of the copy ends with the first and third paragraph of the postscriptum.

[17] Cf. n° 50, note 5.

[18] The exchange of information about several editions of the *Dictionnaire de Trévoux* will go on for several years: cf. *infra* n° 52, 55, 56, 58, 64, 66, 70, 89; see in particular n° 64, note 1.

[19] Here Euler noted between the lines, preparing his reply (cf. n° 52, note 24): “*nam si ponatur* $=$ *n numero integro fit* $p = mn \pm \sqrt{4mn-1}$, *quod fieri nequit*” (“for if this were set equal to an integer n, one would have $p = mn \pm \sqrt{4mn-1}$, which is impossible”).
In his copy, Goldbach noted in the margin: “*v*[*ide*] *p.* 110” (“see p. 110”), referring to the second addition reproduced in n° 45, note 5.

[20] As Euler told Goldbach in his reply (see n° 52, note 9), he had not received copies of E. 57 and his other prize papers published at Paris.

[21] In August 1739 the Paris journalist Charles de Fieux de Mouhy had written to Euler, offering his services to the Petersburg Academy as a paid correspondent in France. Five courteous but non-committal letters (R 1674–1676, 1676a, 1677) were exchanged until January 1740; then the correspondence broke off.
In none of these letters an expression that could be (mis)read as “à la trancaise” occurs, and no letters of Mouhy’s to Goldbach have been preserved: it is therefore not known what Goldbach refers to (but the solution proposed in Euler’s reply n° 52, note 6, seems plausible). No trace of a review of Mme du Châtelet’s *Institutions* (cf. n° 50, note 4) by Mouhy could be identified.

[22] Cf. n° 45, note 1, and n° 52, note 7.

52
Euler to Goldbach
Berlin, June 30th, 1742

Sir,

Councillor Schumacher informed me at once of your new employment with the Imperial Ministry and even sent me a copy of the decree issued for this.[1] I congratulate you on this change with all my heart and I wish that you may find in it all the advantage and satisfaction that you desire for yourself, Sir.

Here everybody is now living in the greatest joy, as today the longed-for peace between our Most Gracious King and the Queen of Austria and Bohemia was made public with all solemnity, and His Majesty the King will certainly arrive here within a fortnight. The articles of the peace treaty are not yet entirely known, but the Queen is said to have ceded all Lower and Upper Silesia; on the other hand she is to be crowned in Bohemia before long, and we are assured Prague is already taken.[2]

One also expects that immediately after His Royal Majesty's return the establishment of the new Academy will be begun, and as it seems, under the present circumstances this probably will take place without Mr. Maupertuis.

Some mail days ago I received from Petersburg the definitive decision about my engagement at the Academy with a yearly pension of 200 roubles; moreover I was promised the reimbursement of all my expenses for correspondence. On the other hand I am very surprised that the Academy has not yet been given a President.[3]

On the first occasion, Sir, I will have the honour to send you either to Petersburg or even to Moscow several catalogues containing all the newest books.[4] About the latest edition of the *Dictionnaire de Trevoux*[5] I have not yet been able to learn anything here; but I have been informed that as far back as 1732, this work comprised 5 volumes and cost 45 thalers.

I have not received any letters from the Chevalier de Mouhy since that time; when, in Stettin, I asked Mr. Mauclerc about the expression "*à la trancaise*", he immediately told me that this had to be a misprint and should read "*à la française*".[6]

The letter from Mr. Poleni that you kindly forwarded to me from Petersburg, Sir,[7] did not contain any particularly interesting news, except that by now his *Exercitationes Vitruvianae Tertiae*, and *Dissertatio de Institutionibus Experimentalibus Mechanicae Philosophiae* have appeared. Furthermore a *Cursus Mathematicus* by Abbot Grandi, a *Tractatus de Lineis Curvis* by Father Caraccioli, and *Antiquitatum Latinarum Graecarumque Enarrationes atque Emendationes* by Mr. Poleni's son-in-law Giulio Pontedera have been published;[8] I have not seen any of these works. Also I have not yet received any of my treatises printed in Paris,[9] and I can find next to no opportunity to get some. Now I shall soon be sending another treatise to Paris, *On the best method to observe the inclination of the magnetic needle*;[10] while pondering, on this occasion, the theory of magnets, I finally discovered a system that is very simple and suits the laws of nature, by which I can very easily and clearly explain all phenomena and properties of magnets and iron; about this subject I shall send a paper to Paris next year.[11]

Lately I sent another paper to Petersburg, *On Oscillations of flexible pendulums*;[12] and soon tome 7 of the *Miscellanea* is to appear here, for which I contributed several papers.[13] Some of these are about a new way to determine the sums of series of inverse powers. First I indicated a method for integrating all rational differential formulae; here, if the integral is not algebraic, it depends on logarithms, on the quadrature of the circle or on both. Starting from this, I generally expressed the integral of the formula $\int \frac{x^{m-1} - x^{m-n-1}}{1 - x^n} dx$, discovering that for $x = 1$ the logarithmic terms in the integral cancel and only those remain that depend on the quadrature of the circle; finally, the aggregate of these can be reduced to the formula $\frac{\pi \cos \frac{m}{n}\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi}$. Then I integrated the formula $\int \frac{x^{m-1} - x^{m-n-1}}{1 - x^n} dx$ by series in the usual way, and after substituting $x = 1$, I found this equation:[14]

$$\frac{\pi \cos \frac{m}{n}\pi}{n \sin \frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \ldots,$$

where $1 : \pi$ denotes the ratio of the diameter to the circumference and consequently, if the radius or the total sine is taken equal to 1, half the circumference or the arc of 180° is indicated by π; thus $\frac{m}{n}\pi$ denotes a determinate arc, of which one can indicate the sine and cosine. If I now let $\frac{m}{n} = x$, the following series results:

$$\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \ldots$$

By substituting $x = \frac{1}{4}$, one has $\pi x = 45°$, $\cos \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $\sin \pi x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; consequently,

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \ldots$$

Moreover, one can reach higher powers by differentiation; for, taking x to be variable, $d \cos \pi x = -\pi\, dx \sin \pi x$ and $d \sin \pi x = \pi\, dx \cos \pi x$; therefore

$$d\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{-\pi^2\, dx\, (\sin \pi x)^2 - \pi^2\, dx\, (\cos \pi x)^2}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-\pi^2\, dx}{(\sin \pi x)^2},$$

since $(\sin \pi x)^2 + (\cos \pi x)^2$ equals the square of the radius, which is 1; so when the series is also differentiated, one gets

$$\frac{-\pi^2\, dx}{(\sin \pi x)^2} = \frac{-dx}{x^2} - \frac{dx}{(1-x)^2} - \frac{dx}{(1+x)^2} - \frac{dx}{(2-x)^2} - \frac{dx}{(2+x)^2} - \ldots$$

and, dividing by $-dx$,

$$\frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} + \frac{1}{(2+x)^2} + \ldots$$

Substituting $x = \frac{1}{4}$, since $\sin \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ one gets $2\pi^2 = \frac{16}{1} + \frac{16}{9} + \frac{16}{25} + \ldots$ or

$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$ One can also go on differentiating, and in this manner arrive at the sums of arbitrary powers; indeed,

$$d\,\frac{\pi^2}{(\sin\,\pi x)^2} = \frac{-\,2\pi^3\,dx\,\cos\,\pi x}{(\sin\,\pi x)^3} = \frac{-\,2dx}{x^3} + \frac{2dx}{(1-x)^3} - \frac{2dx}{(1+x)^3} + \ldots$$

and consequently

$$\frac{\pi^3 \cos\,\pi x}{(\sin\,\pi x)^3} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(2-x)^3} + \frac{1}{(2+x)^3} - \ldots$$

For $x = \frac{1}{4}$, one has $2\pi^3 = \frac{64}{1} - \frac{64}{3^3} + \frac{64}{5^3} - \frac{64}{7^3} + \ldots$ In this manner I determine the sums of all powers, and that much more generally than by the method I used before, since here I can substitute any fraction for x. I wrote to Mr. Nicolaus Bernoulli at Basel about this, but am still expecting his opinion about it.[15] However I remember that you, Sir, once remarked[16] that if one knew the sum of the series

$$\frac{1}{a+\alpha x} + \frac{1}{b+\beta x} + \frac{1}{c+\gamma x} + \ldots,$$

one could also determine, by differentiation, the sum of this one:

$$\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n} + \frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n} + \frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n} + \ldots;$$

of this my present summation is an example.

One has generally $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-\,p\sqrt{-1}} = 2\cos\,(p\,\log 2)$. Thus in order for $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-\,p\sqrt{-1}}$ to equal 0, $p\log 2$ must equal some arc of the circle that has its cosine equal to 0. But this property is true for all the arcs comprised by the formula $\frac{(2n+1)\,\pi}{2}$, and consequently $p = \frac{(2n+1)\,\pi}{2\,\log 2}$. Therefore, letting $p = \frac{(2n+1)\,\pi}{2\,\log 2}$ or $2^{p\sqrt{-1}} + 2^{-\,p\sqrt{-1}} = 0$, one gets

$$2^{xp\sqrt{-1}} + 2^{-\,xp\sqrt{-1}} = 2\ \cos\ (xp\log 2) = 2\ \cos\frac{(2n+1)\ x\pi}{2}.$$

So in order to have $2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-\,qp\sqrt{-1}} = 2^{rp\sqrt{-1}} + 2^{-\,rp\sqrt{-1}}$, it must be true that $\cos\ \frac{(2n+1)\ q\pi}{2} = \cos\ \frac{(2n+1)\ r\pi}{2}$. The cosines of two different arcs, however, are equal if either their sum or their difference equals a multiple of the entire circumference 2π. Therefore one gets $\frac{(2n+1)\ q\pi}{2} \pm \frac{(2n+1)\ r\pi}{2} = 2m\pi$ and consequently $q \pm r = \frac{4m}{2n+1}$. Then indeed one will have

$$2^{\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}} + 2^{-\left(\frac{4m}{2n+1}-q\right)p\sqrt{-1}} = 2^{qp\sqrt{-1}} + 2^{-\,qp\sqrt{-1}},$$

and in this everything you wrote to me about this matter[17] is contained, Sir.

The expression $y^2 + y - x^2$ comprises not just all numbers that the formula $4mn-m-n$ yields, but altogether all positive numbers, whether they be contained in $4mn - m - n$ or not;[18] so, independently from that theorem, any number is contained in the formula $u^2 + v^2 + v + y^2 + y - x^2$. However, nothing about the resolution of every number into triangular or square numbers can be inferred from this;[19] for as each of the letters u, v, y and x denotes an arbitrary number, one cannot substitute $\frac{z^2+z}{4}+1$ for u, or $\frac{z^2+z}{4}-1$ for x, since the formulae $\frac{z^2+z}{4}\pm 1$ do not yield any more all possible numbers that have actually been denoted by u and x. Indeed, since any number is even contained in the formula $u^2 - x^2$, by force of that substitution any number should have to be contained in the formula $z^2 + z$, and thus be a triangular number.

If all the numbers contained in the formula $2^{2^{n-1}} + 1$ could be split into two squares just in a unique way, all these numbers should necessarily have to be prime – which, however, is not the case.[20] For all these numbers are comprised by the formula $4m + 1$, which, whenever it yields a prime number, can without fail be resolved into two squares, and that in a unique way; but when $4m+1$ is not prime, that number is either not at all resolvable into two squares, or it is so in more than one way. I can show that $2^{32} + 1$, which is not prime, can be split into two squares in at least two ways, in the following manner: I. If a and b are resolvable into two squares, their product ab will also be resolvable into two squares; II. If the product ab and one of its factors a are numbers that can be resolved into two squares, then the other factor b will also be resolvable into two squares. These theorems can be proved in the strictest sense. Now $2^{32} + 1$, a number that can be resolved into two squares, namely 2^{32} and 1, is divisible by $641 = 25^2 + 4^2$; therefore the other factor, which I will call b for brevity's sake, is certainly also a sum of two squares. Let $b = p^2 + q^2$; then

$$2^{32} + 1 = \left(25^2 + 4^2\right)\left(p^2 + q^2\right) = (25p + 4q)^2 + (25q - 4p)^2 ,$$

and at the same time

$$2^{32} + 1 = (25p - 4q)^2 + (25q + 4p)^2 ;$$

therefore $2^{32}+1$ is a sum of two squares in at least two ways. From this one can find the double resolution *a priori*; for one gets $p = 2556$, $q = 409$, and consequently

$$2^{32} + 1 = 65\,536^2 + 1^2 = 62\,264^2 + 20\,449^2.$$

That any number which is resolvable into two prime numbers can also be split into as many prime numbers as one wishes, can be illustrated and confirmed from an observation that you, Sir, communicated to me some time ago, when you stated that any even number is the sum of two primes.[21] For if the proposed number n is even, it is the sum of two primes, and as $n - 2$ is another sum of two primes, n is also the sum of three, of four and so on. On the other hand, if n is an odd number, it certainly is a sum of three primes, as $n - 1$ is a sum of two, and can therefore also be resolved into as many more as one likes.[22] Indeed, I consider the statement that any even number is the sum of two primes to be an utterly certain theorem, notwithstanding the fact that I cannot prove it.[23]

The fact that $\dfrac{p+2\pm\sqrt{4p-m+3}}{m}$ can never become a whole number is elucidated by equating the formula to some integer n; this results in $p = mn \pm \sqrt{4mn-1}$, but $4mn-1$ cannot be a square.[24]

You stated, Sir,[25] that if one could determine some root x from the equation $v = c$ (where v is some function of x), then one could also determine the value of x in the equation $v^{2n+1} = (2v+1)\,(v+1)^{n-1}$. The investigation of this theorem of yours gave me a lot of trouble until I finally noticed that the equation $v^{2n+1} - (2v+1)\,(v+1)^{n-1} = 0$ is divisible by $v^2 - v - 1$; for one has

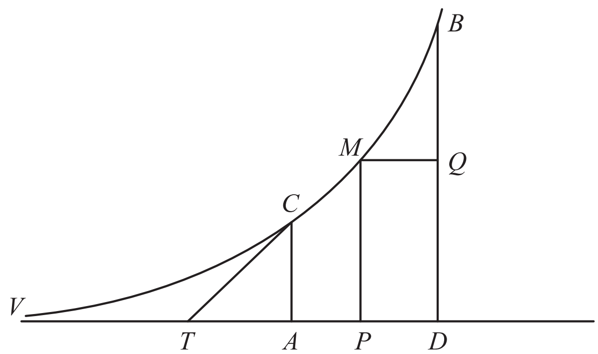
$$v^{2n+1} - (2v+1)\,(v+1)^{n-1} = v\left(v^{2n} - (v+1)^n\right) + \left(v^2 - v - 1\right)(v+1)^{n-1}\,,$$

and $v^{2n} - (v+1)^n$ is also divisible by $v^2 - v - 1$. Therefore, for arbitrary n the equation $v^{2n+1} = (2v+1)\,(v+1)^{n-1}$ is satisfied by $v^2 = v + 1$, and thus by $v = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; from this equation one can determine the root x by hypothesis.

If one conceives a curve that has for its ordinate (the abscissa being x)

$$y = \frac{x}{1\cdot 2^2} + \frac{x^2}{2\cdot 2^4} + \frac{x^3}{3\cdot 2^6} + \frac{x^4}{4\cdot 2^8}\ \ldots,$$

one generally has $y = \log\dfrac{4}{4-x}$; consequently the curve is a logarithmic one which has the ordinate $x = 4$ for its asymptote.



Let VCB be an ordinary *logarithmica* that has VD for its asymptote, and let its constant subtangent equal $AT = 1$. Take the ordinate $AC = 1$ and another, arbitrary one PM; now letting $AP = t$ and $PM = u$, one will have $t = \log u$ or $u\,dt = du$. Now taking the ordinate $DB = 4AC = 4$, $AD = \log 4$, and joining MQ one has $BQ = x$ and $QM = y$ for the case that was proposed; indeed $AP = t = \log 4 - y$ and $PM = u = 4 - x$, therefore, since $t = \log u$, $\log 4 - y = \log(4-x)$

and $y = \log \dfrac{4}{4-x}$. By the way, Sir, you wrote $\frac{1}{3}$ for the sum of the series that equals y in the case $x = 1$, whereas in fact the sum equals $\log \frac{4}{3}$.[26]

With this, I recommend myself to your constant goodwill and favour, Sir, and am honoured to be with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, June 30th, 1742.

[1] Cf. n° 50, note 2.
The letter from Schumacher that Euler mentions here and the copy of Goldbach's nomination decree, which had been submitted to the Academy on April 23rd (May 4th), have apparently not been preserved.

[2] On June 11th, the agreement of Breslau (today Wrocław) had ended the First Silesian War. The definitive peace treaty in which Prussia annexed most of Silesia, while the rest was divided between Austrian Bohemia and Poland, was signed in Berlin on July 28th. Maria Theresa then ousted the Bavarians from Prague and was crowned Queen of Bohemia in May 1743.

[3] Cf. n° 43, note 4, and n° 48, note 8.

[4] Cf. n° 50, note 5.

[5] Cf. n° 51, note 18; there is indeed a 1732 edition (the third) in five volumes by several Paris printers.

[6] Cf. n° 51, note 21.

[7] Cf. n° 45, note 1, and n° 51, note 22.

[8] Poleni's *Exercitationes Vitruvianae Tertiae* were part of a series started in 1739; his *Institutionum Philosophiae Mechanicae Experimentalis Specimen* had been the opening speech for the University of Padua's new physics laboratory on December 1st, 1740. Grandi's mathematics course consisted of three volumes on mechanics, arithmetic and geometry, published at Florence in 1739–41; the philosopher and mathematician Caracciolo's *De lineis curvis Liber* appeared at Pisa in 1740; and the same year the botanist Pontedera had his book on classical agriculture printed at Padua.

[9] Euler refers to his prize papers E. 4 on the masting of ships from 1727, E. 34 on fire, printed in 1739, and E. 57 (cf. n° 51, note 20).

[10] E. 108, *De observatione inclinationis magneticae*, was entered for the 1743 competition of the Paris Academy (cf. n° 54–60, 68); while Daniel Bernoulli won the prize with his *Memoire sur la maniere de construire les Boussoles d'inclinaison*, Euler's paper received a honourable mention (*accessit*) and was also printed in 1748.

[11] The prize question for 1742 had asked for a theory of magnetism, but since the judges were not satisfied with the contributions received, they reset the question for 1744 and again for 1746. Only then the prize – by now a triple one – was awarded to a joint work by the brothers Daniel and Johann II Bernoulli, to Du Tour and to Euler for his paper E. 109, *Dissertatio de Magnete*; all three essays were printed in 1748. Cf. n° 78, 80, 105 and the introduction to O. III/10, p. LXXI–LXXVII.

[12] E. 159, which actually bears the title *De motu oscillatorio corporum flexibilium*, was presented to the Petersburg Academy on August 20th, 1742, but printed in its *Commentarii* only in 1751.

[13] In fact, t. VII of the *Miscellanea Berolinensia* (published in 1743) contains six papers by Euler: E. 58 on the comet of March 1742, E. 59 and E. 60 on integration, E. 61 on the zeta function, E. 62 on differential equations, as well as the anonymous *De causa gravitatis*, which was missed in the Eneström index (cf. the introduction to O. II/31, p. LXXXVII–XCIII). In the passage that follows, Euler recapitulates the contents of E. 59–61 for Goldbach's benefit.

[14] Special cases of the integral $\int_0^1 \frac{z^p - z^r}{1 - z^q}\,dz$ had already been discussed by Euler in 1739 (cf. n° 30). Setting $m = 3$ and $n = 8$, Euler's equation (which appears in § 178 of his *Introductio*, t. I: O. I/8, p. 190–191) yields

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \ldots = \frac{\pi}{8} \cdot \cot \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{8}(\sqrt{2} - 1).$$

Setting $m = 1$ and $n = 3$, Euler computes what we know as the value of Dirichlet's L-series $L(1, \chi_3)$ for the Dirichlet character $\chi_3(a) = \left(\frac{-3}{a}\right)$ in § 176 of the *Introductio* (*ibid.*, p. 188–189):

$$L(1, \chi_3) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots = \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

More generally, the values $L(1, \chi_n)$ for primes $n \equiv 3 \bmod 4$ can be expressed as finite sums of values of the cotangent function; these expressions were first found by Gauss in his evaluation of certain Dirichlet L-series in connection with class number formulae for positive definite binary quadratic forms (see *Disquisitiones*, p. 690 of Maser's translation). In these notes published posthumously, Gauss also used the development

$$\pi \cot(\pi x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x} - \ldots$$

of the cotangent function as given by Euler in this letter.
The results that follow had been published by Euler in in E. 59 and E. 60 (see also the discussion in Varadarajan 2007, p. 96–99). Integrals of the form $\int_0^1 \frac{z^p - z^{q-p}}{1 - z^q}\,dz$ were later again studied in E. 462.

[15] See Euler's letter to Nicolaus I Bernoulli from January 16th, 1742 (R 234: O. IVA/2, p. 483–491). Bernoulli replied only on July 13th (cf. R 235: *ibid.*, p. 491–510).

[16] Goldbach did not remember this statement: see his reply n° 53, note 16.

[17] Cf. n° 51, note 6.

[18] Cf. n° 51, note 7.

[19] Cf. n° 51, note 8.

[20] Cf. n° 51, note 10.

[21] Cf. n° 51, notes 11–13. Thus Goldbach appears to have mentioned his famous conjecture to Euler before their departure from Petersburg.

[22] Here Euler considers 1 a prime, just as Goldbach did (cf. n° 51, note 13). In general Euler kept to Euclid's convention that the unit 1 has a status of its own and 2, 3, 5, ... are primes, but deviated from this usage when it suited his needs. In E. 243, Euler introduced the function $\sigma(n)$, the sum of all divisors of n, and observed that $\sigma(1) = 1$ for the unit 1, whereas $\sigma(p) = p + 1$ for primes p, which have exactly two divisors. In n° 108, Euler also does not count 1 among the primes.

[23] At this point Euler drops Goldbach's conjecture (cf., however, n° 165, note 11).
No attempts at a proof by 18th-century mathematicians are known; indeed the first substantial advances were made only in the 1920s and 30s (cf. Section 2.1.3 of the Introduction).

[24] Cf. n° 51, note 19.

[25] Cf. n° 51, note 14.

[26] Cf. n° 51, note 15.

53

Goldbach to Euler

Moscow, July (19th) 30th, 1742

Sir,

with all due gratitude I acknowledge the felicitations you sent me, Sir, at the same time congratulating you on your imminent perpetual pension from Paris; it appears ever more clearly that you are going to oblige the *Académie des Sciences* to pay you a constant tribute in awarding its prizes.[1]

As anybody will admit, no conditions of peace more glorious for His Royal Majesty could have been imagined,[2] which affects me, too, with great joy.

On the occasion[3] of the misspelt passage which Mr. Mauclerc corrected so well,[4] I remember that in the letters decoded by Wallis[5] I noticed some places which need a different interpretation,[6] as you will no doubt agree, Sir, if you compare the following remarks with the letters themselves. In t. III of the *Opera*, p. 666, line 4, the letter had read $125, 44, 24, 123, 68, 28$; instead of 24 he inserts the number 26 and reads

125,	44,	26,	123,	68,	28,
co	*n*	*d*	*ui*	*st*	*e*

which is no French word, whereas, in fact, the writer of the copy had left out the two numbers 40 and 20 or the one 348 and the whole word ought to read *conclaviste*. On line 10 of the same page he substitutes the number 138 for 128 and interprets it as *hongrois*; however it is much more likely that 128 is written correctly and signifies *homme*. Also it is not apparent why, on the 7th line from the end of p. 665, the number 380, that he had not even inserted in the key, should read *pall*; it should rather denote *paye*. The number 136 which he does not interpret at all probably ought to read *dame*. Notwithstanding these mistakes I take the decoding effected by Wallis to be a great effort of the human mind, although he honestly admits that diverse coded letters have passed through his hands in which he has not been able to discover anything.

I quite realise that for my letters the caution *Examine everything* is always appropriate,[7] as I am often lacking the proper attention; all the same I shall be glad if there is at least something in them that merits your attention, Sir. When I wrote the last letter, I did not think of the observation, which you had communicated to me a long time ago, that the numbers $4m+1$ can be split into two squares in only one way.[8] It is true that all numbers are included by the formula y^2+y-x^2,[9] but this should not have invalidated my intention if only the assumptions $u = \dfrac{z^2+z}{4}+1$ and $x = \dfrac{z^2+z}{4}-1$ had been deduced from adequate reasons. For, exactly as in this statement: "any number is the sum of one positive and two negative triangular numbers"[10] it does not matter that x, y and z in the formulae $\dfrac{x^2+x-y^2-y-z^2-z}{2}$ denote all numbers in general, but it is quite legitimate to substitute $2u^2$ for x if one only shows that this substitution does not restrict the arbitrary number which is to result from the said formula, thus the same thing should also be true of the statement that any number consists of three triangular numbers, if the assumption $x = \dfrac{z^2+z}{4} + 1$ were adequately founded.

As I saw soon after writing my letter, the observation that $\dfrac{p+2\pm\sqrt{4p-m+3}}{m}$ cannot be an integer is of no importance.[11] Perhaps these are somewhat better: $1+16a^2+16b^2$ never has a root of the form $4n-1$, but rather of the form $4n+1$. The number $4x^4+1$ is prime only in the case when $x=1$.[12]

Exactly as there are series of numbers that either cannot be divided by any $4n-1$ or are even prime, one could look for series of numbers that are either prime or cannot be divided by any $4n+1$, or at least can never have their smallest divisor of the form $4n+1$; for whenever a term of that series should happen to equal a^2+1 one could prove that it is a prime number. In the series of triangular numbers increased by 1 there certainly are very few cases where the smallest divisor belongs to the form $4n+1$, one of these occurring when the index of the term is 252 and the triangular number increased by 1 is composed of the factors 29 and 401.[13] Now, if one could exclude such cases in which the smallest divisor is of the form $4n+1$ by a general exception, then all those terms of the form a^2+1, in so far as they are not comprised by that exception, should be prime numbers.[14]

I arrived at my statement about $v^{2n+1} = (2v+1)(v+1)^{n-1}$ just by considering the number $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; I did not suspect that the equation can be factored, which – as I now see – is inevitable in cases of that kind.[15]

As far as I recall, I never knew of a method for determining the sum

$$\frac{\alpha^{n-1}}{(a+\alpha x)^n} + \frac{\beta^{n-1}}{(b+\beta x)^n} + \frac{\gamma^{n-1}}{(c+\gamma x)^n} + \dots,$$

if the sum of the series

$$\frac{1}{a+\alpha x} + \frac{1}{b+\beta x} + \frac{1}{c+\gamma x} + \dots$$

is given,[16] except in the case where the sum of the latter series is expressed by some known function of x; in this way if $\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x+\dots$ is summable, the series $\alpha x+2^n\beta x^2+3^n\gamma x^3+4^n\delta x^4+\dots$ is also summable, but this is nothing special, as indeed the greatest difficulty lies in substituting, in those cases where no such finite function of x is available, an equivalent expression that can be indefinitely differentiated, as you dealt with the sines of circular arcs, Sir. However, I shall add here a theorem which I thought of a few days ago:

Let the three series A, B, C be as follows:

$$\begin{array}{ll} A \dots & a+b+c+d+\dots \\ B \dots & ab+(a+b)c+(a+b+c)d+\dots \\ C \dots & a^2+b^2+c^2+d^2+\dots \end{array}$$

then $B = \dfrac{A^2 - C}{2}$; so if the sums of two of these three series are known, the sum of the third one results, and if the sum of one series is known, one also has the ratio that holds between the two remaining series. Let, e. g., $a = \dfrac{1}{m}$, $b = \dfrac{1}{m^2}$, $c = \dfrac{1}{m^3}$, $\ldots$, then $B = \dfrac{1}{(m+1)(m-1)^2}$. Let $a = 1$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{5}$, $d = -\frac{1}{7}$ (where the signs alternate after each two terms), then the series B equals 0.[17] If one defines f by

$$\frac{1}{2^n} - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n} + \left(1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)\frac{1}{4^n} - \ldots = f\pi^{2n},$$

where π equals the circumference of the circle whose diameter is 1, f will be a function of n that, for $n = 1$, becomes $\dfrac{6p^2 - \pi^2}{12}$ where $p = \log 2$; but if n is taken to be some whole number greater than 1, the function will give a rational number, because in these cases the quantities connected with the numbers p and π cancel. On this occasion I noticed that $1 + p^2$ nearly equals $\dfrac{3\pi^2}{20}$.[18]

I should really like to know, Sir, whether you can express the sums of the series $ab^2 + (a+b)\,c^2 + (a+b+c)\,d^2 \;\ldots$ and $a^2b + \left(a^2 + b^2\right)c + \left(a^2 + b^2 + c^2\right)d + \ldots$, in the case where $a = 1$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{4}$ or $a + b + c + \ldots = \log 2$, by logarithms and the quadrature of the circle.

The other day I found a piece of paper where I had noted, I daresay several years ago:[19]

The sum of the series $1 + 2^p + 3^p + 4^p + \ldots$ up to some given term x is

$$\begin{aligned} 1 \;\; + \;\; & 2^p\,(x-1) + (3^p - 2^p)\,(x-1)\,\frac{(x-2)}{2} \\ + \;\; & (4^p - 2\cdot 3^p + 2^p)\,(x-1)\,\frac{(x-2)}{2}\,\frac{(x-3)}{3} \\ + \;\; & (5^p - 3\cdot 4^p + 3\cdot 3^p - 2^p)\,(x-1)\,\frac{(x-2)}{2}\,\frac{(x-3)}{3}\,\frac{(x-4)}{4} + \ldots; \end{aligned}$$

when p is a positive integer, this series terminates and contains no more than $p+2$ terms.[20]

On another piece of paper I found the following:

Consider the formulae

(1.) u^n
(2.) $nu^{n+1} - (n+1)\,u^n$
(3.) $n^2u^{n+2} - \left(2n^2 + 2n - 1\right)u^{n+1} + (n+1)^2\,u^n$
(4.) $n^3u^{n+3} - \left(3n^3 + 3n^2 - 3n + 1\right)u^{n+2} + \left(3n^3 + 6n^2 - 4\right)u^{n+1} - (n+1)^3\,u^n$

which can be continued to infinity by the following law: if some term is

$$n^p u^{n+p} + \alpha u^{n+p-1} + \beta u^{n+p-2} + \gamma u^{n+p-3} + \ldots,$$

the following one is to be

$$\begin{aligned} n^{p+1}u^{n+p+1} \quad &+ \quad (-n^p\,(n+p+1) + \alpha\,(n[-]1))\,u^{n+p} \\ &+ \quad (-\alpha\,(n+p) + \beta\,(n-2))\,u^{n+p-1} \\ &+ \quad (-\beta\,(n+p-1) + \gamma\,(n-3))\,u^{n+p-2} - \ldots + \ldots \end{aligned}$$

Take some formula A and, in the particular case where $n = 0$, take this formula to equal B; now I say that $\dfrac{A-B}{(u-1)^{p+1}}$ is the sum formula for the series

$$1 + 2^p u + 3^p u^2 + [4^p]u^3 \ \ldots + \ n^p u^{n-1}.$$

Let, e. g., $p = 1$, then $A = nu^{n+1} - (n+1)\,u^n$, and in the particular case where $n = 0$, A goes over into $-1 = B$; therefore[21]

$$\frac{A-B}{(u-1)^2} = \frac{nu^{n+1} - (n+1)\,u^n + 1}{(u-1)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 \ \ldots + \ nu^{n-1}.$$

Moreover I also noticed that the sum of the series $1 + 2^{2n} + 3^{2n} + 4^{2n} \ + \ \ldots$ equals

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n}x^n\,(x+1)^n \quad &- \quad \frac{(n-2)}{2^2\cdot 3}x^{n-1}\,(x+1)^{n-1} \\ &+ \quad \frac{(7n-8)\,(n-1)\,(n-3)}{2^4\cdot 3^2\cdot 5}x^{n-2}\,(x+1)^{n-2} - \ldots; \end{aligned}$$[22]

substituting $y = x\,(x+1)$, the sum formula will be

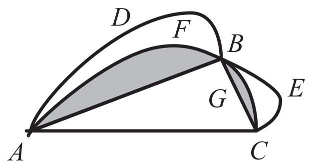
$$\frac{1}{2n}\left(y^n + ay^{n-1} + by^{n-2} + \ \ldots \ my^2\right),$$

where a, b, $\ldots$ are determined in the following way:

$$\begin{aligned} (n-1)\,a \quad &+ \quad n\,(n-1)\,(n-2) = 0 \\ (n-2)\,b \quad &+ \quad \frac{a\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\cdot 3} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 0 \\ (n-3)\,c \quad &+ \quad \frac{b\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\cdot 3} + \frac{a\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \\ &+ \quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)\,(n-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} = 0. \end{aligned}$$

Even if there should be some slip of the pen in this, I can correct it at once; also the results just stated for even exponents would not be difficult to extend to all exponents in general.

In the textbooks of geometry, where the Pythagorean Theorem is proved, one ought by rights to prove the same relation about all kinds of similar figures;[23] then this corollary follows:



If the rectangular triangle ABC is intersected by an arbitrary curve $AFBGC$ in the three points A, B, C, and if on the bases AB and BC curves ADB, BEC are described that are entirely similar to the curve ABC and do not intersect in any other points besides A, B, and C, then (subtracting the cancelled segments AFB, BGC) the remaining "quasi-lunes" $ADBF$ and $BECG$ taken together equal $\triangle\, ABC$; these quasi-lunes become real lunes if the curve ABC is a semicircle.

With this I remain with particular respect, Sir, your most obedient servant Goldbach.

Moscow, July 30th (n. st.), 1742.

[1] Cf. nº 52, notes 10–11.
[2] Cf. nº 52, note 2.
[3] The text of Goldbach's copy starts here.
[4] Cf. nº 52, note 6.
[5] The English mathematician John Wallis had served for a long time as a cryptographer for the parliament and the royal court. When publishing some samples from his correspondence in vol. III of his *Opera Mathematica* (1699), he included two letters that he had deciphered. Goldbach refers here to Wallis's decipherment of a letter (*op. cit.*, p. 660–667) which a French diplomat had sent in 1680 to a cardinal at Rome to give him instructions about winning Polish support for a favoured candidate in the upcoming papal election.
Goldbach, whose new engagement at the Ministry of the Exterior made him director of the Code Department, painstakingly studied his predecessor's effort – one of very few documents of the kind available for public scrutiny.
Euler does not seem to have been very interested: see his reply nº 54, note 7.
[6] Here the text of Goldbach's copy breaks off in mid-sentence with the note "*&c. vid. Ch. p.* ", which possibly refers to some notebook on ciphers; the rest of the paragraph on Wallis has not been copied.
[7] Goldbach quotes St Paul's first letter to the Thessalonians, 5, 21: "Examine everything carefully; hold fast to that which is good".
[8] Cf. nº 51, note 10, and nº 52, note 20.
[9] This is indeed trivial since $n = n^2 + n - n^2$.
[10] The identity $n = \dfrac{n^2+n}{2} - \dfrac{(n-1)^2+(n-1)}{2}$ shows that any integer is the difference of two triangular numbers. Similarly, $n+1$ is the difference of two triangular numbers, and subtracting the triangular number 1 from both sides yields Goldbach's claim. See also nº 114, note 7.
[11] Cf. nº 51, note 19, and nº 52, note 24.
[12] See Euler's reply nº 54, note 8.
The following sentence has been cancelled both in the original and in the copy but can still be read: "*Numerus* $4m+1$ *nunquam est primus, si* m *revocari possit ad hanc formam* $(4h-1)\,k - 4h^{\alpha}$." ("The number $4m+1$ is never prime when m can be brought to the form $(4h-1)\,k - 4h^{\alpha}$.").
[13] Instead of 252, as one clearly reads both in the original and the copy, Goldbach should have written 152, since $\frac{1}{2}152\,(152+1)+1 = 11\,629 = 29 \cdot 401$ indeed has its prime divisors

$\equiv 1 \bmod 4$, whereas for 252, $\frac{1}{2}252\,(252+1)+1 = 31\,879 = 71 \cdot 449$ has a smallest divisor $\equiv 3 \bmod 4$.

[14] See Euler's reply n° 54, note 9.

[15] Cf. n° 51, note 14, and n° 52, note 25.

[16] Cf. n° 52, note 16.

[17] In Goldbach's example, the series $A = L(1, \chi_{-8}) = \pi/\sqrt{8}$ (see *supra* n° 30, item VI) and $C = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots = \pi^2/8$ (see E. 41, § 11) had previously been evaluated by Euler; Goldbach's equation $2B = A^2 - C$ then implies $B = 0$.
About these reflections on series in general and Goldbach's example in particular, see Euler's reply n° 54, note 15.

[18] See Euler's reply n° 54, note 16.

[19] In his copy, Goldbach noted instead of the passage that follows: "*vid*[*e*] *in libro rubr*[*o*] *p.* 52 *et* " ("see p. 52 and ... in the red book"), probably referring to some older notebook.

[20] Goldbach proposes here a closed formula for $\sum_{n=1}^{x} n^p$; in his reply (cf. n° 54, note 17), Euler gives the summation formula involving Bernoulli numbers.

[21] Goldbach's identity

$$\frac{nu^{n+1} - (n+1)u^n + 1}{(u-1)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + 4u^3 \ \ldots + \ nu^{n-1}$$

can easily be verified by multiplying through by $(u-1)^2$.

[22] In his copy, Goldbach indicates, instead of the passage that follows: "*vid*[*e*] *libr*[*um*] p. 52 b" ("see p. 52 b in the book").

[23] Indeed this is what Euclid did in his Theorem VI.31. The easy generalisation of the lune construction that follows does not seem to have been pursued any further.

54
Euler to Goldbach
Berlin, August 28th, 1742

Sir,

I acknowledge with all due gratitude the evident sign of your special goodwill towards me, Sir, which you show in predicting for me a constant tribute from the Paris Academy;[1] however, although I do not neglect anything to conserve this advantage, those papers which I lately dispatched from here seem to have met with the same fate that some years ago took Chamberlain Korff so much effort to redress.[2] For I sent my paper on the inclination of the magnet to Mr. de Mairan as early as the beginning of last month, but still have received no answer that it has arrived.[3] Moreover, last March I sent a paper on the motion of fluids in elastic tubes to the Dijon Academy of Sciences, which had advertised a prize of 30 Louisd'ors on that subject, and have received no reply either;[4] this leads me to think that both papers have either been held up somewhere or even lost. I regret in this most of all that I did not keep copies of those two papers.

The necessary orders for the establishment of the new Academy of Sciences here have already been issued by His Royal Majesty; however, nothing has been decided yet about its inauguration. Recently the old Society was nearly hit by a great misfortune when a fire broke out at night in the Royal Stables; all the front that looks out on *Unter den Linden* was burnt down and the entire Painters' Academy destroyed.[5]

Councillor Schumacher notified me some time ago that by now Her Imperial Majesty has in fact most graciously deigned to look after the Petersburg Academy and designate a President; but as you have not mentioned this, Sir, I have to wait for the confirmation of this news.[6]

I daresay your corrections of the letters decoded by Wallis[7] are quite right; however I recognise my incompetence to scrutinise this deep matter by myself.

The theorem[8] that the expression $\sqrt{1+16a^2+16b^2}$ can never yield a number of the form $4n-1$ is very beautiful, and its proof does not easily catch the eye. For supposing $4n-1=\sqrt{1+16a^2+16b^2}$, one should have $16n^2-8n=16a^2+16b^2$ and consequently $n\,(2n-1)=2\left(a^2+b^2\right)$. Now since $2\left(a^2+b^2\right)$ is an even number, n should have to be even, as $2n-1$ is certainly odd. Thus let $n=2p$; then $2p\,(4p-1)=2\left(a^2+b^2\right)$ and therefore $4p-1$ is a divisor of the formula a^2+b^2, which cannot be true; or $p\,(4p-1)$ should have to be a sum of two squares, which is also impossible.

That $4x^4+1$ can never be a prime number, except for the case where $x=1$, is no wonder, since this kind of formula can be generally resolved into two factors; indeed, $4x^4+1=\left(2x^2+2x+1\right)\left(2x^2-2x+1\right)$.

I very much doubt whether there are series of numbers that are either not divisible by any $4n+1$ or even prime;[9] but if nonetheless something of the kind were to be discovered, one could certainly apply it with great advantage to the determination of prime numbers.

By the way, the prime divisors of all series of numbers that are comprised by the formula $ax^2\pm by^2$ keep a very pretty order – at least this appears to be quite accurate, although I have not yet found a proof. I therefore take the liberty to communicate to you, Sir, some theorems of this kind, from which innumerable others can be deduced.[10]

I. If x and y are relatively prime numbers, the formula x^2+y^2 cannot be divisible by any prime numbers except those contained in the form $4n+1$, and all these prime numbers are themselves contained in the form x^2+y^2.

I take this well-known theorem for granted in order to render all the more evident the connection of those that follow.

II. The formula $2x^2+y^2$ has no other prime divisors than those contained in the forms $8n+1$ or $8n+3$. And whenever $8n+1$ or $8n+3$ is a prime number, it will be the sum of a square and the double of another square, i. e., of the form $2x^2+y^2$.

III. The formula $3x^2+y^2$ has no other prime divisors than those contained in the forms $12n+1$ and $12n+7$ (or in the single one $6n+1$). And whenever $6n+1$ is a prime number, it will be contained in the form $3x^2+y^2$.

IV. The formula $5x^2+y^2$ has no other prime divisors than those contained in the forms $20n+1$, $20n+3$, $20n+9$, $20n+7$, and any prime number contained in one of these four formulae will itself be a number of the form $5x^2+y^2$.

V. The form $6x^2 + y^2$ has no other prime divisors than those contained in one of the four formulae $24n + 1$, $24n + 5$, $24n + 7$, $24n + 11$, and any prime number contained in one of these formulae is itself a number of the form $6x^2 + y^2$.

VI. The form $7x^2 + y^2$ has no other prime divisors than those contained in one of the 6 formulae $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 11$, $28n + 15$, $28n + 23$, $28n + 25$ (or in one of the three $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$), and any prime number contained in one of these formulae is itself a number of the form $7x^2 + y^2$.

Moreover, any triangular number increased by 1 is contained in the formula $7x^2 + y^2$,[11] and consequently the triangular numbers increased by 1 cannot have any other prime divisors than those contained in the formulae $14n + 1$, $14n + 9$, $14n + 11$, or – which amounts to the same – in $7x^2 + y^2$. From this it is easy to determine all prime numbers that divide any triangular number increased by 1; indeed they are 1, 11, 23, 29, 37, 43, 53, 67, 71, 79, and so on. Therefore no other prime numbers of the form $4m + 1$ can be divisors of any triangular number increased by 1 but those comprised by one of these three formulae: $28n+1$, $28n+9$, $28n + 25$.

By this reasoning it is clear that the expression $px^2 + y^2$ has no other divisors than those contained in a certain number of formulae $4pn+s$, where s denotes some numbers that, even if they do not appear to keep any order among themselves, indeed proceed according to a nice law which becomes evident from the following theorems:

VII. If some prime number of the form $4pn + s$ is a divisor of the formula $px^2 + y^2$, then any prime number contained in the more general form $4pn + s^k$ will also be a divisor of the formula $px^2 + y^2$ and will be itself a number of the form $px^2 + y^2$. As, e. g. a prime number $28n + 9$ is a number of the form $7x^2 + y^2$, the prime numbers $28n + 81$ $(28n + 25)$, $28n + 729$ $(28n + 1)$ etc. will also be numbers of the form $7x^2 + y^2$.

VIII. If two prime numbers $4pn + s$ and $4pn + t$ are divisors of the formula $px^2 + y^2$, then any prime number of the form $4pn + s^k t^i$ will also be a number of the form $px^2 + y^2$.[12]

Thus, once one has discovered some prime divisors of such an expression $px^2 + y^2$, one can easily determine all possible divisors. Take, for example, the formula $13x^2 + y^2$, which contains the numbers 14, 17, 22, 29, 38, 49, 62, etc. Thus among the prime numbers that divide the formula $13x^2 + y^2$, one has 1, 7, 11, 17, 19, 29, 31: consequently all prime numbers in the formulae $52n + 1$, $52n + 7$, $52n + 11, \ldots$ have to be divisors of some $13x^2 + y^2$. Moreover, by Th[eorem] VII the formula $52n + 7$ also gives $52n + 49$, $52n + 343$ (or $52n + 31$), $52n + 7 \cdot 31$ or $52n + 9$, further $52n + 7 \cdot 9$ or $52n + 11$, further $52n + 7 \cdot 11$ or $52n + 25$, further $52n + 7 \cdot 25$ or $52n + 19$, further $52n + 7 \cdot 19$ or $52n + 29$, further $52n + 7 \cdot 29$ or $52n + 47$, further $52n + 7 \cdot 47$ or $52n + 17$, further $52n + 7 \cdot 17$ or $52n + 15$, further $52n + 7 \cdot 15$ or $52n + 1$; and here the diversity of those numbers which can be added to $52n$ in order to generate prime numbers contained in the form $13x^2 + y^2$ stops. Thus from the sole observation that 7 can be a divisor of the form $13x^2 + y^2$, the two last theorems demonstrate that all prime numbers contained in the following formulae

$$\begin{array}{llll} 52n+1; & 52n+31; & 52n+25; & 52n+47 \\ 52n+7; & 52n+9; & 52n+19; & 52n+[17]^{[13]} \\ 52n+49; & 52n+11; & 52n+29; & 52n+15 \end{array}$$

have the form $13x^2 + y^2$ and can also be divisors of numbers $13x^2 + y^2$, and it is not possible to discover more formulae by these theorems. It is therefore certain that no other prime number but those contained in one of the twelve formulae just discovered can be a divisor of the form $13x^2 + y^2$. Now, since any prime number contained in the form $4pn + 1$ can be a divisor of $px^2 + y^2$, one can deduce some nice properties, as for example: As 17 is a prime number and also of the form $2x^2 + y^2 = 17$, it is certain that whenever $17^m \pm 8n$ is a prime number, this will also have to be such a number $2x^2 + y^2$. And if $17^m \pm 8n$ is a number of the form $2x^2 + y^2$ and yet admits no divisor of this form, it is necessarily a prime number.

There is a similar argument about the divisors of forms such as $px^2 - y^2$ or $x^2 - py^2$; if these are prime, they have to be contained in the form $4np \pm s$, where s denotes some specific numbers. Indeed, for some cases the following results hold:

1. All prime divisors of the form $x^2 - y^2$ are contained in $4n \pm 1$; this is obvious.
2. All prime divisors of the form $2x^2 - y^2$ are contained in $8n \pm 1$.

Corollary: Therefore no prime number $8n \pm 3$ is a number of the form $2x^2 - y^2$.

3. All prime divisors of the form $3x^2 - y^2$ are contained in the form $12n \pm 1$.
4. All prime divisors of the form $5x^2 - y^2$ are either contained in $20n \pm 1$ or in $20n \pm 9$ (or in the single one $10n \pm 1$), and so on.

If the prime number $4pn + s$ is a divisor of the form $px^2 - y^2$ or $x^2 - py^2$, then $\pm 4np \pm s^k$ will itself be a number of the form $px^2 - y^2$ or $x^2 - py^2$ whenever it is a prime number. If two prime numbers s and t are numbers of the form $px^2 - y^2$, then whenever $\pm 4np \pm s^\mu t^\nu$ is a prime number, it will also be a number of the form $px^2 - y^2$. Thus, as 7 and 17 are prime and of the form $2x^2 - y^2$, whenever $\pm 8n \pm 7^\mu \cdot 17^\nu$ is a prime number, it will also be a number of that form. Let $\mu = 1$, $\nu = 1$: then $7 \cdot 17 = 119$ and $119 + 8 = 127$ is a prime number, therefore $127 = 2x^2 - y^2 = 2 \cdot 64 - 1$. Now from this it is clear that it is impossible to find sequences of numbers contained in such a formula $px^2 \pm qy^2$ that should admit no divisors of the form $4n + 1$.

However I firmly believe that I have not yet exhausted this matter by far, but that there remain innumerable splendid properties of numbers to be discovered in it, by which the theory of divisors could be brought to a much higher degree of perfection.[14] I am certain that you should make very important discoveries if you were to give this subject some attention, Sir. However, the greatest progress should result if one could find proofs for these theorems.

If three series are defined[15] by letting $A = a + b + c + d + \ldots$, $B = ab + (a + b)\, c + (a + b + c)\, d + \ldots$ and $C = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots$, then B is the sum of all products of two terms of the series A, and consequently twice the sum of these products, $2B$, together with the sums of the squares of each one, C, equals the square of the series A, i.e., $2B + C = A^2$, and $B = \dfrac{A^2 - C}{2}$. This kind of theorem can be extended to higher powers: if

$$\begin{aligned} A &= a+b+c+d+\ldots \\ B &= a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots \\ C &= a^3+b^3+c^3+d^3+\ldots \\ D &= a^4+b^4+c^4+d^4+\ldots \end{aligned}$$

then

the sum of products of any two of the terms a, b, c, d, $e, \ldots$ will equal $\dfrac{A^2-B}{2}$,

the sum of products of any three is $\dfrac{A^3-3AB+2C}{6}$,

the sum of products of any four is $\dfrac{A^4-6A^2B+8AC+3B^2-6D}{24}$,

and so on.

Now if again $A = a+b+c+d+\ldots$, $B = a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots$ and $C = a^3+b^3+c^3+d^3+\ldots$, and your newly proposed series, Sir, are

$$P = ab^2 + (a+b)\,c^2 + (a+b+c)\,d^2 + (a+b+c+d)\,e^2 + \ \ldots,$$

and

$$Q = a^2b + \left(a^2+b^2\right)c + \left(a^2+b^2+c^2\right)d + \ \ldots,$$

then $P+Q = AB-C$; thus if

$$\begin{aligned} A &= 1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5} - \ \ldots \\ B &= 1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25} + \ \ldots \\ C &= 1-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{27}-\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{125} - \ \ldots \end{aligned}$$

then the sum of the two series $P+Q$ cannot be indicated by logarithms and by the quadrature of the circle, since the series C cannot yet be summed; much less can each of them be summed by itself. However, if this were possible, one should have the sum of the series C, which I have up to now investigated in vain.

The values $1+p^2$, where $p = \log 2$, and $\dfrac{3\pi^2}{20}$ differ from each other by so small an amount that I was tempted to take them to be indeed equal;[16] I therefore investigated both values more closely and found $1+p^2 = 1.480\,453\,013\,9$ and $\dfrac{3}{20}\pi^2 = 1.480\,440\,66$.

I recall having seen, when still in Petersburg, the formulae for the summation of the series $1+2^p+3^p+4^p+\ldots$ up to some given term, which you communicated to me, Sir;[17] the first expression $1+2^p\,(x-1)+(3^p-2^p)\,\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{1\cdot 2}+\ \ldots$ arises by taking iterated differences, and the other formulae result by differentiation. But in order to determine the sum in the most manageable form, I think the following manner is easiest:

$$\begin{aligned}
1 \;+\;& 2^p+3^p+4^p+5^p+6^p \;\ldots + \; x^p \\
=\;& \frac{x^{p+1}}{p+1}+\frac{x^p}{1\cdot 2}+\frac{p}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}x^{p-1}-\frac{p\,(p-1)\,(p-2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6}x^{p-3} \\
+\;& \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\,(p-3)\,(p-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{6}x^{p-5}-\frac{p\,(p-1)\cdots(p-6)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots 9}\cdot\frac{3}{10}x^{p-7} \\
+\;& \frac{p\,(p-1)\cdots(p-8)}{2\cdot 3\cdots 11}\cdot\frac{5}{6}x^{p-9}-\frac{p\,(p-1)\cdots(p-10)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots 13}\cdot\frac{691}{210}x^{p-11} \\
+\;& \frac{p\,(p-1)\cdots(p-12)}{2\cdot 3\cdots 15}\cdot\frac{35}{2}x^{p-13}\;-\;\ldots
\end{aligned}$$

Here the main effort depends on this series of fractions, which surely enough you will recognise, Sir:[18]

$$\overset{1}{\frac{1}{2}};\quad \overset{2}{\frac{1}{6}};\quad \overset{3}{\frac{1}{6}};\quad \overset{4}{\frac{3}{10}};\quad \overset{5}{\frac{5}{6}};\quad \overset{6}{\frac{691}{210}};\quad \overset{7}{\frac{35}{2}};\quad \overset{8}{\frac{3617}{30}};\quad \overset{9}{\frac{43\,867}{42}};\quad \overset{10}{\frac{1\,222\,277}{110}};\quad \overset{11}{\frac{854\,513}{6}};$$

$$\overset{12}{\frac{1\,181\,820\,455}{546}};\quad \overset{13}{\frac{76\,977\,927}{2}};$$

(this is as far as I have continued it). The general term corresponding to the index n may be expressed as

$$(2n+1)\left(-\frac{1}{2}+\frac{(2^{2n}-2\cdot 1)}{3}-\frac{(3^{2n}-3\cdot 2^{2n}+3\cdot 1)}{4}+\frac{(4^{2n}-4\cdot 3^{2n}+6\cdot 2^{2n}-4\cdot 1)}{5}-\ldots\right),$$

which also terminates.

Notwithstanding the fact that the series $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$ is expressed by the quadrature of the circle, yet the sum of $x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+\ldots$ cannot in general be indicated,[19] and except for the case $x=1$ the only one I have yet been able to sum is the one when $x=\frac{1}{2}$. Indeed, setting $p=\log 2$ and $\pi:1=$ circumference : diameter, one has

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{16\cdot 16}+\frac{1}{25\cdot 32}+\frac{1}{36\cdot 64}+\ldots=\frac{\pi^2-6p^2}{12}.$$

Finally I have the honour to add the following theorem, which can often be very useful:[20]

Theorem: If

$$s=1+\frac{a}{n+1}+\frac{a^2}{2n+1}+\frac{a^3}{3n+1}+\frac{a^4}{4n+1}+\frac{a^5}{5n+1}\;+\;\ldots,$$

then

$$\frac{s^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$+ \frac{a^3}{3n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)$$
$$+ \frac{a^4}{4n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{4n+1}\right)+\dots$$

With this I recommend myself most obediently to you, Sir, and remain with all due respect your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Aug. 28th, 1742.

PS. Mr. Hedlinger, who has arrived here a short while ago and is staying with us together with his dear wife, asks me to give you his most obedient compliment.

[1] Cf. n° 53, note 1.

[2] Three years earlier, Euler had entered a prize paper, E. 57, for the Paris Academy's competition on the theory of tides. As the Petersburg Academy's files show (see *Protokoly* 1897, t. I, p. 560), this was dispatched on July 14th, 1739, but when by October the reception had not been confirmed, Euler sent an inquiring letter to Secretary Fontenelle and learnt that his treatise had not arrived at Paris. On President Korff's orders, Goldbach composed a letter to the Russian envoy in Paris, A.D. Kantemir, in which the Petersburg Academy insisted that the copy of Euler's treatise sent on November 26th – two months after the deadline – should be admitted to the competition (*ibid.*, p. 578–583). In February 1740 Korff got affirmative answers from Paris; and on April 27th, Euler – along with Daniel Bernoulli, Cavalleri and MacLaurin – was awarded a quarter of the prize.

[3] On the prize paper E. 108 that Euler had sent in for the 1743 competition, see n° 52, note 10. Only towards the end of the year did he finally get the confirmation that Mairan had received it: see Clairaut's letter R 401 from December 3rd, 1742 (O. IVA/5, p. 142–143).

[4] The paper sent to the Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres at Dijon seems indeed to be lost. Investigations launched in the 1950s by C.A. Truesdell and in the 1970s by R. Taton at the departmental archives have unearthed three entries for the competition that cannot, however, with any plausibility be attributed to Euler (cf. O. II/13, p. LXXVII, note 1, and O. IVA/5, p. 143, note 10). Thus Euler's only paper on the motion of fluids in elastic tubes that we possess is E. 855, which was presented to the Petersburg Academy in 1775/76 and represents a more advanced state of Euler's research on hydraulics.

[5] On the night of August 21st, 1742, the building in the Dorotheenstadt which housed on the ground level the royal stables and on the upper floors the Academy of Arts and the Brandenburg Society of Science was massively damaged by a fire, and the Academies' collections suffered great losses. Since plans had already been made to integrate the site into a grand new *Forum Fridericianum* with a royal palace, an arsenal, an opera house and a building for Frederick's Academy, the ruin was not cleared away for several years; only in 1748/49 was the reconstruction of the building begun, and in the summer of 1752 the Academy finally moved in (see *infra* n° 98, note 9).

[6] See Schumacher's letter R 2123 from July 13th (24th), 1742 (summarised in JW 2, p. 59), where Schumacher does not name the designated president but expects Euler to identify him. Cf. also *supra* n° 48, note 8, and Euler's next letter to Goldbach (n° 56, note 20).

[7] Cf. n° 53, note 5.

[8] Cf. n° 53, note 12.

[9] Cf. n° 53, note 14.

[10] Euler continues investigating prime divisors of binary quadratic forms x^2+my^2. As in n° 40, the numbers x and y in Euler's claims should be taken as coprime integers, and again the primes dividing $2m$ have to be excluded (see n° 56, note 6).
However, Euler's claims IV. and V. are more seriously flawed. For example, $5\cdot 2^2+1^2=21$ is divisible by the primes 3 and 7 contained in the linear forms $20n+3$ and $20n+7$, respectively, but these are not numbers of the form x^2+5y^2.
In the published version E. 164 – which still rests on empirical evidence only – these errors are rectified: Theorem 11 states that just the primes $20n+1$ and $20n+9$ are represented by the form $5x^2+y^2$, whereas for those of the form $20n+3$ and $20n+7$, $2(20n+3)$ and $2(20n+7)$ will be numbers of the form $5x^2+y^2$; and V. has been replaced by Theorem 29 which states that the prime divisors of $6x^2+y^2$ and $3x^2+2y^2$ are represented by exactly one of these forms according to their residue class mod 24.

[11] This ought to read $\dfrac{7x^2+y^2}{4}$; cf. Goldbach's reply n° 55, note 7, and n° 56, note 7.

[12] Here Euler comes very close to the general notion of a multiplicative subgroup of $\mathbb{Z}$ mod $4p$.

[13] Here Euler committed a *lapsus calami*, repeating the residue 7 instead of 17 which however occurs in the paragraph preceding the table.

[14] It is easy to see that a prime $p\nmid 2m$ divides an expression x^2-my^2 for coprime integers x, y if and only if m is a quadratic residue modulo p. In this language, Euler's observation is the following: the primes p for which m is a quadratic residue all lie in certain coprime residue classes modulo $4m$ which make up half the coprime residue classes (in fact a subgroup of index 2). This property, which may be called Euler's version of quadratic reciprocity, is equivalent to Legendre's (or Gauss's) version (see e. g. Lemmermeyer 2000), and implies the following property: if p and q are prime numbers with $p\equiv q$ mod $4m$, then $(\frac{m}{p})=(\frac{m}{q})$. In other words: for positive m, the Legendre symbol (or, more generally, the Jacobi symbol) $(\frac{m}{p})$ is periodic as a function of its "denominator" p. This periodicity is an immediate consequence of Artin's reciprocity law, or more exactly, of the fact that the Artin symbol depends only on the ideal class with respect to the class group attached to $\mathbb{Q}(\sqrt{m})\,/\,\mathbb{Q})$ by class field theory (see Edwards 1983).
Euler stated this law in E. 164 and gave a version much closer to Legendre's formulation in E. 552. Gauss observed that Euler was in possession of theorems that follow from quadratic reciprocity and from which, conversely, the quadratic reciprocity law can be deduced (*Disquisitiones*, art. 151: see Gauss 1801, 1889); he explicitly refers to E. 610 and E. 556, but not to E. 164. As a consequence, Euler's early contributions remained largely unknown until Kronecker, Chebyshëv and H.J.S. Smith pointed out Euler's priority (see Kronecker 1876, Chebyshëv 1889, Smith 1894).

[15] Cf. n° 53, note 17.
The formulae expressing $x_1^k+\ldots+x_n^k$ in terms of the symmetric functions $\sigma_1=x_1+\ldots+x_n$, $\sigma_2=x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1$, …, $\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n$ are known as "Newton's identities"; the "inversion formulae" expressing the σ_k in terms of sums of powers were first found by Waring in 1762, although special cases had been known before (to Albert Girard, e. g., as early as 1629). Euler published these formulae in E. 406; here, he generalises them to series (see also n° 27, note 3).
For the history of these formulae see Saalschütz 1907, 1908.

[16] See n° 53, note 18.

[17] Cf. n° 53, notes 20–22.

[18] Cf. n° 25, note 2.

[19] Euler had come across the series $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x^k/k^2$ in E. 20, where he used it for finding a numerical approximation for $\zeta(2)=\varphi(1)$ via the formula $\zeta(2)=(\log 2)^2+2\varphi(\frac{1}{2})$. For a thorough investigation of $\varphi(x)$ see E. 736.

The series $\varphi(x)$ is nowadays called the dilogarithm

$$\mathrm{Li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2};$$

observe that $\mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2)$. In E. 20 Euler had proved the functional equation of $\mathrm{Li}_2(x)$:

$$\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(1-x) = -\log x \log(1-x) + \zeta(2)$$

(Euler's version is the following: putting $y = 1 - z$, he finds

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{y+z}{1} + \frac{y^2+z^2}{4} + \frac{y^3+z^3}{9} + \frac{y^4+z^4}{16} + \text{etc.} + \ell y\, \ell z,$$

and this is plainly equivalent to the functional equation as stated above), from which his identity $\zeta(2) = (\log 2)^2 + 2\,\mathrm{Li}(\frac{1}{2})$ follows by setting $x = \frac{1}{2}$.
The functional equation for $\mathrm{Li}_2(x)$ was later also proved by Legendre (cf. Legendre 1811, p. 242–247) and by Abel (*Œuvres*, t. II, p. 189–193).
See also *infra* nº 60, note 10.

[20] Euler also presented this formula in a letter to Nicolaus I Bernoulli dated September 1st, 1742 (R 236: O. IVA/2, p. 510–532) in connection with an elementary proof for $\zeta(2) = \pi^2/6$. See Spieß 1945.
The discussion of the formula and its implications continues in nº 55–57, 60 and 62.

55
Goldbach to Euler
Moscow, (September 20th) October 1st, 1742

Sir,

I am very much obliged to you for the news that Mr. Hedlinger has arrived in Berlin and still remembers me.[1] Please recommend me to him once more; I am ever hopeful to meet him again here in these parts.

If there should still be no news of the memoir that you sent to Paris,[2] it should be advisable to notify Mr. De Mairan by a personal letter, containing a certificate from the Berlin post office that a paper has been sent to him, by which the author is competing for next year's Academy prize, and that, in case this should not arrive in due time, you protest in the author's name *in order to avoid a default with respect to the deadline* (to use lawyers' jargon).

You take it[3] to be known that $p\,(4p-1)$ cannot be a sum of two squares. For my part, I deduce this from the fact that n never equals $2p \pm \sqrt{4p^2 - p - a^2}$, and this from $n^2 \neq 4pn - p - a^2$. I have also found that a sum of three given squares cannot equal the product of two of them multiplied by an even square[4] or that $e^2 + f^2 + g^2 \neq 4e^2 f^2 p^2$; likewise, if $fmn - m - n \neq a^2$, where f, m, n, and a are positive integers, then also $fp^2mn - m - n \neq a^2$, where p is another integer. As the case $f = 4$ of the former equation is known to be true, we also have $4mnp^2 - m - n \neq a^2$. It may well be[5] that f can take many or innumerable values besides 4: thus, if all prime divisors of the number $3x^2 + y^2$ (where x and y are relatively prime) are represented by the formula $6n + 1$ – about which there can be no doubt –[6] it is found that f can also be set equal to 12 and consequently $12mnp^2 - m - n \neq a^2$.

I have given particular attention to one of the remarks about the divisors of the formula $px^2 + y^2$ which you, Sir, kindly communicated to me. According to this, every number exceeding a triangular number by 1 is represented by the formula $7x^2 + y^2$ and therefore can have no other prime divisors than those embodied by the formulae $14n + 1$, $14n + 9$ and $14n + 11$. But since innumerable triangular numbers (like, e.g., 21) increased by 1 can nevertheless not be brought to the form $7x^2 + y^2$,[7] I understand your theorem, Sir, to refer only to even triangular numbers, i.e., to those whose indices are of the form $4m - \frac{(1 \mp 1)}{2}$: the triangular numbers of these indices are in an obvious way $7m^2+(m \pm 1)^2$ and belong (whether they be prime or not) to the four classes $7n$, $7n+1$, $7n+2$ and $7n+4$. However, this does not agree with your specification of the divisors, in which the number 7 has been omitted. Anyway, I am very much obliged to you, Sir, for the communication of these particular theorems, even if I cannot understand everything as well as the subject deserves.

From the value for $\log 2$ that you communicated to me a long time ago, I have found $1+(\log 2)^2$ to equal $1.480\,453\,017\,915\,20\ldots$; this value differs somewhat from the number stated in your letter, but as the error manifests itself only after the ninth digit, I shall rather take the value indicated by you, Sir, to be true, than repeat the multiplication.[8]

I had already copied twelve terms of the series $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \ldots$ a long time ago; now I have added the 13th from your last letter.

The fact that the square of the series[9] $s = 1 + \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{a^2}{2n+1} + \ldots$ is

$$s^2 = 2\left(1 + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \ldots\right),$$

seems to be remarkable only on account of the easy progression of the coefficients.

Presumably you disregarded the statements about lunes in my last letter[10] not for being incorrect, but for being too obvious.

According to the accepted meaning of the signs $\pm$ and $\mp$, the formula $\pm\, a \mp b$ denotes either $a - b$ or $-\,a + b$; therefore another sign will definitely be useful that denotes, besides those two values, also $a + b$ and $-\,a - b$. I recall having seen this expressed in some books by ☊,[11] and I think that in this manner all quantities, whether they be rational, surd or dependent on arbitrary quadratures,[12] can be expressed by ☊ 1 ☊ $\frac{1}{2}$ ☊ $\frac{1}{3}$ ☊ $\frac{1}{4}$ ☊ $\frac{1}{5}$ ☊…; all the artifice consists in substituting the $+$ or $-$ signs in every place in the right way.[13]

But as the ☊ sign, too, only denotes either $+$ or $-$ alternatively, another sign (perhaps the $\div$ sign used by Stifel[14] in place of $-$) can be introduced and understood to denote $+$ and $-$ simultaneously; there is, e.g., a series of numbers n, apparently very irregular and probably not yet considered by anybody, defined by the property that $n \div p = P$; here p and P denote prime numbers such that, whenever $n-p$ is prime, by the nature of the number n, $n+p$ will also be prime. The numbers denoted by n will be the following: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 18, 24, 30, ... Now, just as all prime numbers greater than 3 belong to the formula $6m \pm 1$, it appears as if those terms of this new series that are greater than 8 are embodied by the form $6m$.[15]

The series 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, ... of the numbers whose squares increased by 1 are primes, seems to have the property that every number in it is the sum of two previous terms, as are $6 = 2+4$, $24 = 10+14$, $20 = 4+16$, and so on.[16] Often a term is composed of two previous ones in a unique way, as is $74 = 20+54$.

Recently it has been discussed at a certain occasion whether the blood corpuscles, of which by Leeuwenhoek's observation six together make up a bigger sphere,[17] might not be themselves composed from six smaller spheres, these in their turn from six even smaller ones and so on to infinity. However, if six spheres inside the cavity of a larger sphere are conceived to have the greatest number of contacts possible, the diameter of any minor sphere will be to the diameter of the major sphere in which they are contained, as 1 to $1+\sqrt{2}$. Applying this to the blood corpuscles – any one of which is not just a globe but an aggregate of six smaller spheres consisting, as stated, of six even smaller ones – one finds that one necessarily has to stop at a certain determinate degree of this subdivision of the globes; for as the volume of all n-th order spheres is to the solidity of one sphere of the first order as $\dfrac{6^{n-1}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{3n-3}}$ is to 1, if the subdivision went on to infinity in the same manner, because of $n=\infty$ the aggregate of all these spheres would be infinitely small compared to the largest sphere, and consequently they could not be seen even using the best microscope, which is contrary to experience. When I spoke to Mr. von Bl.[18] about this, I assured him at my own risk that you, Sir, should be of the same opinion, and I therefore ask you to report your views on this subject in a few words.

The words "at my own risk" remind me of the *Mathanasius*, of which I recently read the sixth edition after I had not seen the book for 18 years;[19] the general applause it met with from the public, of which the author himself quotes several instances, testifies indeed to its merit, and, as it were, Cicero's saying applies: "it proves a great orator to be seen by the people as a great orator".[20]

I have enquired in vain of several persons about a book that bears the title *Labyrinthus Algebrae* by J.J. Ferguson, a quarto volume published at The Hague in 1667. I had this in hand myself 30 years ago, even if I cannot remember anything. It was entirely unknown even to Mr. Hermann, who had an extensive knowledge of this kind of books. A short time ago I found the mentioned title by chance in my reading notes, and with it the remark "see the review in the English *Acta* for July 1669, p. 202". Perhaps there is something in it that deserves some attention.[21]

I am with special respect, Sir, your most devoted servant
Goldbach.

Moscow, Oct. 1st (n. st.), 1742.

In[22] what I wrote last time about the *Dictionnaire de Trevoux*, I was referring to the following note in the *Scholar's Journal*: "The *Dict*[*ionnaire*] *de Trevoux* has been printed in 1733 at Nancy by Pierre Antoine and is to be re-edited by the same in 1741."[23]

I should also like to know whether Etienne's *Thesaurus* in 4 folio volumes, edited by Gesner at Leipzig, is already printed.[24]

Turn over.

Please keep the enclosed letter safe until a convenient occasion of sending it turns up.[25]

[1] Cf. n° 43, note 12.
The Swiss artist Johann Karl Hedlinger had lived in Russia from 1735 to 1737, working as a medallist for Empress Anna and the Academy of Arts (see Shchukina 1962) and therefore certainly associating with Goldbach, Georg Gsell (the Swiss artist who was Euler's father-in-law) and Euler himself.

[2] Cf. n° 54, note 3.

[3] The text of Goldbach's copy starts here.

[4] The equation $e^2 + f^2 + g^2 = 4e^2f^2p^2$ is equivalent to $f^2 + g^2 = e^2(4f^2p^2 - 1)$, which is clearly impossible since numbers of the form $4n - 1$ are not sums of two rational squares.

[5] Goldbach generalises Euler's result that $4mn - m - n \neq a^2$ by claiming that $12mn - m - n \neq a^2$. As Goldbach explains, this follows from the fact that primes > 3 dividing $x^2 + 3y^2$ have the form $6b + 1$. Indeed, multiplying $12mn - m - n = a^2$ through by 12 we see that this equation is equivalent to $(12m - 1)(12n - 1) = 3(2a)^2 + 1$. Euler extends Goldbach's observation in his reply: cf. n° 56, note 2.
The question whether there are squares of the form $fmn - m - n$ when f is not divisible by 4 is much more difficult: see n° 85 and 86.

[6] Euler later gave a proof of this fact in E. 272, Prop. IX.

[7] This objection is justified: cf. n° 54, note 11, and n° 56, note 7.

[8] Euler's calculation is indeed correct: $1 + (\log 2)^2 = 1.480\,453\,013\,918\ldots$.

[9] Cf. n° 54, note 20.
In the formula that follows, the numerator of the second term has been corrected from Goldbach's copy to read a; in the original it erroneously reads a^2.
In the formula for s^2, the first term in the bracket should read $\frac{1}{2}$ instead of 1; on the original letter, an attempt has been made – by Euler? – to rectify this by moving the parenthesis after the first + sign (but the 2 would have had to be moved, too).

[10] Cf. the last paragraph of n° 53 and Euler's reply n° 56, note 9.

[11] According to Cajori 1928, vol. I, p. 245–246, the ♉︎-like sign ȣ for $\pm$ was used by some mathematicians of the second half of the 17th century (among others, van Schooten, Wallis and Jacob Bernoulli). This may have been motivated by the fact that printers had the type available since, positioned upside down, it served for the Greek diphthong ου.

[12] Even if Goldbach does not give precise definitions, the phrasing he uses here shows his awareness of the partitioning of the real numbers into rationals, algebraic numbers ("surds") and what we now call transcendental numbers.

[13] This is, of course, true of any series that converges conditionally, but not absolutely: cf. n° 160, note 3.

[14] According to Cajori (*op. cit.*, p. 239–244), the $\div$ sign for "minus" had been used since the early 16th century (though apparently not by Stifel), alongside with $-$, and persisted for a long time in elementary textbooks published in Germany and parts of Northern Europe; the use of the $\div$ sign to indicate division was introduced around 1660 but consistently adopted only in the English-speaking countries (*op. cit.*, p. 270–271).

[15] The most natural interpretation of Goldbach's claim is the following: an integer $n \geq 2$ belongs to his sequence if, for all primes $p < n$ for which $n - p$ is prime, the number $n + p$ is also prime. Consider, e. g., $n = 12$: Then $n - 2 = 10$ and $n - 3 = 9$ are not primes, so nothing is required of $n + 2 = 14$ and $n + 3 = 15$; but $n - 1 = 11$, $n - 5 = 7$, $n - 7 = 5$ and $n - 11 = 1$ are primes (in Goldbach's and Euler's understanding), and so are $n + 1 = 13$, $n + 5 = 17$, $n + 7 = 19$ and $n + 11 = 23$: thus 12 is a suitable number.

Most numbers of Goldbach's list, however, do not fit in with this interpretation: $5 - 3 = 2$, $6 - 3 = 3$, $18 - 7 = 11$, $24 - 11 = 13$ and $30 - 19 = 11$ are all primes, but $5 + 3 = 8$, $6 + 3 = 9$, $18 + 7 = 25$, $24 + 11 = 35$ and $30 + 19 = 49$ are not (and counting 1 among the primes, 3 and 8 should also be excluded).

On the other hand, the numbers that Goldbach lists (but not the text of his letter) are consistent with a "reversed" condition: the numbers in it are indeed integers for which $n - p$ is prime whenever $n + p$ is prime for all primes $p < n$ (still including 1 among the primes). However, with this interpretation, 7, 9, 13, 15, 19, 21, 23 and 25 should be included in the list since for odd n the condition needs to be checked only for $p = 2$ (if $p + 2$ is prime, $p - 2$ must be prime too).

Euler's interpretation of Goldbach's remarks (see n° 56, note 10) is still more restrictive than those just discussed; he asks for numbers so that both $n - p$ and $n + p$ are prime for *any* prime $p < n$, and then observes that $n = 2$ and $n = 4$ (which works only if p is restricted to be an *odd* prime) are the only numbers with this property.

[16] This conjecture can easily be checked for all $a \leq 10^5$ (e. g., using a list like the one given by Euler in n° 163). The only values of a in this range that can be written *uniquely* as sums of two previous terms are $a = 4$, 6, 10, 14, 54, 74, and 84.

Goldbach's conjecture implies that *if* there are infinitely many primes of the form $a^2 + 1$ (which has never been proved: cf. n° 163, note 5), an analogue of "Bertrand's postulate" holds: there is at least one prime of the form $n^2 + 1$ between $a^2 + 1$ and $4a^2 + 1$.

[17] The Dutch tradesman and naturalist Antoni van Leeuwenhoek had been among the first to observe through his homemade microscope the red blood corpuscles of several species of animals (including humans), indicating a diameter of about 8 μm that fits very well with modern measurements. In the 1719 edition of his *Opera*, t. IV, p. 213–225, he described those *globuli* in fish blood as oval disks composed by six spherical parts that were again subdivided into six smaller, compressed units.

[18] The name, abbreviated in the original, is omitted in Goldbach's copy; the reference may well be to Lorenz von Blumentrost, the former president of the Petersburg Academy, who by then lived at Moscow as a civil servant and hospital director.

[19] The text of Goldbach's copy breaks off here in mid-sentence.

Under the pseudonym Chrysostomus Matanasius, the satirical writer Hyacinthe Cordonnier (also known as Thémiseul de Saint-Hyacinthe) had published in 1714 a cheeky little volume titled *Le Chef d'Œuvre d'un Inconu*, in which he applied a barrage of ponderous pseudo-scholarship to a frivolous popular *couplet*. The booklet's trenchant wit met with great success, so it was reprinted several times and enriched with additional pieces. However, a passage of the 1732 edition provoked Voltaire's fury by alluding to an incident in which the writer had been beaten up by an officer: so Goldbach's "*meo periculo*" might well refer to the vindictiveness with which Voltaire damaged Saint-Hyacinthe's later career.

[20] The quotation is from Cicero's dialogue on rhetoric, *Brutus*, 186.

[21] According to Jan van Maanen's biographical note from 1990, Ferguson's *Labyrinthus Algebrae* is a not very original but well-organised study of contemporary algebra and in particular of figurate numbers. Its review in the 1669 *Philosophical Transactions*, which is probably due to John Collins, mainly mentions the solutions for 3rd- and 4th-degree equations. The page number for this review that Goldbach notes is in error.

[22] The postscripts that follow are written on a separate piece of paper (fol. 140) which has been conserved along with a letter written much later (n° 145). Their insertion with the present letter is warranted by the references to the *Dictionnaire de Trévoux* (already mentioned in

nº 51 and 52) and to Gesner's edition of Etienne's *Thesaurus* (see Euler's reply in nº 56, note 17).

[23] The announcement in the "Gelehrte Zeitungen" (most probably the Leipzig *Neue Zeitungen von gelehrten Sachen* or the *Göttingische Zeitungen von Gelehrten Sachen*) which Goldbach mentions has not been identified.
According to Françoise Weil (1991), the Nancy editions of the *Dictionnaire de Trévoux* – actually printed in 1734 and 1740 – were pirated copies of the 1732 edition published in Paris.

[24] Gesner's edition of Robert Etienne's *Novus linguae et eruditionis Romanae Thesaurus* would finally be produced only in 1749. See Euler's reply nº 56, note 17.

[25] As Euler's reply shows (see nº 56, note 18), the enclosure was addressed to Baron Stosch.

56
Euler to Goldbach
Berlin, October 27th, 1742

Sir,

first of all I should give you, on behalf of Mr. Hedlinger, his most obedient thanks for your kind remembrance. He is still staying here with us and seems to be disposed to make an excursion to St. Petersburg as soon as Her Imperial Majesty has returned there. I have not yet had any notice of my paper sent to Paris; for this reason I have recently asked Mr. Clairaut to make enquiries about it of Mr. de Mairan, and I hope soon to receive an answer.[1] Meanwhile I am assured at the local post office that this paper not only left here correctly but also ought to have arrived in Paris. If nonetheless it was lost or arrived too late, I very much doubt that I could hope for another dispensation, as I am lacking the same kind of forceful support; nevertheless I shall in the meantime follow your counsel, Sir, for which I convey my most obedient thanks.

If you indeed have a proof, Sir, that $n^2 \neq 4pn - p - a^2$, in which it is not assumed that $q\,(4p-1)$ cannot be a sum of two squares, this is most remarkable; for then not just that truth but also many others could be proved in a much easier way; however I have to admit that notwithstanding all my effort I have not been able to find another proof. On the other hand I clearly understand that $e^2 + f^2 + g^2 \neq 4e^2f^2g^2$; for if a sum of three squares is to yield an even number, either just one or all three squares have to be even. In the first case an oddly even number results, which consequently cannot be a square; thus it is clear that all three squares have to be even. Let therefore $e = 2a$, $f = 2b$, $g = 2c$; then $a^2 + b^2 + c^2$ should have to equal $16a^2b^2c^2$; so the numbers a, b and c should all the more have to be even, and so on to infinity. Furthermore, by this argument the more general theorem follows that $a^2 + b^2 + c^2 \neq 4abn$. If $fmn - n \neq a^2$, then by substituting mp^2 and np^2 for m and n, $fmnp^4 - mp^2 - np^2 \neq \Box$ and consequently $fmnp^2 - m - n \neq \Box$; but in order for the first equation to be correct, the coefficient f can indeed have infinitely many values besides 4, as you remarked, Sir.[2] On this occasion I noticed that, if the formula $fa^2 + 1$ has no divisor of the form $4fm - 1$, then also $4fmn - m - n \neq \Box$. Now, as by the observations I communicated last time the formula $fa^2 + b^2$ cannot be divided by any prime number of the form $4fm - 1$,[3] it generally follows that $4fmn - m - n$ does not equal a square, and this universal theorem can perhaps be even more easily be demonstrated than a particular case;[4] indeed it should depend on proving that $\dfrac{a^2 + m + n}{4mn}$ can never be a whole number, or that $\dfrac{a^2 + p}{p^2 - q^2}$ where p and q are either both even or both odd[5] cannot be an integer, or that $mp^2 - mq^2 - p$ cannot be a square.

When I wrote about the prime divisors of the formula $px^2 + y^2$, which can all be expressed by some such formulae as $4p+\alpha$, $4p+\beta$, etc., I forgot to mention that in addition to these the number 2, the number p itself and its divisors are part of the divisors;[6] there is a determinate number of these which are not comprised by the above formulae and have to be noted apart from them. Thus all prime divisors of the form $7x^2 + y^2$ are either 2 or 7 or contained in one of the formulae $14n + 1$, $14n+9$, $14n+11$; and whenever $14n+1$, $14n+9$ or $14n+11$ is a prime number, this has itself the form $7x^2 + y^2$. All triangular numbers increased by one, $\dfrac{x^2 + x}{2} + 1$, are in fact not really included in $7x^2 + y^2$ but in $\dfrac{7x^2 + y^2}{4}$,[7] and so all triangular numbers increased by one and taken fourfold are comprised by the form $7x^2 + y^2$. Now, since a number cannot have any other divisors than its quadruple, it follows nevertheless that all prime numbers that divide any triangular number increased by 1 are comprised by the expressions 2, 7, $14n+1$, $14n+9$, $14n+11$; and against this no exception will be found.

That our expressions for $\log 2 \cdot \log 2$ do not quite agree comes no doubt from the fact that $\log 2$ has not been taken equally accurately in both calculations. I do not remember any more to how many digits I had taken $\log 2$; in my papers I noted it down only to 16 digits; but more accurately

$$\log 2 = 0.693\,147\,180\,559\,945\,309\,417\,232\,1,$$

and after doing the multiplication again, I find

$$\log 2 \cdot \log 2 = 0.480\,453\,013\,918\,201\,424\,667\,102\,4.$$

The theorem which I stated:[8] if $s = 1 + \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{a^2}{2n+1} + \dfrac{a^3}{3n+1} + \dots$, then one has

$$\frac{s^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \dots,$$

is remarkable because the sum of the series

$$1 + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 9} + \dots$$

can be very easily determined by it. For as

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots,$$

one can define the sum of the squares of these terms

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots = p$$

and denote the sum of the products of any two terms of that series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$ by q; then $p + 2q = \frac{\pi^2}{16}$. One has

$$q = \begin{cases} -\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} - \ldots & = -\frac{1}{2}\,(1) \\ +\frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 9} + \ldots & = +\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) \\ -\frac{1}{1\cdot 7} - \frac{1}{3\cdot 9} - \frac{1}{5\cdot 11} - \ldots & = -\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) \\ +\frac{1}{1\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 11} + \frac{1}{5\cdot 13} + \ldots & = +\frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{cases}$$

Consequently

$$-q = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \ldots$$

If now in the above series one takes $a = -1$ and $n = 2$, and thus defines

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi}{4},$$

then

$$-q = \frac{s^2}{2} = \frac{\pi^2}{32}.$$

Therefore, as $p = \frac{\pi^2}{16} - 2q$, one has

$$p = \frac{2\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots$$

In the same way, this theorem can be quite unexpectedly useful in other occasions.

It was just an oversight that I did not make any answer to your invention about lunes, Sir;[9] it is true that its reason is easily seen by the similarity of the figures, but nonetheless there are some curious consequences to be drawn, which could hardly be demonstrated in another way.

I daresay it cannot be indicated in general what numbers may be assumed for n so that, whenever $n-p$ is a prime number, $n+p$ also becomes a prime, where p denotes a prime number.[10] If, however, p is taken to be some determinate number, then in each case a series of numbers for n can be determined: thus if $p=1$, one has the numbers 2, 4, 6, 12, 18, 30, 42, 60, 72, etc. for n: indeed, all those numbers increased as well as decreased by 1 yield prime numbers. If $p=2$, the resulting series for n is 3, 5, 9, 15, 21, 39, 45, 69, 81, etc.; but as here only odd numbers appear, let $p=3$: then the resulting series of all values of n is 4, 8, 10, 14, 16, 20, 26, 34, 40, etc. So 4 is the only number that yields prime numbers when increased or decreased by any prime number smaller than itself (except 2).

The great advantage which analysis affords us indeed comes solely from the signs that one habitually handles according to some basic laws; this is why important amplifications are to be expected by the introduction of new signs. But the gist of the matter lies also in the invention of the rules by which those signs are to be manipulated. In his *Arithmetica universalis* Newton denoted ambiguous signs just by points, in which he cannot be imitated, because these usually denote multiplication.[11]

Your argument about the composition of blood corpuscles[12] is absolutely correct, Sir. Indeed, if a similar composition were continued to infinity, the quantity of matter should entirely vanish. Let A be the volume of a blood corpuscle, which at the same time should indicate the quantity of matter or the weight, if the globe were solid or massive; if, however, it is composed of six small spheres that are all solid, the quantity of matter is only

$$\frac{6A}{\left(1+\sqrt{2}\right)^3}=\frac{6A}{7+5\sqrt{2}}=0.071\,067\,811\,8\cdot 6A$$

For $0.426\,406\,870\,6\,A$; that is, the quantity of matter contained in such a blood sphere will be nearly $\frac{14}{6}$ times smaller than if the same were solid. If those 6 small globes were again composed of 6 even smaller ones, the quantity of matter and therefore the weight should be $\frac{14}{6}\cdot\frac{14}{6}$, i.e., $\frac{196}{36}$ or 5 times smaller; in this manner it should soon become imperceptible. But as in fact each blood corpuscle has a weight, it is clear that this manner of composition cannot continue far down and does not even extend further than the third order. For if each one of these small globes were to consist again of 6 others, the actual weight could not result even if these were assumed to be as heavy as gold. In order to see this more clearly, let n be the specific gravity of the matter of which those small globes consist that are no longer composite; thus if the blood corpuscles were themselves solid and consisted of this matter, their specific gravity should equal

n or	$1.000\,000\,0\cdot n$;
if the globes of the 2nd order were solid, the specific gravity is	$0.426\,406\,8\cdot n$;
if only the 3rd-order globes are solid, the specific gravity is	$0.181\,822\,8\cdot n$;
if only the 4th-order globes are solid, the specific gravity is	$0.077\,530\,5\cdot n$;
if only the 5th-order globes are solid, the specific gravity is	$0.033\,059\,5\cdot n$.

So if the specific gravity of the matter which ultimately constitutes blood were as heavy as gold, and the fifth-order globes were solid, all the same the specific gravity of blood should already be 30 times smaller than that of gold, and thus lighter than water almost by half. Now since the specific gravity of blood is no smaller than that of water and its ultimate matter cannot be assumed by far to be as heavy as gold, it is quite obvious that this manner of composition of each globe from six smaller ones cannot possibly extend further than to the third order.

When considering the theorem mentioned above[13] that $4nab-a-b$ can never be a square number, or that $\frac{p^2+a+b}{ab}$ never is a whole number divisible by 4, I noticed at first that $\frac{p^2+a+b}{ab}$ may yield a whole number in infinitely many cases. However this is always either odd or at least oddly even, while for infinitely many values assumed for a and b, $\frac{p^2+a+b}{ab}$ does not even become an integer.

Let $a=1$, $b=1$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=p^2+2$	and thus either odd or oddly even.
Let $a=1$, $b=2$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=\frac{p^2+3}{2}$	(2, 6, 14, 26, etc.), which in fact is always oddly even.
Let $a=1$, $b=3$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=\frac{p^2+4}{3}$,	which formula can never yield an integer.
Let $a=1$, $b=4$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=\frac{p^2+5}{4}$;	this also can never become a whole number.
Let $a=1$, $b=5$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=\frac{p^2+6}{5}$	(2, 3, 11, 14, 30, etc.), either odd or oddly even.
Let $a=2$, $b=2$; then $\frac{p^2+4}{4}$	(1, 2, 5, 10, 17, 26, etc.), which numbers are either odd or oddly even.
Let $a=2$, $b=3$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=\frac{p^2+5}{6}$	(1, 5, 9, 21, etc.), all odd.
Let $a=2$, $b=4$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=\frac{p^2+6}{8}$;	so necessarily $p=2q$, and $\frac{2q^2+3}{4}$ equal to an integer, which is impossible.
Let $a=2$, $b=5$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=\frac{p^2+7}{10}$,	which formula cannot yield a whole number.
Let $a=2$, $b=6$; then $\frac{p^2+a+b}{ab}=\frac{p^2+8}{12}$	(1, 2, 6, 9, 17, 22, etc.), where no multiple of 4 occurs.

Perhaps by continuing these cases further and pondering them well one might find the true reason why $\frac{p^2+a+b}{ab}$ can never become a whole number divisible by 4.

It also appears that besides the multiples of 4 some other numbers are excluded from the form $\dfrac{p^2+a+b}{ab}$, as for example 7; for I have not been able to find any values for a, b and p so that $\dfrac{p^2+a+b}{ab}$ yields 7; nevertheless some multiples of 7, as 14, 21, etc. can result.[14] It seems that in speculations of this kind great mysteries lie still hidden, of which some important ones may have been known to Fermat; their loss is the more to be regretted. I have written to Mr. Clairaut asking whether Fermat's manuscripts might still be found; but as the taste for this kind of subject has expired in most people, any hope of this has also vanished.[15]

If I am not deceiving myself, I once saw Ferguson's *Labyrinthus Algebrae*[16] at the Petersburg library. At least I knew about this title notwithstanding that I do not quite recall where I saw, read or heard something about it. However I believe Professor Krafft should be able to give you some notice of it; meanwhile I shall also enquire for it at our local library.

The printing of Etienne's *Thesaurus* at Leipzig[17] has not even been started yet, as Professor Gesner does not want it to start before he himself has finished all the work, in order that the book should become all the more perfect and it should not be necessary to amend it by supplements.

I have delivered the letter to Baron Stosch to his sister,[18] so it will arrive at the right place in a short time; I could also have enclosed it to Mr. Poleni at Padua, but I believe this way to be safer.

Professor Krafft is expected here at the beginning of next year; probably Professor Heinsius also will soon ask for his discharge, since the Wittenberg University appointed him to the chair of mathematics fallen vacant by Mr. Hase's decease.[19]

Here the rumour goes that the presidency of the Academy is being reserved for Prince Kantemir;[20] this should certainly be most fortunate for the Academy.

Brigadier Baudan is still out of service here; he got married to a Miss Mirabel, whose dowry consisted in approximately 4000 Imperial thalers. There was a pretty house included in this, which I bought for 2000 thalers; moreover I received from His Royal Majesty a privilege of exemption. It is situated between the Friedrichstadt and the Dorotheenstadt, near to the grounds where His Majesty the King has decided to erect the new Palace and the Academy; so the location could not be more favourable.[21] Brigadier Baudan will now return to Russia with his wife and there continue to seek employment; he hopes that you, Sir, will be able to contribute greatly to this by your forceful recommendation.[22] I also most humbly ask you to show him your benevolence, at the same time recommending myself and also all my family to your constant goodwill and remaining for all my lifetime with the most dutiful respect, Sir, my most honoured State Councillor, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Oct. 27th, 1742.

PS. I have caused enquiries to be made in many local bookshops for the *Dictionnaire de Trévoux*,[23] but have had no news at all about it, so very bad is the state of the book trade here.

[1] Cf. n° 52, note 10, and n° 54, note 3.
[2] Cf. n° 55, note 5.
[3] There is no explicit statement of this fact in Euler's previous letter; it follows, however, from the train of thought analysed in n° 54 (see in particular n° 54, note 10).
[4] This "universal theorem" of Euler's, which follows from quadratic reciprocity in the same way as the special case $f = 1$ discussed earlier (cf. n° 40, note 14), is indeed true and important. In fact, the following case of the quadratic reciprocity law can easily be deduced from it: for prime numbers $m \equiv 1 \bmod 4$ and $n \equiv 3 \bmod 4$, we cannot simultaneously have $(\frac{m}{n}) = -1$ and $(\frac{n}{m}) = +1$ or, equivalently, we cannot have $(\frac{-m}{n}) = (\frac{-n}{m}) = 1$.
In order to show that this is impossible, assume that $(\frac{-m}{n}) = (\frac{-n}{m}) = 1$. Then the congruences $x^2 \equiv -m \bmod n$ and $x^2 \equiv -n \bmod m$ are solvable, and so is $x^2 \equiv -m - n \equiv 0 \bmod 4$. By the Chinese Remainder Theorem we can solve $x^2 \equiv -m - n \bmod 4mn$, hence there exist integers a, f such that $a^2 = 4fmn - m - n$. But this contradicts Euler's observation.
Since $4fmn - m - n = a^2$ is equivalent to $(4fm - 1)(4fn - 1) = f(2a)^2 + 1$, for proving the "universal theorem" it is sufficient to show that none of the primes dividing $fa^2 + b^2$ can have the form $4fm - 1$, as Euler remarked.
[5] This clause has been added between the lines.
[6] Cf. n° 54, note 10.
[7] Cf. n° 55, note 7.
[8] Cf. n° 54, note 20.
[9] Cf. n° 53, note 23, and n° 55, note 10.
[10] Cf. n° 55, note 15.
[11] Indeed, raised dots are occasionally used in Newton's *Arithmetica universalis* (1707) to denote ambiguous signs: on p. 67, e. g., the general quadratic equation is written $xx = \cdot px \cdot q$. However, multiplication is never denoted by $\cdot$, but by "in" or $\times$ in that book.
[12] Cf. n° 55, note 17.
[13] Cf. *supra* note 4.
[14] Euler's empirical result that $7ab - a - b$ cannot be a square is correct and follows, like the more general result below, from quadratic reciprocity. It is therefore no surprise that Euler finds it difficult to prove.

Claim: Let $e \equiv 7 \bmod 8$ be a positive integer. Then the Diophantine equation $p^2 = eab - a - b$ is not solvable in nonzero integers.

Proof: The equation $p^2 = eab - a - b$ can be transformed into $p^2e + 1 = (ea - 1)(eb - 1)$. Write $ea - 1 = 2^j\alpha$ for some odd integer α (note that $\alpha > 1$ since reduction modulo e shows that $(\frac{\alpha}{e}) = (\frac{ea-1}{e}) = (\frac{-1}{e}) = -1$); now we find $(\frac{-e}{\alpha}) = (\frac{\alpha}{e}) = (\frac{2^j\alpha}{e}) = (\frac{ea-1}{e}) = (\frac{-1}{e}) = -1$, where we have used the quadratic reciprocity law for the Jacobi symbol as well as the first and the second supplementary law. This result contradicts the congruence $p^2e \equiv -1 \bmod \alpha$.

See also *infra* n° 85.
[15] In his letter R 396 from April 1742, Euler had tried to interest Clairaut in several of Fermat's number-theoretic claims that – even after his own assiduous efforts – still lacked proofs, and admitted that he was very eager to know whether "that great man's" scientific estate could still be found somewhere. However, in his reply R 397 from May 29th, 1742, Clairaut stated very tersely that he had never heard of Fermat's theorems or the fate of his papers (see O. IVA/5, p. 124, 129).
[16] Cf. n° 55, note 21.
[17] Cf. n° 55, note 24.
[18] Cf. n° 55, note 25, and n° 43, note 11.

[19] After all, Krafft and Heinsius left the Petersburg Academy only in the summer of 1744 (see Schumacher's letter R 2126 to Euler: JW 2, p. 64). Both travelled by way of Berlin (cf. n° 83, note 2); Krafft returned to his native Tübingen, while Heinsius went to Leipzig because his appointment at Wittenberg had been held up.

[20] Cf. n° 48, note 8, and n° 54, note 6.

[21] The house Euler bought was situated on the southern side of Behrenstrasse, which marked the border between the 17th-century Dorotheenstadt quarter and the Friedrichstadt, built around 1700, where most of the Huguenots in Berlin lived. It was indeed close to the places Euler frequented: the Brandenburg Society of Science, the French Church and the site *Unter den Linden* where the Observatory was housed and the new Academy building would be constructed in 1748/52 (see n° 54, note 5); the Royal Castle where the Academy's meetings were provisionally held was a bit farther east in Cölln on the Spree island but still within easy walking distance.
The former owner, "Mlle Mirabel", proved hard to identify. However, an entry in the *Neues preussisches Adels-Lexicon* (Zedlitz 1836, Bd. IV, p. 446) suggests a possible candidate: Marguerite Henriette Durant, the sister of a Huguenot minister in Berlin, had been married to a Mr. von Mirabel. After his death (and, if our identification is correct, that of her second husband Baudan) she resurfaced in Russia as a lady-in-waiting to Tsarina Catherine II; later she returned to Berlin in the first years of the 19th century and died there at the age of 94.
The exemption of a "Freyhaus" which Euler was granted meant that he was not obliged to accommodate soldiers – a privilege usually restricted to the nobility.
The house in which the Eulers lived from September 1743 (cf. n° 74, note 18) to June 1766 was demolished and replaced by a bank building in 1911. Presently the Bavarian residency is located at that address, Behrenstrasse 21; a plaque on the facade commemorates Euler's dwelling there.

[22] Cf. n° 43, note 2.

[23] Cf. n° 51, note 18.

57

Goldbach to Euler

Moscow, (November 25th) December 6th, 1742[1]

Dec. 6th, 1742.

Sir,

In my last letter[2] I had taken $n^2 \neq 4pn - p - a^2$, as a particular case of $n^\alpha \neq 4pn - p - a^2$, for granted; however, this rests on the assumption that $a^2 + 1$ cannot be divided by $4n - 1$. I admit I have often suspected that the theorem $4mn - m - 1 \neq a^2$, in which no constant numbers other than 4 and 1 occur, can be proved by the properties of squares divided by 4; all the more so as the truth of the theorem is at once understood in the cases where m is a number of the form $4u + 0$ or $4u - 3$, which already comprises half the possible cases. However, in the cases $m = 4u - 1$ and $m = 4u - 2$ a difficulty always remained, until yesterday I was finally able to arrange the proof in the following way:[3]

1. Any number that divided by 4 leaves 2 or 3 is no square.
2. If any one of the four impossible equations

$$\begin{array}{lll} A: & 4mn - m - 1 & \neq \square \\ B: & 4mn - m - n & \neq \square \\ C: & 4mn - m - n^2 & \neq \square \\ D: & 4mn - n - 1 & \neq \square \end{array}$$

is true, all of them are simultaneously true;[4] because, if $4mn - m - n^\alpha$ is true, so are $4mn - m - n^{\alpha+1}$ and $4mn - n - m^\alpha$, and conversely, if these latter are true, the first one also is, as was shown in my earlier letter.

3. All possible numbers for m and n are contained in the four cases

$$\begin{array}{llll} m = 4u + 0, & m = 4u + 1, & m = 4u + 2, & m = 4u + 3, \\ n = 4v + 0, & n = 4v + 1, & n = 4v + 2, & n = 4v + 3; \end{array}$$

but by considering these cases it becomes obvious that, whatever the values of m and n, one of the four formulae A, B, C and D can always be divided by 4 so it leaves the remainder 2 or 3. For let m or $n = 0$ (this is what, for brevity's sake, I write for $m = 4u + 0$ and $n = 4v + 0$, and so on), then formula A or D divided by 4 leaves 3.

If m or $n = 1$, formula A or D divided by 4 leaves 2;
if $m = 2$, $n = 2$, C divided by 4 leaves 2;
if $m = 2$, $n = 3$, or $m = 3$, $n = 2$, B divided by 4 leaves 3;
if $m = 3$, $n = 3$, B divided by 4 leaves 2.

Thus none of the formulae A, B, C, D equals a square.

The value for $\log 2$ that you once communicated to me, Sir, must indeed have been copied down incorrectly,[5] as it already fails in the 14th digit; I am therefore obliged to you for the much more exact values for $\log 2$ and its square which are contained in your last letter.

Some error of this kind must surely also have crept into either Mr. Lagny's or Mr. Sharp's number for the quadrature of the circle. If I rightly recall, Sir, you noticed this discrepancy a long time ago; but as Mr. Sharp explicitly states he is sure even of the last digit to which his number continues, I rather think that in Mr. Lagny's number a 6 has been taken for a 5 either in copying or in printing; all the same this ought to be corrected if the subsequent digits in Lagny's number are to be of any use.[6]

On the point I made about the blood corpuscles I am glad to see my reasoning confirmed; but I doubt whether it can be safely assumed that these corpuscles have the same specific gravity as the entire mass of blood, because not just the corpuscles but also the lymph make up – as constitutive but heterogeneous parts – that body which according to your hypothesis, Sir, is nearly as heavy as water.[7]

Your observation about the theorem: if

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \dots$$

then[8]

$$\frac{s^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \dots,$$

appears in fact very remarkable to me now that I see that by this one can determine the sum of the series $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\dots$ once that of the series[9] $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$ is given.

I take this opportunity to report that I have calculated – if by an indirect route – the sums of the following series:

$$\begin{gathered}1 - \frac{1}{2}\left(1 \mp \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1 \mp \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \mp \frac{1}{4}\right) + \dots,\\ 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \dots,\\ \frac{1\cdot 1}{4} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{25}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots;\end{gathered}$$

possibly this can also be achieved by a much shorter way unknown to me.[10]

I quite agree with your opinion, Sir, that the numbers which are to be taken for n in order that, whenever $n-p$ is a prime number, $n+p$ is also prime (where p denotes a prime number), cannot be determined in general. In a similar vein I think that the numbers 2, 4, 6, 12, …, which yield primes both when 1 is added and when it is subtracted, can hardly be determined in general or by a certain law of progression;[11] in that respect both series seem to be of the same nature.

I am very much obliged to you, Sir, for the news you sent me. I also thank Brigadier de Baudan for the trust he is kindly putting in me;[12] I will certainly never be remiss in my good intentions to contribute to his satisfaction. Please congratulate him for my sake on his marriage. I look forward to seeing the Brigadier soon again in St. Petersburg.

For the rest I remain, dutifully recommending myself and cordially wishing all welfare to you, to your dearest wife and to all your family, Sir, your most devoted servant

Goldbach.

Moscow.

PS. In the future, letters can be again sent to St. Petersburg.[13]

[1] In the editions both by Fuß and by Yushkevich-Winter this letter was inserted after Euler's letter from December 15th, 1742, since they assumed Goldbach had dated his letter according to the Julian calendar ("old style") then current in Russia; this would make its Gregorian date December 17th. However, as in most cases where it is possible to make sure which calendar Goldbach used, it is the new one, we feel justified in reordering these two letters.

[2] Cf. n° 55, note 3.

[3] The text of Goldbach's copy starts here.

[4] Euler had indicated a proof of statements A and B, which starts from Fermat's Little Theorem, in an earlier letter: see nº 47, note 2. Goldbach's present attempt at an independent proof is flawed, as Euler points out in his answer nº 60; the ensuing discussion led, however, by several stages to a correct proof, which Euler applauded warmly in nº 74.

[5] The text of Goldbach's copy breaks off here.

[6] Abraham Sharp's 74-figure value for π, calculated around 1699, was published in Henry Sherwin's *Mathematical Tables* (1706), p. 44; Euler owned both the 1726 and the 1742 edition of these tables (cf. the catalog of his private library: *CLLE*, nº 68 and nº 62). As Euler states in his reply (see nº 60, note 5), the penultimate digit given by Sharp is in error.
Thomas Fantet de Lagny's 127-figure value was published in the *Mémoires* of the Paris Academy for 1719 (1721). Euler copied this value in his *Introductio*, t. I (E. 101), § 126. Sharp and Lagny used the same arctan series (cf. nº 66, note 10).
As Georg von Vega found out in 1789 when he broke Lagny's record by calculating π to 140 places (see Vega 1795), the 113th digit of Lagny's value was erroneous. However, the two values calculated by Vega, who retained the record until 1841, were also wrong in the 127th (resp. 137th) digit.

[7] Cf. nº 55, note 17, and nº 56, note 12.

[8] In the formula that follows, the second denominator is in error: it should be $n+2$ (see nº 54, note 20, and nº 56, note 8).

[9] On the sign that has been rendered by $\dot{+}$ in the original text of the formula that follows, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.

[10] Goldbach's copy ends with this sentence; in the margin he noted "*vid*[*e*] *infra*" ("see below"), probably referring to nº 59, where his claims are modified.
Euler's summation of the first two series indicated here by Goldbach is presented in nº 60 (series I and G) and was later published from Euler's notebooks in E. 819.
The discussions between Euler and Goldbach that follow in letters 59–64 are related to what are nowadays called multi-zeta values (see in particular nº 59, note 4, and nº 61, note 2).

[11] Indeed it is still not known whether there is an infinite number of these "twin primes".

[12] Cf. nº 56, note 22.

[13] After eight months in Moscow, Goldbach departed for Petersburg on January 4th, 1743, and returned to Moscow only in February 1744.

58
Euler to Goldbach
Berlin, December 15th, 1742[1]

Sir,

the enclosed letter is no doubt from Baron Stosch, as it was delivered to me by his sister;[2] so it will probably suit you, Sir, if I forward this answer to you without any delay.

Young Mr. Ehler from Danzig, who passed through here coming from France some time ago,[3] told me among other things that the *Dictionnaire de Trévoux* is in press in Paris and will presently appear.[4]

Since I last had the honour of writing to you, Sir, I bought a house here; I was given the opportunity for this by Brigadier Baudan, as this house belonged to his dearest wife but all her dowry had to be turned into cash: for immediately after the marriage he left for Poland, and if he does not find suitable employment there he will go on to Russia. At my humble request, His Royal Majesty most graciously condescended to perpetually exempt this house from all accommodation.[5] Since I dispose of an abundance of rooms and space in this house, Privy Councillor Ostermann,[6] who is still staying in Westphalia, is going to dwell with me and spend his life in tranquillity.

Recently a new rhymed translation of the Psalms of David, which meets with great approval both for its poetry and for its correct rendering of the original text, has been dedicated to His Majesty the King; it has already been decided to adopt it at the Palace instead of Lobwasser's Psalms. The author of this is a countryman of mine, a certain Mr. Spreng, who has been reputed since long ago to be a great poet.[7]

The state of the Academy at St. Petersburg makes my heart bleed for Councillor Schumacher's sake; but the person most alarmed by it is Mr. Bernoulli, who is afraid he stands to lose the pension he enjoyed up to the present.[8]

The old Mr. Bernoulli's hitherto unpublished papers are now being printed at Geneva; this work is to be dedicated to our King, and the publisher plans to come here in person to present it. I shall try to reach on that occasion an agreement about my *Scientia navalis* with him; presumably the Academy will not mind that.[9]

Some time ago I already had the honour to report to you, Sir, that I had written to Mr. Clairaut about the paper I had sent to Paris; but notwithstanding that up to now he has been very punctilious in writing back, to my great amazement I have not yet got an answer from him.[10] Meanwhile the director of the Berlin post office is willing to prove to me that this paper of mine correctly arrived at Paris.

At present I have entered into correspondence also with Professor Nicolaus Bernoulli; up to now this turned upon the summation of the series $1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots$, about which he made some very good reflections.[11] On this occasion I communicated to him a short method for integrating all differentials of the form

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \ldots}{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \ldots}\, dx$$

either absolutely, when this is possible, or by logarithms and the quadrature of the circle. Now this method consists in first resolving the denominator into its simple factors; as, however, often some of these factors become imaginary, I had remarked that these imaginary factors are always even in number and have the property that, multiplied two by two, they yield a real product.[12] Now recently Mr. Bernoulli doubted this statement; he thinks that there are formulae whose imaginary factors do not have this property. In support of this statement he proffered as an example the formula $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 4$, which has the following four simple imaginary factors

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & x - 1 - \sqrt{2 + \sqrt{-3}} & \text{II.} & x - 1 + \sqrt{2 + \sqrt{-3}} \\ \text{III.} & x - 1 - \sqrt{2 - \sqrt{-3}} & \text{IV.} & x - 1 + \sqrt{2 - \sqrt{-3}}, \end{array}$$

among which – according to his opinion – no two can be found that multiplied together make up a real product. At first, this example seemed to me, too, to disprove my theorem; but when I pondered the matter more thoroughly, I discovered that factors I. and III. multiplied together yield the real product

$$x^2 - \left(2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right) x + 1 + \sqrt{7} + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}} = 0,$$

while the other two, II. and IV., yield

$$x^2 - \left(2 - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}\right) x + 1 + \sqrt{7} - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}.$$

As by this answer the doubt Mr. Bernoulli raised is removed,[13] I now claim from him, in compensation, a correct proof of my theorem: every algebraic expression $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \ldots$ can be resolved either into simple real factors $p + qx$ or at least into quadratic real factors $p + qx + rx^2$.[14] This theorem, which (just like some theorems of Fermat's) I am unable to prove with the utmost rigor, can be very useful in analysis, for it follows from it that any differential formula which is either rational or can be reduced to a rational one, can be integrated, if not absolutely, then certainly by the help either of logarithms or of the quadrature of the circle.

The new tome of the *Miscellanea Berolinensia* has progressed rather far; almost all the mathematical section is written by me.[15] But as I have no copies of the papers I left at Petersburg and these will presumably appear either very late or not at all,[16] I take the liberty to ask you, Sir, most obediently for your counsel how I might properly gain possession of them. I do not request this to have them printed elsewhere – one can always find enough material for this – but just to inspect them so I do not publish the same thing twice.

I have to report to you, Sir, a most obedient compliment from Privy Councillor Vockerodt,[17] most humbly recommending myself to your constant goodwill and remaining with all due respect, Sir, my most honoured State Councillor, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Dec. 15th, 1742.

[1] About the reordering of this letter with respect to the Fuß and Yushkevich-Winter editions, cf. n° 57, note 1.

[2] Cf. n° 56, note 18, and n° 43, note 11.

[3] Carl Ludwig Ehler (born in 1717) had already met Euler and Goldbach in 1734 when he accompanied his father Carl Gottlieb, then a Danzig City Councillor, on a diplomatic mission to Petersburg. The elder Ehler and Euler had kept in touch by correspondence: in June 1742, Ehler transmitted some information which he had received from his son in Paris about the edition of the prize papers on tides (R 599); and on December 19th, both Ehlers, writing again from Danzig, thanked Euler for the good reception he had given Carl Ludwig in Berlin (R 600–601).

[4] Cf. n° 51, note 18. A six-volume (fourth) edition of the *Dictionnaire de Trévoux* indeed appeared at Paris in 1743.

[5] Euler had already communicated all this to Goldbach in his letter from October 27th: see n° 56, note 21.

[6] Cf. n° 47, note 9.

[7] Johann Jacob Spreng from Basel had been crowned *poeta laureatus* in 1723 when working as a private tutor in Vienna. Later he became a Calvinist minister; in 1741, while he still held office at Ludweiler (Saarland), his *Neue Übersetzung der Psalmen Davids* – versified to fit the Genevan melodies – appeared at Basel. This disposed the Basel university to create an extraordinary chair of German poetry for him; later, he also became professor for Swiss history and Greek.
Spreng's psalter is one of several 18th-century attempts to supply Reformed congregations with an up-to-date hymnbook (the traditional versification by Ambrosius Lobwasser from the 1570s, based on the French translation devised by the Genevan Reformation, was by then perceived as harsh and antiquated). Although Spreng's psalms did not generally prevail, they paved the way for several improved versions that are partly still in use.

[8] In October 1742, the engineer A.K. Nartov, an old minion of Peter I's, had overthrown Schumacher as head of the Petersburg Academy's administration; Schumacher and several of his subordinates were arrested for mismanagement (cf. JW 2, p. 62, note 2). During Nartov's regime all foreign members' pensions were suspended.
Even before this upset, Daniel Bernoulli had been very anxious for his pension; much of his correspondence with Euler from 1741/43 (to be edited in O. IVA/3) turns upon this concern. In October 1742, Bernoulli had prevailed on Prince A.D. Kantemir – a former student of his, now Russian ambassador in Paris – to plead his cause with Schumacher (cf. *Materialy* 1885, t. V, p. 406); a few weeks later, Kantemir also wrote to Nartov's supervising committee on Bernoulli's behalf (*ibid.*, p. 493).
These appeals were not immediately successful: in September 1743, Bernoulli still bitterly complained about the Academy's refusal to honour its contractual obligations. The decision to resume the payments to foreign members was taken in 1744, after Schumacher's definitive reinstatement (cf. *infra* n° 72, note 11).

[9] The four-volume edition of Johann I Bernoulli's *Opera Omnia* indeed came out in 1742 at Lausanne and Geneva. The publisher, Marc-Michel Bousquet, travelled to Potsdam in May 1743 and presented a copy to King Frederick, to whom the work is dedicated. He also met with Euler in Berlin to deliver a complimentary copy and to negotiate the publication of several books that Euler by then doubted he could get printed at Petersburg: cf. n° 68, note 3, and n° 72, note 12.

[10] Cf. n° 54, note 3, and n° 56, note 1.

[11] Euler started his correspondence with Nicolaus I Bernoulli (which has been edited in O. IVA/3, p. 481–643) in January 1741 by discussing various methods for summing the series $1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots$ for even m. In the following letters this led to the question of which rational functions can be integrated by logarithms and trigonometric functions.

[12] Euler's technique of integrating rational functions by partial fraction decomposition is masterfully explained in his letter from September 1st, 1742 (R 236: O. IVA/3, p. 515–516). He states that it always succeeds since "any algebraic equation not only appears to have an even number of imaginary [i. e., complex] roots, but these roots are such that two of them always yield a real product when multiplied together" ("*Videtur … omnis aequatio algebraica non solum radicum imaginariarum numerum parem habere, sed etiam has ipsas radices ita comparatas, ut binae in se multiplicatae productum reale praebeant*"). This decomposition implies the integrability of all rational functions by "the quadrature of the hyperbola and the circle" (i. e., by logarithms and trigonometrical functions).

Euler is fully convinced of the Fundamental Theorem of Algebra (which states that any real polynomial can be split into linear and quadratic real factors) even though he is not yet able to prove it generally. Bernoulli disagrees: in his reply from October 24th (R 237: *op. cit.*, p. 537) he proposes the alleged counterexample that Euler cites and resolves here.

[13] Euler had sent Bernoulli the same resolution of his objection on November 10th (*op. cit.*, p. 554), stating that he had a rigorous demonstration of the Fundamental Theorem for polynomials of degree ≤ 4 and asking Bernoulli to spend some time in looking for a proof (or disproof) of the general case.

[14] Currently, the earliest author known to have stated a result akin to the Fundamental Theorem of Algebra is the Nuremberg *Rechenmeister* Peter Roth: a version of the theorem can be found in his *Arithmetica philosophica* printed in 1608.

In 1629, Albert Girard claimed even more clearly: "Every algebraic equation admits as many solutions as the denomination of the highest quantity indicates" ("Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre": *Invention nouvelle en l'Algebre*, *II. Theoreme*, fol. [E4]).

In Book III of his *Geometrie*, Descartes observed in 1637 that if a polynomial $f(x)$ has the root c, then f is divisible by $x - c$. He also claimed (*op. cit.*, p. 372) that "in every equation there can be as many distinct roots as is the number of dimensions of the unknown quantity" ("... en chasque Equation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y avoir de diverses racines").

Subsequently, doubts were raised by various mathematicians. Leibniz, in an attempt to determine $\int \frac{dx}{x^4 + a^4}$ (*Specimen novum analyseos* ..., 1702), observed that

$$x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{i}\,)(x - a\sqrt{i}\,)(x + a\sqrt{-i}\,)(x - a\sqrt{-i}\,)$$

and concluded that $x^4 + a^4$ could not be factored into two quadratic polynomials with real coefficients. On the other hand, Leibniz knew that products of certain imaginary numbers could be reduced to real numbers; in a letter to Huygens written ca. 1675 (see Gerhardt 1899, p. 548), he used Cardano's formulae to derive the identity

$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}};$$

A similar argument would have shown that

$$(x + a\sqrt{i}\,)(x + a\sqrt{-i}\,) = x^2 + a\sqrt{2}x + a^2.$$

Euler showed how to convert the sum of the square roots of conjugate complex numbers into a real expression in E. 170.

The first attempted proofs of the Fundamental Theorem were given by d'Alembert (1746, printed in 1748), Euler (E. 170 from 1749/51), Daviet de Foncenex (1759), Lagrange (1772/74) – all these are mentioned by Gauss in 1799 – and Laplace (his lectures from 1795 were printed only in 1812). Gauss pointed out gaps in these early proofs and gave three different proofs for the Fundamental Theorem (1799, 1815, 1816); in 1845 he presented a refined version of his first proof. See Remmert 1990 and Gilain 1991.

[15] Cf. n° 52, note 13.

[16] In fact, t. IX of the Petersburg *Commentarii*, which contains Euler's papers E. 69–74 from 1737/38, appeared in 1744, and only in 1751 the last papers from 1740/41 that Euler had left behind (E. 157–158) were printed in t. XIII.

[17] Cf. n° 37, note 1, and n° 40, note 4.

59

Goldbach to Euler

Moscow, December (13th) 24th, 1742[1]

Sir,

when I recently reconsidered the supposed sums of the two series mentioned at the end of my last letter,[2] I perceived at once that they had arisen by a mere writing mistake. But of this indeed the proverb says “If he had not erred, he should have achieved less”;[3] for on that occasion I came upon the summations of some other series which otherwise I should hardly have looked for, much less discovered.

I daresay it is a problem among problems to determine the sum of

$$1+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2^m}\right)+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\frac{1}{4^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}\right)+\ldots$$

in those cases where m and n are not equal even integers;[4] all the same there are some cases for which the sum can be indicated: if, e. g., $m=1$, $n=3$, then

$$1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots=\frac{\pi^4}{72}$$

(if, as usual, π is taken to be the circumference of the circle whose diameter equals 1). On the other hand, I do not yet know the sums of the series

$$A\ \ldots\ 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots$$

and

$$B\ldots\ 1+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots,$$

although I know that $2A+B=\dfrac{19\pi^6}{2\cdot5\cdot7\cdot3^4}$. In the same vein, I can always determine the sum of the two following series $C+D$, whenever m and n are arbitrary even numbers:

$$C\ \ldots\ 1+\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{2^m}\right)+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}\right)+\ldots$$

$$D\ \ldots\ 1+\frac{1}{2^m}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1}{3^m}\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$$

For the rest I refer to my last letter; cordially wishing you a happy new year, I remain, Sir,

your most devoted servant
Goldbach.

Moscow, Dec. 24th, 1742.

[1] Goldbach's copy is dated "*Moscua d[ie] 6. Dec.*", an error probably caused by the statement in the first sentence that he has just re-examined his last letter (n° 57), which bears that date.
[2] Cf. n° 57, note 10.
[3] "*Si non errasset fecerat illa minus*": Martial, *Epigrammata* I.21 (where *illa* refers to Mucius Scaevola's hand).
[4] Goldbach's expression can be written in the form

$$\zeta^*(n,m) = \sum_{i \geq j \geq 1} \frac{1}{i^n j^m}.$$

Goldbach claims that $\zeta^*(3,1) = \pi^4/72$, remarks that he does not know how to evaluate $\zeta^*(5,1)$ and $\zeta^*(4,2)$, but that their sum is given by $\zeta^*(5,1) + \zeta^*(4,2) = 19\pi^6/(2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3^4)$. He also claims that he knows how to compute $\zeta^*(m,n) + \zeta^*(n,m)$ for even integers m and n. Goldbach's series $\zeta^*(m,n)$ are connected with the "multi-zeta values" defined by

$$\zeta(n,m) = \sum_{i > j \geq 1} \frac{1}{i^m j^n}.$$

In fact, it follows from the definitions that

$$\zeta^*(n,m) = \zeta(n+m) + \zeta(n,m).$$

Multiplying the zeta series $\zeta(m)$ and $\zeta(n)$ easily gives

$$\zeta(m)\zeta(n) = \zeta^*(m,n) + \zeta^*(n,m) - \zeta(n+m),$$

which implies Goldbach's claim that he can find the values of $\zeta^*(m,n) + \zeta^*(n,m)$. His other claims follow from the less trivial identity

$$\zeta(2n) = 2 \sum_{i=n+1}^{2n-1} \binom{i-1}{n-1} \zeta(i, 2n-i).$$

See Euler's reply in the next letter and E. 477.
For more on multi-zeta values in Euler's work, see Borwein / Bradley 2006 and the references listed there.

60
Euler to Goldbach
Berlin, January 5th, 1743

Sir,

I desire from all my heart that you may have happily arrived back at St. Petersburg, Sir. Some weeks ago I dispatched, still to your Moscow address, an answer from Baron Stosch,[1] which without doubt will have arrived correctly. His brother-in-law, Mr. Muzelius, came to see me a few days ago and demanded to know, in order to report this to Baron Stosch, in what manner you, Sir, came to enter the Russian civil service. After Brigadier Baudan departed from here to Brandenburg in order to get married there, I have seen neither himself nor any letters from him, but I heard that from there he went on to Warsaw and was now staying with Prince

Czartoryski, but if he should find no employment there, was inclined to return to Petersburg.

Your proof, Sir, that $4mn - m - n$ cannot be a square,[2] still does not appear quite satisfactory to me. For notwithstanding that $4mn - m - 1 \neq \square$ necessarily implies $4mn - m - n \neq \square$ and $4mn - m - n^2 \neq \square$, yet it still does not follow that in those cases for m and n where one formula cannot be a square, in those same cases the other formulae cannot yield squares. This is understood more clearly by considering the derivation of the other formulae from the first one, i. e., from $4mn - m - 1$. Indeed by setting $m = 4p - 1$, one gets $4\,(4np - n - p)$; thus if $4mn - m - 1$ can in no way be a square, it also cannot be a square in the case where $m = 4p - 1$, and consequently $4np - n - p$ cannot either be a square. However, you, Sir, only demonstrated that, if m or n equals $4u + 1$, the formula $4mn - m - 1$ cannot be a square; therefore it does not follow from this that $4np - n - p$ cannot be a square in the same case where n or p equals $4u + 1$. Moreover, evidently, if one had just proved that $4mn - m - 1 \neq \square$ in the case $m = 4u - 1$, it should already follow from this that $4np - n - p \neq \square$; if, however, it had been proved that $4np - n - p \neq \square$, it should only follow from this that $4mn - m - 1$ cannot be a square in the case where $m = 4u - 1$, but not in general. Now if one could just prove that $4mn - m - 1$ cannot be a square in the case $m = 4u - 1$, then it should already follow that $4mn - m - n$ can by no means ever be a square. But possibly the general theorem $4mnp - m - n \neq \square$, which you do not mention, Sir, might be easier to prove. Indeed it is evident by itself that when either $m + n = 4u + 1$ or $m + n = 4u + 2$, the formula $4mnp - m - n$ cannot be a square; therefore only the two cases $m + n = 4u$ and $m + n = 4u - 1$ remain to be proved. In the first case, by setting $m = 2u + a$ and $n = 2u - a$, one has to prove that $p\left(4u^2 - a^2\right) - u$ cannot be a square. Thus the formula $\dfrac{b^2 + u}{4u^2 - a^2}$ cannot be a whole number; letting $a = 2u - c$, $\dfrac{b^2 + u}{c\,(4u - c)}$ cannot be an integer, and from this an infinity of beautiful theorems can be deduced. However I have to confess that notwithstanding all the trouble I took I have not yet been able to discover a proof of the theorem that $4mnp - m - n$ never equals a square. Indeed this depends on proving that a number such as $4pa^2 + 1$ can never be divisible by a number of the form $4pq - 1$; but all possible divisors of the formula $4pa^2 + 1$ are contained in a certain number of formulae such as $4np + 1$, $4np + \alpha$, $4np + \beta$, $4np + \gamma$, etc., where it is to be noted that, if some number f is contained among the numbers α, β, γ, etc., simultaneously all powers of f also occur among them, and if two numbers f and g occur, then also all powers of each of them and all the products that arise from them occur. Thus, if one knows one or several numbers for α, β, γ, etc., one can at once determine the rest. Now the simplest divisors of the formula $4pa^2 + 1$ are the values that result by substituting some determinate number for a in the formula itself: thus for α, β, γ, etc., one has some primitive values such as $4p + 1$, $16p + 1$, $36p + 1$; therefore by taking all powers and multiplying them together, all remaining values of the letters α, β, γ, δ, etc. result, and it is clear that all these numbers will be of the form $4mp+1$. Consequently all divisors of the formula $4pa^2+1$ necessarily have to be of the form $4np+4mp+1$, and so a number $4np-1$ can never be a divisor; however, this is only true in so far as the primitive divisors are of the form $4mp+1$. But if a derivative one were of the form $4mp-1$, then also some primitive one should have to have this same form.[3] From this argument it now at least follows that, if the theorem is true for small numbers, it also has to be true for large numbers.[4]

Although Sharp states that he is sure of the last digit in his quadrature of the circle,[5] this cannot be asserted unless he calculated further by at least 3 or 4 digits; since this is not the case, it ought to be taken as a sign of accuracy that his last digit is too small only by 1. I cannot recall either that I ever doubted the correctness of Lagny's numbers for that reason.

When dealing with the subject of blood corpuscles,[6] I did not assume as precisely that the red corpuscles and the entire mass have the same specific gravity; for my argument remains the same even if the one were to be taken twice or several times greater than the other. Meanwhile it is certainly true that the specific gravity of the red corpuscles will not differ by that much from water, except if it were indeed impossible to obtain them purely without any admixture of lymph; but in that case the argument for showing the impossibility of a progress to infinity should not rely any more on specific gravity alone.

I had communicated to Professor Nicolaus Bernoulli[7] the theorem: If

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \frac{a^2}{2n+1} + \frac{a^3}{3n+1} + \dots,$$

then

$$\frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1}\right) + \dots$$

Now he sent me the following nice proof:[8] writing x^n for a and t for sx, one will have

$$sx = t = x + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \dots,$$

by differentiating this, one gets

$$dt = dx\,\left(1 + x^n + x^{2n} + x^{3n} + \dots\right).$$

Multiplying these two series together and ordering the terms according to the powers of x, he gets

$$t\,dt = dx\left(\begin{array}{c} x + x^{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) + x^{2n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+1}\right) \\ + x^{3n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{3n+1}\right) + \dots \end{array}\right),$$

which, integrated, yields

$$\frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}s^2x^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^{n+2}}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \ldots;$$

dividing by x^2 and taking into consideration that $x^n = a$, one shall have

$$\frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) + \frac{a^2}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right) + \ldots$$

He continues in that way, multiplying $\frac{1}{2}t^2$ again by dt; thus he finds after integration

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}s^3 \;=\; & \frac{1}{6} + \frac{a}{n+3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)\\ & + \frac{a^2}{2n+3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\right)\\ & + \frac{a^3}{3n+3}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}\right)\\ +\frac{1}{3n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)\end{array}\right)\ldots\end{aligned}$$

Now to deal with the kind of summation that you discovered, Sir:[9] let $n = 1$, then

$$s = 1 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{4} + \ldots = \frac{1}{a}\log\frac{1}{1-a};$$

therefore

$$\begin{aligned} A \ldots \frac{1}{2a^2}\left(\log\frac{1}{1-a}\right)^2 \;=\; & \frac{1}{2} + \frac{a}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\ & + \frac{a^3}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \ldots\end{aligned}$$

Let $n = 2$, then $s = 1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{5} + \frac{a^3}{7} + \ldots = \frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}$; therefore

$$\begin{aligned} B \ldots \frac{1}{8a}\left(\log\frac{1+\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}\right)^2 \;=\; & \frac{1}{2} + \frac{a}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{a^2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\\ & + \frac{a^3}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \ldots\end{aligned}$$

Let $n = 2$ and $a = -\,b$, then $s = 1 - \frac{b}{3} + \frac{b^2}{5} - \frac{b^3}{7} + \ldots = \frac{1}{\sqrt{b}}\arctan\sqrt{b}$; therefore

$$\begin{aligned} C \ldots \frac{1}{2b}\left(\arctan\sqrt{b}\right)^2 \;=\; & \frac{1}{2} - \frac{b}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{b^2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\\ & - \frac{b^3}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \ldots\end{aligned}$$

Let $a = -1$ in A, and $b = 1$ in C; since $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$, one will have

$$D \ldots \frac{1}{2}(\log 2)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \ldots$$

$$E \ldots \frac{\pi^2}{32} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) + \ldots$$

$$F \ldots \frac{1}{8}(\log 2)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) + \ldots$$

$$\begin{aligned} E-F \ \ldots\ \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{8}(\log 2)^2 = {} & \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) \\ & - \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) + \ldots \\ E+F \ \ldots\ \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{8}(\log 2)^2 = {} & \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) \\ & - \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Subtracting D from the series $\dfrac{\pi^2}{12} = 1 - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4} + \ldots$, one will have

$$G \ldots \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \ldots$$

Therefore, if $s = a - b + c - d + e - \ldots$ and $t = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots$, the sum of all products of two terms of series s will be $\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}t$, and therefore

$$\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}t = -b\cdot a + c\,(a-b) - d\,(a-b+c) + e\,(a-b+c-d) - \ldots;$$

adding t one gets

$$\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}t = a^2 - b(a-b) + c(a-b+c) - d(a-b+c-d) + e(a-b+c-d+e) - \ldots$$

Let $s = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \ldots$, then $s = \log 2$ and $t = \dfrac{\pi^2}{6}$; therefore

$$\begin{aligned} H \ \ldots\ & -\frac{1}{2}(\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{12} \\ & = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots = G. \end{aligned}$$

$$I \ \ldots\ \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}(\log 2)^2 = 1\cdot 1 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots$$

$$D + H \ldots \ \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \ldots$$

or

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{21}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{36}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \ldots$$

The present series G and I are the first two which you communicated to me, Sir.

It is a curious fact about the series $1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{25} + \frac{x^5}{36} + \ldots$ that it can be summed in just three cases,[10] namely for $x = 1$, $x = -1$, and $x = \frac{1}{2}$; the last case follows from series G by virtue of the following theorem:

If $s = 1 \cdot a - \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{3}(a+b+c) - \frac{1}{4}(a+b+c+d) + \ldots$, then

$$\begin{aligned} s = \frac{a}{1 \cdot 2} \quad &+ \quad \frac{1}{2 \cdot 4}(a-b) + \frac{1}{3 \cdot 8}(a - 2b + c) + \frac{1}{4 \cdot 16}(a - 3b + 3c - d) \\ &+ \quad \frac{1}{5 \cdot 32}(a - 4b + 6c - 4d + e) + \ldots \end{aligned}$$

Now by substituting for $a + b + c + d + \ldots$ the series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, one has $s = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2$. In order to determine moreover the value of the expression

$$1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4} + \ldots,$$

I take

$$z = x - \frac{n}{1} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^3}{3} + \ldots;$$

by differentiating one gets

$$dz = dx\left(1 - \frac{n}{1} \cdot x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 - \ldots\right) = dx\,(1-x)^n,$$

and therefore by integrating

$$z = \frac{1 - (1-x)^{n+1}}{n+1};$$

making $x = 1$ this yields

$$1 - \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{n+1}.$$

Therefore

$$\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 = \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^2 \cdot 4} + \frac{1}{3^2 \cdot 8} + \frac{1}{4^2 \cdot 16} + \frac{1}{5^2 \cdot 32} + \ldots$$

Furthermore, with regard to your two last series, Sir, viz.,[11]

$$\begin{aligned} p &= 1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\ldots, \\ q &= \frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{25}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots, \end{aligned}$$

it is clear that

$$p-q=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots\right)=\frac{\pi^2}{12}\log 2;$$

thus, if the sum of either one were known, the other one could be summed at once. Indeed,

$$\frac{13}{1440}\pi^4=1-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\ldots;$$

however I have not yet been able to discover a way to determine the values p and q and am therefore expecting most impatiently, Sir, your method to sum these series. If, moreover, you could also sum the series

$$r=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\ldots,$$

Sir, the two series $p+r$ should yield the sum of the series $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots$, which has been sought for such a long time.[12]

Mr. Hedlinger[13] and all my family most humbly ask to be recommended to you, Sir, while I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Jan. 5th, 1743.

PS. Mr. Clairaut just wrote me that my paper sent to Paris fortunately arrived in time.[14]

[1] Cf. nº 58, note 2.

[2] Cf. nº 57, note 4.

[3] In E. 242 Euler shows (Cor. 2 of Theorem 12) that $m(4n-1)-n \neq a^2$ by proving that $-n$ is a nonsquare modulo $4n-1$. Using the quadratic reciprocity law for the Jacobi symbol, this is a simple exercise: $\left(\frac{-n}{4n-1}\right)=\left(\frac{-4n}{4n-1}\right)=\left(\frac{-1}{4n-1}\right)=-1$.
See also *infra* nº 74, 76 and 85.

[4] Euler's argument is not convincing. The primes dividing pa^2+1 do not all have the form $4mp+1$, and the existence of a divisor of the form $4np-1$ does not imply that there exists a prime divisor of that form.
The only case in which this argument works is $p=1$, and in that case, the claim can indeed be proved by descent. In fact, assume that some prime $q=4n-1$ divides $4a^2+1$. Then reducing a modulo q shows that $q \mid 4b^2+1$ with $b^2<q^2$, hence $4b^2+1=qr$ for some integer $r<q$ with $r=4m-1$. The usual descent argument then proves that all prime divisors of numbers $4a^2+1$ have the form $4n+1$.

Euler intended to use this line of reasoning in his projected treatise on number theory that remained a fragment and was published only in 1849 (E. 792, *Tractatus de numerorum doctrina Capita XVI*).

[5] Cf. nº 57, note 6.
[6] Cf. nº 55, note 17, and nº 56, note 12.
[7] See Euler's letter to Nicolaus I Bernoulli from September 1st, 1742 (R 236: O. IVA/2, p. 518–519).
[8] See Nicolaus I Bernoulli's letter from October 24th, 1742 (R 238: *ibid.*, p. 540–541).
[9] Cf. nº 57, note 10.
[10] Cf. nº 54, note 19.
[11] Cf. again nº 57, note 10; obviously Euler had not yet received Goldbach's recantation nº 59.
[12] Euler kept looking throughout his life for a closed formula for this value that we denote by $\zeta(3)$: see nº 26, nº 64, note 9, and nº 69, note 6.
Little is known about the values of the zeta function for odd integers even today: in 1979, Apéry surprised the mathematical world by proving by elementary means that $\zeta(3)$ is irrational, but it is still not known whether it is a rational multiple of π^3 or even whether it is transcendental.
[13] Cf. nº 55, note 1.
[14] Cf. nº 54, note 3, nº 56, note 1, and nº 58, note 10.

61
Euler to Goldbach
Berlin, January 19th, 1743

Sir,

indeed you have to consider the writing mistake you reported to be very fortunate, Sir,[1] as it gave rise to such marvellous inventions. It cost me many hours and extensive calculations to understand the truth of the summations that you kindly communicated to me; however, I cannot lay claim to any further glory than that I proved them. The method by which I arrived there is rather far-fetched and of such a nature that I should never have discovered those sums even with its help if they had not been known to me beforehand from your letter, Sir. I made use of the following series:

$$\begin{array}{ll}
A = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots & B = 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\dots \\
C = \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\dots & D = 1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\dots \\
E = \frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\dots & F = 1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\dots \\
G = \frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\dots & H = 1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\frac{1}{4^9}+\dots \\
\quad \text{etc.,} &
\end{array}$$

of which the sums A, C, E, G, etc. are known. With great pains I finally elicited from them the following:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots\\
&= \frac{1}{2}A^2\\
\beta &= 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots\\
&= AC-\frac{1}{2}B^2\\
\gamma &= 1+\frac{1}{2^7}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots\\
&= AE-BD+\frac{1}{2}C^2\\
\delta &= 1+\frac{1}{2^9}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^9}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4^9}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots\\
&= AG-BF+CE-\frac{1}{2}D^2\\
a &= 1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)\ldots\\
&= \frac{1}{2}A^2+\frac{1}{2}C\\
b &= 1+\frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^4}(1+\ldots)\\
&= B^2-\frac{1}{3}E\\
c &= 1+\frac{1}{2^6}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^6}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^6}(1+\ldots)\\
&= 2BD-\frac{3}{2}C^2+\frac{1}{4}G\\
d &= 1+\frac{1}{2^8}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^8}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\frac{1}{4^8}(1+\ldots)\\
&= 2BF-3CE+\frac{4}{2}D^2-\frac{1}{5}I\\
&\text{etc.}\\
p &= 1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{4^3}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}\right)\ldots\\
&= \frac{1}{2}B^2+\frac{1}{2}E\\
q &= 1+\frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\frac{1}{4^5}(1+\ldots)\\
&= \frac{3}{2}C^2-\frac{5}{8}G\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Now as A, C, E, G, etc. are given, viz., $A = \frac{\pi^2}{6}$, $C = \frac{\pi^4}{90}$, $E = \frac{\pi^6}{945}$, $G = \frac{\pi^8}{9450}$ etc., the above series yield

$$\alpha = \frac{1}{2}A^2 = \frac{\pi^4}{72},$$
$$2\beta + b = 2AC - \frac{1}{3}E = \frac{19\pi^6}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3^4},$$

and these are your first two theorems, Sir. Furthermore,

$$2\gamma + c = 2AE - \frac{1}{2}C^2 + \frac{1}{4}G,$$
$$\beta + p = AC + \frac{1}{2}E,$$

and finally

$$1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \ldots = \frac{\pi^8}{16 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 7}.$$

However, as this method of mine is not natural enough, I most humbly ask you to be so kind as to communicate your method to me.

The last theorem I knew at once; for by defining

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots \\ s &= 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots \end{aligned}$$

and

$$t = 1 + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{3^{m+n}} + \frac{1}{4^{m+n}} + \ldots,$$

it is seen that

$$rs + t = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right) + \frac{1}{3^n}\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + \ldots \\ 1 + \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \ldots \end{array} \right\}$$

Now since the sums r, s and t can be indicated whenever m and n are even numbers, in these two cases those last two series taken together are also summable.[2]

Since I last wrote to you, Sir, I remembered that a considerable time ago I had communicated to you a rigorous proof of the theorem that $4mn - m - n$ never equals a square;[3] however, this had so completely slipped my mind that I wrote in my last letter I had not been able to discover any proof notwithstanding all my efforts. I therefore shall briefly repeat this proof.

Lemma. If p is a prime number, the expression $a^{p-1} - 1$ will be divisible by p.

The proof of this lemma has already been approved by you, Sir. I now reason from this as follows:

Let $p = 4n-1$, then $a^{4n-2}-1$ will be divisible by $4n-1$ if $4n-1$ is a prime number; thus $a^{4n-2}+1$ will not be divisible by $4n-1$. But since $4n-2$ is an oddly even number, $a^{4n-2}+1$ is divisible by a^2+1. Consequently, as $a^{4n-2}+1$ is not divisible by $4n-1$, its factor a^2+1 will not be divisible by $4n-1$ either. Further, if a^2+1 is not divisible by any prime number of the form $4n-1$, it will also not be divisible by any composite number of the form $4n-1$; for if $4m-1$ is not a prime number, it will have at least one prime factor of the form $4n-1$. So, as a^2+1 cannot be divided by $4n-1$, the equation $a^2+1 = (4n-1)(4m-1)$ will be impossible, and therefore $a^2 \neq 16mn-4m-4n$ or $4mn-m-n$ never equals a square, QED.

Mr. Hedlinger and all my family ask to be most humbly recommended to you, Sir, and I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Jan. 19th, 1743.

[1] Cf. n° 59, notes 3 and 4.

[2] The identities which Euler derived "with great pains" are relations between multi-zeta values (see n° 59, note 4):

Euler	modern formulation
$\alpha = \frac{1}{2}A^2$	$\zeta^*(3,1) = \frac{1}{2}\zeta(2)^2$
$\beta = AC - \frac{1}{2}B^2$	$\zeta^*(5,1) = \zeta(2)\zeta(4) - \frac{1}{2}\zeta(3)^2$
$\gamma = AE - BD + \frac{1}{2}C^2$	$\zeta^*(7,1) = \zeta(2)\zeta(6) - \zeta(3)\zeta(5) + \frac{1}{2}\zeta(4)^2$
$\delta = AG - BF + CE - \frac{1}{2}D^2$	$\zeta^*(9,1) = \zeta(2)\zeta(8) - \zeta(3)\zeta(7) + \zeta(4)\zeta(5) - \frac{1}{2}\zeta(5)^2$

etc.

These equations are all correct and are special cases of the general formula

$$\sum_{j=1}^{2n-2} (-1)^j \zeta(2n-j, j) = \frac{1}{2}\zeta(2n).$$

The next set of equations is the following:

Euler	modern formulation
$a = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}C$	$\zeta^*(2,2) = \frac{1}{2}\zeta(2)^2 + \frac{1}{2}\zeta(4)$
$b = B^2 - \frac{1}{3}E$	$\zeta^*(4,2) = \zeta(3)^2 - \frac{1}{3}\zeta(6)$
$c = 2BD - \frac{3}{2}C^2 + \frac{1}{4}G$	$\zeta^*(6,2) = 2\zeta(3)\zeta(5) - \frac{3}{2}\zeta(4)^2 + \frac{1}{4}\zeta(8)$
$d = 2BF - 3CE + \frac{4}{2}D^2 - \frac{1}{5}I$	$\zeta^*(8,2) = 2\zeta(3)\zeta(7) - 3\zeta(4)\zeta(6) + \frac{4}{2}\zeta(5)^2 - \frac{1}{5}\zeta(7)$

The first two of these are correct, the third and the fourth are not. Finally, Euler claims

Euler	modern formulation
$p = \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}E$	$\zeta^*(3,3) = \frac{1}{2}\zeta(3)^2 + \frac{1}{2}\zeta(6)$
$q = \frac{3}{2}C^2 - \frac{5}{8}G$	$\zeta^*(5,3) = \frac{3}{2}\zeta(4)^2 - \frac{5}{8}\zeta(8)$

The first equation is correct, the second is not.

Euler incorporated these results into E. 477, which was presented at the Petersburg Academy in 1771 and printed in its *Novi Commentarii* in 1776.

[3] Cf. n° 47, note 2. Euler later published this proof in E. 242.

62

Goldbach to Euler

Petersburg, (January 25th) February 5th, 1743[1]

Sir,

I received your letter dated Dec. 15th, 1742, on January 3rd of the current year at Moscow, shortly before my departure from there.[2] From the enclosure[3] I learned with pleasure that Mr. von Stosch has been receiving for some time a yearly pension of 320 pounds Sterling from the English court. I congratulate you cordially on your newly acquired house,[4] and even more on the privilege that His Royal Majesty granted you most graciously for it. I did not know anything about the great poet which you mention, Sir,[5] as I do not read either the learned journals or the other ones as regularly as I should; however I remember that more than ten years ago I saw at Baron von Mardefeld's place an excellent translation of the Psalms into German verse, printed in octavo with largish letters at Danzig.[6] The present new translator, to whom that book was no doubt already known, will quite probably have succeeded even better; I should like to compare the translations with one another. If T... were still alive,[7] he should very punctually send the copies of your memoirs that you request;[8] but now I do not really know who could deal with such a commission. I was very pleased by Privy Councillor Vockerodt's compliment;[9] I should wish from all my heart to see him again here in some senior position (even if this does not meet with his own intentions).

If the statement you make[10] about imaginary roots, Sir, could be proved, it should also follow that for any imaginary c and any real f chosen so that $c\sqrt{4c^4 - f} = r$ is a real number, defining $m = \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}}$ and $n = \sqrt{-c^2 - \frac{r}{c}}$, both $m + n$ and $c\,(m - n)$ are real; in this manner one might investigate, for example, the case $x^4 + 72x - 20$, where the four divisors are (setting $c = 1 + \sqrt{-2}$, $f = -20$, $\sqrt{4c^4 - f} = \frac{r}{4c} = \frac{18}{1+\sqrt{-2}}$)

$$\text{(I.)}\quad x + c + \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}}, \qquad \text{(II.)}\quad x + c - \sqrt{-c^2 + \frac{r}{c}},$$
$$\text{(III.)}\quad x - c + \sqrt{-c^2 - \frac{r}{c}}, \qquad \text{(IV.)}\quad x - c - \sqrt{-c^2 - \frac{r}{c}}.$$

To your other letter dated January 5th, I have to reply that the objection you raise about $4mn - m - 1 \neq \square$ and the other formulae had already at that time in part been noticed by me, but I thought it should be easy to resolve. However I now believe that everything can be proved much more briefly and without calling on so many particular cases. But first I want to make a little remark about the sentence: "Moreover, evidently, if one had just proved that $4mn - m - 1 \neq \square$ in the case $m = 4u - 1$, it should already follow from this that $4np - n - p \neq \square$; if, however, it had been proved that $4np - n - p \neq \square$, it should only follow from this that $4mn - m - 1$ cannot be a square in the case where $m = 4u - 1$, but not in general",[11] by reminding you that not only B: $4np - n - p \neq \Box$ is a particular case of A: $4mn - m - 1 \neq \Box$, but also A is a particular case of B. Obviously this assertion should be contradictory if $\Box$ denoted the same determinate square in A and in B; but as the sign actually has different values in both cases, the assertion can very well hold up; for in the same way as from the particular case of A where $m = 4u-1$, the formula $4\,(4nu - u - n)$ or the equivalent one, B: $4nu-n-u \neq \Box$, arises, so from the particular case of B where $4n^2p - n$ is substituted for u, the formula $4np-p-1 \neq \Box$ results, which by taking p to be an arbitrary integer yields formula A. In the same way, the general expression $4mn - m - n^{2\alpha-1} \neq \Box$ can be at once changed into $4np - p - 1 \neq \Box$ by the substitution $m = 4n^{2\alpha}p - n^{2\alpha-1}$.[12]

Here the new proof ought to have followed; but as, upon more mature reflection, I am not satisfied with it myself, this item will have to be deferred until another time. Meanwhile I have noticed that the statement $4pmn - m - n \neq \Box$ is changed into the similar expression $4npq - p - q \neq \Box$ by the substitution $m = 4n^2q - n$.[13]

The proof of the theorem: if

$$s = 1 + \frac{a}{n+1} + \ldots$$

then

$$\frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{n+2}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \ldots,$$

which you communicated to me,[14] at once shows the great perspicacity of the author in these matters, and in my opinion the diverse applications of that theorem which you make, Sir, are very remarkable.

The sums of series G and I are the very same which I had calculated;[15] I also knew about the sum $D + H$.

As I already pointed out to you in my last letter,[16] the sums of the series

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \ldots$$

and

$$q = \frac{1 \cdot 1}{4} - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \ldots,$$

which I thought to have determined, arose from a mere writing mistake; I therefore should have no more thought of these series if I had not seen them repeated in your letter,[17] whereupon I immediately noticed that both their sums depend on $z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots$. You are quite right in inferring, Sir, that if I could sum the series

$$r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \ldots,$$

then $z = p + r$ should be determined; however, whereas the series r can very nicely be summed (indeed it equals $\dfrac{(\pi^2 - 3)\log 2}{6}$),[18] I actually do not know how to express p otherwise than by $z - r$. I also wrote in my last letter that I did not yet know the sum of the series

$$1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \ldots;$$

but in fact this also depends on the sum z and equals $-\dfrac{z^2}{2} + \dfrac{\pi^6}{2 \cdot 3^3 \cdot 7}$.[19]

From your last letter dated Jan. 19th, Sir, I understood with satisfaction that the series α, β and b are not among the easiest to sum; now with regard to the series α and $2\beta + b$, our methods completely agree, giving $\alpha = \dfrac{1}{2}A^2$ and $2\beta + b = \dfrac{19\pi^6}{2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}$; but there is a disagreement in that your method, Sir, yields $\beta = AC - \dfrac{1}{2}B^2$, $b = B^2 - \dfrac{1}{3}E$, whereas mine results in $\beta = \dfrac{\pi^6}{2 \cdot 3^3 \cdot 7} - \dfrac{B^2}{2}$, $b = B^2 - \dfrac{11\pi^6}{2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}$;[20] I agree that the value of p is $\dfrac{1}{2}B^2 + \dfrac{1}{2}E$, but the rest I have not yet investigated. You will easily enough understand my method for all series of that kind from the following single calculation scheme, Sir: Let

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}, \\ C &= 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}, \end{aligned}$$

then twice the sum of all products of two terms taken from series A will equal $A^2 - C$; but twice that sum also equals the following series:

$$\begin{array}{rcllll} & & & \text{(I.)} & \text{(II.)} & \text{(III.)} \\ 2\left(\dfrac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \dfrac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \dfrac{1}{3^2 \cdot 4^2} + \dfrac{1}{4^2 \cdot 5^2} + \ldots\right) & = & 2\Bigg(& \dfrac{\pi^2}{3 \cdot 1^2} & -2 & -1\Bigg) \\ +2\left(\dfrac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \dfrac{1}{2^2 \cdot 4^2} + \dfrac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \dfrac{1}{4^2 \cdot 6^2} + \ldots\right) & = & 2\Bigg(& \dfrac{\pi^2}{3 \cdot 2^2} & -\dfrac{2\left(1 + \frac{1}{2}\right)}{2^3} & -\dfrac{\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)}{2^2}\Bigg) \\ +2\left(\dfrac{1}{1^2 \cdot 4^2} + \dfrac{1}{2^2 \cdot 5^2} + \dfrac{1}{3^2 \cdot 6^2} + \dfrac{1}{4^2 \cdot 7^2} + \ldots\right) & = & 2\Bigg(& \dfrac{\pi^2}{3 \cdot 3^2} & -\dfrac{2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)}{3^3} & -\dfrac{\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right)}{3^2}\Bigg) \\ \ldots & & & & \ldots & \end{array}$$

Now by summing the three vertical columns separately, one gets

$$\begin{aligned}
&(\text{I.}) && \frac{2\pi^2}{3}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots\right)=\frac{2\pi^4}{3\cdot 6}\\
&(\text{II.}) && -4\left(1+\frac{1}{2^3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\dots\right)\\
&(\text{III.}) && -2\left(1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\dots\right).
\end{aligned}$$

But as the last series is known to equal $\dfrac{-7\pi^4}{180}$, the middle one has to be

$$A^2 - C - \frac{2\pi^4}{3\cdot 6}+\frac{7\pi^4}{180}=\frac{-10\pi^4}{180},$$

or

$$1+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{27}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{64}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\dots=\frac{\pi^4}{72}.$$

Please recommend me assiduously to all your family and assure Mr. Hedlinger, Esq., of my constant respect. I remain with special consideration, Sir, your most devoted servant

Goldbach.

St. Petersburg, Feb. 5th, 1743.

PS. I received in good time the letter from Saxony that you forwarded to me, Sir.[21]

I have not forgotten that the theorem $4mn - m - 1 \neq \Box$ has been proved by you, Sir, a long time ago; the point was just whether it could also be proved in another manner.[22]

[1] Goldbach's copy is dated "1743. *Petropoli d.* 2. *Febr.*"; apparently he had started replying to Euler's letters n° 58 and n° 60 on February 2nd, but then received n° 61 (sent from Berlin on January 19th) and decided to include an answer to this even if this caused a delay.
[2] Goldbach departed from Moscow on January 4th; the journey to Petersburg usually took about ten days.
[3] Cf. n° 58, note 2.
[4] Cf. n° 58, note 5.
[5] Cf. n° 58, note 7.
[6] This most probably refers to a rhymed translation of the psalms that the Danzig lawyer Ernst Lange had first published in 1713.
[7] Goldbach probably refers to Christoph Tiedemann († July 7th, 1742), who had served as the Petersburg Academy's notary and archivist since 1735, also helping Goldbach with recording its meetings.
[8] Cf. n° 58, note 16.
[9] Cf. n° 58, note 17.
[10] The text of Goldbach's copy starts here.
Cf. n° 58, note 12, and Euler's answer in n° 64, note 5.

[11] This quotation from Euler's letter is underlined in the original.

[12] Here the beginning of an additional paragraph, breaking off in mid-sentence, has been struck out both in the original and in Goldbach's copy. The longer version in the copybook reads: "*Si in aequatione* $A \ldots\ 4np - p - 1 = a^2$ (*ubi omnes litterae denotent numeros integros affirmativos*) *ponatur* $p = \dfrac{m + 4n + 1}{16n^2} = \dfrac{a^2+1}{4n-1}$ *erit quoque* $m = 16n^2p - 4n - 1$ *numerus integer affirmativus, et mutabitur* A *in* $B \ldots\ 4mn - m - 1 = 16a^2n^2$, *quapropter haberentur tres numeri integri* $m = \dfrac{16n^2a^2+1}{4n-1}$, $p = \dfrac{a^2+1}{4n-1}$ *et* $m + p = \big(16n^2+1\big)$ [...]"

("If in equation A: $4np - p - 1 = a^2$ (where all the letters denote positive integers) one sets $p = \dfrac{m+4n+1}{16n^2} = \dfrac{a^2+1}{4n-1}$, then $m = 16n^2p - 4n - 1$ will also be a positive integer, and A will go over into B: $4mn - m - 1 = 16a^2n^2$; therefore one would have three integers $m = \dfrac{16n^2a^2+1}{4n-1}$, $p = \dfrac{a^2+1}{4n-1}$ and $m + p = \big(16n^2+1\big)$ [...]).

[13] Here Euler noted between the lines, preparing his reply (cf. n° 64, note 6):

"*formula* $4pmn - m - n$ *in sui similem abit ponendo*

$$m = \frac{(4np)^{2\alpha}x - \dfrac{n((4np)^{2\alpha}-1)}{4np-1}}{4npx - n - x} \quad \textit{vel} \quad m = \frac{(4np)^{2\alpha}4nny - \dfrac{n((4np)^{2\alpha+1}-1)}{4np-1}}{4npy - y - p} \text{"}$$

("the formula $4pmn - m - n$ goes over into another similar one if one sets

$$m = \frac{(4np)^{2\alpha}x - \dfrac{n((4np)^{2\alpha}-1)}{4np-1}}{4npx - n - x} \quad \text{or} \quad m = \frac{(4np)^{2\alpha}4n^2y - \dfrac{n((4np)^{2\alpha+1}-1)}{4np-1}}{4npy - y - p} \text{")}.$$

[14] Cf. n° 60, note 7.

[15] Euler had noticed this: see the last sentence of the paragraph starting at note 9 in n° 60.

[16] Cf. n° 59, note 2.

[17] Cf. n° 60, note 11.

[18] In his copy, Goldbach marked this passage in the margin and noted: "*emendand*[*um*]" ("to be corrected"). Indeed he retracted his calculation in a PS sent a week later: cf. n° 63, note 3. In the meantime, Euler's numerical approximation had yielded a value that differed substantially from Goldbach's, and he did not see how to arrive at Goldbach's claim: see his reply n° 64, note 7.

[19] Euler had shown in his last letter (cf. n° 61, note 2) that this sum equals

$$\beta = \zeta(2)\zeta(4) - \frac{1}{2}\zeta(3)^2 = \frac{\pi^5}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5} - \frac{1}{2}z^3,$$

which differs from Goldbach's claim.

[20] Here Euler noted between the lines, preparing his reply:

$$\begin{aligned} BB &= 1.44494 \\ \frac{11\pi^6}{2\cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7} &= 1.86513 \\ \frac{1}{3}E &= 0.33911 \\ \frac{\pi^6}{2 \cdot 3^3 \cdot 7} &= 2.54335. \end{aligned}$$

As confirmed by these calculations (cf. n° 64, note 8), Euler's original claim in n° 61 – derived by the same methods Goldbach had proposed – was correct.

[21] Nothing is known about this letter.

[22] This sentence, which refers to n° 61, note 3, has been added in the margin.

63

GOLDBACH TO EULER

Petersburg, February (1st) 12th, 1743[1]

Feb. 12th, 1743.

As I am just now writing to Königsberg,[2] I wanted to enclose the present post-script to my last letter to you, Sir, and at the same time to correct another mistake that crept in; for the sum[3]

$$p = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) - \ldots$$

does not equal $z - \dfrac{\pi^2 \log 2}{6} + \dfrac{\log 2}{2}$ but $z - \dfrac{\pi^2 \log 2}{6} + u$ where

$$u = 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{9}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{16}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + ^{[4]} \ldots;$$

if one moreover defines

$$v = 1 - \frac{1}{2^2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4^2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots,$$

one has $u + v = \dfrac{\pi^2 \log 2}{3}$.

I have further observed that, defining

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$
$$B = \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{7}{3 \cdot 4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{9}{4 \cdot 5}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \ldots,$$

one will have

$$\frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots$$

I do not know whether up to now this kind of case, where one series that equals ∞ is divided by another that also equals ∞, has been particularly investigated;[5] I do not want to take the trouble and inspect what terms should result by actually dividing series B by $2A$, as I suppose they should look very confused.

If one moreover defines

$$C = 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3}\right) + \ldots,$$

one has

$$\frac{C}{A} = \frac{B}{2A} = z = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots;$$

however it does not follow from this that $2C = B$, but only that $2C - B$ is an infinitely small quantity with respect to B or C.

[1] Goldbach's copy has the heading "*Ad eundem d. Febr.*" ("To the same, Feb. ...th"), so the exact date is missing.
[2] The addressee of the letter with which Goldbach enclosed this supplement has not been determined.
[3] Cf. nº 62, note 18.
[4] Here an erroneous minus sign in the original has been corrected from Goldbach's copy.
[5] Cf. nº 66, note 6.

64
Euler to Goldbach
Berlin, February 26th, 1743

Sir,

after offering my most obedient congratulations on your fortunate return to St. Petersburg, I am in a position to give you reliable news about an edition of the *Dictionnaire de Trevoux*. This has been printed last year at Basel by Mr. Christ (who inherited Brandmüller's book trade); it consists of 6 volumes in folio and costs 30 guilders or about 15 roubles. The title is: *Dictionnaire de Trevoux, nouvelle Edition considerablement augmentée*, 6 *Vol. fol.*, 1742; some copies will soon be available here.[1]

The Danzig edition of the Psalms which you mention[2] is not known to me, but I have been assured by some people who have seen both this edition and the new one that the latter is to be preferred by far. Also the hymn tunes and the subdivisions used by Lobwasser have been kept unchanged in it, so that one may use it in church. There are many copies to be had here, and you just have to give the order, Sir, if I should send you one when the opportunity arises.

Recently the Commission appointed to rule the Academy most graciously confirmed the pension that I had been promised, and Admiral Count Golovin is very insistent that I should soon submit my *Scientia navalis* for a handsome compensation. I have by now quite completed it and just asked permission to have it copied first.[3]

Even if I cannot generally prove the statement I made about the imaginary roots of equations, that these can always be taken in pairs so that both the product and the sum of each pair become real, I can do so for all equations of degree lower than six[4] and also for the much more general equation

$$\alpha x^{5n} + \beta x^{4n} + \gamma x^{3n} + \delta x^{2n} + \varepsilon x^{n} + \zeta = 0,$$

where n denotes any whole number. So the case that you reported, Sir,[5] presents no difficulty. However I think there must be a small oversight in your expressions, as they do not match; for if $c = 1 + \sqrt{-2}$ and $f = -20$, $\sqrt{4c^4 - f}$ becomes $\dfrac{6\sqrt{2}}{1+\sqrt{-2}}$ and not $\dfrac{18}{1+\sqrt{-2}}$.

After retracing your steps, Sir, I think you may have come upon the equation

$$x^4 + 8\left(\alpha^2 + \beta^2\right) x\sqrt{2}\left(\beta^2 - \alpha^2\right) + 12\alpha^4 - 40\alpha^2\beta^2 + 12\beta^4 = 0,$$

which at first sight is resolved into those two imaginary factors:

$$x^2 + 2\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)x + 4\alpha\beta\sqrt{-1} - 2\left(\beta^2 - \alpha^2\right) - 2\left(\alpha - \beta\sqrt{-1}\right)\sqrt{2}\left(\beta^2 - \alpha^2\right) = 0$$
$$x^2 - 2\left(\alpha - \beta\sqrt{-1}\right)x + 4\alpha\beta\sqrt{-1} - 2\left(\beta^2 - \alpha^2\right) + 2\left(\alpha - \beta\sqrt{-1}\right)\sqrt{2}\left(\beta^2 - \alpha^2\right) = 0,$$

so that the four roots should be very complicated. Nevertheless the very same equation is also the product of these two real factors:

$$x^2 + 2x\sqrt{2}\left(\beta^2 - \alpha^2\right) + 6\beta^2 - 2\alpha^2 = 0$$
$$x^2 - 2x\sqrt{2}\left(\beta^2 - \alpha^2\right) + 2\beta^2 - 6\alpha^2 = 0,$$

which illustrates the truth of my theorem. But anyway, if two imaginary factors were to make up by multiplication the real product $x^4 + Bx^2 + Cx + D$, they should have to be of the following form:

$$x^2 + \left(b + c\sqrt{-1}\right)x - a^2 - ab + bc\sqrt{-1} + ac\sqrt{-1}$$
$$x^2 - \left(b + c\sqrt{-1}\right)x - a^2 + ab + bc\sqrt{-1} - ac\sqrt{-1}.$$

But in fact the product of these two imaginary factors can also be resolved into the following two real factors:

$$\left(x^2 + 2ax + a^2 - b^2\right)\left(x^2 - 2ax + a^2 + c^2\right).$$

In the same way, if an equation has the following four imaginary roots

$$\text{I.}\quad x = p + q\sqrt{-1} + \sqrt{\left(p^2 + 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r - s\sqrt{-1}\right)}$$
$$\text{II.}\quad x = p + q\sqrt{-1} - \sqrt{\left(p^2 + 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r - s\sqrt{-1}\right)}$$
$$\text{III.}\quad x = p - q\sqrt{-1} + \sqrt{\left(p^2 - 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r + s\sqrt{-1}\right)}$$
$$\text{IV.}\quad x = p - q\sqrt{-1} - \sqrt{\left(p^2 - 2pq\sqrt{-1} - q^2 - r + s\sqrt{-1}\right)},$$

I define, in order to abbreviate, $p^2 - q^2 - r = t$, $2pq - s = u$; then, firstly, $\sqrt{t^2 + u^2} \pm t$ will always be a positive quantity and therefore $\sqrt{\pm\, t + \sqrt{t^2 + u^2}}$ a real quantity. Taking this for granted, the sum of roots I + III equals

$$2p + \sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}},$$

the sum of II + IV equals

$$2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{t^2 + u^2}},$$

the product of roots I · III is

$$p^2+q^2+p\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+q\sqrt{-2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+\sqrt{t^2+u^2}$$

and the product of roots II · IV

$$p^2+q^2-p\sqrt{2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+q\sqrt{-2t+2\sqrt{t^2+u^2}}+\sqrt{t^2+u^2},$$

so all these quantities are real.

Your transformation[6] of the formula $4pmn-m-n \neq \square$ into $4npq-p-q \neq \square$ by way of the substitution $m=4n^2q-n$ can shed much light towards a proof; for if one could just prove that $4pmn-m-n$ is no square when m is any number of the form $4n^2q-n$, it should at the same time be proved that $4pmn-m-n$ can in no case be a square. Another similar transformation is effected by the substitution

$$m=(4np)^{2\alpha}\,x-\frac{n\left((4np)^{2\alpha}-1\right)}{4np-1}$$

or

$$m=4n^2\,(4np)^{2\alpha}\,y-\frac{n\left((4np)^{2\alpha+1}-1\right)}{4np-1}.$$

I can in no way arrive at your result[7] that the series

$$r=\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)-\ldots$$

equals $\frac{\left(\pi^2-3\right)\log 2}{6}$; indeed, as all terms can be developed into the form $\frac{1}{x^2\,(x+n)}$ and

$$\frac{1}{x^2\,(x+n)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(x+n)},$$

it follows by the method which you, Sir, most kindly communicated to me, that

$$r=\frac{\pi^2\log 2}{6}-1+\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\ldots;$$

so one should have to have

$$\frac{1}{2}\log 2=1-\frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\ldots;$$

however I find the sum of this series by approximation to be $=0.7504$ and therefore greater than $\log 2$.

I calculated, also by your method, Sir, that the series

$$\beta = 1 + \frac{1}{2^5}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3^5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \ldots$$

equals $AC - \frac{1}{2}B^2$; so I think the sum $\frac{\pi^6}{2\cdot 3^3\cdot 7} - \frac{1}{2}B^2$ is suspect, since approximately $\frac{\pi^6}{2\cdot 3^3\cdot 7} = 2.543\,35$ and $\frac{1}{2}B^2 = 0.722\,47$, and thus much too great a value for β should result; this is further confirmed by your indication, Sir, that

$$b = 1 + \frac{1}{2^4}\left(1+\frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right) + \ldots = B^2 - \frac{11\pi^6}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7};$$

for as $B^2 = 1.444\,940$ and $\frac{11\pi^6}{2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7} = 1.865\,13$, b should become negative.[8]

I render a thousand thanks for the method that you so kindly communicated to me, Sir, for it leads far more easily and naturally to these series than the one I used, which is very awkward. However, to apply this wonderful method to the cases that follow, I made use of this lemma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^n(x+a)^n} &= \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{(x+a)^n}\right) - \frac{n}{a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)\\ &\quad + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right)\\ &\quad - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3a^{n+3}}\left(\frac{1}{x^{n-3}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-3}}\right) + \ldots\end{aligned}$$

and so on, until one arrives at the first powers of x and $x+a$. When n is an even number, in the ambiguous signs the upper ones hold, otherwise the lower ones. If there are also unequal powers to be multiplied with one another, this lemma will serve:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^m(x+a)^n} &+ \frac{1}{x^n(x+a)^m}\\ &= \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{x^m} \pm \frac{1}{(x+a)^m}\right) - \frac{n}{1a^{n+1}}\left(\frac{1}{x^{m-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{m-1}}\right)\\ &\quad + \frac{n(n+1)}{1\cdot 2a^{n+2}}\left(\frac{1}{x^{m-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{m-2}}\right) - \ldots\\ &\quad + \frac{1}{a^m}\left(\frac{1}{x^n} \pm \frac{1}{(x+a)^n}\right) - \frac{m}{1a^{m+1}}\left(\frac{1}{x^{n-1}} \mp \frac{1}{(x+a)^{n-1}}\right)\\ &\quad + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2a^{m+2}}\left(\frac{1}{x^{n-2}} \pm \frac{1}{(x+a)^{n-2}}\right) - \ldots\end{aligned}$$

Now, defining

$$P = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \dots,$$
$$Q = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots$$

and

$$Z = 1 + \frac{1}{2^{m+n}} + \frac{1}{3^{m+n}} + \frac{1}{4^{m+n}} + \dots,$$

one finds

$$\begin{aligned} PQ - Z = {} & + \frac{1}{1 \cdot 2^m} + \frac{1}{2^n \cdot 3^m} + \frac{1}{3^n \cdot 4^m} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2^n} + \frac{1}{2^m \cdot 3^n} + \frac{1}{3^m \cdot 4^n} + \dots \\ & + \frac{1}{1 \cdot 3^m} + \frac{1}{2^n \cdot 4^m} + \frac{1}{3^n \cdot 5^m} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 3^n} + \frac{1}{2^m \cdot 4^n} + \frac{1}{3^m \cdot 5^n} + \dots \\ & + \frac{1}{1 \cdot 4^m} + \frac{1}{2^n \cdot 5^m} + \frac{1}{3^n \cdot 6^m} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 4^n} + \frac{1}{2^m \cdot 5^n} + \frac{1}{3^m \cdot 6^n} + \dots \\ & \qquad \dots \qquad\qquad\qquad \dots \end{aligned}$$

Now by multiplying both equal and unequal powers into one another – as you undoubtedly did, Sir – I find, as I already reported before this, $\beta = AC - \frac{1}{2}B^2$ and $b = BB - \frac{1}{3}E$, and if one continues by setting

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{1}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2^3}\right) + \dots, \\ \beta &= 1 + \frac{1}{2^6}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots, \\ \gamma &= 1 + \frac{1}{2^7}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots, \end{aligned}$$

one finds $\gamma = AE - BD + \frac{1}{2}C^2$ and $2\alpha + 5\beta = 10BD - \frac{9}{2}C^2$, where A, B, C, D, etc. keep the values indicated above.

The series $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$ still refuses to be treated in any way; I lately found by approximation that $B^2 = A - \frac{1}{5}$, which coincides rather precisely but all the same does not hold water, for in fact $B^2 = 1.444\,940\,798\,43$ and $A = 1.644\,934\,066\,84$, therefore $A - \frac{1}{5} = 1.444\,934\,066\,84$ and

$$B^2 = A - \frac{1}{5} + \frac{673}{100\,000\,000}.$$

On the other hand there is a remarkable connection between the series $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \dots$ and the fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{3}{10}, \frac{5}{6}, \frac{691}{210}, \frac{35}{2}$, etc. noted a long time ago. For if

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{5}{6} - \frac{691}{210} + \frac{35}{2} - \dots,$$

then $B = 1 + \frac{1}{2}s$. The proof of this statement is in my paper *De inventione termini summatorii ex dato termino generali*.[9] Now, defining $Z = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dots \dfrac{1}{x^3}$ and $B = 1 + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \dots$ continued to infinity, one has

$$\begin{aligned} B = Z \quad &+ \quad \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2x^8} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2x^{10}} \\ &+ \quad \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2x^{12}} - \frac{691}{210} \cdot \frac{1}{2x^{14}} + \dots \end{aligned}$$

So, assuming x to be an arbitrary number, say 10, one can determine Z by actually performing the addition; indeed this yields

$$Z = 1.197\,531\,985\,674\,193\,251\,668\,686\,286\,978\,0.$$

Consequently,

$$B = Z + \frac{1}{200} - \frac{1}{2000} + \frac{1}{40\,000} - \frac{1}{12\,000\,000} + \frac{1}{1\,200\,000\,000} - \dots$$

and thus one gets

$$B = 1.202\,056\,903\,159\,594.$$

In the same way, the sums of the series made up from other powers can be determined after one has actually added a few initial terms. Let, e. g.,

$$Z = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots \frac{1}{x^n}$$

and

$$N = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots \text{ to infinity:}$$

then one will have

$$\begin{aligned} N \quad = \quad & Z + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot x^n} + \frac{n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2x^{n+1}} - \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{6x^{n+3}} \\ & + \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{6x^{n+5}} - \frac{n\,(n+1) \cdots (n+6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9} \cdot \frac{3}{10x^{n+7}} \\ & + \frac{n\,(n+1)\,(n+2) \cdots (n+8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 11} \cdot \frac{5}{6x^{n+9}} - \frac{n\,(n+1) \cdots (n+10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 13} \cdot \frac{691}{210x^{n+11}} + \dots \end{aligned}$$

By this rule I calculated the following sums close to the true values:

$$
\begin{array}{lll}
1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots & = 1.644\,934\,066\,848\,226\,436 & = A \\
1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots & = 1.202\,056\,903\,159\,594\,281 & = B \\
1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots & = 1.082\,323\,233\,711\,138\,191 & = C \\
1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\ldots & = 1.036\,927\,755\,106\,863\,293 & = D \\
1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots & = 1.017\,343\,061\,984\,449\,139 & = E \\
1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\ldots & = 1.008\,349\,277\,386\,601\,872 & = F \\
1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\ldots & = 1.004\,077\,356\,197\,944\,339 & = G \\
1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}+\ldots & = 1.002\,008\,392\,826\,082\,210 & = H \\
1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\ldots & = 1.000\,994\,575\,127\,618\,085 & = I \\
1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\ldots & = 1.000\,494\,188\,604\,194\,651 & = K \\
1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\ldots & = 1.000\,246\,086\,553\,308\,048 & = L \\
1+\frac{1}{2^{13}}+\frac{1}{3^{13}}+\ldots & = 1.000\,122\,713\,347\,585\,744 & = M \\
1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\ldots & = 1.000\,061\,248\,135\,058\,704 & = N \\
1+\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{3^{15}}+\ldots & = 1.000\,030\,588\,236\,307\,020 & = O \\
1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\ldots & = 1.000\,015\,282\,259\,408\,657 & = P
\end{array}
$$

Soon Tome 7 of the Berlin *Miscellanea* will appear; it is going to be quite a big volume, since there are nearly 28 sheets of mine alone in the mathematical class. Among these there is a large paper about last year's comet and a new method for summing the series $1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\ldots$, which proceeds solely by differentiation.[10]

Some weeks ago another comet has been sighted here, which however was very small and had no tail; it also was observed for 10 days only, going from Draco through Ursa major into Leo minor, but there was no sufficiently accurate observation made by which one might determine its course.[11]

The four-volume edition of Johann Bernoulli's *Opera omnia* will soon issue from the press; they will be dedicated to our King.[12]

I very much wonder, Sir, whether you are no longer connected to the Academy in any way. All my family asks to be most obediently recommended to you, and I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Feb. 26th, 1743.

[1] On Goldbach's interest in the "Dictionnaire de Trévoux", see nº 51, note 18, and nº 55, note 23. The seemingly precise information Euler provides here is somewhat perplexing: No edition of the "Dictionnaire de Trévoux" – which actually bore the title *Dictionnaire universel françois & latin …* – could be traced that was published at Basel; the 1740 edition that figures in the bibliographies (e. g., F. Weil 1991) bears the imprint of Pierre Antoine at

Nancy, the one that appeared in 1743 that of the widow Delaulne in Paris. On the other hand, Brandmüller and his successor Christ at Basel did publish a six-volume dictionary in 1740, but this is an edition of a different work, *Le grand dictionnaire historique ...* originally compiled by Louis Moréri.
It cannot now be established where Euler got his information and what Goldbach made of it; in particular we do not know which of the works just mentioned Euler finally managed to find at Berlin in 1745 (see n° 89, note 2) and whether he bought it for Goldbach. Both the Trévoux and the Moréri dictionaries are part of a ramified network woven by a multitude of 18th-century lexicographers, educationalists, publishers, printers and booksellers.

[2] Cf. n° 62, note 6.

[3] On December 25th, 1742, Euler had appealed to Count N.F. Golovin, who chaired the *ad interim* supervising committee of the Petersburg Academy (cf. n° 58, note 8), to confirm the foreign member's pension he had been promised in May (cf. n° 43, note 4, and n° 52, note 3; for Euler's letter R 911 see JW 3, p. 49–50). No direct communication from Golovin to Euler has been retrieved, but in January 1743 the Academy's Secretary S.S. Volchkov assured him (R 2660: *Materialy* 1885, t. V, p. 509) that, if Euler sent in the monographs on navigation and calculus he had promised, the Academy would keep its part of the bargain. A few weeks earlier Euler had actually sounded Goldbach out whether the Academy would mind if he published those books elsewhere (cf. n° 58, note 9), but now he told Volchkov (R 2661: JW 3, p. 252–254) that he would dispatch them to Petersburg: the *Scientia Navalis* as soon as he could have a copy made, the textbooks on analysis when they were completed.

[4] Cf. n° 58, notes 12–14.
Euler's proof of the Fundamental Theorem of Algebra for real polynomials of degree 4 and 5 was presented to the Berlin Academy in 1746 and published in 1751 in E. 170, § 27–31. See also Bashmakova 1957.

[5] Cf. n° 62, note 10.

[6] Cf. n° 62, note 13.

[7] Cf. n° 62, note 18, and n° 63, note 3.

[8] Cf. n° 62, note 20.

[9] Cf. E. 47 (which actually bears the title *Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali*) and *Institutiones* (E. 212), Part II, Ch. 5–6.
The "Euler-MacLaurin summation formula" has often been discussed in the literature: see, e. g., Faber's introduction in O. I/16.2, p. XVI–XXXIX, Hofmann 1959, p. 177–195, Varadarajan 2006, p. 113–124, and Sandifer 2007a.
Setting $x = 1$ in the equation that follows, Euler finds

$$B = \zeta(3) = 1 + \frac{1}{2}\Big(\sum (n+1)B_n\Big).$$

This series is divergent, but Euler uses it to find approximations of $\zeta(3)$ by computing the sum of the series "until it begins to diverge". Computing $s = \sum (n+1)B_n$ via Borel summation (see, e. g., Varadarajan 2006, p. 152–158), we find

$$s = \int_0^\infty \frac{t^2}{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}\, dt.$$

The last integral is a special case (cf. also *supra* n° 25) of

$$\int_0^\infty \frac{t^n}{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}\, dt = n!\,(\zeta(n+1) - 1)$$

for all $n > 1$. This, in turn, can be proved as follows (see "engelbrekt" 2010): Setting $s = n+1$ in the equation

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt,$$

we easily get

$$n!\,\zeta(n+1) = \int_0^\infty \frac{t^n}{\mathrm{e}^t - 1}\, dt = \int_0^\infty \frac{t^n \mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}\, dt = \int_0^\infty \Big(t^n \mathrm{e}^{-t} + \frac{t^n}{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}\Big) dt$$
$$= n! + \int_0^\infty \frac{t^n}{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t}\, dt,$$

which implies the claim.

[10] Cf. nº 52, note 13.

[11] This comet (C/1743 X1 in Kronk's *Cometography*) was actually first discovered by Grischow at the Berlin Observatory on February 10th, shortly after it had passed the Earth at a distance of only 0.039 AU; it was also observed at Paris, Vienna and Bologna and last seen on February 28th.
On calculations of its orbit and, in particular, the possibility that it might be identical to an object (re)discovered in 1819 and in 2003, see nº 130, note 12.

[12] Cf. nº 58, note 9.

65
Goldbach to Euler
Petersburg, March (7th) 18th and (12th) 23rd, 1743

March 18th, 1743.

Sir,

at last the new proof presents itself.[1] It consists of the following:

Lemma 1: If equation B: $4mn - m - 1 = a^2$ is not possible in the case where m is a number of the form $4u - 1$, it will not be possible either in any other case for m, as was shown in an earlier letter.

Lemma 2: If equation B is true, C: $4Mn - M - 1 = A^2$ will also be true if one sets $M = 2a + m + 4n - 1$, for then $A = a + 4n - 1$.

However, equation C cannot hold unless M is a number of the form $4v - 1$ (by Lemma 1); consequently $M = 4v - 1 = 2a + 4n - 1 + 4u - 1$, so $4v = 2a + 4n + 4u - 1$, i. e., an even number equals an odd number, which is a contradiction; therefore equation B is also contradictory.

In a similar vein equation D:[2] $4pmn - m - n\,[= a^2]$ must be rejected, since it cannot be true unless m is of the form $4n^2q - n$ (as was shown in the earlier letter); but then, by setting $M = ((4pn - 1) + 2a + m)$, $A = 4pn - 1 + a$, one will have $4pnM - M - n = A^2$; however, since m is of the form $4n^2q - n$ and M of the form $4n^2Q - n$, one will have $4pn - 1 + 2a + 4n^2q = 4n^2Q$, i. e., an odd number equal to an even number, which is a contradiction; so equation D is also contradictory.

My suggestion about imaginary roots[3] basically amounts to this: the following four roots

$$x = \begin{cases} -\dfrac{a}{2} \pm \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} + \sqrt{\dfrac{a^4}{4} - f}} \\ +\dfrac{a}{2} \pm \sqrt{-\dfrac{a^2}{4} - \sqrt{\dfrac{a^4}{4} - f}} \end{cases}$$

multiplied together yield $x^4 \pm 2a\left(\dfrac{a^4}{4} - f\right)^{\frac{1}{2}} x + f = 0$, so whenever f and $2a\sqrt{\dfrac{a^4}{4} - f}$ are real numbers, two of these roots multiplied together must produce real numbers; however, if you can prove the truth of your statement for all equations of the fourth degree, as you reported in your last letter, Sir,[4] the doubt I expressed ceases *ipso facto.*

From the evidence adduced in your letter, Sir, I understand that the sum I indicated was based on a mistake;[5] thus I have to apply a remark Mr. Vaugelas makes in his *Remarques sur la Langue Françoise* by saying that if he were found to have written otherwise than he ought to according to his *Remarques*, people should not follow his example but his rules.[6] Thus I am very glad that you detected something good in my method notwithstanding that some mistakes crept into the examples I mentioned.

If I had known earlier about your lemma, Sir, according to which $\dfrac{1}{x^m (x+a)^n}$ is resolved into some other series, I could have determined the aforesaid sums much more easily and neatly. Meanwhile I noticed that, if the sum of the series whose general formula is $\dfrac{1}{(3x-2)^2}$ is taken to be known and set equal to a, then all the series whose general term is $\dfrac{1}{(6x+p)^2}$, where p is any whole number, can be expressed by a and by the quadrature of the circle. On the other hand, I cannot reduce the series of the form $\dfrac{1}{(12x+p)^2}$, where p is some given number, otherwise than by assuming as known the sums for the three cases $p = 11$, $p = 10$, $p = 9$ or some other three cases equivalent to these.

I daresay it will not be difficult for you, Sir, to generalise your lemma to

$$\frac{\alpha x^{2n-2} + \beta x^{2n-3} + \gamma x^{2n-4} + \ldots}{(px+q)^n (px+r)^n};$$

taking, for example, $p = 4$, $q = -3$, $r = -1$, the sum of the series $\dfrac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{(4x-3)^2 (4x-1)^2}$ equals

$$\frac{\alpha\left(64u + \pi^2 - 6\pi\right)}{2^9} + \frac{\beta\left(16u + \pi^2 - 4\pi\right)}{2^7} + \frac{\gamma\left(\pi^2 - 2\pi\right)}{2^5},$$

where u denotes the sum of the series $\dfrac{1}{(4x-3)^2}$.

In the same vein, if $p=4$, $q=-2$, $r=0$, the sum of the series $\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{(4x-2)^2(4x)^2}$ becomes

$$\frac{\alpha\pi^2}{2^9}+\frac{\beta\left(\pi^2-8\log 2\right)}{2^8}+\frac{\gamma\left(\pi^2-12\log 2\right)}{3\cdot 2^5}.$$

If one defines $v=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\ldots+\dfrac{1}{n}$,

$$\begin{aligned}
A \;&=^{[7]}\; \frac{1}{n^2(n+1)}-\frac{(2n+1)}{(n+1)^2n^2}\left(v+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{\pi^2}{6(n+1)n},\\
B \;&=\; \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}-\frac{(2n+3)}{(n+2)^2(n+1)^2}\left(v+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\\
&\quad+\frac{\pi^2}{6(n+2)(n+1)},\\
C \;&=\; \frac{1}{(n+2)^2(n+3)}-\frac{(2n+5)}{(n+3)^2(n+2)^2}\left(v+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\\
&\quad+\frac{\pi^2}{6(n+3)(n+2)},
\end{aligned}$$

the quantities AC and B^2 will differ the less from one another the greater the number n is taken.

I think the remark about the sum of series B that you made in your letter is very curious. I do not recall having seen your paper *De inventione termini summatorii*; I do not even know whether it was published at Berlin or here.[8] For the sums communicated to me by their decimal expansions I give you my humble thanks. It is not clearly discernible whether the last digit in $P=1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\ldots$ should be 1 or 7; all the same this does not matter much.[9] I remain with particular respect, Sir,

your most devoted servant
Goldbach.

St. Petersburg, March 23, 1743.

[1] Goldbach here submits another attempt to prove the equivalence statement first proposed in nº 57; see, however, Euler's reply in nº 66.

[2] In the equation that follows, "$=a^2$" is missing in the original; it has been filled in from Goldbach's copy, where it was added later between the lines.

[3] Cf. nº 62, note 10.

[4] Cf. nº 64, note 4.

[5] Cf. nº 62, notes 18–20, and nº 64, notes 7–8.

[6] In his work on the subtleties of good French prose style, Vaugelas notes: "If it is found that in this work the author does not always comply with his own remarks, he declares that this is his own or the printer's fault, and people should keep to his remarks and not to the way the author may have sinned against them" ("S'il se trouve qu'en cet Ouvrage l'Autheur n'observe

pas tousjours ses propres Remarques, il declare que c'est sa faute ou celle de l'Imprimeur, & qu'il s'en faut tenir à la Remarque, & non pas à la façon dont l'Autheur en aura usé contre sa Remarque ...": Vaugelas 1647, next-to-last page of the *Preface*).

[7] On the sign that has been rendered by $\dot{+}$ in the original text of this formula, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.

[8] Cf. n° 64, note 9.
The text of Goldbach's copy ends here.

[9] In his reply (see n° 66, note 4), Euler states that his calculations have yielded a 7 for the 18th digit of $\zeta(16)$; in the original manuscript of n° 64, the ambiguous digit seems to have been amended in this sense by Goldbach or some later reader. (Strangely, the digit *should* actually be a 1 or, with correct rounding, a 2: see, e. g., Stieltjes' 30-digit calculation from 1887.)

66
Euler to Goldbach
Berlin, April 9th, 1743

Sir,

I am most humbly obliged to you for the proof, which you most kindly communicated to me, that $4mn - m - 1$ cannot be a square number. Because of the numerous exclusive and universal propositions which appear in it, the reasoning is so deep that it took me a lot of trouble before I could entirely understand and disentangle it; moreover, the ordinary rules of logic seem to me to be hardly sufficient to do so. Everything is based on the first lemma, and if this is correct, nothing at all can be objected against the proof. Now with regard to this lemma, Sir, you refer to your earlier letters,[1] from which I have extracted the following proof:

I. If $4nx - x - 1$ is a square in the case where $x = m$, it will also be a square in the case $x = 16mn^2 - 4n - 1$.

II. Thus if $4nx - x - 1$ is not a square in the case where $x = 16mn^2 - 4n - 1$, then the same formula $4nx - x - 1$ will not be a square in the case $x = m$.

III. Now, since $16mn^2 - 4n - 1$ is contained in the form $4v - 1$, if one can prove that the formula $4nx - x - 1$ cannot be a square in the case where $x = 4v - 1$, then it is certain that the formula $4mn - m - 1$ cannot be a square.

IV. Therefore the formula $4mn - m - 1$ will never yield a square unless that square equals the formula $4nx - x - 1$ where x is some number of the form $4v - 1$.

V. Consequently, since the formulae $4mn - m - 1$ and $4nx - x - 1$ agree, the formula $4mn - m - 1$ cannot be a square unless m is a number of the form $4v - 1$.

If this last conclusion is correct – and this is what your first lemma amounts to, Sir – all the rest of the proof is perfect. All the same, it is this last inference which arouses in me a scruple that I cannot quite express in words. However I can demonstrate that this scruple I have is legitimate by showing that by the same argument one could prove that $4mn - m + 1$ cannot be a square unless m is a number of the form $4v + 1$, which is untrue. That proof should read as follows:

I. If $4nx - x + 1$ is a square in the case where $x = m$, it will also be a square in the case $x = 16mn^2 + 4n + 1$; indeed, $64mn^3 - 16mn^2 + 16n^2 = 16n^2\,(4mn - m + 1)$.

II. Thus if $4nx - x + 1$ is not a square in the case where $x = 16mn^2 + 4n + 1$, the form $4mn - m + 1$ will not be a square.

III. Now, as $16mn^2 + 4n + 1$ is contained in the form $4v + 1$, if one can prove that the formula $4nx - x + 1$ cannot be a square in the case where $x = 4v + 1$, it should at once be certain that the formula $4mn - m + 1$ cannot yield any square at all.

IV. Therefore the $4mn - m + 1$ will never yield a square unless that square equals the formula $4nx - x + 1$ in some case with $x = 4v + 1$.

V. Consequently, since the formulae $4mn - m + 1$ and $4nx - x + 1$ agree, the formula $4mn - m + 1$ cannot be a square unless m is a number of the form $4v + 1$.

Now it is certain that a fault lies hidden in this proof, and therefore the preceding one, which is identical in every respect, cannot be admitted either. But perhaps you shall be able, Sir, to give another proof of your first lemma, which does not suffer from this difficulty; then the easiest way to recognise its correctness should be for you to investigate whether the same argument cannot be applied to the formula $4mn - m + 1$.

With regard to your other proof, viz., that $4pmn - m - n$ cannot be a square, the whole question similarly depends on really proving that this formula cannot yield a square unless m equals $4n^2q - n$. If this statement were correct, the rest of the proof should not even be necessary, as by the same reasoning it should also result that $n = 4m^2r - m$, and therefore simultaneously $m < n$ and $n < m$, which is impossible. Moreover, in exactly the same manner one should be able to prove that $pmn - m - n$ can never be a square, for according to the argument just explained, $pmn - m - n$ could not possibly ever be a square unless $m = n^2q - n$; however, this conclusion should in fact not be true.

On the other hand, notwithstanding my sense that there must be a fault in the argument, I have to admit I cannot expose and explain it clearly, though this should be most important in order to avoid the more surely the same mistake in other cases.

My rule for resolving an expression such as $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \dots}{(px - q)^m \, (rx - s)^n}$ into its simple parts whenever $k < m + n$ works as follows:[2]

Suppose the parts that we are looking for to be

$$\frac{A}{(px-q)^m} + \frac{B}{(px-q)^{m-1}} + \frac{C}{(px-q)^{m-2}} + \frac{D}{(px-q)^{m-3}} + \dots + \frac{M}{px-q}$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{(rx-s)^n} + \frac{\mathfrak{B}}{(rx-s)^{n-1}} + \frac{\mathfrak{C}}{(rx-s)^{n-2}} + \frac{\mathfrak{D}}{(rx-s)^{n-3}} + \dots + \frac{\mathfrak{M}}{rx-s}.$$

For brevity's sake, let $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \dots}{(rx - s)^n} = Q$ and calculate by repeated differentiation, taking dx as constant, the values $\dfrac{dQ}{dx}$. $\dfrac{ddQ}{dx^2}$, $\dfrac{d^3Q}{dx^3}$, $\dfrac{d^4Q}{dx^4}$, etc.; then

$$\begin{aligned}
&A = Q && \text{substituting } x = \frac{q}{p}\\
&B = \frac{1}{1p}\cdot\frac{dQ}{dx} && \text{substituting } x = \frac{q}{p}\\
&C = \frac{1}{1\cdot 2p^2}\cdot\frac{ddQ}{dx^2} && \text{substituting } x = \frac{q}{p}\\
&D = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3p^3}\cdot\frac{d^3Q}{dx^3} && \text{substituting } x = \frac{q}{p}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Similarly, letting $\dfrac{ax^k + bx^{k-1} + cx^{k-2} + \dots}{(px-q)^m} = S$, one will have

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} = S && \text{substituting } x = \frac{s}{r}\\
&\mathfrak{B} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dS}{dx} && \text{substituting } x = \frac{s}{r}\\
&\mathfrak{C} = \frac{1}{1\cdot 2r^2}\cdot\frac{ddS}{dx^2} && \text{substituting } x = \frac{s}{r}\\
&\mathfrak{D} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3r^3}\cdot\frac{d^3S}{dx^3} && \text{substituting } x = \frac{s}{r}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Thus if the formula $\dfrac{ax^2+bx+c}{(4x-3)^2(4x-1)^2}$ is proposed, in order to determine the parts

$$\frac{A}{(4x-3)^2} + \frac{B}{4x-3} + \frac{\mathfrak{A}}{(4x-1)^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x-1},$$

firstly one has $Q = \dfrac{ax^2+bx+c}{(4x-1)^2}$; $\dfrac{dQ}{dx} = \dfrac{2ax+b}{(4x-1)^2} - \dfrac{8\left(ax^2+bx+c\right)}{(4x-1)^3}$, and substituting $x = \dfrac{3}{4}$ (since $p = 4$ and $q = 3$), this yields

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\frac{9}{16}a + \frac{3}{4}b + c}{4} = \frac{9}{64}a + \frac{3}{16}b + \frac{1}{4}c\\
B &= \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{3}{2}a + b}{4} + \frac{-\frac{9}{2}a - 6b - 8c}{8}\right) = -\frac{3}{64}a - \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c.
\end{aligned}$$

Secondly, $S = \dfrac{ax^2+bx+c}{(4x-3)^2}$, $\dfrac{dS}{dx} = \dfrac{2ax+b}{(4x-3)^2} - \dfrac{8\left(ax^2+bx+c\right)}{(4x-3)^3}$, and substituting $x = \dfrac{1}{4}$ (since $r = 4$ and $s = 1$), this yields

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \frac{\frac{1}{16}a + \frac{1}{4}b + c}{4} = \frac{1}{64}a + \frac{1}{16}b + \frac{1}{4}c\\
\mathfrak{B} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{1}{2}a + b}{4} + \frac{\frac{1}{2}a + 2b + 8c}{8}\right) = \frac{3}{64}a + \frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c.
\end{aligned}$$

Consequently, the proposed expression $\dfrac{ax^2+bx+c}{(4x-3)^2(4x-1)^2}$ is resolved into these parts:

$$\begin{aligned}
&+a\left(\frac{9}{64(4x-3)^2}-\frac{3}{64(4x-3)}+\frac{1}{64(4x-1)^2}+\frac{3}{64(4x-1)}\right)\\
&+b\left(\frac{3}{16(4x-3)^2}-\frac{1}{8(4x-3)}+\frac{1}{16(4x-1)^2}+\frac{1}{8(4x-1)}\right)\\
&+c\left(\frac{1}{4(4x-3)^2}-\frac{1}{4(4x-3)}+\frac{1}{4(4x-1)^2}+\frac{1}{4(4x-1)}\right).
\end{aligned}$$

Thus, if the given expression is the general term of some infinite series, because of[3]

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{4x-3}-\int\frac{1}{4x-1} &= \frac{\pi}{4},\\
\int\frac{1}{(4x-3)^2}+\int\frac{1}{(4x-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}$$

and

$$u=\int\frac{1}{(4x-3)^2}$$

(as you assumed, Sir), the sum of that series will equal

$$\begin{aligned}
&a\left(\frac{\pi^2}{512}+\frac{1}{8}u-\frac{3\pi}{256}\right)+b\left(\frac{\pi^2}{128}+\frac{1}{8}u-\frac{\pi}{32}\right)+c\left(\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi}{16}\right)\\
=\;&\frac{\pi^2}{512}(a+4b+16c)+\frac{u}{8}(a+b)-\frac{\pi}{256}(3a+8b+16c).
\end{aligned}$$

Thus when $a=-b$, the sum of the series can be indicated supposing only the quadrature of the circle.

In the sum of the series $1+\dfrac{1}{2^{16}}+\dfrac{1}{3^{16}}+\ldots$ that I sent you[4] the last digit is a 7, not 1.

With regard to the three formulae A, B, C, taking $v=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$, it appears evident to me that if n is a very large number, then AC approximately equals B^2; for in that case those quantities even become nearly equal to one another.

If the sum of the series $\dfrac{1}{(3x-2)^2}$ is taken to be known, the sum of the series $\dfrac{1}{(3x-1)^2}$ is also known, and since in both series the alternating terms can be summed separately, one determines from this the sum of the series $\dfrac{1}{(6x\pm n)^2}$, where n denotes any whole number; this also makes it plain that, in order to sum the series $\dfrac{1}{(12x\pm n)^2}$, three different cases for n have to be taken as known.

I rightly received your postscript dated Feb. 12th, and as I already had answered its most important points[5] and did not know that your letters are delivered free of postage, I differed my further reply until this moment. Your reflection about two series that both have infinite sum but yet keep a finite ratio among themselves[6] is very curious. One may find arbitrarily many series with these properties by the following method:

Let the sum of the series $a + b + c + d + \ldots = A$ be infinite and the sum of the series $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = B$ be finite; then

$$\begin{array}{rlllll} AB = & a\alpha & +b(\alpha+\beta) & +c(\alpha+\beta+\gamma) & +d(\alpha+\beta+\gamma+\delta) & +\ldots \\ & & +\beta a & +\gamma(a+b) & +\delta(a+b+c) & +\ldots \end{array}$$

But here the sum of the series in the lower line is finite, so it vanishes with respect to the upper one; therefore $\frac{AB}{A} = B$, or

$$\begin{aligned} & \frac{a\alpha + b(\alpha+\beta) + c(\alpha+\beta+\gamma) + d(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + \ldots}{a+b+c+d+\ldots} \\ = \; & \alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots \end{aligned}$$

Further it is also true that $b + c + d + e + \ldots = A$ and consequently $AB = b\alpha + c(\alpha+\beta) + d(\alpha+\beta+\gamma) + \ldots$; when this is added to the former equation, one has

$$2AB = (a+b)\alpha + (b+c)(\alpha+\beta) + (c+d)(\alpha+\beta+\gamma) + \ldots = C$$

and therefore $\frac{C}{2A} = B$. For

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

and

$$B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots,$$

your series result.

My paper *De inventione termini summatorii ex dato termino generali seriei*[7] has been printed in Tome 8 of the *Commentarii.* Shortly this consists in the following: setting $\overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \overset{4}{D} + \ldots + \overset{x}{X} = S$ or taking S to denote the summing term of a series whose general term is X, i. e., some quantity composed in any way from the index x, one will have

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int X\,dx + \frac{X}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{dX}{1\cdot 2\cdot 3\,dx} - \frac{1}{6}\cdot\frac{d^3X}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,dx^3} \\ & + \frac{1}{6}\cdot\frac{d^5X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7\,dx^5} - \frac{3}{10}\cdot\frac{d^7X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9\,dx^7} \\ & + \frac{5}{6}\cdot\frac{d^9X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11\,dx^9} - \frac{691}{210}\cdot\frac{d^{11}X}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13\,dx^{11}} + \ldots, \end{aligned}$$

where in the integration $\int X\,dx$ a constant must be added or subtracted which makes the entire expression equal to 0 for $x = 0$.

Thus if, e. g., the summing term of the series $1 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + \ldots\ x^8$ is to be determined, one has $X = x^8$; $\int X\,dx = \frac{1}{9}x^9$; $\dfrac{dX}{dx} = 8x^7$; $\dfrac{ddX}{dx^2} = 7\cdot 8x^6$; $\dfrac{d^3X}{dx^3} = 6\cdot 7\cdot 8x^5$; $\dfrac{d^4X}{dx^4} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^4$; $\dfrac{d^5X}{dx^5} = 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^3$; $\dfrac{d^7X}{dx^7} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x$; $\dfrac{d^9X}{dx^9} = 0$, and all further differentials vanish. Therefore,

$$S = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{2}{3}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x.$$

Thus whenever X is an entire function of x, as the degree decreases with every differentiation, there is always a summing term in finite form to be determined; but when the general term X is a fraction, the differentiation goes on to infinity, and therefore the summing term is expressed by an infinite series. In this case also the constant that must be added cannot be found otherwise than by actually adding some given number of terms and insert such a constant that the known sum for that case results. Let, e. g.,

$$S = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{x^3},$$

then $X = \dfrac{1}{x^3}$ and $\int X\,dx = \text{const.} - \dfrac{1}{2x^2}$; further, $\dfrac{dX}{dx} = -\dfrac{3}{x^4}$; $\dfrac{ddX}{dx^2} = \dfrac{3\cdot 4}{x^5}$; $\dfrac{d^3X}{dx^3} = -\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{x^6}$; $\dfrac{d^5X}{dx^5} = -\dfrac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{x^8}$; etc. Therefore

$$S = \text{const.} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2x^8} + \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2x^{10}} - \ldots$$

In order to determine the constant, one should actually add 10 terms; supposing their sum to be N, one must have $S = N$ on setting $x = 10$, so the constant equals

$$N + \frac{1}{2\cdot 10^2} - \frac{1}{2\cdot 10^3} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 10^4} - \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10^6} + \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10^8} - \ldots,$$

and from this an approximate value for the constant is easily calculated.

Subsequently one can easily find the sum of the series up to any given term, and if the sum to infinity is required, one only has to make $x = \infty$ to get $S = \text{const.}$; so the constant just determined is the sum of the series continued to infinity.

The sum obtained by performing the actual summation for the series

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+4} + \frac{1}{a^2+9} + \ldots + \frac{1}{a^2+a^2}$$

is remarkable, as by this procedure the quadrature of the circle can be so closely calculated:[8] Let

$$s = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+4} + \frac{1}{a^2+9} + \ldots + \frac{1}{a^2+a^2},$$

then $4as - \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{6a^2}$ approximately equals π. So by setting $a = 1$, one has $s = 1.5$ and $\pi = 3.166\,666\ldots$, which is too large. If $a = 2$, one has $s = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = 0.575$; $4as = 4.6$ and consequently $\pi = 3.141\,666\,66\ldots$, too large. For $a = 3$, one has

$$s = \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} = 0.343\,589\,743\,589\,743\,589\,7,$$

$$\begin{array}{llcl}
4as = & 12s & = & 4.123\,076\,923\,076\,923\,0, \\
\text{subtract} & \dfrac{3}{a} & = & 1 \\
\text{add} & \dfrac{1}{6a^2} & = & \underline{0.018\,518\,518\,518\,518\,5} \\
\text{to get} & \pi & = & 3.141\,595\,441\,595\,441\,5;
\end{array}$$

thus this expression always yields too large a value for the circumference. I subsequently inquired into its excess and determined that in fact

$$\begin{aligned}
\pi \quad = \quad & 4as - \frac{3}{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3\,a^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 7\,a^6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2^4 \cdot 5 \cdot 11\,a^{10}} \\
& - \frac{35}{2} \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 7 \cdot 15\,a^{14}} + \frac{43\,867}{42} \cdot \frac{1}{2^8 \cdot 9 \cdot 19\,a^{18}} - \frac{854\,513}{6} \cdot \frac{1}{2^{10} \cdot 11 \cdot 23\,a^{22}} \\
& + \frac{769\,779\,27}{2} \cdot \frac{1}{2^{12} \cdot 13 \cdot 27\,a^{26}} - \cdots \\
& - \frac{4\pi}{\mathrm{e}^{2\pi a} - 1},
\end{aligned}$$

where the last term becomes uncommonly small once a is taken to be of middling size; indeed, as $\mathrm{e}^{\pi} = 23.140\,69$, $\mathrm{e}^{6\pi}$ already equals $153\,552\,990$. You were once concerned, Sir, about operations to find numbers proceeding without any law at all, in order to try if one could not possibly determine the number $\pi = 3.141\,59\ldots$ in such a way.[9] Now, such irregular numbers can indeed be found by ordinary division, if one increases the divisor by one at every operation, as shown by this example:

		1	2	2	4	5	2	6	4	4	10	1	10	
dividend	1,	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
divisors	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	···
quotient	0,	4	6	4	7	8	2	7	4	3	9	0	7	

	9	6	15	6	9	18	9						
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
···	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,	etc.					
	6	3	9	3	4	9	4						

(whenever I could multiply by so much that there were no remainder left, I rather take one less in order for the division to continue to infinity). Now if one could determine the quadrature of the circle in such a way, I should think this were as good as really discovered. By the method just described, taking for a in the series $\pi = 4as - \dfrac{3}{a} + \dfrac{1}{6a^2} \ldots$ a largish number such as 10, the value of π can be rather easily calculated to many digits; however, as the coefficients proceed most irregularly, I do not think any method for determining the value of π is easier than the one I discovered a very long time ago. I do not know if you still remember this, Sir: it consists of two series which both converge strongly and can be easily summed by approximation to many digits. Indeed, let[10]

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{1}{7\cdot 2^4} + \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{1}{11\cdot 2^6} - \frac{1}{13\cdot 2^7} - \cdots \\ B &= \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{13\cdot 2^{13}} - \cdots, \end{aligned}$$

then $\pi = 4A + 2B$, or

$$\begin{aligned} \pi = 3 \quad &+ \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{5\cdot 2} - \frac{1}{6\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{10\cdot 2^3} + \frac{1}{11\cdot 2^4} \\ &- \quad \frac{1}{13\cdot 2^5} - \frac{1}{14\cdot 2^5} - \frac{1}{15\cdot 2^6} + \cdots. \end{aligned}$$

Exactly as in these series only the powers of 2 occur, I can also indicate some others in which only powers of 2 and 3 are present. Thus, setting

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \cdots$$

and

$$D = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} - \frac{1}{11\cdot 3^{11}} + \cdots,$$

one will have $\pi = 4C + 4D$. By the way, these series appear far easier to me than the one that Sharp, Machin and Lagny used when they [calculated] their many figures by the help of the series

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3\cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5\cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7\cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9\cdot 3^4} - \cdots,$$

which does not converge as strongly as one of the above and moreover suffers from the difficulty that one first has to calculate $\sqrt{3}$ to as many digits as one wants to get, and then continually to divide this cumbersome number. This is why in no term a periodic cycle of digits can occur, by which one might determine subsequent figures from those that have gone before, whereas in my series this advantage is present in every term, so that I should be perfectly willing to evaluate ten terms of my series in decimal fractions before Lagny could evolve a single one of his.

On the same day that I received your letter, Sir, I forwarded the enclosure to Leipzig.[11] As soon as some copies of the new Basel edition of the *Dictionnaire de Trévoux*[12] arrive either here or at Leipzig, I will not fail to fulfil your orders, Sir, to your full satisfaction.

As by now the High Commission appointed to rule the Academy has reached its final stage,[13] the resolution that ensues will show how far I can rely on the promises that were made to me.

Since the time when I learned from Mr. Clairaut that Mr. de Mairan received the paper that I had addressed to him last year, and asked him for a receipt, I have got no reply at all;[14] so I do not know yet whether it will be advisable to send something there this year.

Mr. Hedlinger, who is going to return to Switzerland next week,[15] Privy Councillor Vockerodt, who because of his office is not allowed to correspond with anyone,[16] Professor Strube[17] and all my family ask to be recommended to you, Sir, along with myself; I remain with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, April 9th, 1743.

[1] Cf. n° 65, note 1; for the proof of the problematic Lemma 1 Goldbach still relies on the intricate and unsound reasoning he has communicated in n° 57, note 4.

[2] In 1731 Goldbach had received only a tentative answer to his question about partial fraction decomposition for multiple zeros (cf. n° 14, note 2, and n° 15); by now Euler has reworked and clarified his ideas, soon to be published in E. 163. Cf. also *Institutiones* (E. 212), Part II, § 411.

[3] The "integral signs" that Euler uses here denote infinite summation: the first equation, e. g., stands for Leibniz's series

$$\int \frac{1}{4x-3} - \int \frac{1}{4x-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-1} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Euler also employs this summation sign in n° 68 and – much later – in the printed memoir E. 584. The use of the $\int$ sign to denote summation goes back at least to Jacob Bernoulli's *Ars Conjectandi* (1713).

[4] Cf. n° 65, note 9.

[5] Cf. n° 63 and n° 64.

[6] Cf. n° 63, note 5.

[7] Cf. n° 64, note 9, and n° 65, note 8.

[8] Euler later published these results in E. 125 as well as in *Institutiones* (E. 212), Part II, § 154–156.

[9] About Goldbach's interest in "constructions" for transcendental numbers and his hope of finding one for π, see Section 2.3.1 of the Introduction; cf. also n° 69, notes 7–8, and n° 70, note 5.

The transcendence of certain numbers had been discussed fifteen years earlier in the correspondence between Daniel Bernoulli and Goldbach. In a letter dated April 28th, 1729 (see Fuß, *Correspondance*, t. II, p. 301), Bernoulli claims that the sums representing the numbers $\log \dfrac{p+q}{p}$ $(0 < q < p)$ "non seulement ne peuvent être exprimées en nombres rationels, mais pas même en nombres radicaux ou irrationels" ("not only cannot be expressed in rational numbers, but not even in radicals or irrational numbers").

(These expressions occur naturally in the summation of the harmonic series; the inequalities

$$\sum_{k=p}^{p+q-1} \frac{1}{k} < \log \frac{p+q}{q} < \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{k}$$

had been studied in the Bernoulli-Goldbach correspondence, but actually they can already be found in Mengoli's *Geometriae speciosae Elementa* from 1659.)
Goldbach asks for a proof, but Bernoulli owns to being unable to provide one. Goldbach then presents (*op. cit.*, p. 326) the example of the decimal fraction $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-2^{k-1}} = 0.11010001\ldots$. Bernoulli observes that Goldbach's number cannot be rational since its decimal expansion is not periodic; he even claims that no power of this number can be rational for the same reason. But he also admits that he cannot prove that numbers such as $\log 2$ cannot be expressed algebraically.
Joseph Liouville – the person usually credited with the first discovery of specific transcendental numbers – writes in a note dating from 1851 (i. e., shortly after the publication of Fuß's *Correspondance* volumes) in connection with his examples $\sum_{n\geq 1} k_n 10^{n!}$ $(0 \leq k_n \leq 9)$: “Je crois me souvenir qu'on trouve un théorème de ce genre, énoncé dans une lettre de Goldbach à Euler; mais je ne sache pas que la démonstration en ait jamais été donnée.”
The transcendence of Goldbach's number was proved by R.O. Kuz'min in 1938.

[10] Euler's formula $\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$ had already been known to John Machin (see Tweddle 1991, p. 7). It is inferior, with respect to the speed of convergence, to Machin's better-known formula $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{239}$, which was published by William Jones in 1706 and came to Euler's attention in the 1730s (cf. Mattmüller 2008, p. 42).
The 14th-century Indian mathematician Madhava is credited (see Rajagopal / Rangachari 1986) with the formula

$$\pi = \sqrt{12}\Big(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\Big),$$

which is equivalent to $\arctan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; this was used by Th.F. de Lagny (1721) for computing 127 digits of π (cf. n° 57, note 6).
Newton had used his binomial theorem for developing $\int_0^{1/4}\sqrt{x-x^2}\,dx$ into a power series and derived the formula

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\Big(\frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^9} - \frac{1}{9\cdot 2^{12}} - \ldots\Big);$$

around 1665, he computed 16 decimal digits of π with this approach (see his *Method of Fluxions*, Prob. IX, § 49). This was published only posthumously in 1736; Euler could also have learnt of it from Buffon's French translation published in 1740 or from the 1744 *Opuscula*.
Euler undertook a systematic investigation of arctangent identities in E. 74, where he still arrived at the conclusion that the Machin-Lagny formula was “probably the most convenient” (§ 14). Only much later he discovered the identity

$$\frac{\pi}{4} = 5\arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{3}{79},$$

which led him to a series development “most remarkable for its exceptional convergence” (E. 705, § 19–20).
Arctan identities “of Machin's type” are still used at the beginning of the 21st century for computing π; Kanada et al., for example, employed

$$\pi = 48\arctan\frac{1}{49} + 128\arctan\frac{1}{57} - 20\arctan\frac{1}{239} + 48\arctan\frac{1}{110\,443}$$

for their computation of 1.24×10^{12} digits of π that held the record from 2002 to 2009.

[11] It is not known to whom Goldbach's letter that Euler forwarded to Leipzig was addressed.

[12] Cf. n° 64, note 1.

[13] The supervising committee for the Petersburg Academy (cf. n° 58, note 8, and n° 64, note 3) had submitted its final report and dissolved, as Krafft told Euler by his letter R 1279 from March 8th (19th), 1743 (cf. JW 3, p. 145–146).

[14] Cf. nº 52, note 10, nº 54, note 3, nº 60, note 14, and Euler's next letter nº 68, note 1.
[15] Cf. nº 43, note 12.
[16] Cf. nº 37, note 1.
[17] The jurist Friedrich Heinrich Strube, who hailed from Lower Saxony (he later called himself "Strube de Pyrmont"), had been Euler's and Goldbach's colleague at the Petersburg Academy, where he held the chair of law from 1738 to 1741. While remaining a member of the Academy, he was then posted to Berlin as legation secretary to the Russian ambassador in Prussia and Denmark; in 1746 he returned to Petersburg, building a solid career at the Academy (until 1757) and in the civil service.

67
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 23rd) May 4th, 1743

Sir,

I indeed understand that the *Lemma* 1 which I stated in my last letter[1] is indeed not immediately evident from my previous statements about the equation $4mn - m - 1 = a^2$; therefore I ask you to consider the following reasoning:

If in equation E: $4mn - m - 1 = a^2$ one substitutes $m = 4v - 1$, $v = 4n^2M - n$ and $a = 16n^2A^2$, it will be changed into F: $4nM - M - 1 = A^2$; but as this does not differ from equation E except by the designation of the letters M, A and m, a, and as for each of these letters all positive integers can be substituted, E and F will necessarily be one and the same equation. Indeed, if the case $m = 4v - 1$ of E (which by hypothesis is impossible) by itself embraces equation F in all its extension, while equation F is truly equivalent to equation E, it follows that by the impossibility of the case $m = 4v - 1$ of E, not only all possible cases of equation F are excluded, but also all possible cases of equation E itself, because no possible case could be found in E unless it could also be indicated in F.

Hopefully this argument will also hold up when confronted with the parallel formula $4nx - x + 1$ as proposed by you, Sir (I have not examined the cases where this yields a square); otherwise I should be glad to arrive at a better understanding of the matter.

In the meantime, I thank you most dutifully, Sir, for the beautiful theorems contained in your letter; perhaps I shall have occasion to report something about them in the future.[2] As to the literary news from here, you will do better if you get them from those professors with whom you are corresponding than from me. If you have had sure notice that Mr. de Mairan has received your treatise[3] and if you let him know that his receipt has not yet arrived, I do not see how the lack of this receipt could impair your chances in any way. Please present my dutiful compliments to all your family, as well as to Mr. Hedlinger, Esq., and to Professor Strube. I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, May 4th, 1743.

Turn over.

PS. Do you have a method, sir, for determining the value of the following formula in the case where $f = 1$ and π is taken to have the usual meaning?

$$\frac{\pi^2}{6f\,(f-1)} - \frac{(2f-1)}{f^2\,(f-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\,\ldots\,+\frac{1}{f}\right)+\frac{1}{f\,(f-1)^2}.$$

I think the required value should be

$$1-\frac{\pi^2}{6}+\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right).^{[4]}$$

If I remember right, you once communicated to me a formula which yields the sums of the series whose term is $\dfrac{1}{x^2+fx}$ in general for any value of f, even for fractional numbers; but I cannot recall the formula itself at the moment.[5]

[1] Cf. nº 65, note 1.
[2] In Goldbach's copy the rest of this paragraph is missing; the PS follows here.
[3] Cf. nº 66, note 14.
[4] Here Euler struck out the 1 at the beginning of the formula (it is still clearly readable in Goldbach's copy) and noted with a reference sign in the margin "$= 2 - \frac{\pi\pi}{6}$". As Euler's reply shows (see nº 68, note 4), Goldbach's original calculation was correct.
[5] As Goldbach himself had known and published as early as 1720 (see *supra* nº 1, note 11), $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f}{k(k+f)} = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{f} =: s_f$ for positive integers f; this follows easily (disregarding some slight problems with conditional convergence) by writing the left-hand side as a telescoping series. Goldbach did not provide any details concerning a proof then, but he stated the result for the more general series $\sum \dfrac{1}{px^2+qx+r}$, which he claimed had a rational sum whenever $\dfrac{1}{p}\sqrt{q^2-pr} = f$ is a positive integer.

Euler had in the late 1720s shown that $s_f = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^f}{1-x}dx$ and evaluated this integral for $f = \frac{1}{2}$; he had expanded and published these results (see again nº 1, note 11). Goldbach's question now suggested an alternative way to deal with these issues: see reply nº 68, note 7. The series s_f are related to the digamma function $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$. From $\psi(1) = \gamma$ (Euler's constant) and $\psi(z+1) = \psi(z) + \dfrac{1}{z}$ it follows that $s_f = \psi(f+1) - \psi(1)$.
Goldbach's formula shows that s_f is rational whenever f is a positive integer. For rational, non-integral values of f, the expression $s_f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f}{k(k+f)}$ is not only irrational but transcendental (as Daniel Bernoulli had conjectured in the letter to Goldbach from 1729 which we have already quoted above in nº 66, note 9); this fact was finally proved by M.R. Murty and N. Saradha in 2007, Th. 9.

68

Euler to Goldbach

Berlin, May 21st, 1743

Sir,

certainly the formula $4mn - m - 1 = a^2$ may be transformed into the similar one $4Mn - M - 1 = A^2$ by the substitution $m = 4v - 1$, $v = 4n^2M - n$ and $a^2 = 16n^2A^2$; however, I cannot see that anything more follows than this: If the formula $4mn - m - 1$ cannot yield a square in the case where $m = 4v - 1$, then it cannot yield a square at all; or, if one could prove that $4mn - m - 1$ cannot be a square in any case where $m = 4v - 1$, it should at the same time be correctly proved that this same formula cannot be a square in any case at all. However the conclusion cannot be admitted that all cases in which $4mn - m - 1$ is a square have $m = 4v - 1$. On the other hand, this inference should again be correct if some case were known where $4mn - m - 1 = \Box$ and yet m were not a number of the form $4v - 1$; for from this certainly another case could be deduced in which m should be an number of the form $4v - 1$. But in order to clarify the matter even more, let us consider the similar formula $9mn - m - 1 = a^2$; by setting $m = 9v - 1$, $v = 9n^2M - n$ and $a = 9nA$ this is transformed into $9Mn - M - 1 = A^2$; now if one wanted to conclude that the formula $9mn - m - 1$ cannot be a square unless m is a number of the form $9v - 1$, the incorrectness of this conclusion should at once be manifest, for $9mn - m - 1$ yields a square in the following cases:

$n = 2;$	$m = 1$	$n = 3;$	$m = 1$	$n = 6;$	$m = 10$
$n = 2;$	$m = 10$	$n = 3;$	$m = 17$	$n = 6;$	$m = 17$
$n = 2;$	$m = 26$	$n = 3;$	$m = 37$	$n = 6;$	$m = 109$
$n = 2;$	$m = 53$	$n = 3;$	$m = 85$	$n = 6;$	$m = 130$
	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$

From this it is evident that $9mn - m - 1$ can be a square in infinitely many ways without m being a number of the form $9v - 1$, notwithstanding the fact that the same reasoning can be applied here which was applied to the formula $4mn - m - 1$.

Professor Daniel Bernoulli has been awarded the entire prize for this year, and my contribution received a "honourable mention"[1] (but without my name). Mr. Hedlinger started on his travel back to Switzerland last Wednesday.

Johann Bernoulli's *Opera omnia*[2] in four quarto volumes have by now been completed. The publisher, Mr. Bousquet, brought them here himself and presented a superbly bound copy to the King; I also received one as a present from Mr. Bernoulli. The first three tomes contain all his papers that have hitherto been printed separately, the fourth the unpublished writings. Copies are sold for no less than 20 guilders at Frankfurt. Mr. Bousquet has made a contract with me, by which he undertakes to print all my writings except those which I am obliged to send to Petersburg; he is going to start on the treatise *De Isoperimetris*. He should have liked to begin by the *Scientia navalis*; but first I have to learn whether the Academy is still inclined to publish it.[3]

Your problem of determining the value of the expression

$$P = \frac{\pi^2}{6n\,(n-1)} + \frac{1}{n\,(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\,\ldots\,+\frac{1}{n}\right)}{n^2\,(n-1)^2},$$

in the case where $n = 1$, is certainly among the most difficult of that kind; I found the very same value that you communicated to me, Sir.[4] In order to calculate this, I made $n = 1+\alpha$, where α denotes a vanishing number. Indeed, let, in this case, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\,\ldots\,+\frac{1}{n} = Q$; then the proposed formula is transformed[5] into

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi^2}{6\alpha\,(1+\alpha)} + \frac{1}{\alpha^2\,(1+\alpha)} - \frac{(1+2\alpha)\,Q}{\alpha^2\,(1+\alpha)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\,(1+2\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2}{\alpha}+3\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6\alpha} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - Q\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right). \end{aligned}$$

Thus the whole matter depends on the value Q takes for $n = 1+\alpha$. This value I determine thus: In general, $Q = \int \frac{1-x^n}{1-x}dx$, where after the integration $x = 1$ is substituted. Indeed,

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \,\ldots\, + x^{n-1},$$

consequently

$$\int \frac{1-x^n}{1-x}dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \,\ldots\, + \frac{x^n}{n};$$

therefore, taking $x = 1$ one has $Q = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\,\ldots\,+\frac{1}{n}$, as was assumed. Now I take $n = 1+\alpha$; then $Q = \int \frac{1-x^{1+\alpha}}{1-x}dx = \int \frac{1-x\cdot x^{\alpha}}{1-x}dx$. But since, in general,

$$x^y = 1 + \frac{y\,\log x}{1} + \frac{y^2\,(\log x)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3\,(\log x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

one has

$$\begin{aligned} Q &= \int \frac{dx}{1-x}\left(1 - x - \frac{\alpha x\,\log x}{1} - \frac{\alpha^2 x\,(\log x)^2}{1\cdot 2} - \frac{\alpha^3 x\,(\log x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \ldots\right) \\ &= x - \alpha\int\frac{x\,dx}{1-x}\log x - \frac{\alpha^2}{2}\int\frac{x\,dx}{1-x}\,(\log x)^2 - \frac{\alpha^3}{6}\int\frac{x\,dx}{1-x}\,(\log x)^3 - \ldots, \end{aligned}$$

taking $x = 1$ in every integral. Now I integrate each formula separately:

1. $\int \frac{x\,dx}{1-x}\log x = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + \ldots\right)\log x$; but one has, in general, $\int x^m dx\,\log x = -\frac{1}{(m+1)^2}$, when after the integration x is taken to equal 1.

Thus

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}\log x = -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} - \ldots = -A + 1 = 1 - \frac{\pi^2}{6},$$

where $A = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$.

Secondly, $\int \frac{x\,dx}{1-x}(\log x)^2 = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + \ldots\right)(\log x)^2$; but one has, in general, $\int x^m dx\,(\log x)^2 = \frac{1\cdot 2}{(m+1)^3}$ (taking $x = 1$), therefore

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}(\log x)^2 = 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) = 2\,(B-1)\,,$$

defining $B = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots$.

Thirdly, $\int \frac{x\,dx}{1-x}(\log x)^3 = \int dx\,\left(x + x^2 + x^3 + \ldots\right)(\log x)^3$; but one has, in general, $\int x^m dx\,(\log x)^3 = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(m+1)^4}$ (taking $x = 1$), therefore

$$\int \frac{x\,dx}{1-x}(\log x)^3 = -6\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots\right) = -6\,(C-1)\,,$$

defining $C = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots$.

By setting in an similar way $D = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \ldots$, $E = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots$, one finally finds

$$Q = 1 + \alpha\,(A-1) - \alpha^2\,(B-1) + \alpha^3\,(C-1) - \ldots,$$

and consequently, because of $A = \frac{\pi^2}{6}$, one will have[6]

$$\begin{aligned} P &= \frac{\pi^2}{6\alpha} - \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + 1 - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) + B - 1 + 1 \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{6} + B \end{aligned}$$

or, as you found, Sir,

$$P = 1 - \frac{\pi^2}{6} + \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right).$$

For the sum of the series $\frac{1}{x^2 + fx}$ I found, a long time ago, an integral formula;[7] however, this investigation led me to an easier expression, which to all appearances was already known to you, Sir, and probably made you reflect on this matter. For as we have just found that, for $x = f$,

$$\begin{aligned} & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{f+1} \\ = \; & 1+f\,(A-1)-f^2\,(B-1)+f^3\,(C-1)-f^4\,(D-1)+\ldots, \end{aligned}$$

it is also true that

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1+f}=1+\frac{f}{2\,(2+f)}+\frac{f}{3\,(3+f)}+\frac{f}{4\,(4+f)}+\ldots.$$

Let

$$S=\int\frac{1}{x^2+fx}=\frac{1}{1\,(1+f)}+\frac{1}{2\,(2+f)}+\frac{1}{3\,(3+f)}+\ldots,$$

then

$$\begin{aligned} S \;=\; & \frac{1}{f}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{f}\right) \\ = \; & \frac{1}{1+f}+(A-1)-f\,(B-1)+f^2\,(C-1)-f^3\,(D-1)+\ldots. \end{aligned}$$

I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant
Leonhard Euler

Berlin, May 21th, 1743.

[1] Cf. n° 66, note 14.
On April 23rd, 1743, Clairaut had written to Euler (R 403: O. IVA/5, p. 146–149) that Daniel Bernoulli had won the prize for 1743 with his paper St. 39 on inclination compasses – instruments for measuring the vertical component of the Earth's magnetic field – and that Euler's own entry E. 108 had only been awarded an honorable mention (*accessit*): accordingly there was no need for the requested receipt.

[2] Cf. n° 58, note 9.

[3] Cf. n° 58, note 9, n° 64, note 3, n° 72, note 12, and n° 78, note 8.
Eventually, only two of Euler's textbooks appeared at Bousquet's publishing house in Lausanne: the *Methodus inveniendi lineas curvas ...* (E. 65) in 1744 and the two-volume *Introductio in analysin infinitorum* (E. 101/102) in 1748.

[4] Cf. n° 67, note 4.
Euler later presented the limit calculation that follows in the more general context of differentiating "inexplicable functions" in Chapter XVI of the second part of his *Institutiones calculi differentialis* (E. 212, § 385, *Exemplum* 2: O. I/10, p. 615–616); the link between the power series expansion of $\log\Gamma(x)$ around $x = 1$ and the values of the ζ function at integers is displayed even more generally in E. 368, § 9.
See also Ferraro 1998, Sandifer's "How Euler Did It" column on *Inexplicable functions* (November 2007) and, in particular, the extensive study of both Euler's work in this area and later results by Lagarias 2013.

[5] Since α is a "vanishing number", Euler cancels terms that are infinitely small with respect to others, replacing $1 + \alpha$ by 1; in the partial fraction decomposition $\frac{1}{\alpha^2(1+\alpha)} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1}$ the last term is also replaced by 1.

[6] In the formula that follows, terms that compensate each other have been canceled out by slight diagonal strokes.

[7] This refers in particular to E. 20: see n° 1, note 11, and n° 67, note 5.

69

Goldbach to Euler

Petersburg, June (11th) 22nd, 1743[1]

Sir,

in your previous letter you uttered the opinion that everything depended on the said first Lemma,[2] and if this were correct, there should be nothing at all objectionable about the proof of the theorem; I therefore wanted to demonstrate, in my last letter, the truth of this first Lemma,[3] and now I see that I have not done badly in this undertaking, since you concede, Sir, that "if one could prove that $4mn-m-1$ cannot be a square in any case where $m=4v-1$, it should be proved at the same time that this same formula cannot be a square in any case at all":[4] but this is the sole content of the first Lemma. However, notwithstanding that both lemmata are unquestionable, I now perceive that the proof cannot be valid for another reason, for it reads: "equation C cannot hold unless M be a number of the form $4v-1$ (by the first lemma)"; but in fact this does not follow from the first lemma. Perhaps something better will be found in the future.

As to the sum of the formula

$$P=\frac{\pi^2}{6n\,(n-1)}+\frac{1}{n\,(n-1)^2}-\frac{(2n-1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}{n^2\,(n-1)^2}$$

in the case where $n=1$, which you calculated by such a beautiful and general method, Sir,[5] I had noticed it by mere chance and only in this particular case; for as the series

$$A\ \ldots\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3\cdot 4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{4\cdot 5}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$
$$=z=1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots$$

consists of the following infinitely many series[6]

$$\begin{array}{ll}
B\ \ldots & \frac{1}{1\cdot2\cdot1}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot9}+\frac{1}{4\cdot5\cdot16}+\ldots=z+1-\frac{\pi^2}{6}\\
C\ \ldots & \frac{1}{2\cdot3\cdot1}+\frac{1}{3\cdot4\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5\cdot9}+\frac{1}{5\cdot6\cdot16}+\ldots=\frac{1}{2\cdot1^2}+\frac{\pi^2}{2\cdot1\cdot6}-\frac{3}{4\cdot1^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\\
D\ \ldots & \frac{1}{3\cdot4\cdot1}+\frac{1}{4\cdot5\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6\cdot9}+\frac{1}{6\cdot7\cdot16}+\ldots=\frac{1}{3\cdot2^2}+\frac{\pi^2}{3\cdot2\cdot6}-\frac{5}{9\cdot2^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\
 & \qquad\qquad\ldots\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots
\end{array}$$

and the general sum of all the series B, C, D, etc. is

$$\frac{\pi^2}{6n\,(n-1)}+\frac{1}{n\,(n-1)^2}-\frac{(2n-1)}{n^2\,(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right),$$

the sum of series B (where $n=1$) becomes $z+1-\dfrac{\pi^2}{6}$.

That division which you remarked on in your letter of April 9th[7] serves, as far as I can see, only to yield a non-periodic number as its quotient; but such non-periodic numbers can also be found in innumerable other ways without that kind of troublesome division; for example, the number 1.1..1...1....1 ... continued to infinity is certainly not periodic when the vacant places denoted by dots are filled in arbitrarily with any digits (unless they all equal 1 to infinity): thus, e. g.,

$$\left.\begin{array}{l} 101\,001\,000\,100\,0[0]1\,000\,001\ldots \\ 121\,221\,222\,122\,2[2]1\,222\,221\ldots \\ 101\,231\,141\,126\,7[1]1\,135\,141\ldots \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \text{ are non-periodic.}^{[8]}$$

All rational fractions can be expressed by a denominator 100 00... and a periodic numerator; however these numerators are of two kinds: 1. those in which there is an initial element that is not repeated, 2. those in which the initial element is the same as the period. For example,

$\frac{1}{2} = \frac{5\underline{0}}{1\underline{0}}$, where the non-periodic initial element is 5 and the underlined periodic element is 0;

$\frac{1}{3} = \frac{\underline{3}}{1\underline{0}}$, where the initial element and the period are the same, namely 3;

$\frac{61}{162} = \frac{3\,\underline{765\,432\,198}}{1\underline{0}}$, where the initial element is 3 and the periodic element is 765 432 198.

It also sometimes happens that the periodic element consists of as many digits as the number a in the denominator of the fraction $\frac{1}{a+1}$ contains ones; if for example $a = 22$, one has $\frac{1}{23} = \frac{\underline{434\,782\,608\,695\,652\,173\,913\,0}}{1\underline{00}}$.

If one defines[9]

$$\left(y^{-1}-1\right)\left(3^2y^{-1}-1\right)\left(5^2y^{-1}-1\right)\left(7^2y^{-1}-1\right)\ \ldots\left((2n-1)^2\,y^{-1}\,[-1]\right) = Y$$

and $dY = P\,dy$, the formula $-\frac{P\,dy}{Y} - n$ will be the summing expression for as many terms of the series

$$A\colon\ \frac{1}{y^{-1}-1} + \frac{1}{3^2y^{-1}-1} + \frac{1}{5^2y^{-1}-1} + \ldots$$

as n contains ones; here the general term of series A is $\frac{1}{(2x-1)^2\,y^{-1}-1}$ (taking x to be the index of the term); therefore, as for $y = \frac{1}{4}$ the series A goes over into $B\colon\ \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \ldots$, which – continued to infinity[10] – is equal to the semicircle whose diameter equals 1, the summing expression of series B will be $-\dfrac{Py}{Y}-n$, where after differentiating one is to set $y=\dfrac{1}{4}$. Let, e. g., $n=2$; then

$$-\frac{Py}{Y}-2=\frac{10y^{-1}-2}{9y^{-2}-10y^{-1}+1}=\frac{10y-2y^2}{9-10y+y^2}=\frac{38}{105}.$$

There are innumerable squares which cannot be brought to the form C: $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$,[11] where m and n denote positive integers, as 1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 and so on; however, if one could indicate a formula that yields infinitely many squares which cannot be reduced to formula C, then the problem of determining a prime number greater than some arbitrary given number should also be solved.[12]

If a series is given by its first term $\dfrac{1}{a}$ and by a law of progression stating that, if some given term is $\dfrac{1}{A}$, the following term is $\dfrac{1}{A\,(A-1)+1}$, then the sum of the entire series equals $\dfrac{1}{a-1}$.[13]

Presumably Mr. Hedlinger made, during his stay at Berlin, a embossing stamp with His Royal Majesty's portrait; if so, I should like to know whether one might obtain a wax impression of this.[14] I remain with particular respect, Sir, your most obedient servant

Goldbach.

St. Petersburg, June 22nd (new style), 1743.

[1] Goldbach's copy is dated "*Petropoli* 22. *Junii* ♄", where the Saturday sign shows he used the Gregorian calendar ("new style").

[2] Cf. n° 66, note 1.

[3] Cf. n° 67, note 1.

[4] Cf. the first paragraph of n° 68.

[5] Cf. n° 68, note 5.

[6] We have

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}\Big(1+\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{3\cdot 4}\Big(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\Big)+\ldots \\ &= \Big[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\Big] \\ &\quad +\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots\Big] \\ &\quad +\frac{1}{9}\Big[\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots\Big]+\ldots \\ &= 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}+\ldots=\zeta(3), \end{aligned}$$

where the series in the brackets are telescoping series.

[7] Cf. n° 66, note 9.

[8] The digits set in brackets are missing in the original from the obviously intended pattern; they have been recovered from Goldbach's copy, where, on the other hand, only 15 digits are indicated for each of the three numbers.

[9] In the formula that follows, the "-1" term in the last bracket is missing in the original; it has been recovered from Goldbach's copy.

[10] Here Euler noted some calculations in the lower margin of fol. 70v, preparing his reply (cf. nº 70, note 6):

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-p}+\frac{1}{9-p}+\frac{1}{5^2-p}+\frac{1}{7^2-p}+\mathit{etc.} &= \frac{\pi\sqrt{p}}{4p\cot.\frac{\pi\sqrt{p}}{2}}\\ \frac{p}{1-p}+\frac{p}{3^2-p}+\frac{p}{5^2-p}\ \mathit{et.} &= \frac{\pi\sqrt{p}}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{p}}{2}\\ \frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\mathit{etc.\ infin.} &= \frac{\pi\sqrt{y}}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi\sqrt{y}}{2}.\end{aligned}$$

[11] In the Fuß edition Goldbach's formula had been misread as $4nn+2\,(m-1)\,n+m-1$; the 1965 editors transcribed it correctly but then, strangely, added a footnote that attributed Fuß's mistake to Goldbach.

On this paragraph, Euler noted between the lines and in the margin, preparing his reply (see nº 70, note 8):
"*Omnia biquadrata in hac forma continentur, praeterea vero sequentia quadrata* 6^2; 11^2; 15^2; 23^2; 17^2; 19^2; 38^2; 14^2; 50^2; 22^2; 34^2; 71^2; 21^2; 87^2; $(5p\pm1)^2$; $(13p\pm4)^2$; $(17p\pm2)^2$; $(29p\pm6)^2$; $(37p\pm3)^2$; $(41p\pm16)^2$; $(53p\pm15)^2$; $(61p\pm25)^2$; *non continentur* 8^2, 10^2, 12^2, 13^2, 18^2, 20^2, 27^2, 28^2, 33^2, 37^2, 42^2, 45^2, 47^2, 55^2, 58^2, 60^2. *Continetur quadr*[*atum*] $(73p\pm23)^2$, $(89p\pm17)^2$, $(97p\pm11)^2$, $(101p\pm5)^2$, $(109p\pm38)^2$, $(113p\pm49)^2$, $(137p\pm50)^2$, $(149p\pm22)^2$, $(157p\pm14)^2$, $(173p\pm40)^2$, $(181p\pm81)^2$, $(193p\pm56)^2$, $(197p\pm7)^2$." ("All fourth powers are contained in that form, and moreover the following squares: [...]; these are not contained: [...]; this square is contained: [...]").

[12] Here Euler noted between the lines: "*nam si* $4n^2+2(2m-1)n+m-1=aa$ *erit* $4m=-4n+3+\dfrac{4aa+1}{4n+1}$" ("for if $4n^2+2(2m-1)n+m-1=aa$, one will have $4m=-4n+3+\dfrac{4aa+1}{4n+1}$").

Indeed the equation $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1=a^2$ can be written in the form $(4n+1)(4n+4m-3)=4a^2+1$; thus a square a^2 has the form $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ if and only if $4a^2+1$ is composite, since then its prime factors all have the form $4b+1$. See *infra* nº 72, note 6.

[13] The text of Goldbach's copy ends here.
Cf. nº 70, note 12, and nº 71, note 13.

[14] Cf. nº 70, note 13.

70

Euler to Goldbach

Berlin, July 9th, 1743

Sir,

I had considered your first Lemma, Sir, upon which I understood the whole proof to be founded,[1] not just according to the words by which it was expressed, but rather with regard to its application in the propositions that followed it, and therefore I thought it to be incorrect for the very same reason which you now point out yourself.[2] Indeed I admitted that, if $4mn - m - 1$ cannot be a square in any case where $m = 4v - 1$, this same formula cannot be a square in any case at all; however I questioned the following proposition, in which the application consisted: that all cases in which the formula $4mn - m - 1$ can ever yield a square are therefore comprised by the form $m = 4v - 1$. It may be understood most easily that this application is erroneous by considering the following example: If it could be proved that no odd number is a square, then it should simultaneously be proved that no number at all is a square. This hypothetical proposition is quite correct, but it follows by no means from it that, if there are any square numbers, all of these will be odd numbers.

The way by which you, Sir, discovered the beautiful theorem[3] on the value of the expression

$$\frac{\pi^2}{6n\,(n-1)} + \frac{1}{n\,(n-1)^2} - \frac{(2n-1)\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\,(n-1)^2}$$

in the case $n = 1$, is very curious. In a similar manner one can discover many other beautiful theorems of the same kind, e. g.: As

$$\frac{1}{m\,(m-a)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2} - \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{m-a} - \frac{1}{m}\right),$$

one has[4]

$$\begin{aligned}
B:&\quad \frac{1}{2\cdot 1^2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{4\cdot 3^2}+\frac{1}{5\cdot 4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{1\cdot 6} - \frac{1}{1^2}\,(1)\\
C:&\quad \frac{1}{3\cdot 1^2}+\frac{1}{4\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 3^2}+\frac{1}{6\cdot 4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{2\cdot 6} - \frac{1}{2^2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\\
D:&\quad \frac{1}{4\cdot 1^2}+\frac{1}{5\cdot 2^2}+\frac{1}{6\cdot 3^2}+\frac{1}{7\cdot 4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{3\cdot 6} - \frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

$$\ldots$$

Therefore, in general,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n\cdot 1^2}+\frac{1}{(n+1)\,2^2}+\frac{1}{(n+2)\,3^2}+\frac{1}{(n+3)\,4^2}+\ \ldots\\
=\ &\frac{\pi^2}{(n-1)\,6}-\frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n-1}\right)\\
=\ &\frac{\pi^2}{(n-1)\,6}-\frac{1}{(n-1)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n\,(n-1)^2};
\end{aligned}$$

and consequently the value of this expression in the case where $n=1$ must yield the sum of the series $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots$.

I do not want to decide whether the division by which I arrived at a non-periodic number that continues to infinity,[5] can indeed be of some utility; however I thought if one could arrive at the numbers 3.141 592 65 ... in some such way, then the quadrature of the circle could be considered to be entirely settled. Your own manner, Sir, to form non-periodic numbers was still very well known to me; however, in my opinion it is helpful to note several such manners, in order perhaps to discover at some future time one by which the quadrature of the circle might be expressed. However, in your manner, Sir, there is a certain regularity which to all appearances does not arise in the numbers 3.141 59 .... It is an essential property of rational numbers that they are all resolved into decimal fractions which are periodic (except for the initial element), and it is easy to see that the periodic element of the decimal fraction which arises from the fraction $\frac{a}{b+1}$ never contains more than b digits; for in the actual division no more than b values of the remainder can be left; but as soon as one gets the same remainder, the quotient becomes periodic.

The summing expression for the series

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\ \ldots\ +\frac{1}{(2n-1)^2\,y^{-1}-1}$$

which you indicate, Sir,[6] can be very useful in many cases. However, it is also always possible to determine summable series from products by differentiation. I establish the sum which you calculated, Sir, in the following way:

Since

$$\left(y^{-1}-1\right)\left(3^2y^{-1}-1\right)\left(5^2y^{-1}-1\right)\,\cdots\,\Big((2n-1)^2\,y^{-1}-1\Big)=Y,$$

one will have

$$\begin{aligned}
\log Y\ &=\ \log\left(y^{-1}-1\right)+\log\left(3^2y^{-1}-1\right)+\log\left(5^2y^{-1}-1\right)+\ \ldots\ +\log\left((2n-1)^2\,y^{-1}-1\right)\\
&=\ \log\left(1-y\right)+\log\left(3^2-y\right)+\log\left(5^2-y\right)+\ \ldots\ +\log\left((2n-1)^2-y\right)-n\,\log y;
\end{aligned}$$

taking differentials,

$$\frac{dY}{Y}=\frac{P\,dy}{Y}=-\frac{dy}{1-y}-\frac{dy}{3^2-y}-\frac{dy}{5^2-y}-\ \ldots\ -\frac{dy}{(2n-1)^2-y}-\frac{n\,dy}{y}.$$

Multiplying by $-\dfrac{y}{dy}$, this becomes

$$-\frac{Py}{Y}-n=\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2\,y^{-1}-1}\ \ldots=A.$$

However, if one were asked to sum some finite number of terms in this way, I daresay the actual addition should not be more difficult than the application of this method; but if one proposed to sum the series continued to infinity, one should profit even less by this method, as in fact the sum of series A can in this case be indicated absolutely. Indeed, determine an angle α which is to a right angle as $\sqrt{y}$ is to 1; further, let the radius to the tangent of that angle α be as 1 to θ; then I say one will have

$$\frac{1}{y^{-1}-1}+\frac{1}{3^2y^{-1}-1}+\frac{1}{5^2y^{-1}-1}+\ \ldots\ \text{(to infinity)}=\frac{\theta\pi\sqrt{y}}{4},$$

where π has the usual value $3.141\,592\,65\ldots$. I can also indicate the sum of the following series:

$$\frac{1}{y^{-1}+1}+\frac{1}{3^2y^{-1}+1}+\frac{1}{5^2y^{-1}+1}+\ \ldots\ \text{(to infinity)}=P.$$

For let $\mathrm{e}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$ and set $\mathrm{e}^{\pi\sqrt{y}}=\theta$, or let $\log\theta=\pi\sqrt{y}$, then the required sum will be $P=\dfrac{\theta-1}{\theta+1}\cdot\dfrac{\pi\sqrt{y}}{4}$. Moreover,

$$\theta=1+\frac{\pi\sqrt{y}}{1}+\frac{\pi^2y}{1\cdot 2}+\frac{\pi^3y\sqrt{y}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\pi^4y^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots$$

Or let $\frac{1}{4}\pi^2y=n$, then the following holds:

$$2P=\cfrac{n}{1+\cfrac{n}{3+\cfrac{n}{5+\cfrac{n}{7+\cfrac{n}{9+\cfrac{n}{11+\ldots}}}}}}$$

This expression is a continued fraction; about this subject there are several papers deposited in the Academy's archive; I recently asked for copies, as I have forgotten most and cannot find any notes.[7]

It is hard to say what square numbers are not comprised by the expression $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$,[8] for those squares which are comprised by it cannot be expressed otherwise than by an infinite number of formulae. The first thing I noticed at once is that all fourth powers are contained in that formula. Furthermore I can indicate infinitely many series of numbers whose squares are comprised by the expression $4n^2 + 2\,(2m-1)\,n + m - 1$: indeed all squares contained in the following formulae are also comprised by the above expression: $(5p \pm 1)^2$; $(13p \pm 4)^2$; $(17p \pm 2)^2$; $(29p \pm 6)^2$; $(37p \pm 3)^2$; $(41p \pm 16)^2$; $(53p \pm 15)^2$; $(61p \pm 25)^2$; $(73p \pm 23)^2$; $(89p \pm 17)^2$; $(97p \pm 11)^2$; $(101p \pm 5)^2$; $(109p \pm 38)^2$; $(113p \pm 49)^2$; $(137p \pm 50)^2$; $(149p \pm 22)^2$; $(157p \pm 14)^2$; $(173p \pm 40)^2$; $(181p \pm 81)^2$; $(193p \pm 56)^2$; $(197p \pm 7)^2$; $(229p \pm 61)^2$; and so on.[9]

But the squares contained in none of these formulae are exactly those which your expression, Sir, does not comprise. So the matter should depend on determining in a simple way all those numbers which are contained in none of the above formulae, and then one should certainly be able to solve easily the problem of discovering a prime number greater than some given one. For if one makes $4n^2 + 2\,(2m-1)\,n + m - 1 = a^2$, then $4m = -4n + 3 + \dfrac{4a^2+1}{4n+1}$; thus if $4a^2+1$ is a prime number, the square a^2 cannot be contained in that expression, and on the other hand all those squares a^2 which are not contained in $4n^2+2\,(2m-1)\,n+m-1$ have the property that $4a^2+1$ is a prime number. Now as $4b^4+1$ is never prime, but always has two or more divisors of the form $4n+1$, all fourth powers are contained in your expression. I recall I once made a table of all those numbers up to 1000 whose squares increased by one are prime numbers, and Professor Krafft copied it for you, Sir.[10] I calculated that table for almost the same reason which you no doubt had in mind when investigating your formula.

If $4n+1$ is a prime number, it is always a sum of two squares, and this in a unique way; moreover, there are always infinitely many squares which increased by one are divisible by $4n+1$. All these squares can easily be expressed by a general formula in the following manner:[11]

Let $4n+1 = r^2 + s^2$, then of course r and s will be relatively prime numbers. Now form the fraction $\dfrac{r}{s}$ and search among smaller numbers for a nearly equal fraction $\dfrac{p}{q}$, so that $ps - qr$ is ± 1 (indeed, the fraction $\dfrac{p}{q}$ can always be easily found by a method indicated by me). Then let $pr + qs = k$; I now say that all those numbers whose squares increased by one are divisible by $4n+1$ are contained in the form $(4n+1)\;m \pm k$. Thus

1. All numbers whose squares increased by one are divisible by 5 are contained in the formula $5m \pm 2$.
2. If a^2+1 is divisible by 13, then $a = 13m \pm 5$.
3. If a^2+1 is divisible by 17, then $a = 17m \pm 4$.
4. If a^2+1 is divisible by 29, then $a = 29m \pm 12$.

and so on.

Example: Determine all numbers whose squares increased by one are divisible by the prime number 1381. As $1381 = 15^2 + 34^2$, search for a fraction $\dfrac{p}{q}$ that is so close to $\dfrac{15}{34}$ that the numerator of the difference equals 1. For this, perform on the two numbers 15 and 34 the operation by which one usually calculates the greatest common divisor, thus:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
15) & 34 & (2 & & & & \\
 & \underline{30} & & & & & \\
 & 4) & 15 & (3 & & & \\
 & & \underline{12} & & & & \\
 & & 3) & 4 & (1 & & \\
 & & & \underline{3} & & & \\
 & & & 1) & 3 & (3 & \\
 & & & & \underline{3} & & \\
 & & & & 0 & &
\end{array}$$

From the quotients 2, 3, 1, 3 form the following series of fractions

$$\begin{array}{ccccc}
2, & 3, & 1, & 3 & \\
\frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{3}{7}, & \frac{4}{9}, & \frac{15}{34},
\end{array}$$

starting from $\frac{0}{1}$, by applying the rule that any numerator multiplied by the index written above it and added to the preceding numerator yields the following numerator, and similarly any denominator multiplied by the index written above it and added to the preceding denominator yields the following denominator. In this way the last fraction $\frac{15}{34}$ will always be the proposed one and the next-to-last the closely approximating one $\frac{p}{q}$ that I am looking for. For now we shall have $k = 4 \cdot 15 + 9 \cdot 34 = 366$; consequently all numbers whose squares increased by one are divisible by 1381 are contained in the form $1381m \pm 366$.

Your summation[12] of the series

$$\frac{1}{a} + \ldots + \frac{1}{A} + \frac{1}{A\,(A-1)+1}$$

is so curious, Sir, that at first I was astonished by it, because the series converges so strongly and the largest exponents of a in the denominators increase according to the geometrical progression of quotient 2; indeed, summable series of that kind are very rare. However, after some reflection I found the following proof:

$$\begin{array}{llll}
\text{If} & \dfrac{1}{a-1} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b-1}, & \text{then} & b = a\,(a-1)+1; \\
\text{next} & \dfrac{1}{b-1} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c-1}, & \text{thus} & c = b\,(b-1)+1; \\
 & \dfrac{1}{c-1} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d-1}, & \text{thus} & d = c\,(c-1)+1; \\
 & & \text{etc.} &
\end{array}$$

Therefore $\frac{1}{a-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots$, and this is your series, Sir.

Mr. Hedlinger[13] travelled back to Switzerland after staying here for 10 months without working on anything, the reason being that people wanted to hire him for themselves, and when he refused this, they did not buy any of his work either. So there are no medals of His Majesty except such as may not be shown.

Some time ago Mr. Razumovskiĭ and Adjoint Teplov arrived here; they are staying at my house and plan to remain with us for some time.[14]

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, July 9th, 1743.

The *Dictionnaire de Trevoux* has not been finished in time for the last fair at Leipzig because the publisher Mr. Christ at Basel has died.[15] Professor Strube[16] also asks me to give you his most obedient recommendation.

Some prime numbers larger than 1 000 000, which I easily discovered by the above method, are: 1 008 017, 1 020 101, 1 073 297, 1 110 917, 1 123 601, 1 136 357, 1 144 901, 1 196 837, 1 201 217; indeed, these are numbers of the form a^2+1, but have no prime divisors of the form $4n+1$.[17]

List of numbers $\underline{a}$
for which $4a^2+1$ becomes a prime number:[18]

1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 18, 20, 27, 28, 33, 37, 42, 45, 47, 55, 58, 60, 62, 63, 65, 67, 73, 75, 78, 80, 85, 88, 90, 92, 102, 103, 105, 112, 115, 118, 120, 125, 128, 130, 132, 135, 140, 142, 150, 153, 157, 163, 170, 175, 192, 193, 198, 200, 203, 210, 215, 218, 220, 222, 232, 233, 235, 237, 245, 248, 268, 272, 278, 285, 288, 292, 297, 317, 318, 322, 323, 327, 337, 340, 343, 345, 348, 350, 352, 357, 358, 370, 375, 380, 382, 390, 392, 408, 413, 422, 430, 432, 445, 453, 455, 460, 465, 468, 473, 475, 480, 483, 493, 502, 505, 518, 527, 530, 533, 535, 547, 548.

If there were a regular series contained in these numbers, then the problem of finding a prime greater than some given number should be easily solved; however, this series looks quite as confused to me as the series of the prime numbers themselves.

[1] Cf. the beginning of n° 65.
[2] Cf. the beginning of n° 69.
[3] Cf. n° 69, note 5.
[4] Setting $a=1$ and summing over all $m \geq 2$ gives the series B; similarly, for $a=2$ and $a=3$, the series C and D result.
[5] Cf. n° 66, note 9, and n° 69, note 7.
[6] Cf. n° 69, note 9. Euler published this and several related summations in his paper E. 130, § 14–17; this had been presented to the Petersburg Academy in 1739 but was printed only in 1750.

[7] Euler probably refers to his papers E. 71 and E. 123, which had also been presented at Petersburg in the late 1730s but were not yet printed. No request for copies from the Academy's archive could be traced.

[8] Cf. n° 69, note 11.

[9] Let $q \equiv 1 \bmod 4$ be a prime, and let k be a solution of the congruence $(2k)^2 \equiv -1 \bmod q$. Then the form $4n^2 + 2(2m-1)n + m - 1$ represents a^2 for $a = qp \pm k$. In fact, the equation $4n^2 + 2(2m-1)n + m - 1 = a^2$ can be transformed into $(4n + 4m - 3)(4n + 1) = 4a^2 + 1$, and substituting $a = qp \pm k$ we find $4a^2 + 1 = 4q^2p^2 \pm 8qpk + 4k^2 + 1$; writing $4k^2 + 1 = qr$ for some integer $r \equiv 1 \bmod 4$ we find $(4n + 4m - 3)(4n + 1) = q(4qp^2 \pm 8pk + r)$, which is clearly solvable.

A similar example can already be found in E. 26, where Euler observes that $5 \mid a^2 + 1$ whenever $a = 5b \pm 3$.

[10] Such a table (definitely not in Krafft's but in Euler's handwriting) has been conserved by Goldbach along with the present letter: cf. *infra* note 18 and n° 71, note 6.

[11] Euler gives a method of computing a square root of $-1 \bmod p$ for primes of the form $4n + 1 = r^2 + s^2$. Using congruences, such a square root is given by the residue class of $rs^{-1} \bmod (4n+1)$. Euler finds integers p and q with $ps - qr = \pm 1$; then $(r^2 + s^2)(p^2 + q^2) = (pr + qs)^2 + (ps - qr)^2 = a^2 + 1$ for $a = pr + qs$.

Euler computes the "Bézout representation" $ps - qr = \pm 1$ by applying the Euclidean algorithm to the pair r and s and then writing down the resulting continued fractions; this is essentially equivalent to the more modern version of the extended Euclidean algorithm.

The fact that r and s can be recovered from a square root k of -1 modulo a prime $4n + 1$ has been noticed by Hermite, Serret, Cornacchia and others (see Wagon 1990).

See also n° 83, note 10, and n° 85, text after note 3. In 1752 Euler returned to this method for determining large primes (cf. *infra* note 17) and sent Goldbach another, extended list (see n° 163, note 6); his last word on the subject is the paper E. 283 from 1760, which contains extensive tables.

[12] Cf. n° 69, note 13.

[13] Cf. n° 69, note 14.

[14] Count Kirill Grigor'evich Razumovskiĭ – then 15 years old – and his tutor Grigoriĭ Nikolaevich Teplov, who had been made an adjoint member of the Petersburg Academy in 1742, stayed with the Eulers in Berlin for almost a year, moving along to their new house in September (cf. n° 74, note 18); finally they rented new quarters in summer 1744 (cf. Teplov's letter to Schumacher cited in JW 2, p. 65). After his return to Russia in 1746, Razumovskiĭ (the younger brother of Empress Elizabeth's favourite) became President of the Petersburg Academy, a honorary position that he held until 1798.

[15] Cf. n° 64, note 1.

The printer and bookseller Johannes Christ, who had taken over his late father-in-law Johannes Brandmüller's business in 1741, had died at Basel on March 22nd, 1743; books published later by the same firm bear his widow's imprint.

[16] Cf. n° 66, note 17.

[17] This sentence has been added in the margin of fol. 70v. Cf. *supra* note 11.

The nine primes Euler indicates result by evaluating $4a^2 + 1$ for the nine largest values of a listed below.

[18] This list and the sentence that follows it have been noted on a smaller, separate sheet preserved as fol. 68; cf. *supra* note 10.

The number 422 should be canceled from the list since $4 \cdot 422^2 = 757 \cdot 941$; 540 could be added since $4 \cdot 540^2 = 1\,166\,401$ is prime (cf. also n° 163, note 6).

71

Goldbach to Euler

Petersburg, July (19th) 30th, 1743

Sir,

I have arranged the following proof[1] in several small propositions in order for you, Sir, to indicate all the more easily the one that might give you anything to take exception to.

1. In the equation $4mn-m-1=a^2$ I take a^2 to be the smallest integer square of all those that can satisfy the equation (if there are any such).

2. On both sides of the equation I add $-4ma+4m^2$ to get

$$4m\,(n-a+m)-m-1=(a-2m)^2.$$

3. In this equation we cannot have $a=m$ (for then one side of the equation could be divided by m, the other not).

4. We cannot have $a>m$ either, for then we should have $n-a+m<n$ and $(a-2m)^2<a^2$, which contradicts our assumption that a^2 is the smallest of all possible squares.

5. So the only possibility left is $a<m$.[2]

6. In a similar way, if $-4an+4n^2$ is added to both sides of the equation $4mn-m-1=a^2$, we get $4n\,(m-a+n)-m-1=(a-2n)^2$.

7. In this equation we cannot have $a=n$, as then we should have $4mn-m-1=n^2$ or $n=2m+\sqrt{4m^2-m-1}$; but this cannot be a rational number.

8. But neither can we have $a>n$, as then $m-a+n$ should be $<m$ and $(a-2n)^2<a^2$, which contradicts the assumption.

9. So the remaining possibility is that $a<n$, and as it has been shown in prop. 5 above that $a<m$, it follows that $a^2<mn$.

10. Thus $4mn-m-1<mn$, which is absurd.

11. Therefore among all squares of the form $4mn-m-1$ (if there are any) there is no smallest integer; so there is none at all.[3]

With regard to the equation

$$\frac{1}{m\,(m-a)^2}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(m-a)^2}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{m-a}-\frac{1}{m}\right),$$

which you mention, Sir, I do not yet see how this is involved in the series B, C, D, etc.[4]

It appears probable to me that some series

$$\frac{\alpha}{1}+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}+\frac{d}{1000}+\ldots=\pi$$

can be found in which the numerators α, b, c, etc. (either whole or fractional) increase all the time, even if the method to calculate these numerators shall perhaps never become known; indeed it should be labour spent in vain to determine them by algebraic formulae, as one can be assured that the ratio of the diameter to the circumference does not consist in rational numbers. However there are some remarkable approximations; for example there is a very simple series of numbers defined by the formula $\frac{2x^2 - 4x + 12}{10^x}$, and if I add seven of these terms to 2, the sum becomes 3.141 592 2.[5]

I thank you humbly, Sir, for the communication of those numbers a that make $4a^2 + 1$ a prime number; it is true that I already have the list of these numbers up to 1000, but presently I cannot unearth it from among my other papers.[6] I doubt very much that an orderly series can be detected in these numbers.

Not only all the squares a^2 that do not occur in the formula[7]

$$4n^2 + 2\,(2m - 1)\,n + m - 1$$

have the property that $4a^2 + 1$ yields a prime; but moreover all the triangular numbers that do not occur in this formula also yield prime numbers $4\triangle + 1$, and the formula $4n^2 + 2\,(2m - 1)\,n + m - 1$ agrees with the other one $4MN + M + N$ so completely[8] that there is no case of either one that could not be indicated in the other (in the same way that all instances of $4n^2 + 2\,(2m - 3)\,n - (m - 1)$ are also contained in the formula $4MN - M - N$, and conversely). Thus, if one were to make up the following table from the formula $4MN + M + N$:[9]

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
6, & 11, & 16, & 21, & 26, & 31, & 36, & 41, & \dots \\
 & 11, & 20, & 29, & 38, & 47, & 56, & 65, & \dots \\
 & & 16, & 29, & 42, & 55, & 68, & 81, & \dots \\
 & & & 21, & 38, & 55, & 72, & 89, & \dots \\
 & & & & 26, & 47, & 68, & 89, & \dots \\
 & & & & & 31, & 56, & 81, & \dots \\
 & & & & & & 36, & 65, & \dots \\
 & & & & & & & 41, & \dots
\end{array}$$

one could ascertain that all triangular numbers and also all squares not contained in this table, multiplied by 4 and increased by 1, are prime numbers.

I recall having read in the *Göttingische Gelehrte Zeitungen* that whenever $4m + 1$ is a prime number, it is always a sum of two squares – an observation that is no doubt due to you, Sir,[10] and was known to me beforehand; but in the same way that for primes of the form $4m + 1$ one always has[11] $m = a^2 + b^2 - b$, i. e., equal to *twice a triangular + a square*, I suspect that for prime numbers $4m - 1$ one will always have $m = 2\,(a - 1)^2 + \frac{b^2 - b}{2}$, i. e., *twice a square + a triangular*.[12] Let, e. g., $m = 1$, then $a = b = 1$; $m = 2$, then $a = 2$, $b = 1$; $m = 3$, then $a = b = 2$, and so on.

A few weeks ago I discovered a note I had made in a book as far back as 1718; this stated that

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{1807} + \dots = 1,$$

indicating the law $2+1=3$, $2\cdot3+1=7$, $2\cdot3\cdot7+1=43$, $2\cdot3\cdot7\cdot43+1=1807$, etc. for the denominators. Next to this I added at once: If the first term is $\frac{1}{a}$ and the law of progression states that, if some given term is $\frac{1}{A}$, the following term is $\frac{1}{A\,(A-1)+1}$, then the sum of the series will be $\frac{1}{a-1}$. However I do not recall any more how my proof proceeded, and so I thank you all the more for kindly communicating yours, Sir, which is quite evident. Furthermore, I also think that in this series the easy rule for calculating the sum of the series up to some specified term, if this term is given, is remarkable: Let some given term be $\frac{1}{A}$, then the sum of that term and all subsequent ones equals $\frac{1}{A-1}$, while the sum of the series up to and excluding that term will be $\frac{1}{a-1}-\frac{1}{A-1}$.[13]

I acknowledge with all due thanks that Professor Strube still remembers me, and I should wish to be useful to him here in whatever way I can. It is regrettable that Mr. Hedlinger, during his long stay in Berlin, did not make anything of his own accord, as he had done in other residences. You will probably have seen the excerpt of Doctor Kühn's paper *On the origin of Sources* in the *Acta Eruditorum*, where it has been reviewed, as I learnt from the *Zeitungen von Gelehrten Sachen*.[14] If on occasion you could take the trouble to enquire from one of your good friends in Danzig whether Doctor Johann Adam Kulmus of this town has rendered public the cryptographic artifice of which he edited two samples in the *Breslauische Natur- und Medicin-Geschichten* for the year 1724, or just disclosed the hidden contents of these two letters,[15] you should oblige me very much. I remember that a long time ago we could not find the entries *discernement*, *disciple* and so on in the latest edition of Richelet's *Dictionnaire*[16] and even thought they had been omitted; but in fact they are entered under the headings *dicernement*, *diciple* etc.; I should not want to follow the editor in this respect. I am very pleased that Mr. Razumovskiĭ and Mr. Teplov are lodging with you, Sir,[17] and plan to stay in Berlin for some more time; by this you will not only have occasion to cultivate the Russian language again, but will also get quite recent news of the Petersburg Academy from them. Your house will presumably lie in that district where Mr. Dangicourt, who was a member of the Scientific Society, used to dwell and where I spoke to him in 1718.[18] For the trouble you took about the *Dictionaire de Trevoux*[19] I pay you my most humble thanks and ask you to give me further notice at your convenience. For the rest, I remain with all due recommendation to your dearest wife and all your family, Sir, your most obedient servant

Goldbach.

St. Petersburg, July 30th, 1743.

[1] Goldbach is still trying to prove the theorem he first stated in n° 57.
[2] In Goldbach's copy, the paragraphs numbered 6 to 11 that follow have been cancelled; in the margin he noted "*v*[*ide*] *p*[*aginam*] 36", referring to n° 73.
[3] Both in the original and in the copy, Goldbach noted in the margin: "Diese *demonstration* kan etwas kürtzer gefasset und nur allein gezeiget werden daß a *non* $> m$ *nec* $> n$, woraus schon folget daß $4mn-m-1$ *non* $> mn$, *quod est absurdum.*" ("This proof can be somewhat shortened by just showing that a is neither $> m$ nor $> n$; it follows that $4mn-m-1$ cannot be $> mn$, which is absurd.").
[4] Cf. n° 70, note 4.
[5] Here Euler noted in the margin some calculations, preparing his reply (cf. n° 72, note 3): He starts by determining the coefficients 10, 12, 18, 28, 42, 60, 82, 108 of the series proposed by Goldbach and calculating the sum of the first seven terms

$$\frac{10}{10}+\frac{12}{100}+\frac{18}{1000}+\frac{28}{10000}+\frac{42}{10000}+\frac{60}{100000}+\frac{82}{\ldots} \qquad 1.141\,288\,2.$$

Next he proposes two (third-order) terms of his own:

$$\frac{10-\frac{19}{3}x+2xx+\frac{1}{3}x^3}{10^x} \qquad \frac{10-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3}{10^x}.$$

Rejecting the first one, he evaluates the second one by a difference scheme, obtaining in an analogous way the coefficients 10, 12, 18, 30, 50, 80, 122, 178 and the sum 1.141 592 2 for the first seven terms.
[6] Cf. n° 70, notes 10 and 18.
[7] Here Euler added in the lower margin: "*fit enim* $4aa+1=(4n+2m-1)^2-(2m-2)^2=(4n+4m-3)(4n+1)$". There is another note between the lines that breaks off in mid-sentence and has been partially cancelled: "*nisi sit* $n=1$ dann sonst können alle $4aa$ ..." ("unless $n=1$, for otherwise all $4aa$ ...").
[8] Here Euler added in the lower margin: "$4aa+1=(4M+1)(4N+1)$".
[9] In Goldbach's copy, the fourth number in the second row erroneously reads 33 instead of 38.
[10] The review journal *Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen* published in its issue for March 25th, 1743, a note "sent in by a distinguished patron" which we reproduce here, since – as Goldbach surmises – it originated with Euler at least indirectly:
"Nachstehende mathematische Frage ist uns von einem vornehmen Gönner zugeschicket worden; wir legen sie unseren Lesern ohne Aenderung zur Beantwortung vor.
Eine jede einfache Zahl, welche sich durch die Zahl 4 theilen läst, wenn man eine Einheit von derselben abziehet, zum Exempel, 5, 13, 17, 29, kan in zwey Quadratzahlen zertheilet werden, und zwar nur auf einerley Art. Als die Zahl 5 in 4 und 1, die Zahl 13 in 9 und 4, die Zahl 17 in 16 und 1, die Zahl 29 in 25 und 4. Dieses ist ein Satz dessen Beweis einige *Mathematici* vergeblich gesucht; und diese werden sich demjenigen höchst verbunden erachten, welcher entweder die beständige Richtigkeit desselben darzuthun, oder die Abfälle, wenn er welche haben solte, anzugeben, und davon einen kleinen Aufsatz einzusenden das Vermögen und die Gefälligkeit haben wird.
Zu Erleichterung des zu erfindenden Beweises bemerken wir, daß in der Aufgabe unter den einfachen Zahlen *numeri primi* verstanden werden; und der Satz, dessen Beweis und weitere Ausführung verlanget wird, nicht auf die *numeros compositos* zu ziehen sey: denn von diesen lässet er sich nicht behaupten, z[um] E[xempel] 21, 33, u. s. w. lassen sich nicht in zwey Quadratzahlen zerschneiden; sondern jenes bestehet aus 16, 4 und 1, dieses aber aus 16, 16 und 1 oder aus 25, 4 und 4."
("The following mathematical question has been sent to us by a distinguished patron; we submit it to our readers without change.
Every simple [i. e., prime – see below] number that can be divided by 4 after subtracting 1, e. g. 5, 13, 17, 29, may be split into two square numbers, and this in only one way: thus the number 5 into 4 and 1, the number 13 into 9 and 4, the number 17 into 16 and 1, the number 29 into 25 and 4. This is a theorem for which some mathematicians have in vain

sought a proof; so they will be most obliged to whoever will have both the ability and the complaisance to show its constant correctness or indicate the deviations from it, if there should be any, and send in a small exposition of this.
In order to facilitate the search for such a proof we remark that by "simple numbers" in the problem prime numbers are to be understood; and the theorem of which the proof and further exposition are asked for, is not to be applied to composite numbers, for it cannot be asserted with respect to these: for example 21, 33 and so on cannot be dissected into two square numbers; the first is composed from 16, 4 and 1, the other from 16, 16 and 1 or from 25, 4 and 4.")
The background of this challenge is as follows: Euler had discussed the theorem in question with the Göttingen professor of mathematics J.A. von Segner, in several letters exchanged between November 1742 and March 1743 (only Segner's replies have been preserved and are currently being edited in O. IVA 8; see in particular R 2424 and R 2425). In his letter from January 8th, 1743, Segner shows that he has given some thought to the question and identified its source in Fermat's *Observations on Diophantus*; in his next letter from March 25th he expresses his surprise that Euler has not yet found a complete proof of the theorem. He has had the challenge inserted into the local journal "not because I hoped any one of those who will see it would succeed with a proof after you could not find one, but – to tell the truth – in order to have others share the vain labour I invested myself." ("Ich habe diesen Satz in unsere Zeitungen setzen laßen, nicht so wol weil ich hofte daß jemand bey dem Beweiß reussiren werde (unter denen meine ich welche sie zu gesicht kriegen werden), nach dem E.r HochEdelgb. darauf nicht gekommen, sondern wenn ich die Wahrheit gestehen soll, um andern eben die vergebene Arbeit zu machen welche selbst unternommen.").

[11] On the sign that has been rendered by ∺ in the original text of the formula that follows, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.

[12] Here Euler noted in the lower margin: "*sit* $4m-1=79$ *seu* $m=20$ *non est* $20=2\times\Box+\triangle$" ("for $4m-1=79$, $m=20$ does not equal $2\times\Box+\triangle$"); cf. also his reply n° 72, note 7.
In Goldbach's copy, the rest of the paragraph has been struck out.

[13] The text of Goldbach's copy ends here.
Cf. n° 69, note 13, and n° 70, note 12. The book that may have motivated Goldbach's earlier note has not been identified.
The sequence 2, 3, 7, 43, 1807, ... (now usually named after J.J. Sylvester) arises in a natural way either from Euclid's proof for the infinitude of primes – this immediately leads to the generation indicated by Goldbach – or from the "greedy algorithm" for representing 1 as an infinite sum of ("Egyptian") fractions with numerator 1.

[14] Cf. n° 72, note 8.

[15] In November 1724, the Danzig physician J.A. Kulmus had published in the *Sammlung von Natur- und Medicin- wie auch hierzu gehörigen Kunst- und Literatur-Geschichten ...* – one of the earliest scientific journals published in German – a *Neues Inventum Steganographicum oder geheime Schreibart*. After a short summary of the history of cryptography he proposed a new system "invented by a certain officer" and gave a sample in the form of a 11×11 square scheme filled with geometrical symbols. In a second part of the paper published in December, another "curious manner" of coded writing by a certain Captain Lestocq – possibly the later Prussian Lieutenant Colonel Ludwig August L'Estocq – was described, where the coded message and the key needed for its decryption were hidden in an ordinarily written, apparently innocuous text. Kulmus presented two sample letters hiding the same code message, but apparently never revealed the plaintext or the details of the cipher.
It is likely that Goldbach's interest in Kulmus' method had to do with his new job as head of the cryptographic service of the Russian Foreign Office, but unsurprisingly no documentary evidence of his relevant activities exists.
Cf. Euler's reply n° 72, note 9.

[16] Goldbach probably refers to the 1735 edition of Richelet's *Dictionnaire* published in three volumes by Johannes Brandmüller at Basel, a book that was present in Euler's personal

library (cf. *CLLE*, n° 6–8); however, the same idiosyncratic spelling is also used in both earlier and later editions.

[17] Cf. n° 70, note 14.

[18] Cf. Euler's reply n° 72, note 15.

[19] Cf. n° 70, note 15.

72

Euler to Goldbach

Berlin, August 24th, 1743

Sir,

if $4mn - m - 1$ were a square in one case, one should immediately be able to find infinitely many other cases from this. Now if you assume, Sir,[1] that a^2 is the smallest square which is contained in the formula $4mn - m - 1$, then a must necessarily be smaller than m, and therefore the first five propositions are entirely correct. However, when you now go on to the equation

$$4n\,(m - a + n) - m - 1 = (a - 2n)^2\,,$$

Sir, as this is not comprised by the proposed form $4mn - m - 1$, it does not follow that $(a - 2n)^2$ must be smaller than a^2; indeed, $4mn - m - 1$ might yield the smallest square possible and nonetheless $4n\,(m - a + n) - m - 1$ might equal an even smaller square. For this reason the 8th proposition looks suspect to me, as notwithstanding the hypothesis, a^2 may be greater than $(a - 2n)^2$.

On occasion of this attempt it occurs to me whether this theorem could not perhaps be proved in the same manner in which one usually demonstrates that $a^4 + b^4$ or $a^4 - b^4$ cannot be a square. Indeed one assumes that there is a case in which $a^4 + b^4$ is a square number, say $= m^2$, and derives from this another one, $c^4 + d^4 = n^2$, so that $n < m$. In this manner one shows that if some square m^2, however large, were a sum of two fourth powers, one could at once determine from this a smaller one n^2, and thence a still smaller one, and so on;[2] however one assumes as a postulate that no case satisfying the equation exists in small numbers. Now, since it is also certain that in small numbers $4mn - m - 1$ cannot be a square, a proof in the following manner should be entirely correct:

I. Suppose there were a square a^2 which is contained in the form $4mn - m - 1$.

II. From this, another square b^2 smaller than a^2 could be determined which should also be contained in the form $4mn - m - 1$.

III. Thus one should arrive at ever smaller numbers, which is absurd.

Consequently all the proof should depend on proposition II: whether if some square a^2 is supposed, another, smaller one b^2 can be found which is contained in the form $4mn - m - 1$.

I am very much obliged to you, Sir, for the communication of your idea about the series $\frac{a}{1} + \frac{b}{10} + \frac{c}{100} + \frac{d}{1000} + \ldots$; indeed, large and troublesome numbers can often be easily expressed in this way. In order to calculate the number 1.141 592 by seven terms, you employ the general term $\dfrac{2x^2-4x+12}{10^x}$; however I think that your pen slipped there, as seven terms of that series amount to no more than 1.141 288 2; however the required number results by supposing the general term to be $\dfrac{10-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3}{10^x}$.[3]

Lately I discovered an indefinite expression by which the value of π is expressed. In the circle whose radius equals 1, take an arbitrary arc u, let its cosine be $= a$ and its sine $= \alpha$. Let the sine of the arc $2u$ be $= \beta$, $\sin\ 3u = \gamma$, $\sin\ 4u = \delta$, $\sin\ 5u = \varepsilon$, etc. Once these are defined in this way, I say that

$$\frac{\pi}{2} = u + a\alpha + \frac{1}{2}a^2\beta + \frac{1}{3}a^3\gamma + \frac{1}{4}a^4\delta + \frac{1}{5}a^5\varepsilon + \dots$$

Setting $u = \dfrac{\pi}{4}$, because of $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = 1$, $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta = 0$, $\varepsilon = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ etc. one finds the following series:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} - \frac{1}{5\cdot 2^3} - \frac{1}{6\cdot 2^3} - \frac{1}{7\cdot 2^4} + \frac{1}{9\cdot 2^5} + \frac{1}{10\cdot 2^5} + \frac{1}{11\cdot 2^6} - \dots,$$

which converges rather strongly.[4]

As to the equation $\dfrac{1}{m\,(m-a)^2} = \dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{(m-a)^2} - \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{m-a} - \dfrac{1}{m}\right)$, I had noted it down,[5] if I am not mistaken, in order to facilitate the calculation of the sum of this series:

$$\frac{1}{(a+1)\,1^2} + \frac{1}{(a+2)\,2^2} + \frac{1}{(a+3)\,3^2} + \frac{1}{(a+4)\,4^2} + \dots$$

Indeed in the first term one has $m = a+1$, in the second $m = a+2$, in the third $m = a+3$ and so on; consequently this series is immediately resolved into the following:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) &= \frac{\pi^2}{6a} \\ -\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a+2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{a+3} + \dots\right) &= -\frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a}\right), \end{aligned}$$

to all appearances you, Sir, determined these sums in your last letter by another method.

It is obvious that any square number a^2 which is not comprised by the formula $4n^2 + 2\,(2m-1)\,n + m - 1$ or by $4MN + M + N$ (which is made to agree with the other by setting $N = n$ and $M = n + m - 1$), yields a prime number $4a^2 + 1$. For if $a^2 = 4n^2 + 2\,(2m-1)\,n + m - 1 = 4MN + M + N$, one has

$$4a^2 + 1 = (4n + 4m - 3)\,(4n+1) = (4M+1)\,(4N+1)\,,$$

so this has factors;[6] therefore, if $4a^2+1$ is a prime number, a^2 cannot be contained in the aforementioned formulae. However I doubt very much whether anything will ever be discovered by this kind of exclusive formulae, as all the knowledge we have about primes is founded on these; indeed, in the same vein one can say that all numbers not comprised by the formula $mn + m + n + 1$ are prime.

I also doubt very much whether the values of m for which $4m - 1$ is a prime number have some definite property, as is the case when $4m+1$ is a prime number. The fact that m is not always the sum of the double of a square and a triangular number whenever $4m-1$ is a prime number, is apparent by the case $4m-1 = 79$; for here $m = 20$, which number does not have the conjectured property.[7]

Doctor Kühn has been so kind as to send me his *Dissertation sur l'origine des fontaines*, which I read attentively; I noted several doubts about it, which I sent to him.[8] In order to affirm his peculiar opinion about the very irregular figure of the Earth, he rejects the most certain experiments, as those on the different lengths of a pendulum beating seconds, whereas on the other hand he bases his opinions on the vaguest speculations. However, as he asked me to disclose my impressions to him sincerely, I did so, although with all courtesy; but it seems as if both the Mayor and Mr. Kühn have not been quite satisfied with this, for I have not had any answer since a long time ago. My correspondence to Danzig has been interrupted by this circumstance, so I do not find myself able to meet your request, Sir, about the cryptographic paper by Doctor Kulmus.[9] Mr. Razumovskiĭ's plan to stay here in my house has been most graciously approved by the Court; I am writing about this to His Excellency the Chief Hunting Master by today's mail.[10] Mr. Nartov revoked the pension that had been accorded to me by the Academy and most explicitly confirmed by the Committee; all foreign pensioners have met with the same fate, about which Mr. Bernoulli is inconsolable.[11] As I feel now exempt from my obligations towards the Academy, too, I have my *Scientia navalis* printed at Mr. Bousquet's in Lausanne.[12]

You will no doubt have already learnt that the new local Society of Science commenced on the 1st of this month and that two Cabinet Ministers, Counts von Podewils and von Borcke, as well as General Field Marshal von Schmettau, not only declared themselves members but also assiduously participate in the Assemblies. We have a Director and a Vice-Director who are to be replaced every half-year and elected by ballot. For this first half-year Field Marshal von Schmettau was elected as Director and the Marquis d'Argens as Vice-Director. His Royal Majesty most graciously allotted two rooms at the Castle for this new establishment; but as these are not yet fitted out, the first two Assemblies were held at the Director's, and the last two, as the General Field Marshal had gone to Aachen, at Cabinet Minister von Borcke's. The Assemblies are held every Thursday from 4 to 6 o'clock; in the last one I read a paper.[13] Members are either honorary or ordinary, the former being 24 in number, the latter 20. Every year a tome containing the papers read is to be published, all rhetorical pieces and poetry being however excluded. His Royal Majesty most graciously consented to honour this Society by his Most High Presence and solemnly confirm it. Perhaps this news may contribute to the

Petersburg Academy's recovery; for this purpose I at once communicated it to Professor Heinsius.[14]

Mr. Dangicourt[15] dwelt in the Neustadt district, next to the Neustadt church, but my house is in the Friedrichstadt district next to the Neustadt, where formerly the moat was situated; this quarter was built only in 1731. Among the new books I have recently read there are MacLaurin's *Treatise of Fluxions* and Jacquier's commentary on Newton's *Principia philosophiae naturalis*;[16] both are certainly excellent books.

I have the honour to assure you of my most perfect respect, Sir, and to remain your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Aug. 24th, 1743.

[1] Cf. the beginning of nº 71.

[2] Euler suggests using Fermat's method of infinite descent; in this case, this is equivalent to producing a contradiction from the assumption of a minimal counterexample – just as Goldbach tried to do.
Fermat described his method of descent in some detail in a 1659 letter to Carcavi, which was, however, published only in the 19th century (cf. *Œuvres de Fermat*, t. II, p. 431–434).
The basic idea behind Fermat's infinite descent had already been used by Euclid in his proof that every number admits a prime factorisation (Prop. VII . 31).

[3] Cf. nº 71, note 5.

[4] Cf. *Institutiones calculi differentialis* (E. 212, Pars II, Cap. IV, § 91).

[5] Cf. nº 70, note 4, and nº 71, note 4.

[6] Cf. nº 71, note 8.

[7] This example disproves Goldbach's conjecture in his previous letter (cf. nº 71, note 12).

[8] Cf. nº 71, note 14.
The mathematician and natural philosopher Heinrich Kühn in Danzig, who corresponded both with Goldbach and with Euler, had won the 1741 prize of the Académie Royale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux with his *Dissertation sur l'origine des fontaines*. He sent this to Euler in February 1742; as Euler explains here to Goldbach, he strongly disagreed with Kühn's ideas, which were based on preconceived notions rather than quantitative observation. A lengthy, vivid discussion comprising the letters R 1326–1334 followed. For the most part only Kühn's side has survived: the only preserved letter by Euler, R 1329, has been edited in Smirnov 1963, p. 133–140.

[9] Cf. nº 71, note 15.
The mayor of Danzig Euler mentions is Carl Gottlieb Ehler, another naturalist and amateur mathematician, now mostly remembered for proposing the problem of the Königsberg bridges to Euler in 1736. Ehler had introduced his colleague Kühn to the Petersburg Academy and acted as an intermediary for Kühn's letters to Euler in the 1730s.
Ehler's correspondence with Euler in fact ceased after December 1742, whereas Kühn resumed contact in January 1744.

[10] Cf. nº 70, note 14, and nº 71, note 17.
As Empress Elizabeth's favourite, the *Oberjägermeister* (Chief Hunting Master) Alekseĭ Grigor'evich Razumovskiĭ was a very influential figure at the Russian court (indeed, some called him "the Night Emperor"). Euler's guest, his younger brother Kirill, was named President of the Imperial Academy after his return to Petersburg (at the age of 18); in 1750, he also became Hetman (military commander) of the Ukrainian Cossacks.
No direct correspondence between Euler and Alekseĭ seems to have survived, whereas Kirill's continuing patronage of Euler is attested by several letters.

[11] In October 1742, Nartov had supplanted Schumacher as head of the Petersburg Academy's administration, supervised by a "steering committee" of noble civil servants (for a recent evaluation of the entire affair, see Werrett 2010b). During Nartov's tenure, which ended in December 1743 with Schumacher's reinstatement, all foreign members' pensions were suspended (cf. nº 58, note 8).
Daniel Bernoulli lodged an official complaint with the Academy that was presented on May 6th and August 19th, 1743, by the adjoint Frédéric Moula, a student of his father's from Neuchâtel (cf. *Materialy* 1885, t. VI, p. 585). He also violently aired his – and Euler's – grievances in a letter to their patron Prince A.D. Kantemir, then ambassador to France; a copy of this went to Euler on September 4th (cf. R 151, to be published in O. IVA/3).
Only in March 1744 Schumacher was finally able to assure Euler that, by a decree the Empress had issued at A.G. Razumovskiĭ's urgent request, the foreign members' pensions would be resumed and the arrears paid out (cf. R 2126: JW 2, p. 64).

[12] Cf. nº 68, note 3.

[13] On the start of the *Nouvelle Société Littéraire*, see Harnack 1900, vol. I, p. 262–268; its statute is reproduced in vol. II, p. 254–257.
In the fourth meeting held on August 22th, Euler submitted a paper (E. 828, in French) on the motion of bodies enclosed in a rotating tube and read its preface (cf. *ibid.*, p. 258); after all, this was printed only in the 1862 *Opera Postuma*.

[14] None of Euler's letters to Heinsius – by then his principal correspondent at the Petersburg Academy – from 1743 have been retrieved.

[15] Cf. nº 71, note 18.

[16] Euler refers to the three-volume edition of Newton's *Principia* that the Minim fathers Thomas Le Seur and François Jacquier published at Geneva in 1739–42. Actually much of the commentaries had been contributed by Jean-Louis Calandrini, based in part on the Bernoullis' criticism of Newton's work (cf. Guicciardini 2013).

73
Goldbach to Euler
Petersburg, September (17th) 28th, 1743

Sir,

owing to your objection against the previous proof I indeed found proposition 6 of that proof to be incorrect; therefore I ask you to strike this and the following ones out from my last letter and to substitute in their place the following:[1]

6. Add to both sides of the equation $(4n-1)\,m-1=a^2$ the term

$$-\,2a\,(4n-1)+(4n-1)^2\,;$$

then it becomes[2]

$$(4n-1)\,(m-2a+4n-1)-1=(a-(4n-1))^2\,.$$

7. Since, however, by hypothesis a^2 is the smallest square that satisfies what was asked for, we shall have $a^2<(a-4n+1)^2$ or a^2 equal to that same term; but it cannot be equal, since $4n\neq 1$, so $(-\,2a+(4n-1))\,(4n-1)>0$ and therefore

$4n - 1 > 2a$; but by assumption $4n - 1 = \dfrac{a^2+1}{m}$, so $\dfrac{a^2+1}{m} > 2a$ or $a^2 > 2am - 1$ or $a > 2m - \dfrac{1}{a}$.

8. On the other hand, by prop. 5 one obviously has $a < m$, so $m > 2m - \dfrac{1}{a}$; but this is absurd if m and a are whole numbers, so from $4mn - m - 1 = a^2$ a preposterous consequence should follow.[3]

A few days ago I thought of several propositions which at first glance might appear difficult to prove; if, e. g., I define

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots &= A \\ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots &= B \\ 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \dots &= C \end{aligned}$$

and so on, then

$$\frac{\pi}{2} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \frac{D}{8} + \dots;$$

or if

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots &= \beta \\ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots &= \gamma \\ 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \dots &= \delta \end{aligned}$$

and so on, then

$$\frac{\pi}{2} = \beta + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{4^2} + \frac{\varepsilon}{4^3} + \dots \text{[4]}.$$

If I set up a series in whose terms the numerator always equals 1 and the denominators consist of all possible numbers raised to all powers, i. e.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \dots,$$

then the sum of the series, in the case where the upper sign is taken, will be 1, in the case of the lower sign (which is assigned to all odd denominators) the sum of the series will be $2 \log 2 - 1$.[5]

Your objection, Sir, against the formula of seven terms which make up 1.141 592 is quite right; the other formula had been due to an oversight.[6]

It is very easy to prove that no algebraic formula such as $a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots$, where x is the index of the terms, can yield none but prime numbers, whatever integers the coefficients a, b, c, ... may be;[7] but all the same there are formulae which comprise a greater number of primes than many others; the series $x^2+19x-19$ is of this kind, as in its 47 initial terms it comprises only 4 non-prime numbers.[8]

It still might well be true – analogously as, in the case where $4m+1$ is a prime number, m equals the sum of two triangular numbers and a square – that in the case where $4m-1$ is a prime number, m equals the sum of two squares and a triangular number,[9] as in $20 = 1 + 4 + 15$; however I have not tested this and leave it for further investigation.

Professor Knutzen[10] writes me that on your advice, Sir, he sent his ideas about magnets to the *Académie des Sciences* in Paris; however I do not know whether you have already learnt how they have been received there, in which case I ask you to report it to me. I humbly thank you for the news about the fortunate progress of the Royal Prussian Society of Science.[11] Brigadier de Baudan explained clearly to me the situation of your present house.[12]

I have been asked by Mr. Poleni to send him your *Musica*, tome X of the Petersburg *Commentarii* and other books that have been published by our Academy since 1738;[13] the money for them is to be paid to Mr. Marinoni in Vienna.[14] However, as it is at present impossible to procure them to him from here,[15] perhaps some bookseller in Berlin might be pleased to undertake this commission and to have the money assigned to a Vienna merchant. If you could see your way to contribute to this, you should oblige me, too, very much.[16]

With respect to the pension you mentioned, I am very sorry that it has been in part denied you, Sir; however I think nothing can be reported for certain until the Academy's budget will be established on a reliable basis.[17]

The two statements that $8n+3$ can always be split into three squares and n can be split into three triangular numbers are equivalent, and if either is admitted the other one follows.

It appears very probable to me that when 2^m is substituted for x in the formula $x^2+19x-19$ mentioned above, then for any positive integer m a prime number will always result; however, even if this were true, it should be hard to prove, in the same way as the fact that this same formula $x^2+19x-19$ does not have any divisor of the form $10n+1$.[18]

I remain with particular respect, Sir, your most obedient servant Goldbach.

St. Petersburg, Sept. 28th, 1743.

[1] Cf. n° 71, note 2.
In his copy, Goldbach noted in the margin: "*V*[*ide*] *p*[*aginam*] 23."; the reference is to the corresponding passage of n° 71, which has been struck out (cf. n° 71, note 2).

[2] On the left-hand side of the formula that follows, m seems to have been added later; in Goldbach's copy, it is missing.

[3] As Euler will acknowledge in his reply, Goldbach's long quest for a proof (cf. n° 57, note 3) has finally been successful.

[4] Cf. Euler's reply n° 74, note 3.

[5] Here Euler noted between the lines: "(*omnes denominatores unitate minui debent, quo hoc enunciatum fit verum*)" ("all the denominators have to be decreased by 1; then the statement becomes true"). See his reply n° 74, note 4.

In Goldbach's copy all the preceding paragraph has been struck out; in the margin there is a note "*fals*[*um*], *vid*[*e*] *inf*[*ra*] *p*[*aginam*] 42" ("wrong, see p. 42 below"), referring to nº 77, note 4.

[6] Cf. nº 71, note 5, and nº 72, note 3.

[7] This may well be the first statement of what has been called "Goldbach's theorem": no polynomial can attain only prime values for integer arguments. Euler later indicated a proof in nº 163 and published it in 1764 in E. 283 (see, however, Lorey 1934); Goldbach's proof is in nº 164.

[8] The existence of the "prime-producing polynomial" $x^2 + 19x - 19$ is linked to the fact that $\mathbb{Q}\left(\sqrt{19 \cdot 23}\right)$ has class number 1: see also nº 74, note 5.

[9] Here Goldbach modifies the conjecture proposed in nº 71, note 12, and disproved by Euler's counterexample in nº 72, note 7.

[10] The three non-mathematical paragraphs that follow have been left out in Goldbach's copybook.
The philosopher Martin Knutzen – today mainly remembered for being Kant's and Hamann's teacher at the University of Königsberg – was in correspondence with both Goldbach (since 1739) and Euler (since 1741). In December 1738, he had sent a treatise on magnetism to the Petersburg Academy; this was read by Goldbach, along with Euler's remarks, in the meeting of January 22nd, 1739. In the following months, Delisle and Krafft also gave their expert opinions, but then the manuscript was shelved (it is still in the Academy's archive, but has never been printed). In September 1741, Knutzen appealed to Euler, complaining about the scanty reply he had got and asking for his opinion. Euler replied that Krafft had then been charged with the Academy's answer, but he also suggested Knutzen should enter his paper for the 1742 competition of the Paris Academy, as he himself had done (cf. R 1169–1170). In Knutzen's later letters up to 1746, questions of magnetism and the Paris competition are mentioned several times (R 1172, 1175, 1197, 1207). The Euler-Knutzen correspondence (72 letters by Knutzen, but only 2 by Euler have apparently been preserved) is currently being studied by a team in Italy led by Antonio Moretto.

[11] Cf. nº 72, note 13.

[12] Cf. nº 58, note 5.

[13] The *Tentamen novae theoriae Musicae* (E. 33) had been printed at Petersburg in 1739, whereas T. X of the *Commentarii*, which comprised the papers submitted in 1738 – among them seven of Euler's – appeared only in 1747.

[14] The Italian marquis Giovanni Poleni and the astronomer Johann Jakob von Marinoni were in correspondence both with Goldbach, who had met them in person during his travels, and with Euler.

[15] In the wake of the investigation against Schumacher (cf. nº 72, note 11), Nartov had had the Academy's archive sealed, seriously hampering the academicians' access to its collections.

[16] The last sentence was added in the margin.

[17] Cf. nº 72, note 11.

[18] Here Euler noted in the margin: "*Si* $m = 6$ *et* $x = 64$ *erit* $xx + 19(x-1) = 5293 = 67 \cdot 79$. *Si* $x = 73$, *erit* $xx + 19(x-1) = 6697 = 37 \cdot 141$" ("For $m = 6$, $x = 64$, one has $x^2 + 19(x-1) = 5293 = 67 \cdot 79$. For $x = 73$, one has $x^2 + 19(x-1) = 6697 = 37 \cdot 181$"). Thus both of Goldbach's conjectures are wrong: see Euler's reply nº 74, note 6.
In his copy, Goldbach noted in the margin: "*fals*[*um*], *v*[*ide*] *inf*[*ra*]" ("wrong, see below"), referring to his retraction in nº 75.

74

Euler to Goldbach

Berlin, October 15th, 1743

Sir,

now your proof that $(4n-1)\,m-1 \neq a^2$ is completely correct;[1] for previously you showed, defining a^2 to be the smallest of all those squares (if there are any), that one must have $m > a$, and now, under the same conditions, that $4n-1 > 2a$; consequently it must be the case that $(4n-1)\,m > 2a^2$; however, in fact $(4n-1)\,m = a^2+1$, so one should have $a^2+1 > 2a^2$, and this cannot be true unless $a=0$ or $a=1$ (for here the $>$ sign must not read "greater" but "not smaller"). However, if one sets either $a=0$ or $a=1$, the equation $(4n-1)\,m-1=a^2$ becomes impossible. I have to admit that I did not believe the theorem could be proved in such a simple and beautiful way, and I am therefore convinced that most of Fermat's theorems can also be proved in a similar way; for this reason I am all the more obliged to you, Sir, for communicating this magnificent proof. Now, notwithstanding that it follows from it that the formula $4mn-m-n$ cannot be a square either, all the same I drew up the following demonstration according to your instructions, Sir:

Whoever contests the truth of the proposition $4mn-m-n \neq a^2$ must assert there is some smallest square a^2 to which the formula $4mn-m-n$ can become equal. Let therefore a^2 be this smallest square, and let $4mn-m-n=a^2$; then $(4m-1)\,(4n-1)-1=4a^2$. Add on both sides $-\,8a\,(4n-1)+4\,(4n-1)^2$; then

$$(4m-1-8a+4\,(4n-1))\,(4n-1)-1=4\,(a-4n+1)^2$$

is a square. Since this cannot be smaller than the preceding one, it follows that

$$(4m-1-8a+4\,(4n-1))\,(4n-1) > (4m-1)\,(4n-1)\,,$$

and consequently $4n-1>2a$ (where the $>$ sign signifies "not smaller"). Similarly it can be proved that $4m-1>2a$. Now, as $4m-1=2a+p$ and $4n-1=2a+q$, where $p>0$ and $q>0$, one will have $(4m-1)\,(4n-1)=4a^2+2a\,(p+q)+pq$; however, $(4m-1)\,(4n-1)=4a^2+1$ and therefore $2a\,(p+q)+pq=1$; but this cannot be true unless $a=0$, $p=1$ and $q=1$. On the other hand, it is obvious that a cannot equal 0; therefore there is no smallest square a^2 which equals the formula $4mn-m-n$, and consequently this formula cannot be a square in any case. Q. E. D.

I have a great store of similar theorems; if proofs of the same kind could be established for them, this should contribute not a little to the enhancement of this science. In the order in which I discovered them, these theorems are as follows: All the formulae that follow can in no case yield square numbers:

I.	$4mn - 1\,(m+n)$
II.	$4mn + 3\,(m+n)$
III.	$8mn - 1\,(m+n)$
IV.	$8mn - 3\,(m+n)$
V.	$8mn \pm 3\,(m-n)$
VI.	$8mn \pm 5\,(m-n)$
VII.	$8mn + 5\,(m+n)$
VIII.	$8mn + 7\,(m+n)$
IX.	$12mn - 1\,(m+n)$
X.	$12mn + 5\,(m+n)$
XI.	$12mn \pm 5\,(m-n)$
XII.	$12mn \pm 7\,(m-n)$
XIII.	$12mn - 7\,(m+n)$
XIV.	$12mn + 11\,(m+n)$
XV.	$20mn - 1\,(m+n)$
XVI.	$20mn - 3\,(m+n)$
XVII.	$20mn \pm 3\,(m-n)$
XVIII.	$20mn - 7\,(m+n)$
XIX.	$20mn \pm 7\,(m-n)$
XX.	$20mn - 9\,(m+n)$
XXI.	$20mn + 11\,(m+n)$
XXII.	$20mn \pm 13\,(m-n)$
XXIII.	$20mn + 13\,(m+n)$
XXIV.	$20mn \pm 17\,(m-n)$
XXV.	$20mn + 17\,(m+n)$
XXVI.	$20mn + 19\,(m+n)$
XXVII.	$24mn - 1\,(m+n)$
XXVIII.	$24mn - 5\,(m+n)$
XXIX.	$24mn - 7\,(m+n)$
XXX.	$24mn \pm 7\,(m-n)$
XXXI.	$24mn - 11\,(m+n)$
XXXII.	$24mn \pm 11\,(m-n)$
XXXIII.	$24mn \pm 13\,(m-n)$
XXXIV.	$24mn + 13\,(m+n)$
XXXV.	$24mn \pm 17\,(m-n)$
XXXVI.	$24mn + 17\,(m+n)$
XXXVII.	$24mn + 19\,(m+n)$
XXXVIII.	$24mn + 23\,(m+n)$
	etc.

Furthermore, it is also true that $7mn - m - n \neq a^2$.

Apart from these, I have some which are more general,[2] as $4kmn-m-n\neq\square$, or, expressed in another way:

Theorem: If mn is any divisor of the number N, I say that the formula $4N-m-n$ can never be a square.

Moreover, the formula $4\,(4k+1)\,mn-(8k+1)\,(m+n)$ can also never yield a square.

The theorems which you discovered, Sir, about expressing the value of $\frac{\pi}{2}$ by infinitely many series,[3] have been known to me for a long time: indeed, since

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\ldots,$$

one will have

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{2-1}-\frac{2}{4-1}+\frac{2}{6-1}-\frac{2}{8-1}+\ldots$$

or

$$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3-\frac{1}{2}}-\frac{1}{4-\frac{1}{2}}+\ldots$$

If now every term is expanded in a geometric progression, one gets

$$\begin{array}{lllllll}\frac{\pi}{2} & = & 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2^2} & +\frac{1}{2^3} & +\frac{1}{2^4} \quad \ldots\\ & & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\cdot 4} & -\frac{1}{2^2\cdot 8} & -\frac{1}{2^3\cdot 16} & -\frac{1}{2^4\cdot 32} \quad \ldots\\ & & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{2\cdot 9} & +\frac{1}{2^2\cdot 27} & +\frac{1}{2^3\cdot 81} & +\frac{1}{2^4\cdot 243} \quad \ldots\\ & & & & \ldots & & \\ & & \multicolumn{5}{l}{+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ \ldots}\\ & & \multicolumn{5}{l}{+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\ \ldots\right)}\\ & = & \multicolumn{5}{l}{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{8}+\frac{1}{27}-\frac{1}{64}+\frac{1}{125}\ \ldots\right)}\\ & & \multicolumn{5}{l}{+\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{16}+\frac{1}{81}-\frac{1}{256}+\frac{1}{625}\ \ldots\right)}\\ & & & & \ldots & & \end{array}$$

In the same manner, since $\frac{\pi}{2}=\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{5\cdot 7}+\frac{4}{9\cdot 11}+\ldots$, one will have

$$\frac{\pi}{2}=\frac{4}{2^2-1}+\frac{4}{6^2-1}+\frac{4}{10^2-1}+\ldots=\frac{1}{1^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{3^2-\frac{1}{4}}+\frac{1}{5^2-\frac{1}{4}}+\ldots$$

If now every term is expanded in a geometric series, your other expression, Sir, results:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\dots\\ &\quad+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\dots\right)\\ &\quad+\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\dots\right)\\ &\quad\dots\end{aligned}$$

In the series $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\pm\frac{1}{25}\pm\frac{1}{27}+\frac{1}{32}+\frac{1}{36}+\dots$, for which you indicated that the sum equals 1 in the case of the upper signs and $2\log 2-1$ in the case of the lower signs, there is probably a mistake, Sir; in fact, all denominators ought to be decreased by 1. But then the same theorems result which you communicated to me a long time ago, Sir, permitting me most kindly to publish them along with your proof in Tome 9.[4]

The series whose general term is $x^2+19\,(x-1)$ is indeed very remarkable for the frequent prime numbers that occur in it.[5] However, composite numbers appear the more frequently the further one continues the series; in fact, whereas among the first 47 terms only four non-prime numbers occur, among the first 75 terms already 14 non-prime numbers appear. This is how far I continued this series, and this sufficed to refute both your conjectures, Sir, about the properties of this progression.[6] For firstly I saw that not always a prime number results when some power of 2 is substituted for x: the 64th term is $5293=67\cdot 79$. Then the 73rd term $6697=37\cdot 181$ evinces that divisors of the form $10n+1$ are not excluded. By the way, with regard to the divisors of the terms of this series it is to be noted that no others occur than those that are at the same time divisors of the form $19a^2-23b^2$, and conversely.[7]

I can neither refute nor prove your observation, Sir, that whenever $4m-1$ is a prime number, then m is also a number composed of two squares and a triangular number; in fact I have not been able to find a single number which cannot be split into two squares and a triangular number;[8] at least there is none smaller than 100. Now if all numbers were to enjoy this property, the observation should be correct, but in the same way as if I were to say that every m is a sum of three triangular numbers or of four squares.

It is easy to see that the two propositions "$8m+3$ is a sum of three squares" and "m is a sum of three triangular numbers" are equivalent; the proof that every number is a sum of four squares also depends on the same. Indeed, if $m=\frac{a^2+a}{2}+\frac{b^2+b}{2}+\frac{c^2+c}{2}$, then $8m+3=(2a+1)^2+(2b+1)^2+(2c+1)^2$; therefore $8m+4$ is always a sum of four squares; thus also its fourth part, $2m+1$, consequently any odd number, and finally any number at all will be resolvable into four squares. With regard to the form $8m+3$ it is to be noted that, whenever it is a prime number, this is also contained in the form $2a^2+b^2$. In order to prove this and some other theorems of the same kind, the argument mostly turns on the following lemmas, for which I have not yet been able to find a real proof:

I. If some whole number n is not a sum of two integer squares, neither will it be one in fractions; indeed, no number np^2 can then be split into two integer squares. And conversely, if np^2 is a sum of two squares, then the number n will likewise be a sum of two squares, and this in whole numbers.

II. If some number n is not a sum of three squares in whole numbers, neither will it be one in fractions.

III. If the number np^2 is a sum of four squares, the number n will also be a sum of four squares (not excluding 0).[9]

I cannot recall whether the following expression is known to you, Sir:[10]

$$a^m - \frac{n}{1}(a+b)^m + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(a+2b)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+3b)^m + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(a+4b)^m - \ldots;$$

when m and n are whole numbers and $m < n$, the entire expression always equals 0.

The following theorem also appears noteworthy to me: If $a^2 + 4n$ is a prime number p and if d is any divisor of n, then p will be a number contained in the form $dx^2 + y^2$, and this in a unique way. Let, e. g., $n = 30$; taking $a = 11$ one has $4n + a^2 = 241 = p$. Consequently the number 241 is contained in the following forms: $x^2 + y^2$, $2x^2 + y^2$, $3x^2 + y^2$, $5x^2 + y^2$, $6x^2 + y^2$, $10x^2 + y^2$, $15x^2 + y^2$, and $30x^2 + y^2$; in each one it is contained just once.[11] In the same way as a sum of two relatively prime squares cannot have any other divisors than those which are contained in the form $4n + 1$, I can also prove that all divisors of the form $a^4 + b^4$ are contained in the formula $8n + 1$, and likewise that all divisors of $a^8 + b^8$ have to be numbers of the form $16n + 1$.

And generally:[12] the numbers contained in the form $a^{2^m} + b^{2^m}$ do not admit any other divisors except those of the type $2^{m+1}n + 1$.

If the infinitely many factors

$$(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)\left(1-n^4\right)\left(1-n^5\right)\left(1-n^6\right)\ldots$$

are actually multiplied with one another, the following series results:

$$1 - n^1 - n^2 + n^5 + n^7 - n^{12} - n^{15} + n^{22} + n^{26} - n^{35} - n^{40} + n^{51} + n^{57} - \ldots;$$

by induction it is easily seen that all terms are comprised by the form $n^{\frac{3x^2 \pm x}{2}}$; they have the + sign attached when x is an even number and the − sign when x is an odd number. However I have not yet been able to discover a method by which I could prove the identity of these two expressions. Professor Nicolaus Bernoulli also could not find anything out about this except inductively.[13]

Some weeks ago I received a letter from your correspondent at Königsberg, Mr. Thegen, with an enclosure by you, Sir, bearing the address “To Baron Heimenthal at Königsberg”; however, Mr. Thegen did not write anything but that, as Chamberlain von Korff had already passed Königsberg, I should forward this letter.[14] This commission put me in a most embarrassing situation, since I could not gather any connection between Chamberlain Korff and Baron von Heimenthal from it and had to infer by the address that the latter was probably staying at Königsberg, although the letter had thence been forwarded to me. As I did not know what to do about this, I consulted Professor Strube, who was of the opinion that, because Mr. Thegen had explicitly mentioned Chamberlain Korff, the letter ought to be sent to him (at Stralsund), as he should without doubt know how to deal with it; so this was done by Professor Strube. However, in the meantime I strongly believe that by this a great inadvertence must have been committed. But the one and only person culpable in this is Mr. Thegen, and I am convinced that I took every precaution on my part to avoid all blame. At first I thought to send the letter immediately back to you, Sir; however I was afraid it might contain important matters which should not suffer such a long delay.

What the Paris Academy shall judge about Professor Knutzen's paper on magnets will become known only after Easter next year.[15]

I have not had any letters from Mr. Poleni for a long time. The books which he requests are not to be had here; indeed, volume X of the *Commentarii* has not been printed, and even vol. IX is not yet out. What has been published since 1738 can be found at Leipzig and should be ordered there; by this channel Mr. Marinoni could have it directly delivered, as there is a steady commerce between Leipzig and Vienna. Here I could not even find a bookseller who could take a commission for Vienna.[16]

The new Society's assemblies are constantly being continued, some paper being read each time as in Petersburg. State Ministers von Podewils and Borck, General Field Marshal von Schmettau and other members of the nobility assiduously attend; recently, Mr. de Voltaire also visited us. His Majesty the King has not yet taken a definite resolution about it; meanwhile the Ministers assure us that he will not fail to do so.[17]

Last Michaelmas we finally moved into our house, after I had it repaired for several hundred Imperial thalers; now we dwell merrily in it, together with Chamber Squire Razumovskiĭ and Mr. Teplov.[18] We all most eagerly expect the pleasant news of the entire restoration of the Petersburg Academy, and of Mr. Schumacher in particular.[19]

I cordially deplore Brigadier Baudan's sad lot, wishing that he may soon be engaged according to his desires.[20]

Professor Strube, who has also been denied his salary by Mr. Nartov, and all my family ask to be most obediently recommended to you, Sir, and I remain with all due respect your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Oct. 15th, 1743.

[1] Cf. n° 57, note 4.

[2] For a further discussion of these generalised statements, see *infra* n° 79–87.

[3] Cf. n° 73, note 4.

[4] Cf. n° 73, note 5. Goldbach will finally acknowledge his mistake: see n° 77, note 4.
Euler refers to his paper E. 72, which had been submitted to the Petersburg Academy on April 25th, 1737, but was printed only in 1744 in t. 9 of the *Commentarii*. As Theorem 1, he indicates the "admirable" summation mentioned here, explicitly attributing it to Goldbach and thanking him for motivating the research that led to his other results; the alternating sum is included as Theorem 2.
Goldbach had actually communicated his formula in a letter sent to Daniel Bernoulli in April 1729, sketching its proof and a connection with other series defined by number-theoretical properties in another letter from May 26th (see *Correspondance*, t. II, p. 296 and 305–306).

[5] Cf. n° 73, note 8.
Goldbach's polynomial $x^2 + 19x - 19$ yields prime values for $x = 2, 3, \ldots, 18$. Euler later found the polynomial $f(x) = x^2 - x + 41$, which has prime values for $x = 1, 2, \ldots, 40$ (see E. 461). Euler's polynomial has discriminant -163, and its properties are connected with the fact that the quadratic number field generated by $\sqrt{-163}$ has class number 1 (see Frobenius 1912 and Rabinowitsch 1913). Frobenius observed that if the class number of forms with discriminant $1 - 4m$ is 1, then every integer $< p^2$ represented by such a form is necessarily prime; this explains Euler's polynomial. In addition he showed that if the class number (in the strict sense) of forms with discriminant $\Delta = p(p+4)$ is equal to 2, then every integer $< (2p-1)^2$ coprime to Δ and represented by $x^2 + pxy - py^2$ is prime, which explains Goldbach's observation. The only known primes p with this property are $p = 3$, 7 and 19.
The solution of Gauss's class number 1 problem (due independently to Heegner, Baker and Stark) implies that there are no polynomials $x^2 + x + m$ with $m > 41$ yielding only prime values for $m = 1, 2, \ldots, m-1$.

[6] Cf. n° 73, note 18.

[7] If a prime p divides $f(x) = x^2 + 19x - 19$, then $4f(x) = (2x+19)^2 - 19 \cdot 23$. Gauss's genus theory implies that the odd prime divisors of $f(x)$ are the odd prime divisors of the form $X^2 - 19 \cdot 23Y^2$, or of $19X^2 - 23Y^2$.

[8] Goldbach returns to his conjecture (and several similar ones) in n° 126; Euler derives it from the Four Squares Theorem in n° 129.

[9] More than three years later, Euler will present Goldbach with an elaborate proof of statement I about two squares (see n° 115, n° 138), whereas the analogous statement III – a crucial step in the proof of the Four Squares Theorem – still eludes him in 1751 (see n° 156).
A simple proof for these theorems was given in 1912 by L. Aubry; see also Weil 1984 (App. II to Ch. III, p. 292–295).

[10] Cf. n° 75, text after note 5, and n° 76, text after note 3.

[11] As Euler will realise later, this is not true. The condition $p = a^2 + 4n$ with $d \mid n$ implies that p is represented by some form in the principal genus of the forms with discriminant $-4d$, which implies that it is represented by $x^2 + dy^2$ over the rationals. For a counterexample to Euler's claim, take $d = 23$, $n = 46$, and $p = 193 = 3^2 + 8 \cdot 23$; this prime is, however, not represented by the form $x^2 + 23y^2$ (see Lemmermeyer 2007).

[12] These claims about prime divisors of $a^4 + b^4$, $a^8 + b^8$ and $a^{2^m} + b^{2^m}$ were proved by Euler in E. 134.

[13] The identity

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k x^{\frac{3k^2-k}{2}}$$

(conventionally called the "Pentagonal Number Theorem") is among Euler's most remarkable results. Euler's correspondence shows that he discovered it by induction, in the context of an investigation of partitions Naudé had triggered by his letter R 1903 from August 29th, 1740. In his reply R 1904 from September 12th (23rd), the infinite product is developed in a doubly

infinite series that Euler does not yet see how to sum (cf. Smirnov 1963, p. 203). The definitive version with the "pentagonal numbers" as exponents appears in his *Notebook IV*, p. 51 (cf. Kiselëv/Matvievskaya 1965, p. 165). In a letter written on November 30th (December 11th), 1740, he proposed the identity to Daniel Bernoulli, as we know from Bernoulli's reply dated January 28th, 1741 (R 140: to be published in O. IVA/3). In almost the same terms the – still conjectural – result is added at the end of E. 158, which was submitted to the Petersburg Academy in April 1741, but printed only in 1751. And more than a year later, Euler still appealed for help with the proof, this time from Nicolaus I Bernoulli (cf. R 236, September 1st, 1742, and R 238, November 10th, 1742: O. IVA/2, p. 510–579, esp. p. 518, 559–560).
Euler returned to the question in the context of divisor sums in 1747 (cf. n° 113, note 3); in 1750 he finally arrived at a proof which he communicated to Goldbach (cf. n° 144, note 7) and later published in E. 244. All of Euler's work in this area, including a hitherto unpublished alternative proof from Euler's *Notebook V*, his later papers E. 541 and E. 542, and the connection with Jacobi's theta series has been analysed in an extensive case study by Jordan Bell in 2010.

[14] After Korff's withdrawal from the presidency of the Petersburg Academy, he occupied various diplomatic positions in Northeast Europe; the same seems to be true of Heimenthal, a physician and writer from Thüringen who had been ennobled in 1737 and acted as a representative for several German princes. Goldbach had apparently sent his letter to Königsberg in the hope that the recipient – probably Johann Georg Thegen, whose father had been a professor of philosophy at Königsberg in Goldbach's youth – would hand it to Korff for delivery.

[15] Cf. n° 73, note 10. The competition of the Académie des Sciences on magnetism, which had been first proposed for 1742, was again postponed in 1744; in 1746 a triple prize was shared among Du Tour, Euler and the brothers Daniel and Johann II Bernoulli (cf. n° 105, note 5, and n° 107, note 3). Nothing is known about Knutzen's entry.

[16] Cf. n° 73, notes 13–14.
Euler's correspondence with Poleni had been interrupted since September 1742 and was resumed only in summer 1746.

[17] Voltaire had attended the assembly of the *Nouvelle Société Littéraire* on October 8th, 1743; he later became a foreign member of the Berlin Academy.
King Frederick, on the other hand, never attended a meeting of "his" Academy; the several historical and biographical notes he contributed to the Academy's publications were read by his secretaries. Even at the official opening ceremony, which was held at the Royal Castle in Berlin on the eve of his birthday, January 23rd, 1744 (cf. n° 77, note 7), some – not precisely identified – Royals deputised for the King.
Euler seems to have met Frederick in person for the first time at Potsdam in September 1749, when he gave expert advice about the failure of the fountains in the Sanssouci park.

[18] Cf. n° 56, note 21, and n° 70, note 14.

[19] Cf. n° 72, note 11.

[20] Cf. n° 56, note 22.

75

Goldbach to Euler

Petersburg, December (3rd) 14th, 1743[1]

Sir,

from your letter dated October 15th I learnt with pleasure that my proof finally has turned out right;[2] now although my other occupations left me nearly no time to investigate more closely the additional theorems which you included, Sir, I am hopeful all the same that one will in future be able to determine the conditions for the numbers e and f in infinitely many cases of the general impossible equation $emn - f\,(m+n) \neq a^2$.[3]

There is no mistake at all in the series $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} \ldots$ and in the sums which I indicated, as you shall easily see, Sir, if you take the trouble to consider them one more time.[4]

The fact that divisors of the form $10n+1$ are not excluded in the series whose general term is $x^2+19x-19$ is so evident that it occurred to me when by chance I thought about it on the morning after I had sent my last letter, but I did not consider the glory of being the first to discover that error to be so important that I wanted to notify you by a particular letter devoted only to this.[5]

I did not previously know at all about the series

$$a^m - n\,(a+b)^m + n\,(n-1)\,(a+2b)^m - \ \ldots\ = 0;$$

in order to convince myself of its truth, I should take step by step first $m=1$, $m=2$, etc., and then successively also $n=1$, $n=2$, etc.; thus it should appear that the series must destroy itself also for greater values of m and n.

On occasion of the series $(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)\ldots$, a peculiar problem occurred to me: If a series A of infinitely many terms is given in which the $+$ and $-$ signs alternate in some given order, find another series B so that in the product AB the $+$ and $-$ signs alternate in the same order which they had in A. This problem can very easily be solved in the case $A = (1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)\ldots$, even if here, as you remarked, Sir, the $+$ and $-$ signs alternate in a very unusual way; for if I define

$$B = (1-n^{\frac{1}{2}})(1-n^{\frac{3}{2}})(1-n^{\frac{5}{2}})\ \ldots,$$

then A multiplied by B yields a new series which exhibits the same variation of signs.[6]

I am very sorry that the letter which you mention, Sir, gave you some trouble.[7] The advice Legation Secretary Strube gave you about it is perfectly good, and I am very much obliged to him for it. I congratulate you cordially on your new dwelling, Sir, and wish you every imaginable satisfaction in it. I remain with great respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, December , 1743.[8]

(Turn over.)

This is going to be delivered by my correspondent at Königsberg;[9] perhaps it will arrive one mail day later.

[1] The precise date is supplied by Goldbach's copy which bears the heading "*Ex litt*[*eris*] *ad Cl*[*arissimum*] *Eulerum Petrop*[*oli*] 14. *Dec.*" ("From the letter to Euler written at Petersburg on Dec. 14th").
[2] Cf. n° 74, note 1.
[3] Cf. n° 74, note 2.
[4] Cf. n° 74, note 4. Only after Euler had reiterated his critique in his reply (cf. n° 76, note 3) Goldbach realised his mistake, noting in the margin of his copybook "*fals*[*um*]" and acknowledging in his next letter that he had been wrong (cf. n° 77, note 4).
[5] Cf. n° 73, note 18.
[6] The text of Goldbach's copy ends here.
[7] Cf. n° 74, note 14.
[8] The day of the month was omitted in the original, but can be established from the copy (see *supra* note 1).
[9] Probably J.G. Thegen (cf. n° 74, note 14).

76
Euler to Goldbach
Berlin, January 21st, 1744

Sir,

at the start of this new year, first of all I have the honour to present to you, Sir, my most obedient congratulations and to recommend myself along with all my family most humbly to your constant goodwill and friendship.

Except for the theorems which I already reported about some formulae that cannot yield square numbers,[1] I have since then not noticed anything in this field but that the formula $2abc - b - c$ cannot be a square if either b or c is an odd number of the form $4n-1$.[2] Furthermore the formula $2abc-b+c$ can also not be a square if a is an odd number and b a number either of the form $4n+1$ or $4n+2$. Then $2abc + b \pm c$ can also never be a square if a is an odd number and b either of the form $4n - 1$ or $4n - 2$. However I can as yet entirely prove none of these propositions but those which are derived from $4mn - m - n \neq a^2$, and which you, Sir, can therefore also prove by the method that you recently reported to me.

I still cannot admit that no writing mistake occurred in the series

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \pm \frac{1}{25} \pm \frac{1}{27} + \frac{1}{32} + \dots,$$

which you quoted recently, Sir.[3] Indeed, as you yourself found, Sir, that

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \dots,$$

this series $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots$ must necessarily be smaller than 1, and the difference can even be indicated by

$$\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{15\cdot 16}+\frac{1}{24\cdot 25}+\ldots$$

In the same way, since it has been definitely proved that

$$2\log 2-1=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}-\frac{1}{26}+\frac{1}{31}+\ldots,$$

this same series cannot possibly have the same sum $2\log 2-1$ when each denominator is increased by 1. Thus I am all the more confirmed in my opinion, Sir, that you forgot to decrease the denominators by 1.

The fact that the series

$$a^m-n\,(a+b)^m+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,(a+2b)^m-\ldots$$

equals 0 if $n>m$ becomes clear by the nature of recurrent series: for as all algebraic progressions belong to the genus of recurrent series and consequently any term can be determined from some of the preceding ones, so the series a^m, $(a+b)^m$, $(a+2b)^m$, etc. also has to be a recurrent series and a constant relation must hold between each term and some preceding ones. This can even be the case in infinitely many manners; indeed,

$$1-n+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}-\frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

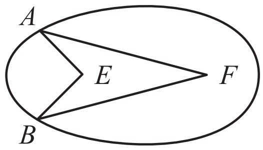
can be taken as the rule of the relation for any $n>m$.

I very much doubt whether an easier proof of this will ever be found than this one, which follows by itself from the nature of recurrent series; for even if one may persuade oneself of its truth by induction, one yet does not understand the way which led to it.

Your idea about the expression $(1-n)\left(1-n^2\right)\left(1-n^3\right)\ldots$ with respect to a factor $(1-n^{\frac{1}{2}})(1-n^{\frac{3}{2}})(1-n^{\frac{5}{2}})\ldots$ which should constrain the product to exhibit, when developed, the same variation of the $+$ and $-$ signs,[4] might perhaps be of some use in other investigations, but in treating the series which I derived thence I have not yet been able to draw any benefit from it.

Here for more than eight days a rather big comet has been seen, which, since it seems to have nearly no motion across the sky and yet to grow bigger all the time, comes to all appearances straight towards the Earth.[5]

In the November issue of the Leipzig *Acta* a problem has been proposed which goes:



Around two given points E and F describe a curve so that, if from two arbitrary points A and B in it the lines to the points E and F are drawn, the area AEB will always be proportional to the angle AFB. Or: if a body orbits along the circumference of that curve, the areas which it sweeps out around the point E are to be proportional to the angles which it covers around the other point F.[6]

I remain with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Jan. 21st, 1744.

[1] Cf. nº 74, note 2.

[2] The equation $2abc - b - c = a^2$ can be written in the form $(2ab-1)c - b = a^2$ and is solvable in integers if and only if $a^2 \equiv -b \bmod (2ab-1)$. If a is odd and $b \equiv 3 \bmod 4$, then $2ab - 1 \equiv 1 \bmod 4$, hence $(\frac{-b}{2ab-1}) = (\frac{2ab-1}{-b}) = (\frac{-1}{b}) = -1$. The other claims that follow are proved similarly.

[3] Cf. nº 73, note 5, and nº 75, note 4.

[4] Cf. nº 75, note 6.

[5] This very bright comet – one of the most spectacular ever described – had been first sighted in November/December 1743 by two Dutch astronomers and by J.Ph. Loys de Chéseaux at Lausanne, for whom it is conventionally named (in Kronk's *Cometography* it bears the designation C/1743 X1). It was also observed, among others, by Cassini at Paris, by Heinsius at Petersburg and by Margarethe Kirch at Berlin (whose observational journal was published by Euler at the end of his popular tract E. 67: cf. O. II/31, p. 182–194), but also by several expeditions in the Southern hemisphere up to the end of April 1744.
Most calculating astronomers, including Euler, agreed that the comet most likely had a parabolic orbit; Euler indicated that it reached its perihelion on March 1st, 1744, passing quite close to Mercury at a distance of 0.222 astronomical units from the Sun (E. 66: O. II/28, p. 236; see also nº 131, note 11).

[6] This problem was proposed anonymously in the November 1743 issue of *Nova Acta Eruditorum*, "inviting geometers to ponder it". Euler announced to the editor, F.O. Mencke, that he was going to send in a solution (cf. Mencke's reply R 1663 from January 7th, 1744); this solution, E. 75, appeared in the issue for June 1744. See also nº 77, note 3, and nº 78, note 6.

77

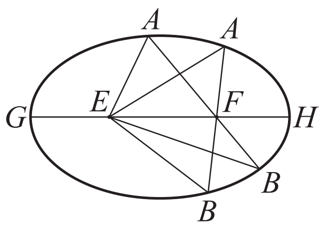
Goldbach to Euler

Moscow, March (1st) 12th, 1744

Sir,

even though this sign of my gratitude for the New Year's wishes that you kindly sent me[1] comes somewhat late, I nonetheless wish you cordially and most sincerely all imaginable well-being for the year already well under way; I shall always be glad to have more news about you.

You will[2] no doubt already have solved the problem from the Leipzig *Acta* which you mention.[3]



As far as I can see, the curve shall among others have this property: when it is divided into two parts by any straight line passing through the point F, and when from that part in which the point E lies the straight triangle AEB is subtracted, then the remaining three-sided area AEB will always be constant and equal to half the area of the entire curve, or; the part $EAGB$ of the curve always equals the part $EAHB$.

The supposed sums of series indeed arose by an obvious mistake.[4]

The many instances of determination of the quantities e and f in $emn - f\,(m+n) \neq a^2$ which you indicate, Sir,[5] give me cause to conjecture that the same can be determined still much more generally, even though I do not yet know any method to do so; meanwhile the modest observation appears to have some use that the impossible equation indicated above is always true when $a^2 \leqslant 4\,(e-f)^2$, where the $\leqslant$ sign denotes "smaller or equal", just as I adopted the sign $\geqslant$ for "greater or equal" into my own usage since your last letter.[6]

On Wednesday, February 12th (new style), I departed from St. Petersburg at 11 a. m. and on Saturday the 22nd I arrived at Moscow at noon.

I have indeed heard that the Berlin Society of Science held a very solemn Assembly, but I have not yet seen the printed description.[7] I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant

Goldbach.

Moscow, March 12th (new style), 1744.

P. S. I should not want to give you any trouble by the enclosure for Mr. Marinoni;[8] I only ask you to dispatch it, if some opportunity arises, to Vienna (postage paid), and in case none should offer itself within two or three months, to return it to me.

In a learned journal I have read, if I remember correctly, that the *Reflections on the cause of gravity* by a certain physician Dr. Müller should merit further investigation; no doubt they will already be known to you, Sir.[9]

I should also like to know if one might not be able to obtain from some Berlin bookseller a French rhyming dictionary,[10] in which the required rhyming words (as *âme*, *dame*, *lame*, *trame*, etc.) can be found grouped together.

Please write in the future on the envelopes of your letters "State Councillor at the Foreign Department at Moscow", so they shall be delivered the faster.

[1] Cf. the beginning of nº 76.
[2] The text of Goldbach's copy starts here.
[3] Cf. nº 76, note 6.
[4] Cf. nº 73, note 5, nº 75, note 4, and nº 76, note 3.
In Goldbach's copy, this sentence has been struck out; in the margin he noted "*vid*[*e*] *sup*[*ra*] *p*[*aginam*] 37" ("see above p. 37"), referring to nº 73.
[5] Cf. nº 74, note 2.
[6] Goldbach refers to the remark in parentheses in the first paragraph of Euler's letter nº 74, from which he has drawn the consequence that a special sign for "smaller or equal" would be useful. However, neither the three-pronged version $\lessdot$ Goldbach proposes here nor Euler's crossed-out $>$ sign $\not>$ to indicate "not greater" (cf. his reply nº 78, note 7) was generally adopted; instead Bouguer's $\leqq$ sign, that Goldbach judged to be "not succinct but very expressive" (cf. nº 84, note 10) and the $\leq$ sign due to Wallis prevailed (cf. Cajori 1928, vol. II, p. 115–120).
The text of Goldbach's copy ends here.
[7] On Thursday, January 23rd, 1744 – the eve of King Frederick's birthday – the Royal Academy of Science held its first assembly at the Berlin Castle, amalgamating and replacing Leibniz's *Brandenburgische Societät der Wissenschafften* and the short-lived *Nouvelle Société Littéraire* (cf. nº 72, note 13) under a statute principally due to Schmettau (see Harnack 1900, vol. I, p. 269–293; vol. II, p. 260–268).
No official record of this opening ceremony seems to have been issued, but the local journal *Berlinische Nachrichten von Staats- und gelehrten Sachen* reported the event in a short note.
[8] Goldbach's letter to Marinoni has not been identified.
[9] The physician and naturalist Gerhard Andreas Müller, then librarian at Weimar, had published his *Untersuchung der wahren Ursache von Neutons allgemeiner Schwere* there in 1743. The one review of this treatise that could be located appeared only in 1746, in the Leipzig journal *Neuer Büchersaal der schönen Wissenschaften und freyen Künste*; but Goldbach may have learnt of the work from a very self-confident announcement that Müller had placed in the *Nova Acta Eruditorum* as early as August 1741.
Cf. Euler's reply nº 78, note 3.
[10] See nº 78, note 2, nº 81, note 3, and nº 89, note 3.

78
Euler to Goldbach
Berlin, April 25th, 1744

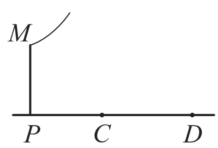
Sir,

I have consigned your letter for Mr. Marinoni[1] to the Berlin bookseller Mr. Haude, who promised me to dispatch it without delay to be delivered to Mr. Marinoni postage-free; a short time ago he assured me that it has already been delivered. None of our local booksellers claims to know of a French rhyming dictionary;[2] however Professor Strube, who asks to be most humbly recommended to you, Sir, recalls once having seen such a book, but could not remember well and has not yet been able to give me further notice.

I cannot recall having read anything about a Dr. Müller's reflections on the cause of gravity; indeed the learned journals are communicated to me in a very unreliable manner. Meanwhile I cannot imagine that this author should have discovered anything noteworthy about this subject, for this requires such a deep insight into the most sublime mechanics as is not likely to be found in a person yet unknown; and without this understanding one commonly falls back upon mere illusions and contradictory hypotheses, which are not consistent with the true principles of Physics and cannot satisfy the phenomena either.[3]

In preparing the paper on the magnet which I sent to Paris last year,[4] I came upon an idea to explain the cause of gravity; the longer I think about this, the more it looks sound to me, even though I am not yet able to fully expound it.[5] By now it ought to be possible to know here who has won this year's prize at the Paris Academy; but as Mr. Clairaut has not reported anything about it, I can certainly count on having again been dismissed empty-handed. Moreover I can easily guess the reason: for as I rather strongly attacked and refuted the Englishmen's opinion about attraction being an essential attribute of bodies, this will not have pleased the referees who, as I recently learnt, utterly agree with that opinion.

The property which you discovered, Sir, in the curves that satisfy the problem proposed in the Leipzig *Acta*[6] is entirely correct and is therefore common to all the infinitely many lines by which the problem is solved. I sent a detailed solution to Leipzig some time ago, in which I indicated one from every order of algebraic curves. Among the conic sections the circle satisfies if one point is assumed to be at the center, the other on the circumference.



Among the third-order lines the equation $y^2 = \dfrac{3ax^2 - x^3}{x-a}$ satisfies if C and D are taken to be those two points for which the areas around C are proportional to the angles at D, and variables are defined by $CD = a$, $DP = x$, $PM = y$.

Apart from these algebraic curves there are infinitely many whose constructions depend on the quadrature of the circle, whereas the rest cannot be constructed by any quadrature; however I indicated a general construction by dragging motion.

Since last time I have not discovered anything new about number-theoretical theorems. With regard to the new signs $\geqslant$ and $\leqslant$,[7] the like of which are often most necessary in these speculations, I should rather prefer to employ, in analogy to the $\neq$ sign which denotes "not equal", $\nless$ and $\ngtr$, where the former means "not smaller", i. e., either equal or greater $\geqslant$, and the latter $\ngtr$ "not greater", i. e., the same as $\leqslant$, smaller or equal.

Shortly my textbook on the isoperimetric problem shall come out at Mr. Bousquet's, and then he is going to print another work, *Introductio ad Analysin infinitorum*, in which I treated the higher parts both of Algebra and of Geometry.[8] I considered it necessary to have this precede the *Analysis infinitorum* itself, on which I am now really working.

Now a dissertation *On the motion of planets and comets* is being printed here, in which I determined the orbit of the latest comet. The remarkable fact about this comet is that on April 4th it passed so near to Mercury that one has every reason to suspect a perturbation in that planet's course. However, Mercury is still invisible, so that one has not yet been able to shed light on this.[9]

The day before yesterday the establishment of the new Academy was published in the local journals.[10]

I congratulate you cordially on your felicitous arrival at Moscow and recommend myself to your constant goodwill, Sir, remaining with all due respect your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, April 25th, 1744.

I seal this letter in black because of my Grandmother's death.[11]

[1] Cf. n° 77, note 8.
[2] Cf. n° 77, note 10, and n° 81, note 3.
[3] Cf. n° 77, note 9.
G.A. Müller later corresponded with Euler, asking for his support in negotiations with the Berlin and the Petersburg Academy (cf. R 1079–1081). In 1748, he published, in the context of the Berlin Academy's prize question (cf. n° 117, notes 4 and 5) but without actually competing, a treatise against Leibniz's monadology.
[4] Cf. n° 52, note 11.
[5] In the definitive version of his *Dissertatio de magnete* (E. 109), Euler mentions this vortex theory of gravity – again in very optimistic terms as to its explanatory value – in § 23–24 (O. III/10, p. 151–152). A version giving some more details was published anonymously in the Berlin *Miscellanea* for 1743; for its attribution to Euler and a critical discussion see A. Kleinert's introduction in O. II/31, p. LXXXVII–XCIII.
[6] Cf. n° 76, note 6, and n° 77, note 3.
[7] Cf. n° 77, note 6.
[8] Cf. n° 68, note 3.
[9] Cf. n° 76, note 5, n° 130, note 13, and n° 131, note 11.

[10] Cf. nº 77, note 7.
The *Berlinische Nachrichten von Staats- und gelehrten Sachen* described the constitution of the Berlin Academy in its issue for April 23rd.

[11] Euler's maternal grandmother Magdalena Brucker-Faber, in whose house in Basel the young Leonhard had lived for several years when at school, had died on March 3rd, 1744, at the age of 91.

79
Goldbach to Euler
Moscow, (May 21st) June 1st, 1744

Sir,

a few days ago I quite unexpectedly discovered that the equation

$$emn \pm fm + gn = a^2$$

is always possible, i. e., that, if the numbers e, f and g are given, m, n, and a can always be indicated. The proof is very easy: let $m = eg \pm f \pm 2g$, $n = g$, then $a = eg \pm f \pm g$. I leave the question wide open – to quote a well-known saying – in what way this state of the matter affects the legitimacy of 25 among the 38 instances which you cite in your letter dated October 15th, Sir, as being impossible equations.[1]

I daresay you shall easily be consoled about the death of your grandmother in view of the old age she reached;[2] I just wish that you may follow her example in this respect and make still a lot of profit for Mr. Bousquet in Geneva.

I hope to learn from Professor Strube, when he returns,[3] some detailed news about the Berlin scholars such as Messrs. Jordan, d'Argens, Algarotti etc. No doubt you have also met a certain Mr. des Champs, Sir, who has written a *Course of Wolffian Philosophy* which I do not yet know; it is said this book contains a passage where the marginal note says "Mr. Huygens criticised";[4] if this is such as I have been told, you will not regret having read it.

Please give Mr. Haude, when the opportunity arises, my humble thanks for delivering my letter to Mr. Marinoni[5] and assure him that I should like very much to reciprocate with some favours I might do him here.

As I do not read the French journals regularly, I do not yet know what finally was decided about the prize that should have been distributed last Easter by the *Académie Royale des Sciences*.[6]

I thank you humbly for communicating the equation of the curve and I look forward to reading your paper, Sir, as soon as I receive the *Acta Eruditorum*.[7] I am also well satisfied with the alteration of signs you mentioned.[8]

From an issue of the *Hamburgische Berichte* I learnt of a favourable judgment about Professor Knutzen's treatise on Comets; on this occasion it is reported that there have been several scholars who predicted comets to appear at some certain time, but that the comets did not present themselves; so Professor Knutzen is said to have been the first to forecast a comet – namely the one which appeared in 1744 – in a paper published as much as seven years before the event.[9]

From the review which the Leipzig *Zeitungen von gelehrten Sachen* gives of the *Theorie de la figure de la Terre* by Mr. Clairaut I gather it has to be a very good book.[10]

When an entire volume of your works will have come out, Sir, please give me notice about it.

I recall that some years ago you told me, Sir, in what manner you were minded to utilise a capital of 10 000 Imperial thalers in case you should acquire it, namely to buy a country estate in your native country and live there; but, notwithstanding the premise may now presumably soon be realised, I yet rather hope you will not carry out your erstwhile plans.[11]

I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, June 1st (new style), 1744.

[1] The text of Goldbach's copy ends here.
Cf. nº 74, note 2. Euler clarifies his statement in his reply: cf. nº 80, note 1–3.
[2] Cf. nº 78, note 11.
[3] Cf. nº 66, note 17.
[4] Cf. Euler's reply nº 80, note 13.
[5] Cf. nº 78, note 1.
[6] The prize of the Paris Académie des Sciences on magnetism, proposed for 1742, had been deferred for a second time and was finally awarded only in 1746: see nº 52, note 11, and nº 105, note 5.
[7] Cf. nº 78, note 6.
[8] Cf. nº 78, note 7.
[9] Knutzen's *Vernünftige Gedanken von den Cometen* had recently appeared at Königsberg; in its issue for April 14th, 1744, the *Hamburgische Berichte von den neuesten Gelehrten Sachen* printed an enthusiastic review – probably by the journal's editor, J.P. Kohl – that emphasised Knutzen's alleged success in predicting the 1744 comet.
For Euler's opinion see his reply nº 80, notes 15–16.
[10] Clairaut's *Theorie de la Figure de la Terre*, published at Paris in 1743, had been reviewed in the May 4th, 1744, issue of the Leipzig journal *Neue Zeitungen von gelehrten Sachen*.
[11] See Euler's reply nº 80, note 24.

80
Euler to Goldbach
Berlin, July 4th, 1744

Sir,

the fact that the formula $emn \pm fm \pm gn$ can generally yield a square whenever either f or g is a positive number, as you remarked, Sir, is very well compatible with the theorems which I lately communicated.[1] These were of two kinds, either of the form $4emn - pm - pn$, or of the form $4emn \pm pm \mp pn$. Now the first does not suffer from your observation, Sir, whereas the latter should indeed be disproved if there were not a condition to be added, about which I do not remember whether I mentioned it in my former letter or not,[2] namely, that m and n have to be relatively prime with regard to p. So if I say that $8mn - 3m + 3n$ can never be a square, the condition that n may not be a multiple of 3 has to be included. For if one were allowed to set $n = 3$ or generally $n = 3h^2$, the formula $8mn - 3m + 3n$ could be a square in infinitely many ways. This restriction immediately follows from the manner which led me there and which I explicitly noted in the paper that I sent to St. Petersburg some time ago about this subject.[3] Indeed, the reason $8mn - 3m + 3n$ cannot be a square is that the formula $a^2 - 2b^2$ cannot have any prime divisor of the form $8n \pm 3$. Therefore those cases have to be excepted where n is a multiple of 3, just as for the form $a^2 - 2b^2$ the condition has to be added that a and b must be relatively prime numbers; for without this restriction $a^2 - 2b^2$ could be divisible by any number.

I am now working on a treatise about differential calculus, in which I have made diverse curious discoveries about series, some of which I am taking the liberty to communicate to you, Sir:

I. Given an arbitrary arc a of a circle, let its sine be $= \alpha$, the sine of the double arc $= \beta$, the sine of the triple arc $= \gamma$, the sine of the quadruple $= \delta$, of the quintuple $= \varepsilon$, and so on: I say that the sum of the infinite series

$$\frac{1}{2}a + \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{4}\delta + \frac{1}{5}\varepsilon + \dots$$

always expresses the length of an arc of 90° in the same circle.[4]

II. Let the radius of a circle equal 1, and define for some arbitrary arc a the following quantities: $\sin a = \alpha$, $\sin 2a = \beta$, $\sin 3a = \gamma$, $\sin 4a = \delta$, $\sin 5a = \varepsilon$, etc., $\cos a = A$, $\cos 2a = B$, $\cos 3a = C$, $\cos 4a = D$, $\cos 5a = E$, etc.; finally let π be the length of half the circumference. Then

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{2A^2} + \frac{\gamma}{3A^3} + \frac{\delta}{4A^4} + \frac{\varepsilon}{5A^5} + \dots = \frac{\pi}{2},$$

$$1 + \frac{A}{A} + \frac{B}{A^2} + \frac{C}{A^3} + \frac{D}{A^4} + \frac{E}{A^5} + \dots = 0,$$

$$1 + A + B + C + D + E + \dots = \frac{1}{2}.$$ [5]

III. The following series arose from the division of arcs.

Let the radius equal 1; take some arbitrary arc s; let its sine be $= a$, the cosine of half the arc $= \alpha$, $\cos \frac{1}{4}s = \beta$, $\cos \frac{1}{8}s = \gamma$, $\cos \frac{1}{16}s = \delta$, etc.; then $s = \dfrac{a}{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \dots}$.[6]

IV. Defining the tangent of some arbitrary arc s to be A, $\tan \frac{1}{2}s = B$, $\tan \frac{1}{4}s = C$, $\tan \frac{1}{8}s = D$, $\tan \frac{1}{16}s = E$, etc., one has

$$\frac{1}{2}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{8}D + \frac{1}{16}E + \dots = \frac{1}{s} - \frac{1}{A}.$$ [7]

V. If the sum of the series $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+\dots$, which I set equal to z, is known, I say that the sum of the series $Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+Eex^4+Ffx^5+\dots$ can always be indicated, provided only that the series of the coefficients A, B, C, D, E, etc. ultimately has constant differences.[8] For let $B-A=P$, $C-2B+A=Q$, $D-3C+3B-A=R$, etc.; then, since z is given in terms of x, one can define $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, $\frac{dr}{dx}=s$, etc. Once these values have been calculated, the series

$$Aa+Bbx+Ccx^2+Ddx^3+\dots$$

has the sum

$$Az+Ppx+\frac{1}{2}Qqx^2+\frac{1}{6}Rrx^3+\frac{1}{24}Ssx^4+\dots$$

Let, for example, $z=1+x+x^2+x^3+x^4+\dots=\frac{1}{1-x}$; then $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{(1-x)^2}=p$, $\frac{dp}{dx}=\frac{2}{(1-x)^3}=q$, $\frac{dq}{dx}=\frac{6}{(1-x)^4}=r$, etc.; take for A, B, C, D, etc. the following series

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1, & & 3, & & 7, & & 13, & & 21, & & 31, & & 43 \quad \dots \\
& 2, & & 4, & & 6, & & 8, & & 10, & & 12 & \\
& & 2, & & 2, & & 2, & & 2, & & 2 & & \\
& & & 0, & & 0, & & 0, & & 0 & & &
\end{array}$$

which has the general formula n^2-n+1; taking its differences, one has $A=1$, $P=2$, $Q=2$, $R=0$, $S=0$, etc.; consequently, the sum of the series

$$1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+\dots=\frac{1}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}.\text{[9]}$$

Just as one can express, by the Newtonian evolution of the binomial, all roots of pure equations $x^n-A=0$ by infinite series, I have thought about a similar method for likewise expressing the roots of all polynomial equations by infinite series. Let the equation

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\dots=0$$

be given and let one of its roots be $x=f$, which I express by a series as follows. I set

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\dots=y$$

and determine by differentiation the values of the quantities $p=\frac{dx}{dy}$, $q=\frac{dp}{dy}$, $r=\frac{dq}{dy}$, $s=\frac{dr}{dy}$, etc.; all these will be given in terms of x. Now assume x to have some arbitrary definite value, and determine the corresponding values of y, p, q, r, s, etc.; then the sum of the series

$$x-py+\frac{1}{2}qy^2-\frac{1}{6}ry^3+\frac{1}{24}sy^4-\dots$$

will always equal one of the roots of the proposed equation

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots = 0.$$

Furthermore, if one assumes for x some value that already comes very close to a root, the series becomes convergent and approximately exhibits the root.

One can also express this proposition in the following manner: If, starting from $y = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots$, the quantities $p = \dfrac{dx}{dy}$, $q = \dfrac{dp}{dy}$, $r = \dfrac{dq}{dy}$, $s = \dfrac{dr}{dy}$, etc. are defined and the series

$$x - py + \frac{1}{2}qy^2 - \frac{1}{6}ry^3 + \frac{1}{24}sy^4 - \ldots$$

is formed from them, I say that the sum of this series is always equal, whatever value is substituted for x, to some root of the equation

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots = 0.$$[10]

If one imagines a curved line of this nature:

the abscissa being	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	etc.,
the ordinate is	1,	1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	etc.

(thus, the abscissa being taken to equal x, the ordinate will be $y = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 \cdots x$), this curve can easily be described by infinitely many points. If I rightly remember, you, Sir, once gave me occasion to think about that curve. When, a short time ago, I came again upon this matter, I expressed the nature of that curved line by the following differential equation: Defining

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{3^2} + \tfrac{1}{4^2} + \ldots &&= 1.644\,934\,066\,848\\
B &= 1 + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{3^3} + \tfrac{1}{4^3} + \ldots &&= 1.202\,056\,903\,159\\
C &= 1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \tfrac{1}{4^4} + \ldots &&= 1.082\,323\,233\,711\\
D &= 1 + \tfrac{1}{2^5} + \tfrac{1}{3^5} + \tfrac{1}{4^5} + \ldots &&= 1.036\,927\,755\,106\\
E &= 1 + \tfrac{1}{2^6} + \tfrac{1}{3^6} + \tfrac{1}{4^6} + \ldots &&= 1.017\,343\,061\,984\\
F &= 1 + \tfrac{1}{2^7} + \tfrac{1}{3^7} + \tfrac{1}{4^7} + \ldots &&= 1.008\,349\,277\,386\\
&\ldots
\end{aligned}$$

and moreover $n = 0.577\,215\,664\,9$, one will have $\dfrac{dy}{y\,dx} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{x} - n$, by which the position of the tangent is discerned whenever x is a whole number; but if x is a fractional or irrational number, this infinite equation will serve:

$$\frac{dy}{y\,dx} = Ax - Bx^2 + Cx^3 - Dx^4 + Ex^5 - \ldots - n$$

or also this one:

$$\frac{dy}{y\,dx} = \frac{x}{1+x} + \frac{x}{4+2x} + \frac{x}{9+3x} + \frac{x}{16+4x} + \frac{x}{25+5x} + \ldots - n.$$

From the shape of this curve it is easy to see that it has to have a minimal ordinate between the abscissae 0 and 1. By setting $dy = 0$, one gets approximately $x = 0.460\,96$ or $x = \frac{6}{13}$. Moreover, in order to determine from any abscissa x the corresponding ordinate y, I found this logarithmic equation:

$$\begin{aligned}\log y &= \frac{1}{2}\log\,(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\,x^3}\\ &\quad + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\,x^5} - \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\,x^7} + \ldots\end{aligned}$$

Thus, if x is a very large number, one approximately has $y = \dfrac{x^{x+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{\mathrm{e}^x}$, where $\mathrm{e} = 2.718\,281\,8$; and by defining

$$x - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 2x} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^3} - \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\,x^5} + \frac{3}{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\,x^7} - \ldots = z,$$

one accurately has $y = \dfrac{x^x\sqrt{2\pi x}}{\mathrm{e}^z} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,\cdots\,x.$[11]

Professor Strube asks me to convey his most obedient recommendation to you, Sir; he does not yet know when or in what direction he is going to travel from here.[12] Regarding those Berlin scholars about whom you expect some notice, I have the honour to report that Mr. Jordan, who used to be a French preacher, is mostly applying himself to literature and collecting a beautiful library, for which the King makes him a gift of all the books that are presented to His Majesty. You will certainly know that the Marquis d'Argens appreciates only the fine arts, and even if he now has begun to mix physical matters in with his writings, yet there is nothing substantial to be found there. Count Algarotti has left here a long time ago and according to the latest news entered service with the King of Poland. Mr. Deschamps is a pure Wolffian, and as I am neither closely acquainted with him nor have read his writings, I had a friend ask him in what respect he pretended to have criticised Huygens. To this he answered that it had been about his reflections on probability, since he thought Mr. Wolff also had criticised these; but as he had understood since then that Mr. Wolff's words were to be interpreted in another sense, he was retracting his critique.[13]

The Paris Academy did not award its prize this year at all, but proposed the very same question about the magnet again for 1746, with a triple prize of 7500 *livres.* However I have decided not to compete for it again, but to have my dissertation printed here some time soon.[14]

However favourable the judgment in *Hamburgische Berichte* about Professor Knutzen's opinion of the latest comet is,[15] both the foundation and his argument are completely wrong. Firstly he assumes this comet to have a periodic time of $45\frac{3}{4}$ years, because he saw in Hevelius' catalogue that nearly always a comet appeared after this interval had elapsed. Furthermore he believes the comet of 1698 to have been the same which had been sighted in 1652, whereas in fact by investigating the matter more closely one will hardly find two comets which differ as much from one another as those two. Then again, the latest comet is so radically different from those two that it should be quite as sensible to take Mercury for Saturn, if they were not often to be seen in the sky at the same time. I communicated all these arguments to Professor Knutzen, against which he finds nothing else to point out but that all the same his opinion or prophecy came true and he can hardly believe this happened by chance.[16] I have written a detailed dissertation about this comet, which is soon going to be printed;[17] in this I determined most exactly the comet's orbit and demonstrated quite clearly that its period extends to several centuries. Indeed, among all the comets which have been observed in the last 300 years there is none whose orbit agrees in the least degree with the latest one.

Mr. Clairaut's *Theorie de la figure de la Terre*[18] is indeed an incomparable work, both with respect to the profound and difficult questions treated in it and to the pleasant and easy method by which he is able to present the most sublime matters very plainly and clearly.

I have not had any news whether my treatise *De Problemate Isoperimetrico*[19] is already completely printed at Lausanne. In the meantime I have sent there a new work by the title *Introductio ad Analysin infinitorum*,[20] in which I treated the higher part both of Algebra and of Geometry and solved a great many difficult problems without using infinitesimal calculus; next to nothing of this is to be encountered elsewhere. After forming the project of a complete treatise on the *Analysis infinitorum*, I noticed that very many things ought to precede it which do not properly belong to it but are to be found explained nowhere, and from these the present work arose as a precursor to the *Analysis infinitorum*.

The new Academy here is soon going to publish a volume containing the papers read here; this will contain a large number of papers by me.[21] Because the State Ministers are assiduously present, I read my papers in French – after they had been corrected by Professor Naudé – in order not to disgust these gentlemen. For the same reason I sought to avoid purely mathematical speculations and calculations and treated for the most part physical subjects: among these there is a new theory of light and colours, by which I explain all phenomena most clearly and avoid all difficulties to which other theories are subject. Then I demonstrated that the forces arising from a collision or a blow can always be compared with a mere pressure, or that living and dead forces are homogeneous with one another. I also proved from the nature of gravity that the ultimate molecules of all bodies have to be equally dense or that they necessarily have the same specific gravity; by this the "principle of indiscernibility" adopted by some apparently suffers a severe blow.[22]

As soon as I receive from Lausanne some copies of the books that are being printed there, and my *Theoria Cometarum* will be printed here, I shall not fail to present them to you on the first opportunity, Sir.

I have not yet seen Jacob Bernoulli's *Opera*, which have been published at Geneva in 2 volumes with annotations by Mr. Cramer; however I am assured that both the work itself and the annotations in particular are going to be marvellous. Moreover Newton's *Principia Philosophiae Naturalis* have also appeared there in 3 volumes with commentaries by Fathers Le Seur and Jacquier, as well as Newton's other *Opuscula*, also in 3 volumes; both these works deserve all praise.[23]

My circumstances are now changed in such a manner that I should have to be foolish to desire another way of living; but even if this were not the case, there would still be so much missing from the amount of 10 000 Imperial thalers which I formerly thought about using to acquire an estate in my native country that I can hardly hope ever to gain it.[24]

Some time ago I designed the following cipher, in which all the characters denote letters and the text is in Latin:

1 Pxqswlznjdvynstiddkqxhleebfpxdfgtlzbccfbksodxokfnglqxn
2 schejmlckzxhrfwjgfhxvzjnbgyxcdgixkoxjmlncoigdxvzflmesnf
3 yjqfangvnylrcxfonbfjalrkwsnbfpjoizoxqknubrofadgiaxwkcbr
4 bcklofrnjwngszfhgjfcbcfvqjtxeevtbzfyjsbzhfmlnbgfsqjwglnx
5 vzfkonbcoigdxvrkfjalzxtsnilenfgvcboofcfxnnfgnkbcjnnjyn
6 xvplgnbfzfoxeejdgxbcjcnsdyvdbhzlnvyxmbcblobbcyfekonbcei
7 obfplwsxzxfjcndbhrlzqxssonbcoljfsyqfmjeevhleexoiexmgi
8 cfdnktvoldxnfbxofcktvpxrnv.

Notwithstanding that the meaning of the letters is invariable, it seems to me that such a text cannot easily be deciphered.[25]

There are some strong chess players here; among others a Jew is staying here who plays uncommonly well. I have been taking lessons from him for some time and now have got so far that I win most games against him.[26]

By the last mail, Councillor Schumacher gave me the pleasant news that Her Imperial Majesty has most graciously ordered to pay all foreign members their pensions.[27]

The Berlin Academy is soon going also to announce a prize of 140 Imperial thalers, to be continued every year. For next year the physical cause of electricity will be the subject of the question.[28]

With this I have the honour to recommend myself most obediently to you, while I remain with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, July 4th, 1744.

[1] Cf. nº 79, note 1.

[2] I. e. nº 74. In fact, Euler had not stated the condition.

[3] Already two years earlier Euler had stated his theorems on divisors of quadratic forms without the precise conditions discussed here and had had to add them in his following letter: see nº 54, note 10, and nº 56, note 6.

The clarifications are indeed explicitly noted in E. 164, where the present example appears in *Scholion* 3 (O. I/2, p. 221–222). That paper seems to have been submitted to the Petersburg Academy only in 1748, but possibly it replaced a preliminary version sent in 1744. In fact, the catalog of Euler's manuscripts archived at Petersburg (*Rukopisnye materialy* 1962, n° 9, p. 28) lists a paper with that title "produced" in July 1744 but read to the Academy only in November 1748; and the published version, which still lacks proofs for most of the theorems stated, was finally printed (in 1751) in the *Commentarii* volume for the years 1744–46.

[4] Euler published the series

$$\frac{\pi}{2} = \frac{a}{2} + \sin a + \frac{\sin 2a}{2} + \frac{\sin 3a}{3} + \ldots$$

in *Institutiones calculi differentialis* (E. 212), Pars II, Cap. IV, § 92 (O. I/10, p. 296–297). Setting $\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} = \frac{\varphi}{2}$, we get

$$\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots,$$

which converges for $|\varphi| < \pi$; this can also be found – within the framework of Euler's systematic study of the trigonometric functions – at the end of E. 246 from 1752/53. Historically, it is the first example of a "Fourier series".

[5] The first two equations of this paragraph can again be found in *Institutiones* II (*op. cit. supra*), § 93; the third one, which can be written in the form

$$\frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots = 0$$

(and which diverges for all real values of φ) figures in § 92 and as well in E. 246, § 51.

[6] This was published in E. 74, § 19.

[7] This figures in E. 275 (O. I/15, p. 11).

[8] This means that for some k the k-th differences are constant, or – which amounts to the same – that the general term of the series is a polynomial in the index.

[9] The difference method for the summation of series that is sketched here was explained in *Institutiones* II (*op. cit. supra*), § 26.

[10] This generalisation of Newton's algorithm for approximating roots of polynomials remained unpublished for a long time: it was finally presented to the Petersburg Academy in 1776 but appeared in print only after Euler's death as E. 643. The reason for which it seems to have been more or less disregarded – both by Euler's contemporaries and by later research – is already stated in § 11 of the published paper: "However, as can be seen from the example, the approximation hardly succeeds unless a value that is already close to the root z is assumed; but then the ordinary method does the work much more easily" ("Ex hoc autem exemplo patet approximationem vix succedere, nisi valor radici z proximus accipiatur; tum autem methodus vulgaris negotium multo commodius conficit"). Euler's assessment that the resulting infinite series are all the same "most memorable", since they represent the same value of the root whatever number is assumed as a starting value, does not seem to have triggered a closer investigation.

[11] The study of the Gamma function – "defined" by interpolation of the factorials – had already figured in the first letters exchanged between Euler and Goldbach (see n° 1, note 3). Euler had published his first results – including the representations as an infinite product and as an integral – in E. 19.

The calculation of the logarithmic derivative of the Gamma function given here was later presented in *Institutiones calculi differentialis*, Pars II, Cap. XVI, § 384, *Exemplum* II (E. 212: O. I/10, p. 610–613). The curve is studied more fully and the minimum value calculated more precisely in E. 368. The asymptotic development of $\log\Gamma(x)$ (Euler's $\ell\, y$), obtained by applying the Euler-MacLaurin summation formula to the logarithms of natural numbers, can be found in *Institutiones*, Pars II, Cap. VI, § 157–159 (*op. cit.*, p. 355–358).

For integer values of x, such asymptotics had first been given by de Moivre 1730 and, in a stronger form, by Stirling 1730.

Euler's work on the Gamma function is explained systematically in Faber's introduction to O. I/16.2, p. XL–LVI; on the early contributions to the theory of the Gamma function in general, cf. Dutka 1991.

[12] Cf. nº 79, note 3.

[13] Cf. nº 79, note 4.

In Letter VI of his *Cours abrégé de la philosophie Wolffienne, en forme de lettres*, Deschamps (t. I, p. 69–79) discusses notions of truth and error, certainty, uncertainty and probability. At the end of this letter, a paragraph that is accompanied by the marginal title "Mr. *Hugens* critiqué" voices a – literalist and rather trivial – argument against Huygens' understanding of probability.

[14] Euler did not abide by this decision: cf. nº 79, note 6.

[15] Cf. nº 79, note 9.

[16] In his attempt to show that the 1744 comet had verified his prediction, made in 1737, of a periodic return every $45\frac{3}{4}$ years, Knutzen (1744, p. 39–45) refers to Hevelius' *Cometographia* for the sighting in 1652 and the elder Cassini's observations in 1652 and 1698, but he also cites a series of chronicles reporting no less than 16 even earlier sightings going back to AD 80.

The presentation and defence of Knutzen's ideas occupies much of the letters he sent to Euler between February 10th and October 1st, 1744 (R 1192–1198); Euler's side of the exchange has unfortunately not been preserved (cf. nº 73, note 10). His dismissive judgment is, however, succinctly stated at the end of the tract on comets he published the same year: "The period of its revolution should amount to at least 400 to 500 years. Consequently we do not find any trace among the comets carefully observed in the past that the same one has been seen since the year 1300; and therefore the prophecies of those who claim to have predicted this comet beforehand are utterly unfounded and the fulfilment is due to mere chance." ("Die Zeit seines Umlauffs dürfte auch wohl zum wenigsten 4 bis 500 Jahr betragen. Dahero wir unter den schon mit Fleiß observirten *Comet*en keine Spur finden, daß eben dieser *Comet* seit A[nn]o 1300 wäre gesehen worden. Weswegen die Prophezeyungen derjenigen, welche diesen *Comet*en vorher angekündigt haben wollen, gäntzlich ohne Grund sind, und die Erfüllung einem blossen *Hazard* zuzuschreiben ist.": E. 68, p. 68 – O. II/31, p. 181).

Knutzen's fortuitous prediction and its reception have been studied within a broader context by H.-J. Waschkies in 1987.

[17] E. 66: cf. nº 76, note 5.

[18] Cf. nº 79, note 10.

[19] E. 65: cf. nº 68, note 3.

[20] The *Introductio* (E. 101/102) finally appeared at Bousquet's in 1748 (see nº 129, note 2, and nº 131, note 8).

[21] In fact, the first volume of the Berlin *Memoires* (to appear only in 1746) was to contain just one of Euler's papers on physics mentioned here: E. 82 on collisions and their measure. Summaries of two more treatises, those on light and colours and on the smallest particles of bodies, were printed in the first part of that volume (*Histoire*), while the treatises themselves (E. 88, E. 91) were published, also in 1746, in the volume *Opuscula varii argumenti* by Haude and Spener.

[22] The philosophical principle of the identity of indiscernibles ("things which do not differ in some respect are one and the same") was a fundamental tenet of Leibniz's metaphysics which had been adopted and coarsened by the Wolffian school. Euler's affirmation that the ultimate particles of matter are all of equal (inertial and gravitational) density tends to undermine the possibility of distinguishing those particles by some observable property and thus their "individuality". For the connections with monadology, the mind-matter problem and the concept of space, see, e. g., Schmalenbach 1921, esp. p. 49–61, 540–570.

[23] Jacob Bernoulli's *Opera* were published in 1744 by the Geneva firm Cramer & Philibert.

Newton's *Principia* appeared in a three-volume edition in 1739, 1740 and 1742 at the publishing house of Barrillot, also at Geneva; the French Minorite monks Thomas Le Seur and François Jacquier, by then both professors in Rome, were responsible for this project, but a great part of the notes that Euler refers to are actually due to the Geneva mathematician Jean-Louis Calandrini. T. III also reproduces three prize papers from the 1740 Paris competition on the tides by Daniel Bernoulli, MacLaurin and Euler (E. 57b).
The three volumes of Newton's *Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica*, edited and in part translated into Latin by Jean Castillon, were printed in 1744 at Lausanne and Geneva by Bousquet.

[24] Cf. n° 79, note 11.

[25] It is not known whether Goldbach – who was by then employed by the Russian Foreign Office as a cryptographer – solved this cipher. Since the Fuß edition does not give any solution, it seems safe to assume none had been found in Russia by 1843. However, in 1953, the Geneva historian of science Pierre Speziali, applying frequency analysis, decoded Euler's cryptogram.
The cipher is a monoalphabetic substitution with some double codons for frequent plaintext letters; adding spaces and punctuation, one arrives at the following: "Quidam ante portam oppidi Gallus qui per manus sevi ac picis traditas glebas in ignem e regione turris proiiciebat scorpione ab latere dextro transiectus exanimatusque concidit. Hunc ex proximis unus iacentem transgressus eodem illo munere fungebatur. Eadem ratione ictu scorpionis exanimato altero successit tertius et tertio quartus nec ille prius est a propugnatoribus vacuus relictus locus quam finis est pugnandi factus. Caesar De bello Gallico Libro septimo Capite vicesimoquinto." As indicated, this passage is taken from Julius Caesar's *De bello Gallico*, Book VII, Ch. 25 (in his selection of this text Euler may have been motivated by the fact that such substitution ciphers have been traditionally associated with Caesar: see, e. g., Reinke 1962).

[26] Euler's Jewish chess partner has hitherto not been identified; however, there are several reasons to suggest that he may have been Aaron Salomon Gumpertz (1723–1769), a scholar and physician in Berlin, who obtained in 1751 one of the first doctorates issued to Jews in Germany:

- Gumpertz was close to the Berlin Academy: he acted temporarily as a secretary for d'Argens and Maupertuis, and in a letter to Maupertuis from 1749 Euler mentions that Gumpertz is compiling the Jewish almanac edited by the Academy (R 1547: O. IVA/6, p. 134–135).
- Gumpertz was admitted to Heinius' philosophy courses at the Joachimsthal high school together with his protégé Moses Mendelssohn, Louis Isaac de Beausobre and probably also Johann Albrecht Euler.
- Friedrich Nicolai later told an anecdote linking Gumpertz, Johann Albrecht Euler and a certain lieutenant Jacobi in a gaming club, where Mendelssohn mocked "the three mathematicians" for not being able to count to twenty-one (see Mendelssohn 1843, vol. 5, p. 241).
- When Gumpertz went on a journey to London, he wrote to Leonhard Euler, forwarding letters by the opticians Dollond and Short. His covering letter, R 933 from May 26th (June 6th), 1752, which has been published in Lausch 1991, shows that they already were personally acquainted.
- Finally the fact that Gumpertz must have been one of the strongest chess players in Berlin is attested by his participating in 1750 in the match against the unofficial world champion Philidor (cf. Poldauf 2001, p. 53; see also *infra* n° 151, note 5).

On the role Gumpertz played in the Jewish enlightenment and among Berlin intellectuals, see also Altmann 1973, Lausch 1991 and Döring 2006.

[27] Cf. n° 72, note 11.

[28] In May 1745, the prize for this first competition of the Berlin Academy was awarded to J.S. Waitz (cf. n° 91, note 7).

81
Goldbach to Euler
Moscow, July (5th) 16th, 1744

Sir,

after Professor Krafft notified me by a letter from Petersburg dated June 28th (old style) that he was about to depart for Stettin by sea, I took the liberty to address my answer – which presumably should not reach him in Petersburg any more – to you, Sir, in the hope that it should be delivered (if Professor Krafft does not get an excellent sailing vessel to Stettin) before his arrival at Berlin.[1]

I have learnt from the journals that the awarding of the prize of the Paris Academy of Science has again been postponed; however I daresay it will cost you just a small supplement to your paper to win the prize in the future.[2]

The recently mentioned rhyming dictionary appeared under the title *Dictionnaire des Rimes* by Richelet, as I found it listed later.[3]

I should like to know whether you have read a book, Sir, of which I know only the following title: *La methode des Fluxions par M.^{r} Newton*, Paris 1740.[4]

For the rest I refer to my last letter of June 1st and remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, July 16th (n. st.), 1744.

PS. I think the following proposition is certain, although I believe its proof will not be easy to find: If a prime number of the form $4n+1$ is given, there is another number of the form a^2+1 which is divisible by it[5] (in fact it is obvious by itself that, once one a^2+1 has been discovered, innumerable others having the same property can be found). In certain cases the solution is very easy, for example if the number n contained in the given prime number $4n+1$ is square or triangular.[6]

[1] Neither Krafft's letter to Goldbach nor Goldbach's reply, which Euler delivered personally upon Krafft's arrival at Berlin (cf. n° 83, note 3), have apparently been preserved.
On Krafft's return to Germany, see also n° 56, note 19.

[2] Cf. n° 79, note 6, and n° 80, note 14.

[3] Cf. n° 77, note 10.
Richelet's *Dictionnaire de*[!] *Rimes* had first been published in 1648 and seen many editions, the one printed at Paris in 1739 then being the latest.

[4] The reference is to Buffon's French translation of Newton's *Method of fluxions*, which appeared at Paris in 1740 (see also n° 83, note 5).

[5] See n° 70, note 11 (apparently Goldbach had not heeded or had forgotten Euler's earlier explanation); cf. also Euler's reply in n° 83, note 10.

[6] If $n = a^2$, the claim is trivial since $4n+1 = (2a)^2+1$. If $n = \frac{1}{2}x(x+1)$, then $4n+1 = 2x^2+2x+1 = x^2+(x+1)^2$.

82
Goldbach to Euler
Moscow, August (6th) 17th, 1744

Sir,

On July 16th (new style), I dispatched a letter to you with an enclosure for Professor Krafft, which presumably has already been delivered.[1]

If the numbers m and n had not always denoted positive whole numbers in the previous theorems, and if you had not stated explicitly in the relevant letter that the 38 formulae in which these numbers m and n appear can *in no way* be squares, I should not have been so prone to doubt some of them; by now I readily believe that they are all true if the restriction mentioned by you, Sir, is taken into account.[2] However, it might perhaps be better to let the said numbers always keep their general signification and to state, for example, instead of the formula $8mn - 3m + 3n \neq a^2$ (which needs a restriction) that

$$8\,(3m \mp 1)\,(3n \pm 1) - 3\,(3m \mp 1) + 3\,(3n \pm 1) \neq a^2,$$

which is generally true; indeed the essential part of the theorem consists just in this. I furthermore observed that, if $emn - m - n$ cannot be a square, then also $emn - n - e \neq \square$, or: if e is a whole number satisfying the condition that $\dfrac{a^2+n}{en-1}$ can never be an integer, then $\dfrac{a^2+e}{en-1}$ will not be an integer either.

I thank you most humbly for the excellent theorems which you communicated to me and remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, Aug. 17th, 1744.

PS. A short time ago, Her Imperial Majesty promoted me – again without any merit or ambition on my side – to the rank of Effective State Councillor[3] with an income of 2000 Roubles.

[1] Cf. n° 81, note 1, and n° 83, note 3.
[2] Cf. n° 74, note 2, n° 79, note 1, and n° 80, note 1.
[3] The title of "Wirklicher Etatsrat" – variously translated as Effective, Real, High or Acting State Councillor – was the fourth highest civil grade in the Russian Table of Ranks, corresponding to a Major General in the Army.

83
Euler to Goldbach
Berlin, September 19th, 1744

Sir,

I should not have neglected to convey at once my most obedient congratulations on the new rank[1] which you received at the recent celebration, Sir, if the arrival and presence of Professors Heinsius and Krafft[2] had not distracted me so much that for several weeks now I have had very little time to spend on reflections of the kind which the pages you lately sent me should require. So I congratulate you on this further advancement, Sir, from all my heart; and since Her Imperial Majesty showed by this such an evident mark of Her high favour towards you, I wish that both this present and other acts of grace yet to come may contribute to your true satisfaction and constant well-being, Sir; at the same time I take the liberty to recommend myself and all my family most humbly to the continuation of the very special goodwill which you have ever shown towards me.

Some weeks ago, Professor Heinsius left again for Dresden, along with Magister Gellert, after staying here for a week. Soon after this, Professor Krafft finally also arrived here fortunately, after he had been driven back to Kronstadt by a contrary wind and forced to put to sea again as late as August 2nd. Immediately after his arrival I delivered your letter to him,[3] for which he asks me to thank you most obediently and to recommend him to your goodwill.

Mr. Clairaut again assured me that, when the submitted pieces about the magnet were examined, mine still met with the most approval, but three of the five appointed referees, being champions of Newtonian attraction, are convinced that this question can never be explained in a mechanical manner; however, when two years have elapsed, the prize must necessarily be awarded according to the Academy's laws.[4] Meanwhile I daresay if the gentlemen think this question is impossible to solve, they should have promised the 2 500 *livres* that have again been offered for a question which is more tractable and useful according to their judgment.

Here I get to see new books only rarely; therefore the one which you report on by the title *La Methode des fluxions* is also not known to me. However I do not doubt that this same treatise has been included in the complete collection of Newton's *Opuscula* which recently appeared at Lausanne.[5]

Your observation, Sir,[6] that whenever $emn - m - n \neq \Box$, then also $emn - m - e \neq \Box$, may give occasion to the discovery of many new theorems: for if $emn - m - n \neq \Box$, then, by setting $n = pm^2 - m$, one also has $epm^3 - em^2 - pm^2 \neq \Box$ or $emp - p - e \neq \Box$.

You do not give the smallest hint in your letter, Sir, for what reason you enclosed some pages of notes cut out from your travel diary;[7] but I suspect that the series $\frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{216} + \dots$, whose sum Huygens allegedly indicated to equal $\frac{1}{4}$,[8] may have given occasion for this. However I cannot see the law of progression of this series; if it were to read 256 instead of 216, I should think you were discussing

the series
$$\frac{1}{8\cdot 1}+\frac{1}{8\cdot\frac{4}{1}}+\frac{1}{8\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{6}{2}}+\frac{1}{8\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{8}{3}}+\ldots,$$
whose sum equals
$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16\cdot 2}+\frac{1}{32\cdot 3}+\frac{1}{64\cdot 4}+\ldots=\frac{1}{4}\log 2$$
and consequently is smaller than $\frac{1}{4}$. I was able to demonstrate in a short time the rest of the sums which you noted in those pages, Sir: the general formula
$$\frac{anxh^{x+1}-(anx+an)\,h^x}{m^2h^{2x+1}+mnxh^{x+1}+(mnx+mn)\,h^x+n^2x^2+n^2x}$$
is resolved into
$$\frac{\frac{an}{m}x}{mh^x+nx}-\frac{\frac{an}{m}\,(x+1)}{mh^{x+1}+n\,(x+1)};$$
now if the series arising from the first term is $A+B+C+D+\ldots$, the other term will yield the series $B+C+D+\ldots$, and consequently the sum equals $A=\dfrac{an}{m^2h+mn}$.

The meditations about imaginary and negatively negative quantities which you pondered on the subsequent pages so many years ago are in such complete accordance with truth that all those difficulties which are usually raised about this subject can be eradicated by them.[9]

By the way, in order for your correspondence not to be left incomplete, I am sending back again those pages which you kindly sent me, at the same time thanking you most humbly for their communication, while I remain with the most dutiful respect for all my lifetime, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Sept. 19th, 1744.

PS. It is certain that, given any prime number of the form $4n+1$, there can always be found a number of the form a^2+1 which is divisible by $4n+1$, since the prime $4n+1$ is always a sum of two squares.[10] For if $4n+1=p^2+q^2$, two numbers f and g can always be determined in such a manner that $gp-fq=\pm 1$ or that the fraction $\frac{f}{g}$ comes so close to the fraction $\frac{p}{q}$ that on subtracting one from the other, just 1 is left in the numerator. Now once the fraction $\frac{f}{g}$ has been determined in this way, one has $a=fp+gq$ or generally $a=(4n+1)\,m\pm(fp+gq)$. On the other hand, the fraction $\frac{f}{g}$ can always be easily determined by my method for approximately expressing fractions in smaller numbers. If, e. g., $4n+1=853$, one has $4n+1 = 18^2+23^2$, and consequently $\dfrac{p}{q} = \dfrac{23}{18}$. Now I perform on the numbers 23 and 18 the operation which is used for the determination of the greatest common divisor, as follows:

$$
\begin{array}{llllllllll}
18) & 23 & (1 & & & & & & & \\
 & \underline{18} & & & & & & & & \\
 & 5) & 18 & (3 & & & & & & \\
 & & \underline{15} & & & & & & & \\
 & & 3) & 5 & (1 & & & & & \\
 & & & \underline{3} & & & & & & \\
 & & & 2) & 3 & (1 & & & & \\
 & & & & \underline{2} & & & & & \\
 & & & & 1) & 2 & (2 & & & \\
 & & & & & \underline{2} & & & & \\
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

Then I write the quotients consecutively in a row and calculate from them the following fractions

$$
\begin{array}{ccccc}
1, & 3, & 1, & 1, & 2 \\
\dfrac{1}{0}, & \dfrac{1}{1}, & \dfrac{4}{3}, & \dfrac{5}{4}, & \dfrac{9}{7},
\end{array}
$$

where, namely, each numerator or denominator, multiplied by the number written above it and added to the preceding numerator or denominator, yields the following numerator or denominator. Thus $9 = 1 \cdot 5 + 4$, $7 = 1 \cdot 4 + 3$, and so on. Now the last fraction $\dfrac{9}{7}$ comes so close to $\dfrac{23}{18}$ that the difference $\dfrac{1}{7 \cdot 18}$ is expressed by a fraction whose [numerator] equals 1. Consequently, since $\dfrac{p}{q} = \dfrac{23}{18}$, one has $\dfrac{f}{g} = \dfrac{9}{7}$ and therefore $a = 9 \cdot 23 + 7 \cdot 18 = 333$; thus $333^2 + 1$ is divisible by 853.

Example 2: Let $4n + 1 = 178\,481 = 391^2 + 160^2$; then I operate thus:

$$
\begin{array}{llllllllll}
160) & 391 & (2 & & & & & & & \\
 & \underline{320} & & & & & & & & \\
 & 71) & 160 & (2 & & & & & & \\
 & & \underline{142} & & & & & & & \\
 & & 18) & 71 & (3 & & & & & \\
 & & & \underline{54} & & & & & & \\
 & & & 17) & 18 & (1 & & & & \\
 & & & & \underline{17} & & & & & \\
 & & & & 1) & 17 & (17 & & & \\
 & & & & & \underline{17} & & & & \\
 & & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
2, & 2, & 3, & 1, & 17 & & \\
\dfrac{1}{0}, & \dfrac{2}{1}, & \dfrac{5}{2}, & \dfrac{17}{7}, & \dfrac{22}{9} & \cdots & \dfrac{391}{160}.
\end{array}
$$

Consequently $a = 22 \cdot 391 + 9 \cdot 160 = 10\,042$ is the smallest number whose square increased by 1 is divisible by 178 481: indeed $a^2 + 1 = 100\,841\,765 = 178\,481 \cdot 565$.

PS.[11] This very moment a royal officer brought the happy news that the city of Prague has surrendered to our Most Gracious King and the 16 000 men of the garrison force have been taken prisoners of war.[12]

[1] Cf. n° 82, note 3.
[2] Cf. n° 56, note 19.
[3] Cf. n° 81, note 1.
[4] Cf. n° 52, note 11, and n° 80, note 14.
See Clairaut's letters to Euler from April 26th and August 23rd, 1744 (R 407, 410: O. IVA/5, p. 154–158 and p. 159, note 10).
[5] Cf. n° 80, note 23, and n° 81, note 4.
T. I of Castillon's *Opuscula* edition indeed includes the *Methodus Fluxionum & Serierum infinitarum*.
[6] Cf. n° 82, text after note 2.
[7] These enclosures were returned to Goldbach (see below) and have apparently not been preserved; see, however, Goldbach's answer n° 84, note 4.
[8] Neither the reference to Huygens nor the identity of the series Goldbach had explored could be cleared up.
[9] Given Euler's high opinion and the fact that neither he nor Goldbach ever explicitly published their views on the concept of "imaginary" (i. e., complex) quantities, it is very regrettable that these notes of Goldbach's seem to be lost. They may have been triggered by their exchanges with Heinrich Kühn (cf. n° 72, note 8), who submitted a manuscript on these questions to the Petersburg Academy in 1735 through the intermediary of a colleague from Danzig, C.G. Ehler (cf. R 583–594: Euler's letters have been edited in Smirnov 1963, p. 282–385).
Kühn later continued to debate his ideas in this field with Euler and to send his work to the Petersburg Academy for publication. In 1753 Euler protested sharply against the inclusion of one of Kühn's papers on imaginary quantities in the *Novi Commentarii*, telling Schumacher that Kühn tended to "contaminate his mathematics unseasonably with metaphysical whimsicalities" and his paper could only "greatly discredit" the journal (R 2307: JW 2, p. 313–315). Nevertheless, Kühn's attempt has later sometimes been considered – mostly without closer inspection – as a step towards the geometrical representation of complex numbers.
[10] Cf. n° 81, note 5.
[11] This second PS has been added in the upper margin of fol. 105r.
[12] In August 1744, Frederick had invaded Bohemia with an army of 80 000, setting off the Second Silesian War. After two weeks' siege, the garrison of Prague capitulated on September 16th.

84
Goldbach to Euler
Moscow, October (1st) 12th, 1744[1]

Sir,

I am humbly obliged to you for the felicitation you conveyed to me,[2] and I should be very glad if the occasion should present itself of doing some little favour either for you, Sir, or for your dearest family. Please tell me some time soon what progress my dear godson Johann Albrecht has been making and whether he shows some inclination towards mathematics, in which case I do not doubt that he shall go very far in a few years.

I leave it open whether, given the present circumstances, there may not have been scores of reasons – independently of all Newtonian attraction – by which one could have been compelled to differ the distribution of the prize.[3]

My last letter was written in such haste that I quite forgot to report my reason for enclosing some additional pages of notes.[4] In past years I had kept copies of diverse letters that were not worth the trouble, and when I lately leafed through them I destroyed a great deal; however as in the sheets I sent you there were some remarks about negative numbers which appear to hold up, I decided to communicate them to you, Sir, as it were to while away some boring hours; the statements about series that are also contained there may have seemed new to me then, but now are of no importance.

Your method[5] for determining the numbers a^2+1 which are divisible by the prime number $4n+1$ pleased me very much; I hardly think any other procedure to resolve this matter is possible, and the present one appears not to have been known to anybody before you, Sir.

A short time ago[6] the following observation about the formula $emn \pm fm \pm gn$ occurred to me: There are innumerable numbers, such as 1, 3, 4, 6, 9, 10, etc., which cannot be brought to the form $10mn \pm (m+7n)$; but no general algebraic formula $a+bx+cx^2+\ldots$ (where x denotes a variable integer and a, b, c, etc. are constants) can be indicated for which it could be stated that

$$10mn \pm (m+7n) \neq a+bx+cx^2+\ldots,$$

in the same sense that one can state that $4mn-m-n \neq x^2$. One might in fact say that mn by itself has the same property; however, on the one hand this is at once obvious, on the other mn does not properly belong to the formula $emn \pm fm \pm gn$, where e, f, and g are understood to denote whole numbers.

I should really like to know, Sir,[7] whether you can determine the number e in the proposition A: $emn-m-n \neq a^2$ in many ways besides the case when e is a multiple of 4. Meanwhile I can prove that proposition A is always wrong if e does not have the form $4hk-h+1$ where h and k are positive whole numbers; for if e does not have this form, then A will obviously be false in the case $n=1$ and therefore cannot be a universally negative statement.[8]

When lately I came across a part of the *Mémoires* for the year 1734 in-octavo, I found there, p. 268 and following, Mr. Clairaut's *Solution de plusieurs problemes* .... In my opinion no more general solution than the one he indicates can be thought of, and his statements about the *Probleme troisieme* also appear to be very remarkable.[9] Mr. Bouguer utilises for the sign which you write $\nless$, Sir, this one: $\geqq$, which is not succinct but very expressive.[10]

I first learnt the news that Prague has been taken from your letter, Sir,[11] and heard it fully confirmed on the same day.

I remain with particular respect, Sir, your most obedient servant Goldbach.

Moscow, Oct. 1st (n. st.),[12] 1744.

[1] There is a discrepancy between the dates on the original letter and on Goldbach's copy: whereas the former reads October 1st *new style* (i. e., according to the Gregorian calendar), the copy bears the heading "*Ex litt*[*eris*] *ad Cl*[*arissimum*] *Eulerum Moscua Berolinum* 12. *Oct.*". Since the delay of twelve days for replying to Euler's letter n° 83, sent from Berlin on Sept. 19th, would seem extremely short, we prefer the reading in Goldbach's copybook; the date on the original letter should then be in *old style* (i. e., according to the Julian calendar).

[2] Cf. n° 83, note 1.

[3] Cf. n° 83, note 4. Goldbach probably hints at political motives for the postponement; in the spring of 1744 France had gone to war against the Austrian Netherlands and England.

[4] Cf. n° 83, note 7.

[5] Cf. n° 83, note 10.

[6] The text of Goldbach's copy starts here.

[7] Cf. n° 80, note 1.

[8] The text of Goldbach's copy ends here.

[9] Clairaut's paper in the Paris *Mémoires* for 1734 (published in 1736) deals with the determination of plane curves from geometrical conditions. Problem III, in particular, asks for curves where the intersection of every pair of mutually orthogonal tangents lies on some given curve.
See Euler's reply in n° 85, note 8.

[10] Bouguer used the $\geqq$ sign (cf. n° 77, note 6) in a paper on the differential geometry of vaults printed in the same volume of the *Mémoires* (Bouguer 1736), p. 152.

[11] Cf. n° 83, note 12.

[12] This is probably a mistake: cf. *supra* note 1.

85

Euler to Goldbach

Berlin, November 17th, 1744

Sir,

I acknowledge your very special goodwill towards me and my family with all due commitment; about your godson[1] I have the honour to report that, notwithstanding that he has not gone so far in his studies as I should wish, the reason for this should not be ascribed either to his negligence or to a lack of innate talent. Indeed, when in Petersburg, he suffered from consumption to such a degree that the physicians nearly lost all hope of his recovery; but the air at sea and the seasickness did him so much good that he was brought here completely healthy to all appearances. However, since that time he has been attacked by a relapse every winter, so that he was each time bedridden for several months and in this state forgot again a good part of what he had learned in the summer months. Last spring he had the smallpox, along with our other children, and this had, thank God, such a good effect that he appears to be entirely released from his former illness and is now in good health even in the present season, which used to be the most dangerous for him. So he applies himself most diligently to his studies, and there is no fault to be found with his ability either. I spend most of the time with him at Latin, having him do diverse exercises each day; but moreover I am treating Arithmetic and Geometry with him, in which he soon grasps everything, and I have also taught him the first principles of Algebra. Thus I hope that I shall lead him, God helping, rather far, if he is not attacked by another illness.

I am very pleased that you thought my method for determining the numbers a^2+1 which are divisible by the prime number $4N+1$ worthy of some attention.[2] The proof of this is the following: If a^2+b^2 is to have any divisors, the letters a and b must be such that $a = mp+nq$ and $b = mq-np$, for then one has $a^2+b^2 = \left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)$,[3] and therefore a^2+b^2 is divisible by p^2+q^2. Now, as $4N+1$ can always be brought to the form p^2+q^2, one has to find numbers for m and n which make b equal to ± 1, or $mq-np = \pm 1$. Thus if I form, starting from the equality $4N+1 = p^2+q^2$, the fraction $\frac{p}{q}$, another fraction $\frac{m}{n}$ must be sought such that on multiplying these fractions $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}$ crosswise the products mq and np differ just by 1; or the fraction $\frac{m}{n}$ must approximately equal the fraction $\frac{p}{q}$ in smaller numbers. When I now perform on the numbers p and q that operation which one usually does to determine their greatest common divisor, and build fractions from the quotient in the way I formerly described, the last fraction will equal $\frac{p}{q}$; and since in such a sequence of fractions two adjacent ones always are such that the products arising by crosswise multiplication differ just by 1, the next-to-last fraction can be taken for $\frac{m}{n}$, since this results in $a = mp+nq$.

As far as I can remember, the notions about imaginary numbers contained in the letters you recently sent me[4] appeared to be very well-founded to me.

If $emn + fm + gn \neq a + bx + cx^2$, then one should also have

$$4cemn + 4cfm + 4cgn \neq 4ac + 4bcx + 4c^2x^2 = 4ac - b^2 + (b + 2cx)^2\,,$$

and consequently $4cemn+4cfm+4cgn-4ac+b^2 \neq \square$. The possibility of discovering formulae of this kind depends on the question whether there are any formulae such as $emn \pm fm \pm gn \pm h$ which can never yield a square. However I have not thought about this kind of formulae before and have still not discovered anything about them that should merit to be communicated to you, Sir.

As regards the formula $emn-m-n$, I investigated very far out all numbers for e by which this formula can be made to yield a square, and found that all numbers can be substituted for e except these: 4, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 32, 36, 39, 40, 44, 47, 48, 52, 55, 56, 60, 63, 64, 68, 71, 72: this is how far I progressed with my search.[5] Now since among these numbers none occur but those contained in the two formulae $4k$ and $8k - 1$, if I state that both the formula $4kmn - m - n$ and $(8k - 1)\,mn - m - n$ cannot yield any square, this induction seems justified to me.[6] Not only I have not yet found either of these formulae to be wrong, but also I have always been able, whenever for e any other number but $4k$ and $8k - 1$ is assumed, to make the formula $emn - m - n$ a square.[7]

At your instigation, Sir, I read Mr. Clairaut's paper in the *Mémoires* for 1734. The solution of the first two problems is the Newtonian one and could indeed not be more general. The third problem is indeed very remarkable; however the solution is such that it cannot be applied to any other than a right angle, whereas the case in which the angle is not a right one is equally possible. I have exchanged several letters with Mr. Clairaut about this subject, but neither of us has been able to clear up this latter case.[8]

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I have the honour to be with all due respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Nov. 17th, 1744.

[1] When Euler's first-born child was baptised in November 1734, the President of the Petersburg Academy, Chamberlain Korff (who also gave him his Christian names Johann Albrecht), and Goldbach had been his godfathers.

[2] Cf. n° 83, note 10, and n° 84, note 5.

[3] This is the product formula for sums of two squares: see n° 87, note 5.

[4] Cf. n° 83, notes 7 and 9, and n° 84, note 4.

[5] About the traces this inductive investigation left in Euler's notebooks, see Matvievskaya 1960, p. 157–161.

[6] Already two years earlier Euler had intensively tried to find proofs for these assertions and discussed them with Goldbach (cf. n° 56, note 4, and n° 60, note 2).

[7] If e is a number not contained in the linear forms $4k$ or $8k - 1$, then $emn - m - n$ indeed represents squares. This can be proved by writing the equation $emn-m-n = a^2$ in the form

$(em-1)(en-1) = ea^2+1$ and then showing that the congruence $ea^2 \equiv -1 \bmod (en-1)$ has a solution.

In fact, assume first that $e = 2f$ for some odd integer f. By an elementary case of Dirichlet's theorem on primes in arithmetic progression, there is a prime $q = 4en-1$; note that $q \equiv 7 \bmod 8$. Then $(\frac{-e}{q}) = (\frac{-2}{q})(\frac{f}{q}) = -(\frac{-q}{f}) = +1$.

If $e \equiv 1 \bmod 4$, we choose a prime $q = 4me+2e-1$ (this implies $q = en-1$ with $n \equiv 2 \bmod 4$; in particular, $q \equiv 1 \bmod 4$) and find $(\frac{-e}{q}) = (\frac{e}{q}) = (\frac{q}{e}) = (\frac{-1}{e}) = +1$.

Finally, if $e \equiv 3 \bmod 8$ there is a prime $q = ek + \frac{e-1}{2}$; then $2q = en-1$ with $n = 2k+1$, and we find $(\frac{-e}{q}) = (\frac{q}{e}) = (\frac{-2}{e}) = 1$.

For a few explicit formulae supporting Euler's conjecture see Goldbach's reply n° 87, notes 1–2.

[8] Euler refers to the letters R 391–395 exchanged with Clairaut in 1741/42 (see O. IVA/5, p. 91–120, in particular p. 94, notes 8–10). A variant of this problem, which gave rise to a dispute between Clairaut and Alexis Fontaine, is also discussed in E. 83, § 28–37.

86
Goldbach to Euler
Petersburg, January (15th) 26th, 1745

Sir,

I convey to you my humble thanks for the news which you gave me upon my request about the progress of your eldest son;[1] in view of his still tender age and feeble health I cannot but praise your careful course of action, Sir, in sparing him too much memorising and learning. That which has been missed or postponed in those very early years can be most easily made up for in future times, when the forces of body and soul are growing, whereas it should be utterly irresponsible to weaken him even more by much meditation while his illness persists; indeed, if this bodily disposition continues it should be much wiser to choose for him some way of living which does not require great reflection or particular erudition.

From your last letter, Sir,[2] I have seen that you found no other values for e in the equation $emn-m-n$ but those which are either multiples of 4 or $= 8k-1$; but as in this you only refer to an induction,[3] I wanted at least to remark that except for these two cases the proposition $emn-m-n \neq a^2$ is always wrong and the squares to which $emn-m-n$ becomes equal may even be indicated whenever either e or $e-1$ can be a divisor of some square increased by 1.[4] For in the first case, when $be = c^2+1$, let $n = b+1$, $m = b+b^2$: then

$$emn-m-n = eb\,(b+1)^2 - b\,(b+1) - (b+1) = (eb-1)\,(b+1)^2 = c^2\,(b+1)^2\,;$$

in the second case, when $e-1$ is a divisor of a^2+1, let $m = 1$, $n = \dfrac{a^2+1}{e-1}$. Therefore there are no other possible forms for e in the proposition $emn-m-n \neq a^2$ but those where e is either 4 (or an arbitrary multiple of it) or where $e = 8k-1$; indeed, in both cases neither e nor $e-1$ can divide any square increased by 1. This is the reason for which, although $4k-1$ cannot divide any square increased by 1, yet it is unsuitable for expressing the value e in the proposition $emn - m - n \neq a^2$ since $e - 1 = 4k - 2$ can be a divisor of a square increased by 1. It follows from this that besides the numbers comprised by the formulae $4k$ and $8k - 1$ no others can be substituted for e, since in fact no others enjoy the property that neither e nor $e - 1$ can divide some square increased by 1;[5] and even if it has not yet been proved that all numbers of the form $8k - 1$ substituted for e are admissible – which however I think most likely – I do not doubt either that it can be proved by some argument which at the moment eludes me.

During my journey back here from Moscow the idea occurred to me that perhaps the proposition about the prime numbers of the form $4n + 1$ being sums of two squares might be just a corollary of the following theorem: All numbers of the form $4n + 1$ which cannot be divided by any number of the form[6] $4m - 1$ are in as many ways sums of two squares as they can be broken down into two factors;[7] e. g.,

65 is a number of the form $4n + 1$ and cannot be divided by any number of the form $4m - 1$: therefore 65 is in as many ways a sum of two squares as it can be broken down into two factors, viz., in two ways: (1.) $1 \cdot 65$, (2.) $5 \cdot 13$; so it is a sum of two squares as (1.) $1 + 64$, (2.) $16 + 49$.

Similarly 25 is a number of the form $4n + 1$ and cannot be divided by any number of the form $4m - 1$; therefore, as it can be resolved into two factors in two ways, namely (1.) into 1 and 25, (2.) into 5 and 5, it will also twice be a sum of two squares, namely (1.) $0 + 25$, (2.) $9 + 16$.

Similarly the number 625, of the same kind, can be resolved into two factors in three ways: (1.) $1 \cdot 625$, (2.) $5 \cdot 125$, (3.) $25 \cdot 25$; so it is also thrice a sum of two squares: (1.) $0^2 + 25^2$, (2.) $7^2 + 24^2$, (3.) $15^2 + 20^2$.

The number 493, of the same kind, can be resolved into two factors in two ways: (1.) $1 \cdot 493$, (2.) $17 \cdot 29$; so it is in two ways a sum of two squares: (1.) $3^2 + 22^2$, (2.) $13^2 + 18^2$, and so on.

By the way, I have two methods to determine, whenever the equation $emq - q - m = a^2$ is possible in some case for q, innumerable other cases of the equation $emn - m - n = b^2$, namely by defining

(I.) $\left(q - 2ak + (em - 1)\ k^2\right) = n$,

(II.) $((em - 1)\ h + 1)^2\, q - hm\,((em - 1)\ h + 2) = n$,

where h and k are any numbers for which n becomes an integer; the truth of this is immediately demonstrated just by substituting.

I remain most respectfully, Sir, your most devoted and assiduous servant Goldbach.

St. Petersburg,[8] Jan. 26th (new style), 1745.

[1] Cf. nº 85, note 1.
[2] The text of Goldbach's copy starts here.
[3] Cf. nº 85, notes 6 and 7.
[4] There are many other cases where $emn - m - n$ represents a square, for example if $2e - 1$ divides $a^2 + 2$: then $m = 2$ and $n = \dfrac{a^2 + 2}{2e - 1}$ satisfy $(em - 1)n - m = a^2$.

More generally, assume that $ke-1$ divides a^2+k; then $emn-m-n=a^2$ for $m=k$ and $n=\dfrac{a^2+k}{ke-1}$. In some sense this is a trivial observation since we are merely transforming a divisor of a^2+k into a divisor of ka^2+1.

[5] This is not correct, as the example $e=21$ shows, so Goldbach's constructive solution does not always apply; cf. Euler's reply n° 87, note 1.

[6] On the sign that has been rendered by $\dotplus$ in the original text of the formula that follows, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.

[7] Goldbach here conjectures that the number of representations of an integer $4n+1$ not divisible by any prime $4m-1$ as a sum of two squares of nonnegative integers is equal to the number of factorisations of n. Similar results had already been obtained by Fermat (see Weil 1984, ch. II, § IX, p. 69–73).
The modern formula for the number $r_2(n)$ of representations of n as a sum of two squares can be found in Gauss's *Disquisitiones*, art. 182: Let $\nu_p(n)$ denote the exponent with which p occurs in the prime factorisation of n. Then $r_2(n)=0$ if $\nu_p(n)$ is odd for some prime $p\equiv -1 \bmod 4$, and $r_2(n)=4\prod_{p\equiv 1 \bmod 4}(1+\nu_p(n))$ otherwise.

[8] Goldbach's copy has the heading "*Ex litteris ad Cl*[*arissimum*] *Eulerum Moscua Berolinum d*[*atis*] 26. *Januar.*" ("From the letter to Euler written from Moscow to Berlin on January 26th"); however, the text of the letter and the date on the original show that it was written after Goldbach had returned to Petersburg.

87
Euler to Goldbach
Berlin, February 16th, 1745

Sir,

I most humbly acknowledge my obligation to you, Sir, for your very special goodwill towards our Albrecht. Since he has come through most part of this last winter without falling ill, we are confident that his former sickly state may now gradually pass and he may thus, God helping, become capable of learning something decent. He already solves rather nimbly all algebraic problems that lead to simple equations, and for a few days now I have been instructing him in quadratic equations, with which he is also getting along well. His Latin is coming on fairly, too, although I do not burden him with much memorising.

I inferred only from an induction that the formula $emn-m-n$ can never yield a square if e is either a number such as $4k$ or such as $8k-1$; but this observation receives a much higher degree of certainty by your discovery, Sir.[1] For by this it is undeniably demonstrated that, whenever either e or $e-1$ is a divisor of some c^2+1, numbers m and n can always be found in such a way that $emn-m-n$ becomes a square. Now since neither $4k$ nor $8k-1$ can always be admitted here, the formula $emn-m-n$ can be brought to a square in this way neither for $e=4k$ nor for $e=8k-1$. However, in order to perfect the proof, one should have to be able to prove the converse statement that, whenever $emn-m-n$ can yield a square, then either e or $e-1$ is a divisor of some number c^2+1. As long as this has not been shown, one cannot claim the above proposition to be fully proved, even if one has no reason at all to doubt it.[2] In Arithmetic there is a great multitude of theorems of this kind, which nobody doubts and which nonetheless one cannot prove. For example I have nowhere seen this theorem proved: A number which is not a sum of two squares in integers cannot either be a sum of two squares in fractions.[3] In order to prove this, one should have to show that, if an^2 equals a sum of two squares, then a also has to be a sum of two integer squares. Similarly it is easy to prove that the product which two sums of two squares yield is also a sum of two squares; but it is not evident from this that the quotient obtained by dividing a sum of two squares by a sum of two squares also has to be a sum of two squares, even if nobody doubts this. It has not yet been proved either, in my opinion, that a sum of two relatively prime squares cannot have any other divisors but such as are sums of two squares themselves. The same applies to the following proposition: Every prime number of the form $4n+1$ is always a sum of two squares, and this in a unique way.[4] Now if this is taken for granted, your theorems, Sir, can easily be proved: for if $4n+1$ has no divisor of the form $4m-1$, all its factors must be of the form $4m+1$ and consequently are sums of two squares. But one generally has

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2\,;$$

so this can be resolved into two squares in two ways.[5] Moreover it can also easily be shown that if some number can be split into two squares in two ways, it is not prime. For let $N=a^2+b^2=c^2+d^2$; then

$$N=\frac{\left((a-c)^2+(b-d)^2\right)\left((a+c)^2+(b-d)^2\right)}{4\,(b-d)^2}.$$

Furthermore the following theorem is also correct: If the number $4n+1$ can be split into two squares in a unique way, then it will certainly be a prime;[6] but if $4n+1$ is in no way a sum of two squares, then it will not be prime, but will have either two or 4, 6, etc. factors of the form $4m-1$. If, however, $4n+1$ is a sum of two squares in several ways, then it will have two or more factors of the form $4m+1$. For this reason it is not difficult to examine very large numbers $4n+1$ whether they be prime or not.[7]

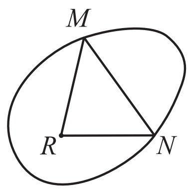
In the same manner in which I proved that all prime divisors of the form a^2+b^2 are comprised by the expression $4n+1$, I can also prove that all divisors of a^4+b^4 are in the form $8n+1$, and generally that all divisors of $a^{2^m}+b^{2^m}$ are comprised by the form $2^{m+1}n+1$.

Moreover I can rigorously prove the following theorems:

I. If a^m-b^m is divisible by the prime number $2n+1$ and p is the greatest common divisor of the numbers m and $2n$, then a^p-b^p will also be divisible by $2n+1$.

II. If the formula af^n-bg^n is divisible by the prime number $mn+1$, then a^m-b^m will also be divisible by $mn+1$. Therefore if one can find such numbers for f and g that af^n-bg^n is divisible by $mn+1$, then the formula a^m-b^m will necessarily be divisible by $mn+1$.[8]

Recently I thought of the following problem:[9]



Given a radiating point R, describe such a curve around it that each ray issuing from R comes back to R after two reflections in M and N. Besides the ellipse which has one of its foci at R there are infinitely many other curves, both algebraic and transcendental, which satisfy the condition; this problem appears to me to be one of the most difficult in this genre.

The equation $ay\,dy + y\,dx\ (3ax + b) + dx\ \left(ax^3 + bx^2 + cx + f\right) = 0$ can be separated and integrated.[10]

With this I have the honour to recommend myself most obediently to you, and to remain for all my life with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, Feb. 16th, 1745.

[1] Cf. n° 85, notes 6 and 7, and n° 86, note 4.
[2] In fact this converse is not true: cf. n° 86, note 5.
[3] Euler has already discussed this question with Goldbach: cf. n° 74, note 9.
[4] Here again Euler resumes a problem mentioned earlier (cf. n° 47, note 4). The rigorous proof of this statement will take several more years (cf. n° 115, "Theorem 5" and note 8, E. 228, n° 138, note 2, and E. 241).
[5] Diophantus remarked (*Arithmetica* III, 22: see, e. g., Heath 1885, p. 188) that 65 can be written as a sum of two squares in two different ways because 65 is the product of 5 and 13, which suggests that he was familiar with some form of the product formula for sums of two squares.
The explicit formulation of this result was known in the 10th century to Abū Ja'far al-Khāzin, who already pointed out the connection with Diophantus' problem (see Anbouba 1979); it also occurs in Leonardo da Pisa's (or Fibonacci's) *Liber quadratorum* (see Leonardo da Pisa 1856, 1987, Prop. 6) and in the work of Viète (*Zetetica*, IV.2; *Notae priores*, Prop. XLVI).
Even more general identities were already known to Indian mathematicians of the 7th century, but became known in the West only through Colebrooke's translation published in 1817.
[6] This assertion, as stated here and repeated in several textbooks on number theory, is flawed: in fact, the additional condition is required that the two squares in the unique representation be mutually prime (cf. Sierpiński 1961).
[7] For a detailed and constructive explication of this method, see again E. 228.
[8] For a proof of these theorems, cf. E. 134.
[9] Euler posed this "Catoptrical Problem" as an anonymous challenge in the *Nova Acta Eruditorum* for September 1745 (E. 79; the present letter is the principal clue for his authorship). In April 1746, he published a sketch of his solution (E. 85), which was explained more fully in the long paper E. 106 in 1748. In the meantime, the young Saxonian mathematician C.F. Oechlitz had discussed the problem in correspondence with Euler and published two contributions of his own, which made a good impression on Euler (see n° 129, note 11).

The problem also takes up some considerable space in the correspondence with Goldbach up to 1749: see the letters n° 88–109 and 129–139 (in particular n° 96, to which Euler appended another solution), and Section 2.5 of the Introduction, p. 68. The only attempt at an analysis we have been able to find in the secondary literature is White 2007, p. 308–311.

[10] Cf. Goldbach's reply n° 88, note 1.

88
Goldbach to Euler
Petersburg, May (18th) 29th, 1745

Sir,

I actually received your letter dated Feb. 16th a long time ago, Sir, but up to now I have been prevented from replying by urgent business matters.

The integration of the equation[1]

$$ay\,dy + y\,(3ax+b)\,dx + \left(ax^3 + bx^2 + cx + f\right)\,dx = 0$$

seems very easy to me; indeed I found at once

$$y = -\,x^2 + \beta x + \gamma$$

where

$$a^2\beta^3 + 2ab\beta^2 + \left(ac + b^2\right)\beta + bc = af$$

and[2]

$$\gamma = \frac{-\,a\beta^2 - b\beta - c}{a}.$$

As regards the other problem,[3] the curve will have the following properties:

1. If one defines[4] $AB = x$, $BC = y$, $HA = a$, $AG = b$, y must be such a function of x that for $x = -\,a$ and $x = b$ one has $y = 0$.

2. Since the segment AD of the axis intercepted by the incident ray AC and the reflected ray CD is known in terms of x and y by considering the normal CN, so that $AD = u$ is given by x and y, the same segment AD of the axis, as it is intercepted by the rays AE and ED, must also be given by x' and y' if one sets $AF = x'$, $FE = y'$; by the resulting equation y' is eliminated.

3. By the proportion

$$\begin{array}{ccccccc} CB & & BD & & DF & & EF \\ y & : & u - x & :: x' - u & : & \dfrac{(u-x)\,(x'-u)}{y} & = y', \end{array}$$

x' is eliminated.

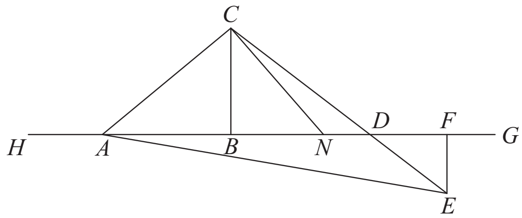
4. Finally, if the sum of the incident and the reflected ray up to the axis is either constant (as in the ellipse) or set equal to some definite function of x, then y can also be determined in terms of x; however I cannot understand this thoroughly at the moment and leave it to your better judgment, Sir.[5]

I strongly recommend the enclosed letter to Professor Gesner;[6] I have asked him, in case he wanted to write something to me, to address it to you, Sir, hoping all the better this can be done without incommoding you since the case will presumably not arise more than once a year.

I remain with great respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, May 29 (n. st.), 1745.

[1] Cf. n° 87, note 10.
[2] On the sign that has been rendered by $:\!+\!:$ in the original text of the formula that follows, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.
[3] Cf. n° 87, note 9.
[4] The figure to which the points A, B, etc. refer is missing from the preserved original; neither of the previous editions has a figure. However, in Goldbach's copybook, the text of the letter is followed by a sketched diagram (later crossed out) in which these points occur:



[5] The text of Goldbach's copy ends here.
[6] A draft of a letter Goldbach wrote to the philologist J.M. Gesner at Göttingen on the same day has been preserved among his papers. For Gesner's reply, see n° 91, note 1, and n° 92, note 8.

89
Euler to Goldbach
Berlin, June 19th, 1745

Sir,

I forwarded your letters to Mr. Gesner and Mr. Heinsius[1] on the same day I had received them. At first I thought about deferring my own reply until something should arrive from Göttingen for you, Sir; but as this might still take some time, I did not want to wait any longer with my already overdue answer.

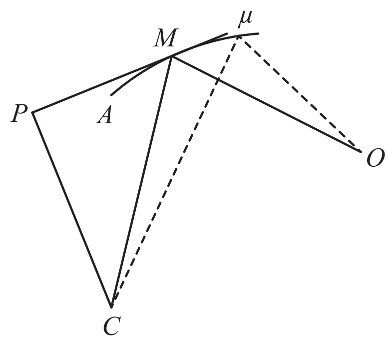
A short time ago I found here, in Neaulme's bookshop, the *Dictionnaire de Trevoux*[2] in 6 thick, magnificently bound folio volumes; however they asked 60 thalers for it. Regarding a rhyming dictionary[3] I have not yet been able to get a dependable answer. By now I have also got the *Correspondence* between Leibniz and Bernoulli in 2 quarto volumes, which contain very many beautiful and important things. Johann Bernoulli's *Opera* have been printed in 4 quarto volumes, and Jacob Bernoulli's in 2 volumes; also the edition of Newton's *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* with notes by Fathers Le Seur and ... is now completely published and turned out very well.[4] If you request any of these new works, Sir, I should profit from the occasion to most humbly present you at the same time with some copies of my own hitherto published writings, which it should not be worth the trouble of sending by themselves.

Since any integral must, in order to be complete, contain a new constant quantity that was not present in the differential, the formula $y = -x^2 + \beta x + \gamma$ cannot be the complete integral of the equation[5]

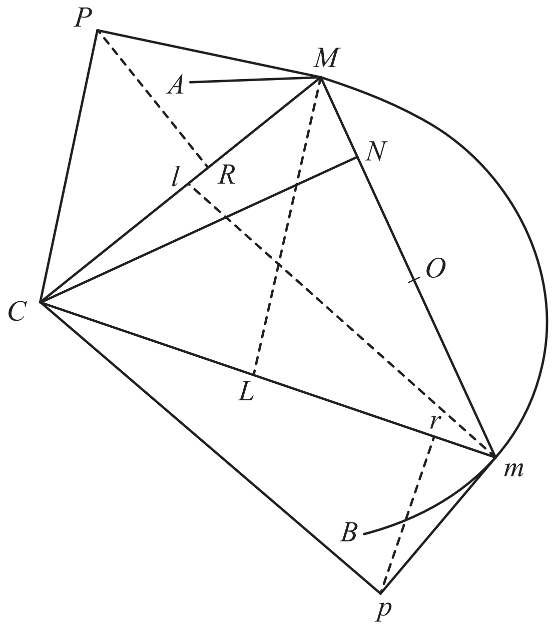
$$ay\,dy + y\,(3ax + b)\,dx + \left(ax^3 + bx^2 + cx + f\right)\,dx = 0.$$

However this can easily be determined from the particular integral by setting $y = z - x^2 + \beta x + \gamma$.

Regarding the other problem, which has now been published in the Leipzig *Acta*,[6] where the rays issuing from a given point are to return to the same point after two reflections, your attempt, Sir, is entirely correct and serves for determining the part of the curve below the axis once the upper one is taken to be known. However the greatest difficulty consists in the circumstance, which you did not yet consider, Sir, that both curves have to make up the same continuous curve.[7] Indeed I also tried a solution in the very same way at first; but the formulae become too extensive and confused, so I could not satisfy this last mentioned condition. I thought the choice of an axis might be responsible for this, since one has little sufficient reason for assuming this line rather than any other as an axis. For that reason I entirely dismissed this aspect and proceeded towards a solution in the following way:



Lemma: Let the ray CM from the focus C fall on the curve AM and drop the perpendicular CP from C on the tangent MP; define $CM = y$, $CP = p$; then the length of the reflected ray MO equals $\dfrac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy}$.



Problem: Around some given point C, describe a curve $AMmB$ such that the rays issuing from C come back, after two reflections in M and m, to the same point C.

Solution: Draw the tangents MP, mp at M and m and drop from C the perpendiculars CP, Cp on them. Define $CM = y$, $CP = p$, $MP = q = \sqrt{y^2 - p^2}$, as well as $Cm = Y$, $Cp = P$, $mp = -Q = -\sqrt{Y^2 - P^2}$. Let MO be the reflected ray which corresponds to the incident ray CM, and mO the reflected ray corresponding to Cm; then by the Lemma one has

$$\begin{aligned} MO &= \frac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy}, \\ mO &= \frac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}, \end{aligned}$$

and

$$Mm = \frac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy} + \frac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}\,.$$

Bisect the angles CMm and CmM by the lines ML, ml, which will be normal to the curve and therefore parallel to the perpendiculars CP, Cp. Now, since the sine of the angle MCP or CML equals $\frac{q}{y}$ and its cosine is $\frac{p}{y}$, the sine of twice that angle, i. e., of CMm, will be $\frac{2pq}{y^2}$, its cosine $\frac{p^2 - q^2}{y^2} = \frac{2p^2 - y^2}{y^2}$, the sine of the angle CmM will be $-\frac{2PQ}{Y^2}$ and its cosine $\frac{P^2 - Q^2}{Y^2} = \frac{2P^2 - Y^2}{Y^2}$. So the perpendicular CN equals $\frac{2pq}{y} = -\frac{2PQ}{Y}$, $MN = \frac{2p^2}{y} - y$ and $mN = \frac{2P^2}{Y} - Y$.

From this the following two equations arise:

I. $\dfrac{pq}{y} + \dfrac{PQ}{Y} = 0,$

II. $\dfrac{2p^2}{y} - y + \dfrac{2P^2}{Y} - Y = \dfrac{py\,dy}{2y\,dp - p\,dy} + \dfrac{PY\,dY}{2Y\,dP - P\,dY}$

or $\dfrac{p^2}{y} + \dfrac{P^2}{Y} = \dfrac{y^2\,dp}{2y\,dp - p\,dy} + \dfrac{Y^2\,dP}{2Y\,dP - P\,dY}.$

In order to simplify these equations, drop from P and p the perpendiculars PR and pr on CM and Cm and define $CR = r$, $PR = s$, $Cr = R$ and $pr = -S$ (since it has the opposite direction); then $r = \dfrac{p^2}{y}$, $s = \dfrac{pq}{y}$, and because of $y = \dfrac{p^2}{r}$ and $dy = \dfrac{2p\,dp}{r} - \dfrac{p^2\,dr}{r^2}$, one has $2y\,dp - p\,dy = \dfrac{p^3 dr}{r^2}$ and consequently

$$\frac{y^2\,dp}{2y\,dp - p\,dy} = \frac{p\,dp}{dr} = r + \frac{s\,ds}{dr}$$

(since $p^2 = r^2 + s^2$). In a similar way, $R = \dfrac{P^2}{Y}$, $S = \dfrac{PQ}{Y}$,

$$\frac{Y^2\,dP}{2Y\,dP - P\,dY} = \frac{P\,dP}{dR} = R + \frac{S\,dS}{dR}\,.$$

By substituting these values, the two equations which contain the solution go over into

I. $s + S = 0,$

II. $r + R = r + \dfrac{s\,ds}{dr} + R + \dfrac{S\,dS}{dR}$ or II. $\dfrac{s\,ds}{dr} + \dfrac{S\,dS}{dR} = 0.$

If one now sets $s = t$ and $\dfrac{s\,ds}{dr} = u$, one has $S = -t$ and $\dfrac{S\,dS}{dR} = -u$; therefore, since the points M and m have to belong to the same curve, the relation between t and u is of necessity the same as between $-t$ and $-u$; and since s is expressed by the root $\sqrt{p^2 - r^2}$, the equation linking t and u has to be such that it does not change if both t and u are taken either negatively or positively. If therefore for the relation between t and u any equation of this kind, like $\alpha t^2 + \beta u^2 = a^2$ or $a^2 = \alpha t^2 + \beta u^2 + \gamma t^4 + \delta t^2 u^2 + \varepsilon u^4 + \ldots$ is supposed, a curve which satisfies the requested condition is always produced. Moreover, if one assumes such a suitable equation linking t and u, one has $s = t$ and $\dfrac{s\,ds}{dr} = \dfrac{t\,dt}{dr} = u$, therefore $r = \int \dfrac{t\,dt}{u}$, $p = \sqrt{r^2 + s^2}$ and $y = r + \dfrac{s^2}{r}$. In this way the relation between an arbitrary ray CM and the corresponding perpendicular CP on the tangent is obtained, and from this relation the curve can be constructed.

If one assumes, for the equation linking t and u, $t^2 + u^2 = a^2$, one has $u\,du = -\,t\,dt$ and $r = b - u$, $s = t = \sqrt{a^2 - u^2}$, hence $p = \sqrt{a^2 + b^2 - 2bu}$ and

$$y = \frac{p^2}{r} = \frac{a^2 + b^2 - 2bu}{b - u};$$

since $u = \dfrac{a^2 + b^2 - p^2}{2b}$, one has

$$\begin{aligned} r &= \frac{b^2 - a^2 + p^2}{2b}, \\ y &= \frac{2bp^2}{b^2 - a^2 + p^2} \end{aligned}$$

or

$$p^2 = \frac{\left(b^2 - a^2\right) y}{2b - y};$$

this equation gives all ellipses which have one focus at C. So, taking other equations linking t and u which have the properties described above, infinitely many other curves satisfying the condition will be produced; among these one will also discover some algebraic curves – indeed, I found among others one of the sixth order.[8]

With this I recommend myself to your constant goodwill, remaining with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, June 19th, 1745.

I think I already reported to you, Sir, that my father has died.[9]

[1] Cf. nº 88, note 6.
[2] Cf. nº 51, note 18, nº 58, note 4, and nº 64, note 1.
[3] Cf. nº 77, note 10, and nº 81, note 3.
[4] The correspondence between Leibniz and Johann I Bernoulli was published by Marc-Michel Bousquet at Lausanne and Geneva in 1745.
Johann I Bernoulli's *Opera Omnia*, edited by Gabriel Cramer, had been printed by the same publisher in 1742.
For the other publications mentioned here, see nº 80, note 23.
[5] Cf. nº 87, note 10, and nº 88, note 1.
[6] Euler refers to E. 79: cf. nº 87, note 9, and nº 88, note 3.
[7] Euler's notion of continuity (closely linked to the question when an object such as a curve can be considered as "one and the same") is a central feature of his work in analysis: see, e. g., Ferraro 2000.
[8] No such sixth-degree curve with closed reflection paths has been identified in the appendix E. 787 to nº 96 (see nº 96, note 3) or in E. 106, where the algebraic examples described at the end (O. I/27, p. 127–129) are of degree 8.
[9] Paul Euler had died at Riehen near Basel on March 11th, 1745, at the age of 75.

90

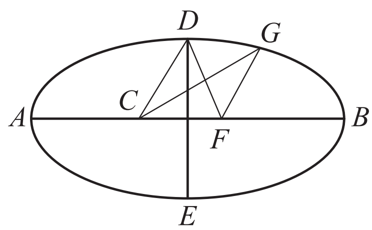
Goldbach to Euler

Petersburg, July 1745

Sir,

I do not really remember whether, when I sent my last letter, I already knew that you had obtained the position of Director of the Mathematical Class in the Royal Academy of Science;[1] in which case I ought to have congratulated you – the pronoun refers both to you, Sir, and to the Academy itself – already then as I now do. I learned of your father's decease only from your last letter,[2] and while regretting the loss you suffered from all my heart, I wish on the other hand that you, Sir, may reach the same high age in good health and entire contentment.

For the solution which you communicated to me[3] I humbly thank you; I do not doubt that this is as short as possible, but all the same it requires a special effort to understand everything correctly. Now notwithstanding that for the solution the consideration of the single point C, from which the rays issue and to which they return after two reflections, is sufficient, yet I think that in all curves of that kind another point besides this, at the same distance from the center, must exist, which has exactly the same property as the point C; consequently, if the problem were conceived in the following manner: "Given two diameters AB and DE of the curve, determine a point C on the axis AB so that all rays issuing from it ...", then I should like to see in what way such a non-elliptic curve should differ from an ellipse. Indeed I very much doubt that a curve whose four quadrants are not similar and equal (as they are in the ellipse) could be suitable as a solution;[4] however, if the curve has this property, one can also examine in the following way, according to your instructions, whether a given equation satisfies the condition:



Let $CD = y$ be an arbitrary ray issuing from the point C and incident on the curve, $DF = y'$ the ray reflected by the curve (towards the axis), $FG = y''$ the ray reflected away from the axis (so that the angles CFD and BFG are equal), and $GC = y'''$ the ray reflected by the curve. Now what is required is that the line CF intercepted on the axis between y and y' be the same as between y'' and y'''.

My books, except for a very few which I also hardly ever read, have been lying about for more than three years[5] nailed down in seven large crates; thus they are more of a burden than a help to me. For this reason I do not ask you for the books which you mention[6] and which I formerly requested, in my present situation (with which, however, I am most satisfied), but just ask you to add to your own writings two copies of La Croze's *Letters* – as far as they have been published – and to send this here when a convenient occasion presents itself;[7] your expenses shall be paid here at once according to your instructions. I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, July [8] (new style), 1745.

Turn over.

PS. Professor Gretsch[9] asked me a long time ago to recommend him most highly to you, Sir.

[1] Euler had been nominated Adjoint Director of the Class of Mathematics of the Berlin Academy in November 1743, deputising for Alphonse des Vignoles who had held this office in the old Brandenburg Society. In the new Academy's official opening session on January 23rd, 1744, Euler took the Director's chair. After des Vignoles' death at the age of 94 in July 1744, Euler seems to have been "promoted" to the directorship without a special decree.
[2] Cf. nº 89, note 9.
[3] Cf. nº 89, note 6.
[4] This is not justified: see Euler's reply nº 91, note 16.
[5] I. e., since May 1742, when Goldbach had moved to Moscow to take up his new post.
[6] Cf. nº 89, note 4.
[7] Cf. nº 91, note 17, and nº 102, note 2.
[8] Here Goldbach left a gap but did not enter the exact date before dispatching the letter.
[9] Johann Ernst Gretsch – another scholar from Königsberg – taught history and ethics at the Petersburg Cadet Corps, where Euler and Goldbach had examined pupils in the 1730s.

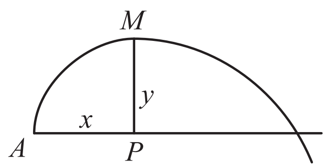
91
Euler to Goldbach
Berlin, August 7th, 1745

Sir,

at this moment I receive the enclosed letter from Göttingen,[1] which I could not send on without some lines to accompany it. Meanwhile you will certainly have received my overdue answer to your last most honoured letter, which I should have had to differ for an overly long time, as I suspected, if I had wanted to wait for Professor Gesner's answer from Göttingen.[2]

For some time now, I have had a little dispute with Professor Nicolaus Bernoulli at Basel about divergent series[3] such as $1-1+2-6+24-120+720-\dots$; indeed he denied that all such series have a determinate sum, whereas I asserted the contrary, since I believe that every series must have a definite value. However, in order to meet all those objections which have been raised against it, this value should not be called a sum, since with this word one commonly associates a notion as if the sum were really determined by a summation, which indeed does not apply to divergent series. Now since any series arises by developing some finite expression, I gave the following new definition of the sum of an arbitrary series: The sum of any series is the value of that finite expression from which the series arises by developing.

Mr. Bernoulli indeed entirely approved of this definition, but still doubted whether the same divergent series might not, in some cases, arise by developing several different finite expressions, so that according to my definition one should have to admit diverse values. He did not, in fact, give any example of this, and I am confident that one and the same series can never arise by developing two finite expressions which are really different. Moreover, one could undeniably deduce from this that every series, whether divergent or convergent, has to have a determinate value or sum. Thus, in order to determine the sum of the series $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \dots$, one has to indicate the value of the formula whose development gives rise to this series.[4] To find this, imagine a curved line that has its abscissa $= x$ and its ordinate $y = \dfrac{1}{1 - \log x}$. Now since $\log 0 = -\infty$ and $\log 1 = 0$, this curve will have such a shape:



and its area $APM = \int y\,dx = \int \dfrac{dx}{1 - \log x}$ will equal

$$xy - 1xy^2 + 2xy^3 - 6xy^4 + 24xy^5 \dots$$

Now by substituting $AP = x = 1$, one also has $y = 1$, and the area APM becomes $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \dots$; therefore the value of this series must be equal to the area APM, which not only is determinate, but also, as the figure makes clear, somewhat greater than $\frac{1}{2}$. I also calculated the same value by diverse methods by which I transformed the series into convergent ones. Now I can in fact prove that this series equals the expression

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{4}{1+\cfrac{5}{1+\cfrac{5}{1+\ \dots}}}}}}}}}}}$$

which not only strongly converges but also indicates ever closer limits between which its value is contained. For if the sum of the series $1-1+2-6+24-120+\ldots$ is called s, one has

$$s < 1,$$
$$s > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},$$
$$s < \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{2}{3},$$
$$s > \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+2}}} = \frac{4}{7}, \text{ etc.}$$

In this way I calculated that one has approximately $s = 0.596\,347\,592\,2$;[5] thus it ought to be investigated whether this value could perhaps be indicated by the quadrature of the circle or by logarithms. In the same way I can also sum the general series

$$s = 1 - ma + m\,(m+n)\,a^2 - m\,(m+n)\,(m+2n)\,a^3 + \ldots,$$

for one has

$$s = \cfrac{1}{1+\cfrac{ma}{1+\cfrac{na}{1+\cfrac{(m+n)\,a}{1+\cfrac{2na}{1+\cfrac{(m+2n)\,a}{1+\cfrac{3na}{1+\cfrac{(m+3n)\,a}{1+\cfrac{4na}{\ldots}}}}}}}}}$$

consequently

$$s < 1,$$
$$s > \frac{1}{1+ma},$$
$$s < \frac{1+na}{1+(m+n)\,a},$$
$$s > \frac{1+(m+2n)\,a}{1+2\,(m+n)\,a+m\,(m+n)\,a^2}, \text{ etc.}$$

You probably have heard enough about the great misfortune that has been averted by the glorious victory near Friedberg from our city, which had been menaced with total destruction by the enemies. We are presently living both in fear and hope, expecting most important developments which should to all appearances shortly manifest themselves. I am, however, firmly confident that everything shall be directed to our best, in the future as well as hitherto, by divine providence.[6] After the prize of 50 ducats which our Academy yearly offers was awarded to Mr. Waitz in Kassel, whose paper about the cause of electricity was judged to be the best,[7] for next year the question that I enclose with this has been proposed.[8] The Paris Academy again withheld the prize for this year and put the proposed question off until 1747, offering a double prize.[9] For next year I am going to compete again on the question of magnetism;[10] this time the prize must absolutely be distributed according to the Academy's statutes.

Notwithstanding that he departed from Paris a long time ago, Mr. Maupertuis has not yet arrived here to take up the Presidency; according to the Dutch journals he is said to have gone directly to Bohemia to join the Royal Army.[11] With this I recommend myself to your constant goodwill; I am honoured to be with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

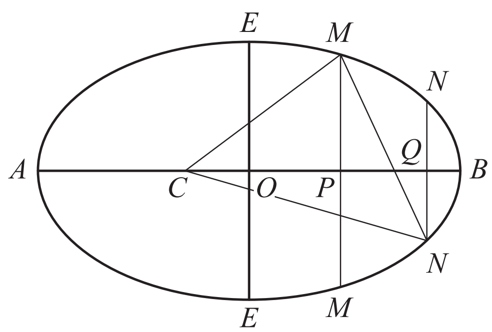
Berlin, Aug. 7th, 1745.

PS.

Just at the moment when I am going to finish this letter, I receive yours of July . . . ;[12] so I convey my most dutiful thanks for your kind condolence on my late father's demise.[13]

I had been made Director of the Mathematical Class still at the old Society, without having been a member beforehand; now I have also been confirmed in this office at the new Academy by His Royal Majesty and annually draw 100 thalers for it. However I never looked upon this matter in such a way that I should have notified any of my friends of it; even in my own house nobody knows about it. Nonetheless I am most humbly obliged to you, Sir, for your congratulation.[14]

I have summarised my solution of the catoptric problem, which I once communicated to you,[15] in a shorter form since then, arranging it in such a way for practical use that not only all curved lines satisfying the condition can easily be distinguished, but also all those which are algebraic can easily be indicated.



You are quite right, Sir, in stating that all these lines necessarily must have some diameter such as AB; however it does not follow that besides this there is another line such as EE which divides the curve into two similar and equal parts.[16] To find all possible curves and express them by general formulae, take for v such a function of u which is transformed into $-v$ if for u one sets $-u$; among functions of this kind one has u, u^3, u^5, u^7, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u^3}$ etc. and those composed of them, as $\alpha u+\beta u^3+\frac{\gamma}{u}+\frac{\delta}{u^3}$ etc. Now once some such function of u has been assumed for v, calculate $p=\frac{dv}{du}$, and from this the curve is determined in the following manner: taking the abscissa to be

$$CP=x=\frac{up^2\left(c^2-u^2\right)}{c\,(a+v)}-\frac{2p\left(c^2-u^2\right)}{c}-\frac{u\,(a+v)}{c},$$

the ordinate will be

$$PM=y=\pm\left(\frac{p^2\left(c^2-u^2\right)}{c\,(a+v)}+\frac{2up}{c}-\frac{a-v}{c}\right)\sqrt{c^2-u^2}.$$

By substituting here $v=u$, the ellipse having a focus at C results. For since $v=u$, one has $p=\frac{dv}{du}=1$,

$$x=-\frac{\left(a^2+c^2\right)\,u-2ac^2}{c\,(a+u)}$$

and

$$y=\frac{\left(c^2-a^2\right)\sqrt{c^2-u^2}}{c\,(a+u)}.$$

By eliminating u one gets

$$a^2\left(x^2+y^2\right)=\left(a^2-c^2-cx\right)^2.$$

On the other hand, by defining $v=\frac{c^2}{u}$ and $c=a$, one has $p=\frac{dv}{du}=-\frac{c^2}{u^2}$; consequently

$$x=\frac{3a^3-a^2u-3au^2-u^3}{u^2}$$

and

$$y=\frac{a^3-a^2u-3au^2-u^3}{u^3}\sqrt{a^2-u^2},$$

from which the shape of the curved line can easily be determined; but if one wanted to eliminate u and look for an equation linking x and y, this should ascend to 12 dimensions if nothing cancels out.

By the way, in the general formulae indicated above it can be seen that the length of the radius CM equals $\frac{p^2\left(c^2-u^2\right)}{a+v}+a+v$, by which the construction is more than a little simplified. Furthermore, once the point M, where the first reflection occurs, has been determined in this manner, in order to find the other reflection point N one just has to substitute $-u$ for u, since by this v is changed into $-v$, while p keeps its former value. Indeed one has

$$CQ = -\frac{up^2\left(c^2-u^2\right)}{c\,(a-v)} - \frac{2p\left(c^2-u^2\right)}{c} - \frac{u\,(a-v)}{c}$$

and

$$QN = \pm\left(\frac{p^2\left(c^2-u^2\right)}{c\,(a-v)} - \frac{2up}{c} - \frac{a+v}{c}\right)\sqrt{c^2-u^2};$$

$$CN = \frac{p^2\left(c^2-u^2\right)}{a-v} + a - v.$$

To conclude, I shall not miss the first good opportunity to present my modest writings to you, adding two copies of La Croze's *Letters*,[17] of which only one part has yet appeared to my knowledge. Meanwhile I wish that your present situation – however satisfying – may change in such a way that for your even greater pleasure, Sir, your library also may not be a burden to you any more, being nailed down.[18]

Please give my compliment also to Professor Gretsch.[19] The chair of Public Law at Halle, for which I proposed Prof. Gretsch a long time ago, is still vacant; but as my ignorance of that subject is universally known, I very much doubt my recommendation will be considered as it should be in Mathematics. However I should wish to be able to show around here something by Mr. Gretsch.

[1] As Goldbach's reply (nº 92, note 8) shows, Euler is enclosing Gesner's reply to the letter sent in May (cf. nº 88, note 6).

[2] Cf. nº 89, note 1.

[3] Indeed this is a main topic of the letters exchanged between Nicolaus I Bernoulli and Euler in 1743–45 (cf. O. IVA/2, p. 579–643); Bernoulli's insistent queries led Euler gradually towards clearer and more explicit statements on the way he conceived divergent series and their "sums" (see in particular *op. cit.*, p. 589–590, 604–606).
Euler published his methods for summing divergent series in E. 247 (which was presented to the Berlin Academy in October 1746), and in *Institutiones* (E. 212), Pars II, Cap. I, § 10.
Later various mathematicians (Abel and Cesàro, among others) studied summation methods that attached finite values to such series: see the studies by Knopp (1923), Dutka (1996) and Ferraro (2008).
Towards the end of the 19th century the use of diverging series became "anathema" for most mathematicians; Weierstraß' ideas penetrated the foundations of analysis and left no room for these objects. In the first half of the 20th century, mathematicians such as Émile Borel (1928) and G.H. Hardy (1949) revived the subject.
The problem of dealing with infinite objects is nowadays more important than ever: in recent formulations of quantum mechanics, one has to make sense of infinite integrals, and "renormalisation" techniques have been invented for assigning finite values to such divergent integrals (for a first introduction to the mathematical methods involved in this, see Tao 2010).

[4] In E. 247, Euler starts with the observation that the formal power series

$$y = x - x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 24x^5 - \dots$$

satisfies the differential equation $y' + \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}$. Substituting $x = 1$ leads to the integral $s = \int_0^1 \frac{dx}{1 - \log x}$, which he starts with in this letter. Euler then transforms the series $s = \sum(-1)^n n!\, x^n$ into a continued fraction $s = \frac{1}{1+}\frac{x}{1+}\frac{2x}{1+}\frac{2x}{1+}\frac{3x}{1+}\frac{3x}{1+}\ldots$, which he then evaluates. The same problem is also discussed in E. 616. See Barbeau / Leah 1976.

[5] This value, which is also indicated in the *Institutiones* (*loc. cit. supra* note 3), is correct only to 6 digits; in E. 247 (*op. cit. supra* note 3), Euler gives 13 digits, of which 9 are correct.

[6] On June 4th, 1745, the Prussian army had decisively defeated the Austrians at Hohenfriedberg near Striegau (now Dobromierz) in central Silesia, foiling their attempt to recapture Silesia and possibly march on Berlin. However Euler's hopes for a quick, victorious ending to the war were not to be realised: it took several more battles to achieve a – provisional – peace treaty, which was signed at Dresden on December 25th.

[7] Jacob Sigismund Waitz, a Finance and Mining Councillor at Kassel, had been awarded the first prize of the Berlin Academy (cf. n° 80, note 28) on May 31st, 1745, for his *Abhandlung von der Electricität und deren Ursachen*.

[8] The enclosure – the "program" proposing the theory of winds as the prize question of the Berlin Academy for 1746 – has not been preserved.

[9] Euler finally won half of the doubled prize of the Académie des Sciences in 1747 with his paper E. 150 on the determination of time at sea: cf. n° 115, note 14.

[10] Cf. n° 52, note 11, and n° 83, note 4.

[11] No report of Maupertuis' journey to Prussia in the *Gazette d'Amsterdam* or another Dutch journal could be identified. However, Maupertuis had left Paris only in mid-July and arrived in Prussia, by way of Hamburg, not long after the present letter was written: King Frederick acknowledged Maupertuis' arrival in Berlin in a letter he sent on September 4th from his military camp in Bohemia (cf. Koser 1898, p. 188–196). On October 28th (not, as is sometimes stated, in August) 1745, Maupertuis got married in Berlin to Eleonore von Borcke, the daughter of a Prussian general who was related to several of Frederick's leading statesmen.

[12] Goldbach's letter did indeed not give the precise date (cf. n° 90, note 8).

[13] Cf. n° 90, note 2.

[14] Cf. n° 90, note 1.

[15] Cf. n° 89, note 6.

[16] Cf. n° 90, note 4.

[17] Cf. n° 90, note 7.

[18] Cf. n° 90, note 5.

[19] Cf. n° 90, note 9.

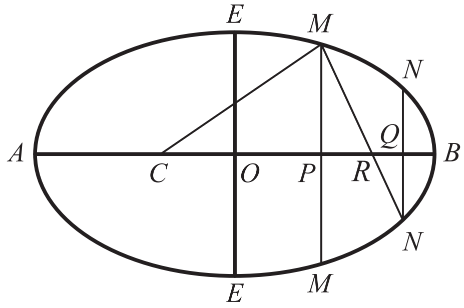
92

Goldbach to Euler

Petersburg, September (14th) 25th, 1745[1]

Sir,

at first I have to give you on behalf of Professor Gretsch his most dutiful thanks for your favourable disposition towards him and at the same time to report that, for the time being, he does not contemplate a foreign appointment, as he is satisfied with his circumstances, which are daily improving.[2]



If[3] in the adjoining figure I express the line CR, which is intercepted on the diameter by the incident and the reflected ray, according to your formulae, Sir, in the ellipse this will be constant, whereas in the other curves it will always have such bounds that, if CO is the abscissa corresponding to the maximal ordinate OE, the intercept $CR = 2CO$ is comprised between these two bounds; indeed this intercept may generally be determined with ease by the equation $CR = \dfrac{CP \cdot NQ + MP \cdot CQ}{MP + NQ}$, but in the application to your formulae, Sir, this appears to become somewhat cumbersome.[4]

I entirely agree with your statements about divergent series, Sir.[5] As far as I can remember, this kind of series has been rejected by some mathematicians as resulting from a preposterous division; however, quite apart from the fact that they can be formed, if one pleases, without any division, their sums also can be determined in diverse manners by transforming these series of terms with alternating signs into series consisting merely of positive terms. I do not recall whether in the Petersburg *Commentarii* a method has perchance already been mentioned which consists in the following:[6] The series

$$A\colon\ \alpha - \beta + \gamma - \delta + \ldots$$

being given, make its single terms equal to the single terms of the series

$$B\colon a - \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}(c - 2b + a) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}(d - 3c + 3b - a) + \ldots,$$

i. e., $a = \alpha$, $b = \alpha + 2\beta$, $c = \dfrac{3\alpha + 12\beta + 8\gamma}{1\cdot 3}$; then series A will be equal to the term corresponding to the exponent $\frac{1}{2}$ in the series

$$C\colon a + b + c + d + \ldots;$$

taking the reciprocals of the terms of series C, one gets the series

$$D\colon \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots;$$

then the term which corresponds to the index $\frac{1}{2}$ in series D equals the series

$$E\colon \frac{1}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{c} - \frac{2}{b} + \frac{1}{a}\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{d} - \frac{3}{c} + \frac{3}{b} - \frac{1}{a}\right) + \ldots;$$

therefore if now the sum of series E is defined to be p, I say that the sum of series A equals $\frac{1}{p}$; so it follows that the sum of the series $2-6+24-120+\dots$ equals $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{14}+\frac{29}{210}+\dots}$.

On the other hand, the series $2-6+24-120+\dots$ also equals this one: $1-2+9-48+300-2160+\dots$, in which all terms, if considered to be positive, have the following law of progression: Let the index of some term be $n-2$, the term corresponding to that index A, the sum of all terms up to A (excluding A) S; then the subsequent term will be $B=nA+S$. If, e.g., given the third term 9 one seeks the fourth, the index of the given term will be $n-2=3$, so $n=5$, and the sum of all preceding terms $1+2=3=S$, therefore the fourth term equals $nA+S=5\cdot 9+3=48$. By the previous method, the sum of this series is expressed by $\dfrac{1}{1+\frac{2}{3}+\frac{13}{55}+\dots}$, where the first three terms go much further than in the sum stated above, notwithstanding that both sums must be equal.[7]

I most humbly thank you, Sir, for forwarding Prof. Gesner's letter.[8] I belatedly thought of another possibility: in future I shall be able to send my letters to him postage-free nearly all the way to Göttingen, namely as far as Duderstadt; therefore I only ask you to accept such letters as he might address to you, Sir, and to forward them to me at your convenience, since there is no risk at all in delay.

Your mention of Mr. Maupertuis,[9] Sir, makes me recall that letter about which it was remarked to you nearly five years ago that "nothing more gracious could be imagined"; in fact the person who really drafted this is very well known to me.[10] I remain with particular respect, Sir, your

most devoted servant Goldbach.

[1] In the original letter (and in the 1965 edition), neither the place where it was written nor the date were indicated. They are, however, supplied by the heading of Goldbach's copy: "1745. *Ex litteris ad Cl*[*arissimum*] *Eulerum Petropoli Berolinum* 25. *Sept.*" ("1745. From the letter to Mr. Euler from Petersburg to Berlin on Sept. 25th."). Fuß apparently knew about this copy: in his edition the letter is presented with the heading "*Sans date* (St. Petersburg d. 25. Sept. 1745.)"; and on the original letter at Petersburg, some 19th-century hand – it may well have been Fuß's – noted: "Nach 1741, weil Euler schon in Berlin ist. Antwort auf den Brief Eulers vom 7. Aug. 1745. 25. September 1745." ("After 1741, since Euler is already at Berlin. Reply to Euler's letter of Aug. 7th, 1745. September 25th, 1745.").

[2] Cf. n° 90, note 9, and n° 91, note 19.

[3] The text of Goldbach's copy starts here.

[4] Here Euler noted betweeen the lines, preparing his reply (cf. n° 93, note 5): "*Ex formulis meis fit* $CR=\dfrac{2c\,dv}{du}$." ("From my formulae, one gets $CR=\dfrac{2c\,dv}{du}$.").

[5] Cf. n° 91, notes 3 and 4.

[6] Goldbach's oblique reference may well be to his own paper *De terminis generalibus serierum*, his most substantial mathematical publication. In this paper, which was printed in 1732 in t. III of the *Commentarii*, similar transformations are applied to the summation of divergent series.

[7] The text of Goldbach's copy ends here.

[8] Cf. nº 88, note 6, and nº 91, note 1.
[9] Cf. nº 91, note 11.
[10] Euler did not understand this allusion at first: cf. nº 93, note 9, nº 94, note 7, and nº 97, note 11.

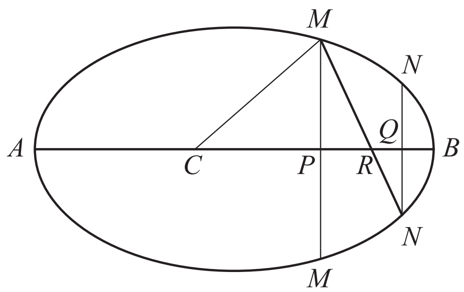
93
Euler to Goldbach
Berlin, October 23rd, 1745

Sir,

in your last letter you forgot to insert the date,[1] so I do not really know for how long I left it unanswered. In fact, as I finally compiled the new *Astronomical Tables for the Sun and the Moon*,[2] I have now been so busy with calculations for some time that I could not think of writing letters. Presently I have finished; but when I get the report and the observations of the Paris astronomers about it, presumably something will still have to be changed here and there.

A considerable time ago I sent a small package of books for you to Mr. Hainchelin at Petersburg,[3] which perhaps may already have arrived. Please be so kind as to enquire about it: besides the papers of mine, which I have the honour to present to you most obediently, there are the two volumes of La Croze's correspondence.[4] They cost only 20 groats, a sum which I dare say is much to small to bother Mr. Hainchelin about receiving.

By my formulae for the curves which reflect the rays issuing from a focus back to the same place, the line CR is expressed in a very easy and concise manner, even if the calculation needed to determine it turns out to be rather lengthy, as you noticed, Sir.[5]



For if v denotes such a function of u which goes over to its negative $-v$ if $-u$ is substituted for $+u$, one has

$$CP = \frac{u\,(a+v)}{c} + \frac{2\,dv\,\left(c^2-u^2\right)}{c\,du} - \frac{u\,dv^2\left(c^2-u^2\right)}{c\,du^2\,(a+v)},$$

$$PM = \left(\frac{dv^2\left(c^2-u^2\right)}{du^2\,(a+v)} + \frac{2u\,dv}{du} - a - v\right)\frac{\sqrt{c^2-u^2}}{c},$$

and for the point N

$$\begin{aligned} CQ &= -\frac{u\,(a-v)}{c}+\frac{2\,dv\,\left(c^2-u^2\right)}{c\,du}+\frac{u\,dv^2\left(c^2-u^2\right)}{c\,du^2\,(a-v)}, \\ QN &= \left(\frac{dv^2\left(c^2-u^2\right)}{du^2\,(a-v)}-\frac{2u\,dv}{du}-a+v\right)\frac{\sqrt{c^2-u^2}}{c}. \end{aligned}$$

Now by substituting these expressions in the equation $CR=\dfrac{CP\cdot NQ+MP\cdot CQ}{MP+NQ}$ one finds $CR=\dfrac{2c\,dv}{du}$, and from this it is evident that this line is constant in no other case than for $v=\alpha u$, which yields the ellipse. However one cannot in general determine where the maximal ordinate lies, and neither can a relation between its position and the intercept CR be discovered.

I already knew about your most ingenious method, Sir, for transforming all divergent series into convergent ones[6] by which you demonstrated that for

$$\begin{aligned} s=a \quad &+ \quad n\,(b-a)+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\,(c-2b+a) \\ &+ \quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,(d-3c+3b-a)+\ldots \end{aligned}$$

one has

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}=\frac{1}{a} \quad &+ \quad n\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)+\frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{c}-\frac{2}{b}+\frac{1}{a}\right) \\ &+ \quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{d}-\frac{3}{c}+\frac{3}{b}-\frac{1}{a}\right)+\ldots; \end{aligned}$$

indeed this shows quite clearly that no series can be so divergent that its sum could not always be expressed by a convergent series. However, those who do not want to admit preposterous division will also object here against the supposition that one ultimately arrives at constant or vanishing differences; but all such objections are easily done away with by the definition of the sum of an arbitrary series which I recently stated. For the series $1-1+2-6+24-120+\ldots$ one can indeed quickly determine by this method a value close to the true one, but I think it would be very difficult to calculate the value of the sum in this way even to a accuracy of just $\frac{1}{1000}$; for although at first the terms of the converted series are positive, yet soon negative terms also appear, and subsequently the terms do not sensibly decrease any more. However in the manner described in my last letter[7] one has the approximation in one's power and may calculate the sum in decimal fractions to as great an accuracy as one wishes.

Next Thursday Mr. de Maupertuis is going to get married, and after His Royal Majesty's return he will take up his presidency.[8] About the expression "nothing more gracious could be imagined", I do not remember anything but that

Mr. Bernoulli quoted it when he reported to me how graciously His Majesty Our King had written to Mr. de Maupertuis.[9]

I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

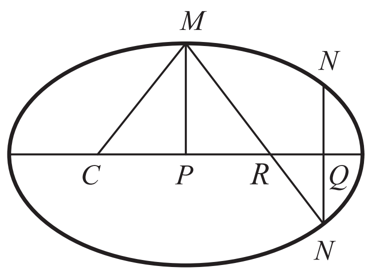
Berlin, Oct. 23rd, 1745.

[1] Cf. n° 92, note 1.
[2] Euler refers to the tables that were shortly to be published in E. 76 and E. 87 (cf. Verdun 2011).
[3] Cf. n° 94, note 6, and n° 98, note 2.
[4] Cf. n° 90, note 7, n° 91, note 17, as well as n° 100, note 5.
[5] Cf. n° 91, note 15, and n° 92, note 4.
[6] Cf. n° 92, note 6.
[7] Cf. n° 91, note 4.
[8] Cf. n° 91, note 11.
[9] Cf. n° 92, note 10.
None of the letters Frederick wrote to Maupertuis is mentioned in the extant letters Euler received from the Bernoullis around that time. However, Maupertuis had visited Basel in the autumn of 1744 and frequently corresponded with Johann II Bernoulli; thus it is quite plausible that one of his Basel correspondents could indeed have told Euler about Frederick's exuberant compliments for the designated president of his Academy.
On the "quote" from an earlier letter by Daniel Bernoulli, which does not refer to King Frederick's but to Count Ostermann's patronage of Maupertuis, see also n° 94, note 7, and n° 97, note 11.

94
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 29th) November 9th, 1745

Sir,

I received your letter of Oct. 23rd very early, namely on Nov. 4th.



From the intercept CR, which you found to equal $\frac{2c\,dv}{du}$, the maximal ordinate can be determined without any difficulty by setting $CP = \frac{CR}{2}$ and substituting the value of u expressed by a and c into the formula PM; here it is remarkable that the quantity u which results by setting the differential of PM equal to 0 must have the same value which it gets from the equation $CP = \frac{CR}{2}$. Similarly, if one were to determine the ray MR which is reflected perpendicularly towards the axis, the quantity u should have to have the same value in these three equations $CP = CR$, $PM = QN$, and $CP = CQ$ (since here the points P, Q and R coincide). In the case where $v = u^3$, I find by the equation $PM = \frac{CR}{2}$ that $2u^3 - 3c^2u - a = 0$, and in this same case where $v = u^3$, I find for the ray which is reflected perpendicularly to the axis by the equation $CP = CR$ that $u = \left(\frac{a + 3c}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$; this value of u must therefore also result from the other two equations $PM = QN$ and $CP = CQ$, but I prefer to believe this than to make sure by checking. I should get a better idea of this kind of curves if you could tell me, Sir, by what lines the constant quantities a and c and the variable u, separately considered, are expressed in the curve. Meanwhile[1] I can prove that the curve becomes contradictory in all cases where v denotes such a function of u that $\frac{dv}{a+v}$ becomes greater than $\frac{du}{c^2+u}$.

Since there is no doubt that in the number $\frac{31\,415\ldots}{10\,000\ldots}$ which expresses the circumference of the circle when the diameter 1 is given, every digit takes its places in the numerator according to a certain order, albeit a very difficult and not at all obvious one, and since a great part of this difficulty arises from the alternating of ten different digits, one could at least alleviate this last difficulty very much by setting the circumference equal to

$$m + \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + \frac{c}{1000} + \frac{d}{10\,000} + \ldots$$

where m, if one pleases, can be assumed such that $\mathit{circumference} - m < \frac{1}{9}$, but thereafter each of the numerators a, b, c, etc. is either 0 or 1, which is always possible.[2] Now if the series where the numerators are all either 0 or 1 has been continued in this way to a certain number of terms, it could be tried out whether or not some definite order might show among these 0s and 1s. Indeed it is not to be supposed that a periodic order of the digits should result, since then the entire number should have to be rational; but nonetheless there can be non-periodic progressions which keep to an evident order, as

$$0 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + \ldots$$

and innumerable others; now if in the present case an order varying according to some definite law should be discovered, I should say that the quadrature of the circle in decimal numbers had been determined even better[3] than it is possible to determine $\sqrt{2}$ by the customary way to extract roots; one could also express $\sqrt{2}$

as $\frac{a}{1}+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}+\frac{d}{8}+\ldots$ in such a way that a, b, c, etc. should always become 0 or 1, and here I should almost believe that some order would soon show up.[4]

The following series seems to merit some attention:[5]

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 &+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 2^2}\cdot\frac{1}{6}\pi^4+\frac{1}{1\cdot 2\cdots 6\cdot 7\cdot 2^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^6 \\ &+ \frac{1}{1\cdot 2\cdots 8\cdot 9\cdot 2^6}\cdot\frac{5}{6}\pi^8+\frac{1}{1\cdot 2\cdots 10\cdot 11\cdot 2^8}\cdot\frac{691}{210}\pi^{10}+\ldots \\ &= 4-\pi. \end{aligned}$$

I humbly thank you for the package you sent me.[6] I shall try to track down Mr. Hainchelin, who is yet entirely unknown to me, and to repay in a convenient way what he spent.

I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Nov. 9th, 1745.

PS. The letter to Mr. Maupertuis[7] was not written from Berlin, but from Petersburg, some time before you, Sir, left here.

[1] In his copy, Goldbach crossed this sentence out and noted in the margin: "*vid. p.* 69", referring to the postscript n° 95.

[2] As Euler points out in his reply (cf. n° 96, note 4), this makes sense only if the number m can be described independently by some algebraic expression while the digits a, b, c, ... are also generated in an algorithmic manner.

[3] This word is missing in the original as the tearing of the seal left a hole in the paper; however, the word could be filled in from Goldbach's copy.

[4] Here Euler noted between the lines of the original letter, preparing his reply (cf. n° 96, note 7):

$$\sqrt{2}=1.011\,010\,100\,000\,100\,111\,100\,110\,011\,001\,111\,110\,01$$

In his copy, Goldbach struck all the preceding paragraph out and noted in the margin: "*vid. p.* 70", referring to n° 97.

[5] There are several mistakes in Goldbach's formula; the series in question should be

$$\begin{aligned} 4-\pi &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(2k)!\cdot 2^{2k-2}}B_{2k}\pi^{2k} \\ &= \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\pi^2+\frac{1}{5!\,2^2}\cdot\frac{1}{6}\pi^4+\frac{1}{7!\,2^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^6+\frac{1}{9!\,2^6}\cdot\frac{3}{10}\pi^8 \\ &\quad+\frac{1}{11!\,2^8}\cdot\frac{5}{6}\pi^{10}+\frac{1}{13!\,2^{10}}\cdot\frac{691}{210}\pi^{12}+\ldots \end{aligned}$$

In his reply (cf. n° 96, note 9), Euler gives a formula equivalent to

$$1-\frac{\pi}{2n}\cot\frac{\pi}{2n}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(2k)!\cdot n^{2k}}B_{2k}\pi^{2k};$$

setting $n=2$ and multiplying through by 4 gives Goldbach's series. This formula can also be written as

$$1-\frac{\pi}{2n}\cot\frac{\pi}{2n}=\sum_{k=1}^{\infty}2^{1-4k}n^{-2k}\zeta(2k),$$

which Euler states in *Institutiones* (E. 212, Pars II, § 125: O. I/10, p. 323–324) in the following form (where u is set to be $\frac{1}{2n}$ and the formula is divided by $2u^2$):

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}u^2 + \mathfrak{c}u^4 + \mathfrak{d}u^6 + \mathfrak{e}u^8 + \mathfrak{f}u^{10} + \ldots = \frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} \cot \pi u,$$

where $\mathfrak{a} = \zeta(2)$, $\mathfrak{b} = \zeta(4)$, $\mathfrak{c} = \zeta(6)$ etc.

[6] Cf. n° 93, note 3.

[7] Cf. n° 92, note 10, and n° 93, note 9.

95
Goldbach to Euler
[Petersburg], November (1st) 12th, 1745

I am obliged to add the present postscript by a mistake that crept into my last letter,[1] where I wrote c^2 instead of c and where it ought to read: the curve always becomes inconsistent if $\dfrac{dv}{a+v} > \dfrac{du}{c+u}$. You will at once understand the reason for this, Sir, since CR cannot be greater than $CM + MR$. Hopefully the rest of what I wrote there will be correct.

Nov. 12th (n. st.), 1745.

[1] Cf. n° 94, note 1.

96
Euler to Goldbach
Berlin, November 30th, 1745

Sir,

some time ago a rumour circulated here according to which you have been elevated to the rank of Baron by the Court of Saxony.[1] However, since you do not make any mention of this yourself, Sir, I should not dare to trust this news; meanwhile I asked Dr. Gmelin[2] to most humbly congratulate you on my behalf in case the rumour were as well-founded as I should wish it to be.

I take the liberty, Sir, to send you hereby my solution of the catoptric problem;[3] its analysis will sufficiently explain all circumstances.

Your proposal, Sir, of exhibiting the expression 3.141 592 653 5 ... in a convenient way,[4] so that at the same time the law of progression becomes evident, amounts to discovering some known number m all of whose digits, continued to infinity, are either equal to the above or smaller just by 1; for in this manner the remainder $\pi - m$ should be expressed by a decimal fraction whose digits should all be either 0 or 1. However I do not yet see any method by which one could even just arrive at discovering the proposed number m. I should therefore rather take the difference $\pi - m$ as known, as for example $\pi - m = 0.01\,001\,0001\,00001\ldots$; this yields $m = 3.131\,582\,652\,589\,78$, and now one should have to discern whether this number could be expressed by a finite irrational expression.

I recall having once reported to you[5] a certain easy operation by which one gets numbers whose value can perhaps in no way be expressed in finite terms. I indeed proceed as in ordinary division, only increasing the divisor by 1 for every operation, as can be seen from the following example:

1) 100 000 000 000 000 000 000 (0 464 782 743 907 639
$\underline{0}$
2) 10
$\underline{8}$
3) 20
$\underline{18}$
4) 20
$\underline{16}$
5) 40
$\underline{35}$
6) 50
$\underline{48}$
7) 20
$\underline{14}$
8) 60
$\underline{56}$
9) 40
$\underline{36}$
10) 40
$\underline{30}$
11) 100
$\underline{99}$
12) 10
$\underline{0}$
13) 100
$\underline{91}$
14) 90
$\underline{84}$
15) 60
$\underline{45}$
16) 150
...

Now if this number $0.464\,782\,743\,907\,639\ldots$ were in some known ratio to the circumference of the circle, I should think the circumference to be as good as discovered, since it could be calculated with ease to as many digits as one ever wishes. Moreover, one can vary this method in infinitely many ways and change the divisors as one pleases.

The expression for $\sqrt{2}$ according to dyadic arithmetic is determined in the following way: Since $\sqrt{2} = 1.414\,213\,562\,36$, operate by continually duplicating (to the right of the vertical line), like this:[6]

$$\begin{array}{c|c}
1 & 41\,421\,356\,236 \\
0 & 82\,842\,712\,472 \\
1 & 65\,685\,424\,944 \\
1 & 31\,370\,849\,888 \\
0 & 62\,741\,699\,776 \\
1 & 25\,483\,399\,552 \\
0 & 50\,966\,799\,104 \\
1 & 01\,933\,598\,208 \\
0 & 03\,867\,196\,416 \\
0 & 07\,734\,392\,832 \\
0 & 15\,468\,785\,664 \\
 & \text{etc.}
\end{array}$$

The numbers 0 and 1 which result to the left of the vertical line indicate the dyadic fraction that was asked for, namely

$$\sqrt{2} = 1.011\,010\,100\,000\,100\,111\,100\,110\,011\,001\,111\,110\,01;$$

however there is no law to be perceived in it.[7]

The series which you wrote about,[8] Sir, is indeed most remarkable. It can be expressed more generally as follows: Let the tangent of the angle $\frac{1}{n}\,90°$ be denoted by t, then one has

$$\begin{aligned}
1 - \frac{\pi}{2nt} \quad = \quad & \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\,n^2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdots 5\,n^4}\cdot\frac{1}{6}\pi^4 + \frac{1}{1\cdots 7\,n^6}\cdot\frac{1}{6}\pi^6 \\
& + \frac{1}{1\cdots 9\,n^8}\cdot\frac{3}{10}\pi^8 + \ldots;
\end{aligned}$$

now by setting $n = 2$, your series, Sir, results.

With regard to the letter concerning Mr. de Maupertuis which you mentioned,[9] I do not clearly recall anything. I asked Mr. de Maupertuis himself about it; however, he not only could give me no explanation, but also asked me urgently to ask you for a clearer explication, Sir, and to convey his most devoted compliment to you.

Mr. Hainchelin has taken over Mr. Kühn's business at Petersburg;[10] he will not fail to get in touch with you, Sir, as soon as the books in question arrive.

For some considerable time now, people here have been in such a state of confusion and fear that very many withdrew from here. The assault that the Queen of Hungary and Saxony had plotted against us was so cruel that nobody could approve it. However our most glorious Monarch so completely destroyed this plot that by the grace of God we can now be relieved from the malice of our cruel enemies.[11]

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I have the honour of remaining with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Nov. 30th, 1745.

[1] Cf. nº 97, note 12.

[2] Euler's letter to J.G. Gmelin – then professor of natural history at the Petersburg Academy – has not been preserved.

[3] The enclosure mentioned here, which bears the title *Solutio Problematis In Actis Lips. M. ... A. 1745 propositi*, is a detailed sketch in Latin (4 fols., 5 figures) of Euler's paper E. 106 on "bireflectional" curves (finally published in 1748 in *Nova Acta Eruditorum*). This enclosure has been preserved along with the letter (RGADA, f. 181, n. 1413, č. IV, fol. 139–142v) and published both in the Fuß and the Yushkevich-Winter editions (*Correspondance* (1843), t. I, p. 341–354; *Euler-Goldbach* (1965), p. 230–237). In Eneström's catalogue of Euler's works, this early version is listed as entry E. 787; however, the editor of Euler's papers on geometrical subjects, Andreas Speiser, decided not to reprint it in O. I/29.
Since an accessible and basically reliable version of the text of Euler's enclosure is available in print, the present editors have also decided not to republish it. However, an edition and analysis in the context of the published solutions to Euler's challenge (Oechlitz 1746, 1747; E. 106) and of the Euler-Oechlitz correspondence, which is still unpublished, would be desirable.

[4] Cf. nº 94, note 2.

[5] Cf. nº 66, note 9.

[6] Cf. nº 94, note 4.

[7] R.L. Graham and H.O. Pollak (1970) have found the following pattern in the binary expansion of $\sqrt{2}$: Let $a_0 = 2$, $a_{n+1} = \lfloor\sqrt{2a_n(a_n+1)}\rfloor$ and $b_n = a_{2n+1} - 2a_{2n-1}$; then $b_n \in \{0, 1\}$, and we can define $\alpha = (1.b_1b_2b_3\ldots)_2$ as the binary expansion of some number α. It turns out that $\alpha = \sqrt{2}$.

[8] Cf. nº 94, note 5.

[9] Cf. nº 92, note 10, nº 93, note 9, and nº 94, note 7.

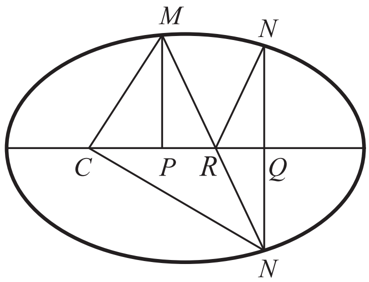
[10] Cf. nº 93, note 3.

[11] At the time this letter was written, the second Silesian war was not yet quite over, but after the Prussian victories at Hohenfriedberg on June 4th (cf. nº 91, note 6) and at Soor on September 30th, the Austrian armies' plans to push forward to Berlin had been thwarted. Cf. nº 98, note 9.

97
Goldbach to Euler
Petersburg, December (17th) 28th, 1745

Sir,

I convey to you my due thanks for the detailed solution of the problem proposed in the Leipzig *Acta* which you sent me.[1]



Even before this arrived, I had already observed by myself that[2]

$$CM + MR = 2\,(a+v) - \frac{2u\,dv}{du} \qquad \textit{and} \qquad CN + NR = 2\,(a-v) + \frac{2u\,dv}{du}$$

(from which it follows that the three sides of the triangle satisfy the relation $CM + MN + NC = 4a$), and that $MR = \dfrac{c\,PM}{\sqrt{c^2 - u^2}}$; consequently MR equals PM only in the one case where $u = 0$, although it is generally true that MR becomes perpendicular to the axis whenever $y = \dfrac{4a^2 - x^2}{4a}$ (where no value for x is presupposed). I also did not find that you determined the case where the intercept CR becomes a maximum. The solution itself shall be returned when you ask for it, Sir.

My remark about expressing the number 31415 ... by 0s and 1s is indeed incorrect;[3] it ought to be understood as referring only to dyadic arithmetic, but to all appearances this also should be a futile attempt.

Even if no order is evident in the number that represents $\sqrt{2}$ in dyadic arithmetic,[4] one has to bear in mind that a number constituted by some non-periodic law can be disguised by adding another, periodic number in such a way that no law will easily be detected in it.

You already communicated to me in the past, Sir, the method to calculate a non-periodic quotient by constantly increasing divisors;[5] however, if the final aim is merely to determine numbers which are non-periodic in some definite way, I think this method is somewhat involved.

In order to state that somebody has discovered the quadrature of the circle by numbers, in my opinion one should have to determine first of all the degree of facility with which this number can be expressed by the inventor; for as long as such a determination is lacking, one could just actually add Leibniz's or some other series, and I believe that, according to this supposition, the discovery of the quadrature of the circle could not in fairness be denied to the person who should be able to produce the number 31415 ... as easily as one determines $\sqrt{2}$ by actually extracting the square root.

The series contained in my last letter was apparently already known to you beforehand, Sir.[6] If x denotes the index of the terms, one has, setting the general term to be $xa^{\pm x}$, the general sum[7]

$$\frac{a}{(a-1)^2}\left(xa^{\pm(x+1)}-(x+1)\;a^{\pm x}+1\right);$$

however, there is nothing new here except the arrangement of the summing formula.[8]

Please convey my humblest congratulations to Mr. de Maupertuis on his new position,[9] about which I learnt with particular pleasure from the journals; I wish from all my heart that the respect which the King has for his merits may yet lead to great advantages for the enhancement of science.

Please recommend me most dutifully to Mrs. Euler and to all your family; I remain with the greatest respect, Sir, your most devoted servant

Goldbach.

St. Petersburg, Dec. 28th, 1745.

Turn over.

PS.[10] The letter was addressed to Mr. Maupertuis by the former Grand Admiral at a time when you were still at Petersburg, Sir.[11]

The rumour you mention is unfounded; however it may have been occasioned by a diploma (dated as long ago as August 23rd) which contains a renewed confirmation of my nobility and was issued to me without my intervention and free of expense.[12]

[1] Cf. nº 96, note 3.
[2] The figure to which these letters refer is missing in Goldbach's copy, but the notation is the same as in his previous letter nº 94.
[3] Cf. nº 94, note 2, and nº 96, note 4.
[4] Cf. nº 94, note 4, and nº 96, note 7.
[5] Cf. nº 96, note 5.
[6] Cf. nº 94, note 5, and nº 96, note 8.
[7] On the sign that has been rendered by $\pm$ in the original text of the formula that follows, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.
In Goldbach's copy, the formula reads $\frac{a}{(a-1)^2}\left(xa^{\pm(x+1)}-(x+1)\,a^{\pm x}+1\right)$.
[8] The text of Goldbach's copy ends here.
[9] Cf. nº 91, note 11, and nº 93, note 8.
[10] The piece of paper that contains this postscript (fol. 97) has been preserved along with nº 94; however, both statements reply to questions Euler posed in nº 96.

[11] Cf. nº 92, note 10, and nº 96, note 9.
On May 16th, 1739, Daniel Bernoulli had written from Basel to Euler at Petersburg: "An unserem H. Graffen von Osterman haben die Gelehrten einen wahren Maecenaten: Ich habe desselben brieff, so Seine Excellenz an den H. de Maupertuis geschrieben, gelesen. Man kan nichts gnädigers erdencken." ("The scholars have a true patron in the person of our Count von Ostermann: I have read the letter that His Excellency wrote to Mr. de Maupertuis [on his reception to the Petersburg Academy]. Nothing more gracious can be imagined.": R 127, to be edited in O. IVA/3). The obliquity of Goldbach's reference in nº 92 to the letter quoted by Bernoulli – which he may well have drafted himself – is explained by the fact that Ostermann, who had indeed borne the title of Grand Admiral, had fallen from grace and been banished to Siberia in 1741.

[12] Cf. nº 96, note 1.
According to the Yushkevich-Kopelevich biography of Goldbach, p. 86–87, such a diploma was indeed issued in December 1745 by the acting Elector of Saxony, King August III of Poland. However, the origins of Goldbach's rank as a member of the Imperial nobility are not clear: his ancestors in Prussia do not appear to have had a claim to be related to the homonymous baronial family in Saxony (cf. nº 102, note 11).

98

Euler to Goldbach

Berlin, January 25th, 1746

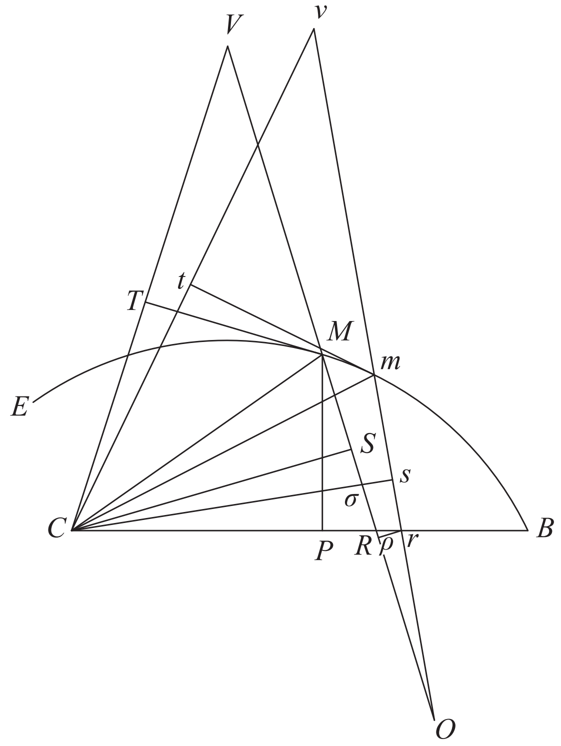
Sir,

as I cordially wish you all well-being at the beginning of this year, I likewise congratulate you on the renewal of your nobility which you were so graciously granted,[1] recommending myself and all my family to your enduring goodwill and favour.

From your silence about the books I sent you, Sir, I conclude that they have not yet arrived; I shall therefore enquire here from Mr. Hainchelin where they might have been left behind on the way.[2]

The solution of my catoptric problem which I had the honour to send to you, Sir,[3] has been copied here beforehand. However, since that time I discovered another, much shorter solution, in which all the awkwardness present in the former is unnecessary.

In the adjoined figure,[4] where C is the radiant point and EMB an arbitrary reflecting curve, which reflects the rays CM and Cm to MO and mO, if the curve EMB is given, for any point M the corresponding intercept CR[5] on the axis CB and the angle CRM can be determined. Now I reverse the question and try to determine the curve EMB, an arbitrary equation linking the line CR and the angle CRM being given; for once this problem has been resolved, it is then very easy to solve the main problem.



Let therefore the line CR be r, the angle $CRM = \varphi$, its sine $= s$ and the cosine $= u$ (the total sine being set equal to c),[6] so that $s^2 + u^2 = c^2$ and $d\varphi = \dfrac{c\,ds}{u}$ is the angle at O. Now if O is the intersection point of two very close reflected rays, clearly the small section Mm of the curve must belong to an ellipse whose foci are at C and O, and consequently one has $CM + MO = Cm + mO$. Now extend OM and Om to V and v so that $MV = CM$ and $mv = Cm$, then $OV = Ov$ and the tangents at M and m will perpendicularly bisect the lines CV and Cv. Further drop from C the perpendiculars CS and Cs on OV and Ov, then the angle SCs will equal the angle at O which is $d\varphi = \dfrac{c\,ds}{u}$. However, in the triangle CSR one has

$$\text{total sine}\,(c)\ :CR\,(r)\ = sin\ CRS\,(s)\ :CS = \frac{rs}{c}$$

and $RS = \dfrac{ru}{c}$. Thus $S\sigma : CS = d\varphi \left(\dfrac{c\,ds}{u}\right)$: total sine (c) or $S\sigma = \dfrac{rs\,d\varphi}{c^2} = \dfrac{rs\,ds}{cu}$. But since $s\,ds + u\,du = 0$, one has $S\sigma = \dfrac{-\,r\,du}{c}$. Defining now $SV = t$, one has $sv = t + dt$ and $vs - VS = dt$. Now since $vs = V\sigma$, this yields $dt = S\sigma = \dfrac{-\,r\,du}{c}$ and $t = a - \int \dfrac{r\,du}{c}$. Thus, by the given relation linking r and u the line $VS = t$ is determined; by adding $RS = \dfrac{ru}{c}$ to it, one gets the line $RV = a + \dfrac{ru}{c} - \int \dfrac{r\,du}{c}$

$= a + \int \frac{u\,dr}{c}$, which could even have been demonstrated much more shortly, since $rv - RV = d\,RV = R\rho = \frac{u\,dr}{c}$, as $Rr = dr$. Now once $RV = a + \int \frac{u\,dr}{c}$ has been found, draw CV, divide it into two equal parts in T and erect the perpendicular line TM, which yields not just a point M on the curve that was asked for, but also the position of its tangent. Consequently from any given equation linking $CR = r$ and the cosine u of the angle CRM the required curve EMB can be determined and easily constructed by just taking everywhere $RV = a + \int \frac{u\,dr}{c}$.

Now from this it is easy to solve the proposed catoptric problem; for there it is required to determine the line $CR = r$ from the angle CRM in such a way that, if one substitutes the angle CRO instead of the angle CRM, the same value results for CR. Since the sine of the angle CRO equals $-s$ and its cosine $-u$, here r must be some function of s and u that keeps the same value when for s and u their negatives $-s$ and $-u$ are substituted. Consequently r has to be an even-dimensional function of s and u, as for example $r = b + \frac{\alpha s^2 + \beta su + \gamma u^2}{c}$. Now once r has been assumed in this manner, the curve that satisfies the problem can be determined in the following way: Define $MR = z$, then

$$CM = \sqrt{r^2 + z^2 - \frac{2urz}{c}} = RV - z = a + \int \frac{u\,dr}{c} - z.$$

Consequently

$$r^2 - \frac{2urz}{c} = \left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right)^2 - 2\left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right) z$$

and therefore

$$z = \frac{\left(a + \int \frac{u\,dr}{c}\right)^2 - r^2}{2\left(a + \int \frac{u\,dr}{c} - \frac{ur}{c}\right)}.$$

From z one further calculates $PM = y = \frac{sz}{c}$ and $PR = \frac{uz}{c}$; therefore one will have $CP = x = r - \frac{uz}{c}$ and, as was already found, $CM = a + \int \frac{u\,dr}{c} - z$. Now if one wants to find algebraic curves, such a function of s and u (respecting the above requirement) must be assumed for r that the formula $\int \frac{u\,dr}{c}$ can be integrated.

Indeed, in order to find general formulae for all possible algebraic curves, I define

$$\int \frac{u\,dr}{c} = \frac{ur}{c} - \int \frac{r\,du}{c} = \frac{ur}{c} - v$$

or $\int \frac{r\,du}{c} = v$. Now, since r has to be an even-dimensional function of s and u, $v = \int \frac{r\,du}{c}$ will become an odd-dimensional function. Thus, taking for v an arbitrary function of that kind, one has $r = \dfrac{c\,dv}{du}$ and $\int \dfrac{u\,dr}{c} = \dfrac{u\,dv}{du} - v$. This further yields

$$RM = z = \frac{\left(a - v + \dfrac{u\,dv}{du}\right)^2 - \dfrac{c^2\,dv^2}{du^2}}{2\,(a-v)},$$

i. e.,

$$MR = z = \frac{a-v}{2} + \frac{u\,dv}{du} - \frac{\left(c^2 - u^2\right)\,dv^2}{2\,(a-v)\,du^2} = \frac{a-v}{2} + \frac{u\,dv}{du} - \frac{s^2\,dv^2}{2\,(a-v)\,du^2}\,,$$

(since $s^2 = c^2 - u^2$);

$$PM = y = \frac{(a-v)\,s}{2c} + \frac{su\,dv}{c\,du} - \frac{s^3\,dv^2}{2\,(a-v)\,c\,du^2}\,,$$

$$CP = x = \frac{s^2\,dv}{c\,du} - \frac{u\,(a-v)}{2c} + \frac{us^2\,dv^2}{2\,(a-v)\,c\,du^2}\,,$$

$$CM = \frac{a-v}{2} + \frac{s^2\,dv^2}{2\,(a-v)\,du^2}\,.$$

Thus one has $CM + MR = a - v + \dfrac{u\,dv}{du}$; by taking u and s to be negative, in which case v also becomes negative, one gets the sum of the rays below the axis, which equals $a + v - \dfrac{u\,dv}{du}$. It is therefore evident that the sum of all the rays, i. e., the distance which any ray issuing from C travels until it returns there after two reflections, will equal $2a$; this property, although it follows immediately from the consideration that $CM + MO = Cm + mO$, was first disclosed to me by you, Sir. For the rest, these formulae entirely agree with my former ones, except that they are smaller than these by a factor of 2. It is easy to see by the formula $CR = \dfrac{c\,dv}{du}$ in what case the line CR becomes a maximum, namely for $ddv = 0$. However, it has to be observed in this that s and u must always be smaller than c, since otherwise the formulae become imaginary. Let for example $v = u^3 : c^2$, then $CR = \dfrac{3u^2}{c}$, and its value becomes greatest when $u = \pm\,c$; thus in this case the greatest value is $CR = 3c$ and the smallest $CR = 0$; consequently one gets the entire curve by giving to u successively all values from $-\,1$ up to $+\,1$.

It is quite true that the prize offered for the quadrature of the circle should be due by rights to anyone who should discover an operation analogous to root extraction which should permit to continue the number 3.14159 . . . ever further at will. With this goal in mind I came upon the idea whether it might not be possible to find divisors proceeding according to a certain law, from which this very number 3.14159 could be produced by the division procedure I lately described;[7] for indeed this operation appeared to me, even more than the extraction of roots, to enjoy that degree of facility which you require, Sir.

Mr. de Maupertuis asks to be most fairly recommended to you, Sir, and sends his most devoted thanks for your explication about the said letter.[8] Since now peace has been restored in such a glorious manner, there is no doubt but that the Berlin Academy will also soon be brought to a splendid state.[9]

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I have the honour to be with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Jan. 25th, 1746.

[1] Cf. n° 97, note 12.

[2] Cf. n° 93, note 3.
Apparently two merchants from the Hainchelin family were involved in this dispatch: one who had remained at Berlin – possibly Jean-George († 1751) – and one at Petersburg, who had taken over the Prussian consul Kühn's business and was a member of the Protestant parish there until his death in 1756.

[3] Cf. n° 96, note 3.

[4] The figure has been drawn on a separate piece of paper (fol. 145[a]).

[5] By mistake OR is indicated in the manuscript.

[6] The term "total sine" ("sinus totus") denotes the radius of the circle in which the segments representing the trigonometric functions are considered.

[7] Cf. n° 96, note 5.

[8] Cf. n° 97, note 11.

[9] Even after the Second Silesian War had been ended by the signing of a peace treaty at Dresden on Christmas Day, 1745 (cf. n° 96, note 11), the establishment of the Academy was fraught with difficulties. Its library and collections were still inadequately housed at the old observatory, while meetings were mostly held in a hall at the castle; only in 1752 could the Academy finally move into a suitable building on *Unter den Linden*. A viable statute, drafted by Maupertuis, was approved by King Frederick on May 10th, 1746, more than two years after the Academy's official opening, but financial means were far too tight to engage first-rate scholars as salaried members. Frederick actually wrote to Maupertuis in 1747: "The King is as poor as a church mouse; he has to fund a great number of agricultural colonies: once these are provided for, we will think of the astronomers" ("Le Roy est pauvre comme un rat d'église, il établit grand nombre de colonies de paysans, lorsque celles-là seront pourvues, on pensera aux astronomes": quoted according to Harnack 1900, vol. II, p. 276).

99
Euler to Goldbach
Berlin, February 5th, 1746

Sir,

please do not take it amiss that I take the liberty to submit to you the following problems with respect to some medals which His Royal Majesty most graciously ordered to be coined. For when after the first Silesian War you were so kind, Sir, as to convey to me some proposals for the medals that were then planned,[1] those met with complete approval at the Prussian Ministry of State, even if owing to other circumstances no medals were produced. Presently I have again received an order from the Ministry, by which five proposals for medals are requested:[2]

I. On the battle at Soor.
II. On the campaign in Saxony,
when His Royal Majesty turned so fast on Görlitz
and drove the Enemy all the way back to Bohemia.
III. On the battle at Kesselsdorf.
IV. On the capture of Dresden.
These two could perhaps be joined into a single one.
V. On the twofold peace with Austria and Saxony.

You will marvel, Sir, that proposals for such matters are being requested from me of all people; but, besides the fact that last time I supplied the best, there are in fact very few people here who could do better than me, even if I undertook it myself to invent something for this purpose. I can devise no emblems at all, but the following inscriptions occurred to me; however I do not feel able to give them a polished finish:

I. *The Enemies' severe attack is repelled*
by the King's outstanding fortitude.
II. *The Enemies, threatening fire and sword,*
are shattered by the King's sudden arrival and flee.
III. / IV. *The Enemy is defeated near Kesselsdorf in a tremendous battle,*
and the Metropolis of Dresden is taken.
V. *The King, invincible in Peace no less than in War,*
crushes the Enemies, but then grants Peace.

In this last one, I wanted to introduce the thought that the King defeats his enemies in peace no less than in war; however I admit that this does not quite fit in with the rest.

In case your good friend, whose proposals you were so kind to convey to me last time,[3] could give some attention to these issues, I am most obediently asking you to communicate his ideas to me, being with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Feb. 5th, 1746

[1] Cf. nº 41, note 3, and nº 48, note 2.
[2] On the events of the Second Silesian War, cf. nº 96, note 11.
[3] Cf. nº 50, note 7.

100
Goldbach to Euler
Petersburg, February (15th) 26th, 1746

Sir,

after careful consideration I cannot venture to devise inscriptions that should be commensurate with the greatness of the subject;[1] so I rather think that the famous Baron von Stosch, who has an uncommon knowledge of all numismatic matters, should be more suitable than anyone for this purpose;[2] I did not wish to fail to report this as my dutiful answer.

The books have been delivered to me on January 20th,[3] although with some gaps in the *Theory of Motion of the Comets*[4] and in Wolf's *Letters*.[5]

I also received your letter dated Jan. 25th and shall answer it soon. For the meantime, I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant

Goldbach.

St. Petersburg, Feb. 26th (new style), 1746.

[1] Cf. nº 99, note 2.
[2] The Prussian antiquarian Philipp von Stosch, a Freemason who had settled in Florence since 1731, was indeed considered Europe's leading expert on medals and cameos; his huge collection was eventually sold to Frederick II and came to the Berlin museums. Goldbach had probably met Stosch in Rome in 1714 and led a correspondence with him (see nº 42, note 6, nº 55, note 25, and nº 58, note 2).
[3] Cf. nº 93, note 3, and nº 98, note 2.
[4] E. 66; so this was one of the books of his own Euler had presented to Goldbach in 1745.
[5] Cf. nº 90, note 7; vol. 2 of that collection contained La Croze's correspondence with the Hamburg theologian and hebraist Johann Christoph Wolf.

101
Goldbach to Euler
Petersburg, March (1st) 12th, 1746

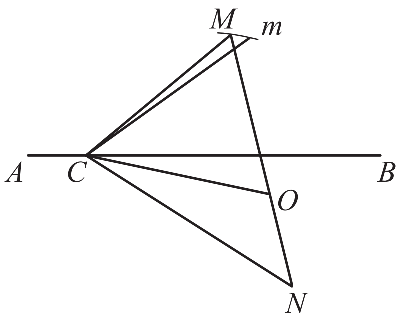
Sir,

first of all let me thank you for your kind New Year's wish;[1] in fact I had on my part already mentally conveyed a similar one to you a long time ago, and I desire to receive, in the present year and those that will follow, much pleasant news regarding its fulfilment and your own continuing welfare as well as that of all your family, to which I ask you to kindly recommend me.

Apart from that, I am also very much obliged to you, Sir, for the books you sent me. The gap which I already mentioned in my last letter[2] is not in Tome II of La Croze's *Letters*,[3] but in Tome I, where everything from p. 368 to the entry "Lycaonum ingenium" in the index is missing; in the *Theory of Motion of the Comets*[4] six sheets from p. 96 to p. 145 are missing. The books were so negligently tied together when I received them that the missing sheets may well have been lost only here. I shall be concerned to reimburse you for your expenses. Please tell me who the Mr. Uhl who edited these letters is, and forward the enclosed note to him when an opportunity presents itself.[5]

I have forthwith read the questions and answers about the comets[6] and do not doubt that they shall have met with general approval because of their clarity and accuracy. By assuming that the comet is a body on fire it can probably be best explained (1.) that it cannot exhibit phases as the Moon or Venus do, (2.) that it emits its own light in every direction, even if because of the Sun's rays it is to be perceived, by the name of a *coma* or tail, only in the direction turned away from the Sun, (3.) that this tail of the comet must grow the greater the longer the comet stays in the vicinity of the Sun and the more it is set on fire by it.

I think[7] one can also solve the catoptric problem without considering any angle, as follows:



Let the axis of the curve be $AB = a$, the incident ray $CM = \dfrac{a \pm p}{2}$, the reflected ray $MO = \dfrac{a \mp p}{2}$, so that $CM + MO = CN + NO = a$. Let CO (which is some arbitrary function of p, but greater than p) equal q; then the element of the curve which is asked for is $\dfrac{dp\sqrt{a^2 - p^2}}{2\sqrt{q^2 - p^2}} = Mm$.

If Mr. Uhl, who edited La Croze's *Correspondence*, is in Berlin, please have the enclosed note communicated to him at a convenient opportunity.[8]

I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, March 12th (new style), 1746.

Turn over.

PS. I observed a long time ago that the series which has for its law of progression $A^2 + 4A = B$ (where A denotes any term and B the subsequent term) has the general term $a^{-2^x} - 2 + a^{2^x}$. From this the general term of the series

$$1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 + \ldots$$

can also be determined;[9] here the single factors of the terms are all numbers which Fermat took to be prime.[10]

[1] Cf. the beginning of n° 98.
[2] Cf. n° 100, note 3.
[3] Cf. n° 90, note 7.
[4] E. 66: cf. n° 100, note 4.
[5] After his studies at Jena and Halle, Johann Ludwig Uhl (born in 1714) had made a living as a journalist and as a private tutor in Berlin for some years. In 1744 he was nominated professor of public law and archivist by the university at Frankfurt on the Oder, where he spent the rest of his life.
No correspondence between Uhl and Goldbach seems to have been preserved. However, in his only extant letter to Euler (R 2655, sent from Frankfurt on June 8th, 1746), Uhl expresses his satisfaction that Goldbach's note arrived in time for him to make use of in the preface of vol. 3 of the La Croze correspondence, and asks Euler to thank Goldbach for his memories of La Croze, with whom he had kept company in Berlin in the early 1720s. Cf. also n° 107, note 15, n° 109, note 1, and n° 110, note 4.
[6] The text of Goldbach's copy starts here.
Goldbach refers to the anonymous brochures E. 67/68, *Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Würckung der Cometen*, which must also have been sent as a gift in 1745 (cf. n° 93, note 3). As Eneström already noted, the present letter and Euler's reply (n° 102, note 4) prove Euler's authorship.
[7] A first paragraph on the catoptric problem has been crossed out both in the original letter and in Goldbach's copy.
[8] This paragraph – an inadvertent repetition (cf. *supra* note 5) – has been deleted from Goldbach's copy, which ends with the postscript.
[9] See Euler's reply n° 102, note 6.
[10] For an earlier discussion of the Fermat numbers $2^{2^n}+1$, cf. n° 2, note 7, n° 3, note 11, and n° 52, note 20.

102
Euler to Goldbach
Berlin, April 5th, 1746

Sir,

Mr. Haude was more than a little annoyed that there were such big gaps in the books he sent you, Sir;[1] however, since he is to send a consignment of books to Dr. Sanches at the first occasion, he will enclose for you not just the missing sheets but also the third Tome of La Croze's *Letters*.[2] Mr. Uhle used to be with the late Privy Councillor Jordan, supervising his library, and then by his help got a chair at Frankfurt on the Oder; he is still a young man and said to be very learned. I am not particularly acquainted with him, but shall have your enclosed note delivered to him by a good friend.[3]

I take it as a sign of your very special goodwill, Sir, that you thought my questions on comets, which were composed in a rather hurried manner, worthy of some attention.[4] However, I still strongly doubt that the phenomena concerning comets and their tails can be explained just by the supposition that their bodies are indeed on fire. For besides the fact that a mere illumination is not sufficient to produce a luminosity in the aether, but moreover some corpuscles in the same location are needed which receive the illumination and therefore reflect a shine towards us, the deviation of a comet's tail from the direction opposite the Sun is another phenomenon that seems to require a special explanation. I recently set out in more detail the idea which I had lately sketched about these questions[5] and which is based on the sun rays that pass through the extended atmosphere of a comet, carrying along with them some of its subtle particles; I quite clearly explained that not only the comets' tails, but also the Northern Lights around our Earth and the Cassinian light around the Sun itself arise in this manner. This explanation also pleased Mr. Maupertuis so well that he completely agrees with it.

Your idea for the solution of the catoptric problem, Sir, indeed yields easy formulae; but since the position of the line CO is not indicated by it and the curve element Mm contributes little towards determining the curves, especially if algebraic curves are requested, I do not yet see in what way the nature of the function q should have to be determined in order for the two reflection points M and N to be situated on the same continuous curved line.

At first I was amazed by the series[6] $1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 + \ldots$, but when I considered it more closely I soon saw that I had already expressed its general term some time ago in different circumstances: for I found, if

$$(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\left(1+a^{16}\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right)=s,$$

then one has $(1-a)\,s = 1 - a^{2^{n+1}}$ and therefore $s = \dfrac{a^{2^{n+1}}-1}{a-1}$. Thus for $a = 2$ one has

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdots \left(2^{2^n}+1\right) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

I had already noted this when I was looking for the series that should result from actually developing the infinite product

$$(1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\left(1+a^8\right)\left(1+a^{16}\right)\ \ldots;$$

indeed I discovered that the geometric series

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\ldots=\frac{1}{1-a}$$

results. On the other hand, by developing the product

$$(1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^4\right)\left(1-a^8\right)\left(1-a^{16}\right)\ \ldots,$$

one gets

$$1-a-a^2+a^3-a^4+a^5+a^6-a^7-a^8+a^9+a^{10}-a^{11}+a^{12}-a^{13}-a^{14}+a^{15}-a^{16}+a^{17}\ldots,$$

where the order of the signs is peculiar.[7] I discovered several more theorems of the same kind, as follows:

Theorem: If

$$s=(1-na)\left(1-n^2a\right)\left(1-n^3a\right)\left(1-n^4a\right)\left(1-n^5a\right)\ \ldots\text{ (to infinity)},$$

then

$$\begin{aligned} s = 1 \quad &- \quad \frac{na}{1-n} + \frac{n^3a^2}{(1-n)(1-n^2)} - \frac{n^6a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} \\ &+ \quad \frac{n^{10}a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)} - \dots \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} = 1 \quad &+ \quad \frac{na}{1-n} + \frac{n^2a^2}{(1-n)(1-n^2)} + \frac{n^3a^3}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)} \\ &+ \quad \frac{n^4a^4}{(1-n)(1-n^2)(1-n^3)(1-n^4)} + \dots \end{aligned}$$

I think I already wrote to you, Sir,[8] that by developing the infinite product

$$(1-a)\left(1-a^2\right)\left(1-a^3\right)\left(1-a^4\right)\left(1-a^5\right)\dots,$$

the series

$$1 - a^1 - a^2 + a^5 + a^7 - a^{12} - a^{15} + a^{22} + a^{26} - a^{35} - a^{40} + \dots$$

results, where the order of the exponents is very remarkable and can be determined by induction; indeed they are all comprised by the formula $\dfrac{3x^2 \pm x}{2}$, but nonetheless I have not yet been able to elicit this observed law from the nature of the matter.

Theorem: If in the series $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \dots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$ one has

$$Q = mP^2 + nP + \frac{n^2 - 2n - 8}{4m}$$

(where m and n are constant integers), one should look for numbers F and G so that $F + G = mA + \frac{1}{2}n$ and $FG = 1$; then

$$P = \frac{F^{2^{x-1}} + G^{2^{x-1}}}{m} - \frac{n}{2m}.$$

Theorem: If in the series $\overset{1}{A}, \overset{2}{B}, \overset{3}{C}, \dots \overset{x}{P}, \overset{x+1}{Q}$ one has

$$Q = mP^2 + nP + \frac{n^2 - 2n}{4m},$$

then

$$P = \frac{\left(mA + \frac{1}{2}n\right)^{2^{x-1}}}{m} - \frac{n}{2m};$$

these are both your theorems, Sir.

The following theorems also appear to deserve some attention:

Theorem: If n is any positive whole number, one has

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)\left(1-a^{n-1}\right)}{1-a^2}+\frac{(1-a^n)\left(1-a^{n-1}\right)\left(1-a^{n-2}\right)}{1-a^3}+\ldots=n.$$

Theorem: If n is any positive whole number, one has

$$1-a^{n-1}+a^{2n-3}-a^{3n-6}+a^{4n-10}-a^{5n-15}+a^{6n-21}-\ \ldots=0,$$

where it is understood that all terms having negative exponents must be excluded.

Theorem:[9] Let the circular arc of 90° be $=q$; take an arbitrary arc s, let its sine be $=a$, the sine of the arc $2s\ =b$, $\sin 3s=c$, $\sin 4s=d$, and so on; then one always has

$$q=\frac{1}{2}s+a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{4}d+\frac{1}{5}e+\ \ldots$$

Theorem: In the circle of radius 1 take some arbitrary arc s, let its tangent be $=a$, the tangent of the arc $\frac{1}{2}s\ =b$, $\tan\frac{1}{4}s=c$, $\tan\frac{1}{8}s=d$, $\tan\frac{1}{16}s=e$, etc.; then

$$\frac{1}{s}=\frac{1}{a}+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}c+\frac{1}{8}d+\frac{1}{16}e+\ \ldots$$

I am now busy reading the papers that have been entered on the question about the origin and order of winds proposed by the Academy. Ten papers have been received; there is one among them that merits to be taken into consideration above all others.[10] The motto which is to be found at its end is also beautiful; it reads:

> So much about the winds; but faster than all their stormwings,
> Frederick chases the scattering nations and, crowned with laurel,
> offers to all the globe the welcome branch of the olive.

Recently the address directory of Silesia came into my hands; in leafing through it I encountered your name several times, Sir; if I am not mistaken, a mayor of Breslau is called von Goldbach.[11] All my family asks to be most obediently recommended to you, and I have the honour to remain with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, April 5th, 1746.

[1] Cf. n° 101, note 2.
[2] Cf. n° 90, note 7.
[3] Cf. n° 101, note 5.
[4] Cf. n° 101, note 6.
[5] A French translation of Euler's original essay (written in Latin) was published in the Berlin Academy's *Mémoires* for 1746 as E. 103. It is not known when it was presented to the Academy or in what way Maupertuis took note of it.
[6] Cf. n° 101, note 9.
[7] Obviously, a^m has the $+$ sign in this series if and only if the number of 1s in its binary expansion is even. The sequence 0110 1001 1001 0110 ... recording this parity has been rediscovered several times, starting with Prouhet in 1851, and is nowadays called the Thue-Morse sequence (see, e. g., Allouche / Shallit 1999 and Allouche / Mendès France 2008).
[8] Cf. n° 74, note 13.
[9] Cf. n° 80; there Euler had already communicated this theorem and the one that follows as items I and IV.
[10] Indeed this paper, d'Alembert's *Reflexions sur la cause générale des vents*, was unanimously awarded the 1746 prize of the Berlin Academy on June 2nd, 1746. It was printed in 1747, along with Daniel Bernoulli's *Recherches physiques et matematiques sur la Theorie des vents reglés* and two other contributions. Euler's preference for d'Alembert's paper put a serious strain on his relations with Bernoulli: see G.K. Mikhaĭlov's introduction in Daniel Bernoulli *Werke* 5, p. 473–489.
[11] There was indeed a Goldbach family in Silesia which had been ennobled in 1545 and elevated to knighthood in 1698. A scion of this family, Ritter Balthasar Christian von Goldbach, died in 1750 at Breslau (now Wrocław); however, nothing is known about his civic activities.

103
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 22nd) May 3rd, 1746

Sir,

the news that Mr. Haude is sending some books to Court Physician Sanches pleases me very much; in case these books have not yet been sent off, I most humbly request you, Sir, to forward the enclosed list to Mr. Haude with my recommendation and to have him asked to add such of these books as might be available.

When[1] my last letter was sent, I just had grasped the general term of the series $1+1\cdot3+1\cdot3\cdot5+1\cdot3\cdot5\cdot17+\ldots$[2] and did not think it would be so easy; I should not have mentioned it otherwise.

I do not know if any methods are known[3] to determine the sums of series like

$$\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot8}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot10}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot12}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot14}+\ldots=2^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}-2,$$

whose law of progression is $\dfrac{-A\,(2x+5)\,(x+3)}{2\,(x+2)\,(x+4)}=B.$

The idea for a solution which I mentioned in my last letter[4] goes even further: if q is assumed to be an arbitrary function of p, with the only restriction that $q>p$

and $q < a$ (for at least I do not see that by the nature of the problem any further restrictions should be required), and moreover

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{(a \pm p)^2}{4}, \\ dx^2 + dy^2 &= \frac{\left(a^2 - p^2\right)\, dp}{4\,(q^2 - p^2)}, \end{aligned}$$

then the abscissa of the curve asked for will be to the ordinate, as x is to y.[5]

The enclosure to Mr. Schuster in Leipzig[6] is most humbly recommended, and I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, May 3rd, 1746.

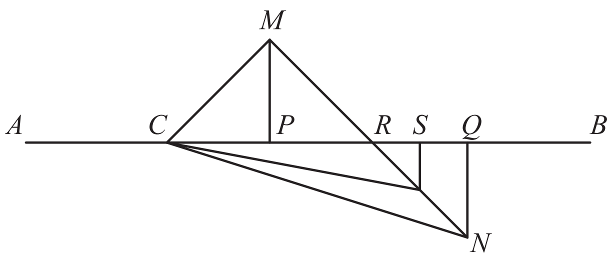
[1] The text of Goldbach's copy starts here.
[2] Cf. nº 101, note 9, and nº 102, note 6.
[3] See Euler's reply nº 105, note 2.
[4] Cf. nº 101, note 7.
[5] The text of Goldbach's copy ends here.
[6] The enclosure – probably a book order addressed to the bookseller and publisher Jacob Schuster – has not been retrieved.

104

Goldbach to Euler

Petersburg, May (10th) 21st, 1746

PS. Yesterday it occurred to me that the catoptric problem can also be solved in the following manner:



Let the axis AB of the curve be equal to a, the radiating point C. Let CM and CN be rays incident upon the curve, MR and NR the rays reflected to the same point R of the axis; take a point O on MN so that $CM + MO = CN + NO = a$, and define the lines $CO = q$, $CM = \dfrac{a-p}{2}$, $MO = \dfrac{a+p}{2}$, $CN = \dfrac{a+v}{2}$, $NO = \dfrac{a-v}{2}$

(where v is in fact given in terms of p and q; indeed,[1] $v = \dfrac{(2a+p)\,q^2 + a^2 p}{a^2 + 2ap + q^2}$). Let furthermore $RO = z$, $RS = uz$; then the line intercepted on the axis between the incident and the reflected ray will be found to be

$$\begin{aligned}
CR &= CS - RS = \sqrt{q^2 - z^2\,(1-u^2)} - uz \\
&= CQ - RQ = \frac{1}{2}\sqrt{(a+v)^2 - (a-v+2z)^2\,(1-u^2)} - \frac{(a-v+2z)\;u}{2} \\
&= CP + PR = \frac{1}{2}\sqrt{(a-p)^2 - (a+p-2z)^2\,(1-u^2)} + \frac{(a+p-2z)\;u}{2}.
\end{aligned}$$

Now, since v was already given above by p and q, by the equations for CR just discovered, u and z also will be given in terms of p and q, and then those values have to be substituted in the ordinate

$$MP = \frac{a+p-2z}{2}\sqrt{1-u^2}$$

and in the abscissa

$$CP = \sqrt{\frac{(a-p)^2}{4} - \overline{MP}^2}.$$

Turn over.

Although the actual calculation of the quantities u and z from p and q may be somewhat involved, on the other hand it must be considered that no differentials occur in this solution.

St. Petersburg, May 21 (new style), 1746.[2]

[1] In the margin of the original there is a mark which refers to a formula Euler noted alongside the figure:

$$\begin{aligned}
\frac{qq+ap}{a+p} &= \frac{av-qq}{a-v} \\
qq = &\ \frac{2apv + aav - aap}{2a-v+p}
\end{aligned}$$

See Euler's reply in n° 106.

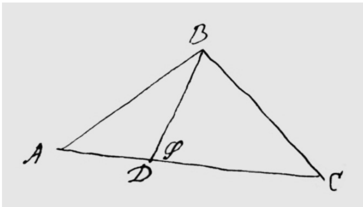
[2] On the blank space left at the end of this letter, Euler noted some calculations in preparation of his reply (cf. n° 106). Some ambiguities and mistakes in this note, which is not easy to read, have been resolved.

Sit $CR = r$; *erit*

$$rr + 2ruz = qq - zz = \frac{2apv + aa\,(v-p)}{2a-v+p} - zz$$

$$\begin{aligned}
rr + (a-v+2z)\,ur &= \tfrac{1}{4}\,(a+v)^2 - \tfrac{1}{4}\,(a-v+2z)^2 \\
rr - (a+p-2z)\,ur &= \tfrac{1}{4}\,(a-p)^2 - \tfrac{1}{4}\,(a+p-2z)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-v)\,ur &= \tfrac{1}{4}(a+v)^2 - \tfrac{1}{4}(a-v)^2 - (a-v)\,z - qq \\
&= av - (a-v)\,z - qq \\
(a+p)\,ur &= -\tfrac{1}{4}(a-p)^2 + \tfrac{1}{4}(a+p)^2 - (a+p)\,z + qq \\
&= ap - (a+p)\,z + qq \\
(p+v)\,ur &= a\,(p-v) - (p+v)\,z + 2qq
\end{aligned}$$



$AB = f$; $BC = g$; $AC = 2h$; $AD = h - y$; $CD = h + y$; $BD = v$

$$\cos\varphi = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD\cdot CD} = \frac{AB^2 - AD^2 - BD^2}{2AD\cdot BD}$$

$$\frac{vv + (h+y)^2 - gg}{2\,(h+y)\,v} = \frac{ff - (h-y)^2 - vv}{[2\,(h-y)\,v]}$$

$$\left.\begin{array}{l}(h-y)\,vv + (hh-yy)\,(h+y) - gg\,(h-y)\\ (h+y)\,vv + (hh-yy)\,(h-y) - ff\,(h+y)\end{array}\right\} = 0$$

$$2hvv + 2h\,(hh-yy) = ffh + ggh + (ff-gg)\,y$$

$$vv = -hh + yy + \tfrac{1}{2}(ff+gg) + \frac{(ff-gg)\,y}{2h}$$

$$\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{2hy + 2yy + \frac{1}{2}(ff-gg) + \dfrac{(ff-gg)\,y}{2h}}{2\,(h+y)\sqrt{\left(yy - hh + \frac{1}{2}ff + \frac{1}{2}gg + \dfrac{(ff-gg)\,y}{2h}\right)}} \\
&= \frac{y + \dfrac{ff}{4h} - \dfrac{gg}{4h}}{v} \\
\mathrm{si}\,\varphi &= \frac{\sqrt{\left(-hh + \frac{1}{2}ff + \frac{1}{2}gg - \dfrac{1}{16hh}(ff-gg)^2\right)}}{v}
\end{aligned}$$

In Goldbach's copybook, the entire text of this letter has been crossed out.

105
Euler to Goldbach
Berlin, May 28th, 1746

Sir,

the missing sheets and the books which you requested last time[1] have been sent off, addressed to Court Physician Sanches (or to Dr. Schreiber) some time ago, but nevertheless another consignment of books is going to be dispatched shortly to the same. At this opportunity Mr. Haude will not fail to send those you lately asked for; they have already been partly sewn up, partly bound according to your order.

The series

$$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{9}{12}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{11}{14}+\ldots,$$

which you reported on,[2] can be easily determined by my method. For by adding the two terms which precede it according to the law of progression, one arrives at

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{9}{12}-\ldots$$

This is comprised, by substituting $x=1$, in the following:

$$s=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6}x^6+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8}x^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10}x^{10}+\ldots$$

Now by differentiating this series and dividing everywhere by dx, one gets

$$\frac{ds}{dx}=1x^3-\frac{1}{2}\cdot 3x^5+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 5x^7-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 7x^9+\ldots$$

Multiplying by $\dfrac{dx}{x^3}$, one has

$$\frac{ds}{x^3}=1\,dx-\frac{1}{2}\cdot 3x^2\,dx+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 5x^4dx-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 7x^6dx+\ldots;$$

if one now integrates, one gets

$$\int\frac{ds}{x^3}=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^5-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^7+\ldots$$

Here one easily perceives that this series equals $x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; consequently, $\displaystyle\int\frac{ds}{x^3}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ and $\dfrac{ds}{x^3}=\dfrac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, therefore

$$s=\int\frac{x^3dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-2;$$

indeed the constant quantity 2 must be subtracted here, since for $x = 0$ one must have $s = 0$. By now substituting $x = 1$, one gets

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{5}{8} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{9}{12} - \ldots = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{2}} - 2.$$

Lately I came upon the following series, whose sum, although it is so easily expressed, cannot well be determined by this method, for I arrive at a differentio-differential equation which cannot be integrated in general. The series is this:

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + \ldots = 2^n;$$

therefore if $n = 1$, one has

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 4}{4\cdot 8} + \frac{1\cdot 5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{1\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + \frac{1\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20} + \ldots = 2.$$

This is easily transformed[3] into

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} + \ldots = 2\left(1 - (1-1)^{\frac{1}{2}}\right) = 2,$$

in which case it is easily seen to be correct.

I hardly believe that the ratio $1 : \pi$ of the diameter and the circumference can more easily be determined by approximation than by the help of the two following series:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} - \frac{1}{11\cdot 5^{11}} + \ldots \\ q &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \frac{1}{9\cdot 239^9} - \frac{1}{11\cdot 239^{11}} + \ldots; \end{aligned}$$

for once the values of p and q have been calculated from these, one has $\pi = 16p - 4q$.[4]

According to the verdict recently issued by the Paris Academy on magnetism, my paper has been awarded a third of the triple prize,[5] as you will already have seen from our journals. Mr. Bernoulli also received a third. On the other hand, we awarded the prize of 50 ducats proposed by the Berlin Academy on winds to the paper "So much about the winds ...", authored by Mr. d'Alembert from Paris.[6]

The letter to Mr. Schuster at Leipzig[7] was dispatched on the same day. I shall perhaps enclose here a provisional invoice from Mr. Haude,[8] so you can see, Sir, what books are being sent and to how much they amount.

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I have the honour to remain with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, May 28th, 1746.

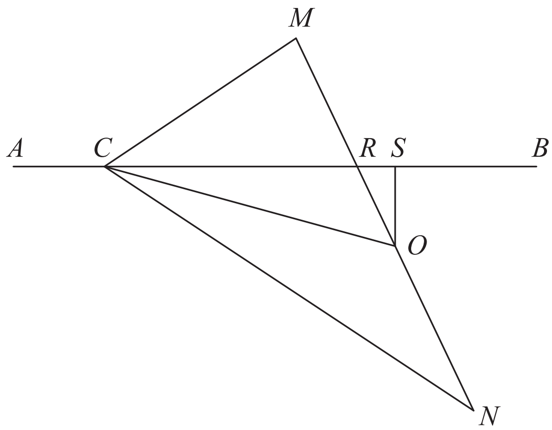
The enclosed invoice is the reason that the dispatching of this letter was delayed until June 4th.

[1] Cf. n° 101, notes 2–4, and the beginning of n° 103.
[2] Cf. n° 103, note 3.
[3] The idea behind this transformation, which works in general, is as follows: In $\frac{1\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}$, e. g., replace $\frac{8}{16}$ by $\frac{3}{6}$ and $\frac{10}{20}$ by $\frac{5}{10}$; then $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}$ results.
[4] John Machin had discovered this formula, which is based on the series for arctan x, and used it to calculate an approximation of π to 100 digits; Euler knew this from William Jones's *Synopsis Palmariorum Matheseos* (1706), the same book where he also found the notation π for the "circle number" for which he gained universal acceptance. See also *supra* n° 66, note 10.
[5] Cf. n° 52, note 11.
[6] Cf. n° 102, note 10.
[7] Cf. n° 103, note 6.
[8] See the sentence added at the end of the letter. The enclosure has not been preserved.

106
Euler to Goldbach
Berlin, June 14th, 1746

Sir,

the solution of the catoptric problem which you lately communicated[1] amazed me more than a little at first, since there are no differentials contained in it, whereas I am convinced that the consideration of reflection necessarily requires differentials. However, when I pondered the matter more accurately, I soon saw that the three formulae for the line CR which you found cannot possibly determine two unknown quantities, but that after one of them has been determined an identical equation must result.



Indeed, in any triangle CMN a side MN can always be bisected at O in such a way that $CM+MO = CN+NO$; so this condition determines no particular property. If one now defines $CM + MO = CN + NO = a$, $CM = \frac{a-p}{2}$, $MO = \frac{a+p}{2}$, $CN = \frac{a+v}{2}$, and $NO = \frac{a-v}{2}$, the line $CO = q$ can be determined from this, for one has $q^2 = \dfrac{a^2(v-p)+2apv}{2a-v+p}$ or $q^2+a^2 = \dfrac{2a\left(a^2+pv\right)}{2a-v+p}$. By further defining RO to be z and the cosine of the angle BRO to be u, the value of u can be determined from p, v, z and a. However, the intercept z remains arbitrary, since no circumstance has yet been considered from which z might be determined. But if the lines CM and MO, and similarly CN and NO, are to be equally inclined with regard to the curve by the law of reflection, the point O should have to stay unchanged for a infinitely close situation, and consequently one should have both *diff.* $CS = 0$ and *diff.* $SO = 0$: by this the problem should be overdetermined, or rather yield just one curve which satisfies, namely the ellipse. The reason for this is the unnecessary assumption that $CM + MO = CN + NO$; in fact, these values may also be unequal if only their sum $CM+MN+NC$[2] remains constant. Finally, the principal condition has been disregarded here that the two points M and N must lie on the same continuous curve. For the rest, I hardly think any shorter and easier solution of this problem can be found than this:[3]

Let $CMNC$ be the ray which returns to C after two reflections; take an arbitrary line CB as the axis to which the equation of the requested curve will be referred. Call $CR = r$, the angle $CRM = \varphi$, its sine $= s$ and its cosine $= u$, where the radius is taken to be 1, so that $s^2+u^2 = 1$ and $d\varphi = \dfrac{ds}{u} = \dfrac{-\,du}{s}$. Here I have considered the angle φ as it corresponds to the point M, whereas for the point N it goes over into CRO, and since this falls in the contrary direction, it will equal $-\,180^\circ + \varphi$, so its sine equals $-\,s$ and its cosine $-\,u$. Now since the point R must equally pertain to both points M and N, the quantity $CR = r$ must be expressed by s and u in such a way that it keeps the same value when $-\,s$ and $-\,u$ are substituted for s and u. Thus the relation between r, s and u must be as follows:

$$r = \alpha + \beta s^2 + \gamma su + \delta u^2 + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \ldots,$$

or, in fractions,

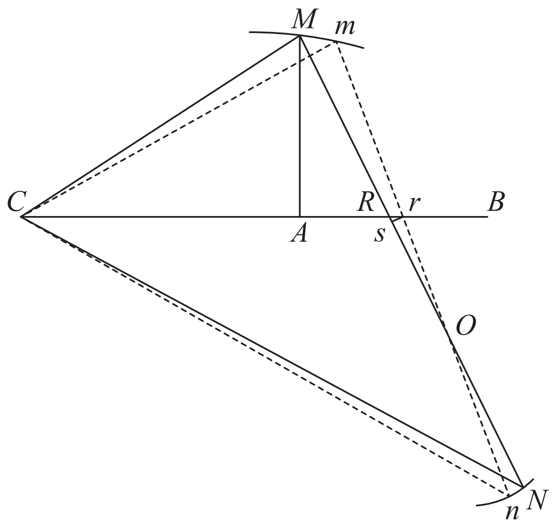
$$r = \frac{\alpha + \beta s^2 + \gamma su + \delta u^2 + \varepsilon s^4 + \zeta s^3 u + \eta s^2 u^2 + \vartheta s u^3 + \ldots}{A + Bs^2 + Csu + Du^2 + Es^4 + Fs^3 u + Gs^2 u^2 + Hsu^3 + \ldots}$$

or also

$$r = \frac{\alpha s + \beta u + \gamma s^3 + \delta s^2 u + \varepsilon s u^2 + \zeta u^3 + \eta s^5 + \vartheta s^4 u + \ldots}{As + Bu + Cs^3 + Ds^2 u + Esu^2 + Fu^3 + Gs^5 + Hs^4 u + \ldots}$$

Now if any equation whatsoever of this kind is assumed in order to define r, the point R will equally correspond to both points M and N, and therefore the points M and N will lie on one and the same continuous curve. Thus, such an equation linking r, s and u being assumed, it only remains to define the curve itself and to deduce an equation between its coordinates $CP = x$ and $PM = y$. In order to do this, consider a infinitely close reflection $CmnC$ and let O be the intersection of the lines MN and mn; then it is obvious by the nature of reflection that the small portion Mm of the curve must be an element of an ellipse described around the foci

C and O, and Nn an element of an ellipse described around the same foci C and O. As a consequence we have $CM+MO = Cm+mO$ and $CN+NO = Cn+nO$; however it suffices to take into account just the condition $CM+MO = Cm+mO$, since by the way r was determined the other one is implied simultaneously.



Therefore, as $CR = r$, one will have $Rr = dr$; dropping the perpendicular rs from r on OM, $rs = s\,dr$ and $Rs = u\,dr$. Let $CM + MR = q$, then $Cm + mr = q + dq$, and thus, since $CM + MO = Cm + mO$, one will have $q + OR = q + dq + Or$ or $OR - Or = Rs = dq = u\,dr$; thus one gets $q = a + \int u\,dr = CM + MR$. Now let $MR = z$, then $PM = y = sz$, $PR = uz$, and $CP = x = r - uz$, so $CM = \sqrt{r^2 - 2urz + z^2}$, since $s^2 + u^2 = 1$. But $CM = q - z$, so $\sqrt{r^2 - 2urz + z^2} = q - z$, and by squaring, $r^2 - 2urz = q^2 - 2qz$, which yields $z = \dfrac{q^2 - r^2}{2q - 2ur}$. Thus, assuming any suitable value for r, as expressed by s and u, calculate from this $q = a + \int u\,dr$ and $z = \dfrac{q^2 - r^2}{2q - 2ur}$; once these are known, define $x = r - uz$ and $y = sz$, and in this way one will have a curve which satisfies the problem; in fact this curve will be transcendental in those cases where the formula $\int u\,dr$ cannot be expressed algebraically.

So, in order to determine algebraic curves, one must choose such a function for r that the formula $\int u\,dr$ becomes integrable. In fact this can be done generally in the following way: Since $\int u\,dr = ur - \int r\,du$, define $\int r\,du = v$; then $r = \dfrac{dv}{du}$. So in order to make r an even-dimensional function of s and u – as required above – v must necessarily be an odd-dimensional function of s and u, i. e., one that goes over into $-v$ if $-s$ and $-u$ are substituted for s and u. Once such a function for v has been assumed, one will have $r = \dfrac{dv}{du}$, where because of $ds = -\dfrac{u\,du}{s}$ the differentials cancel: so r becomes a finite algebraic quantity. Now, once r has been determined, one will have $\int u\,dr = ur - v$, $q = a + ur - v$, and $z = \dfrac{q^2 - r^2}{2q - 2ur}$, and from these one finally calculates the coordinates $CP = x = r - uz$ and $PM = y = sz$, both expressed by s and u; thus the curve can be constructed and the equation which links x and y can be established by eliminating s and u using $s^2 + u^2 = 1$.

Since v has to be some odd-dimensional function of s and u, assume, e. g., $v = bs + cu$: then

$$dv = b\,ds + c\,du = -\frac{bu\,du}{s} + c\,du$$

and $r = -\dfrac{bu}{s} + c$. Next,

$$q = a - \frac{bu^2}{s} + cu - bs - cu = a - \frac{b}{s};$$

furthermore, since $q^2 = a^2 - \dfrac{2ab}{s} + \dfrac{b^2}{s^2}$ and $r^2 = \dfrac{b^2u^2}{s^2} - \dfrac{2bcu}{s} + c^2$, one will have

$$z = \frac{a^2 - \dfrac{2ab}{s} + b^2 + \dfrac{2bcu}{s} - c^2}{2a - 2bs - 2cu}$$

or

$$z = \frac{\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\,s - 2ab + 2bcu}{2s\,(a - bs - cu)}.$$

Thus the coordinates are

$$\begin{aligned} CP &= x = \frac{2ac - 2bcs - \left(a^2 - b^2 + c^2\right)\,s}{2\,(a - bs - cu)}, \\ PM &= y = \frac{-\,2ab + 2bcu + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)\,s}{2\,(a - bs - cu)}; \end{aligned}$$

by eliminating s and u, an equation between x and y results which is only of degree 2 and expresses the nature of an ellipse relative to any line through the focus C as its axis. If $b = 0$, the line CB will also pass through the other focus.

I recently discovered that the expression $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ has a real value, which in decimal fractions equals 0.207 879 576 3; this seems to me to be remarkable.[4]

For the rest, I refer to my last letter, remaining with the most perfect respect and admiration, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, June 14th, 1746.

For next year the Berlin Academy has set the problem of the nature of bodies' elements, or monads.[5]

[1] Cf. n° 104.
[2] By mistake $CM + MN + MO$ is indicated in the manuscript.
[3] After a short sketch of the results (E. 85) published in 1746, Euler presented in the 1748 *Nova Acta Eruditorum* a much expanded version of his solution (E. 106) with detailed proofs and geometrical constructions.
[4] Using logarithms of imaginary numbers, we find $i^i = \mathrm{e}^{i \log i} = \mathrm{e}^{i(\pi i/2+2k\pi i)} = \mathrm{e}^{-\pi/2-2k\pi}$ with $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. For $k = 0$, the value $\mathrm{e}^{-\pi/2} \approx 0.207\,879\,576\,3$ results. On the conceptual problem of logarithms for numbers other than positive reals and its solution by Euler see n° 1, note 7.
[5] Euler had actively participated in the choice of this problem; he was also going to be heavily involved in the judging of the competition and in the polemics that ensued: cf. n° 117, note 4.

107
Goldbach to Euler
Petersburg, (June 24th) July 5th, 1746

Sir,

I received your letter dated May 28th on June 16th and the other one dated June 14th uncommonly early, namely on the 25th of the same month.[1] In the detail of the books,[2] which I humbly thank you for sending, it is not mentioned to whom the money should be paid; however I hope to find an instruction enclosed when the books themselves shall arrive. I had indeed strongly suspected that you were going to be awarded part of the prize that was recently distributed at Paris, Sir, but I got the actual news no earlier than from your last letter, and the third person who participated in the prize is still not known to me at present.[3] The question that has been posed by the Paris Academy of Science for the next prize[4] again raises my best hopes for you, Sir. Please tell me, when an opportunity arises, how many times your papers have already been victorious at this Academy.

In my opinion it takes considerable ability to discover from the series

$$x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^5 - \ldots$$

the sum

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5}{[8]} - \ldots$$

by your method, Sir.[5] Regarding the series[6]

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4 \cdot 8} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \ldots,$$

I noted the following fact: if one sets $2^n = 1 + \beta n + \gamma n^2 + \delta n^3 + \ldots$, there is no doubt that the quantities β, γ, δ, etc. have their determinate values, as for example β equals $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$; and if one now makes up series in whose terms ever more powers of n occur, then, although the series of which the quantities β, γ, δ, etc. consist become, as it were, involved with each other (as happens for the series $1+\frac{n}{4}+\frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}+\ldots=2^n$), these quantities themselves remain nevertheless unchanged. Thus, whenever series of this kind occur where the indeterminate quantity n is raised to different powers in every term, I daresay the surest method to determine the sum should be by first investigating the coefficients β, γ, δ, etc.[7]

On occasion of the value for $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ that you calculated, Sir,[8] a possibility occurred to me about which I should have had great doubts even the day before, namely that the series

$$A\colon\quad \alpha a-\beta a^4+\gamma a^9-\delta a^{16}+\ldots,$$

and in general all those series where the exponents of the number a can be reduced to some general formula,[9] are summable depending on a suitable determination of the coefficients α, β, γ, etc.; for if one sets

$$\begin{aligned}
\alpha &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots\\
\beta &= 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+3\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+4\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\ldots\\
\gamma &= 1\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+3\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+6\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+10\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}+\ldots\\
\delta &= 1\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+4\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+10\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\\
&\qquad\quad +20\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}+\ldots\\
&\ldots,
\end{aligned}$$

the series A equals $a^{\frac{1}{4}}$, and supposing the very same values for α, β, γ, δ, etc., one also has[10]

$$B\colon\quad \alpha a^a-\beta a^{2a^2}+\gamma a^{3a^3}-\delta a^{4a^4}+\ldots=\sqrt{a}^{\sqrt{a}}=a^{\frac{a}{2}^{\frac{1}{2}}}.$$

My constant distractions are in part responsible for some mistakes slipping into my letters which I could probably avoid; this also happened in my last postscript.[11] In fact, on closer inspection of the same I noticed, even before your letter arrived, Sir, that the two quantities u and z cannot both be eliminated in this way, but one of them remains;[12] indeed the three values of u that are determined by the three equations just cited are none other than (defining $m=2a+p-v$)

$$\frac{(av+ap-mz)^2}{m^2q^2-2a\,(p+v)\,mz+m^2z^2}=u^2.$$

The solution which you explain in your last letter, Sir,[13] is in my opinion much to be preferred to all earlier ones because of its brevity and evidence; there is just one thing left that seems questionable to me: Since the differential of RO equals $-\,dq$ and therefore $CM + MO$ is a constant, should it not be true, if this constant is taken to be a, that not just Mm is an element of an ellipse, but the entire curve that was asked for will be an ellipse, whose axis passes through the foci C and O and equals a, the only difference being that the abscissae CP and the ordinates MP (as determined on your part, Sir, by r and u) must be taken not with respect to the axis of the curve itself but to some line given in position and passing through the focus C, while for the rest r may denote any function whatsoever of u.

If a general formula could be indicated for the following series

$$1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3\cdot 5} + \frac{531}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{8601}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \ldots,$$

whose law of progression states that, an arbitrary term A and its index x being given, the subsequent term shall be $B = \dfrac{4xA+1}{2x+1}$, one should only have to set $x = \frac{1}{2}$ in this general term in order for the area of the circle of diameter 1 to result.[14]

Please report to Prof. Uhl, besides my humble recommendation, that the shortest way to obtain the poem by Prof. Gesner which he requested should be, in my opinion, to ask Dr. Lilienthal for it, as he has been the late Mr. Bayer's good friend for many years and will easily know how to find the poem, which has presumably been printed at Königsberg.[15]

For the rest, I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, July 5th, 1746.

[1] So Euler's letter nº 105 took 19 days and nº 106 the notably short time of 11 days to travel from Berlin to Petersburg.

[2] Cf. nº 105, note 8.

[3] Cf. nº 105, note 5. The author of the third winning paper, besides Euler and Daniel Bernoulli, was the naturalist E.-F. Du Tour from Auvergne.

[4] The prize question of the Académie des Sciences posed for 1748, then repeated for 1750 and prorogued to 1752, concerned the "great inequality" that links the orbital motions of Jupiter and Saturn; finally Euler won both the 1748 prize with his paper E. 120 and the double prize awarded in 1752 with E. 384 (cf. nº 121, note 8, nº 127, note 9, and nº 158, note 11).

[5] Cf. nº 105, note 2. Goldbach mistakenly writes $\frac{5}{6}$ for $\frac{5}{8}$ in the last term of the preceding series.

[6] Cf. nº 105, note 3.

[7] Setting $x = n\log 2$ in the power series expansion of e^x gives $2^n = \mathrm{e}^{n\log 2} = 1 + \beta n + \gamma n^2 + \ldots$ with $\beta = \log 2$, $\gamma = \frac{1}{2}(\log 2)^2$, $\ldots$.

[8] The text of Goldbach's copy starts here.
Cf. nº 106, note 4.

[9] Goldbach's series $\sum a_n x^{n^2}$ arose, as Euler observes in his reply, from the attempt of interpolating the sequence $a_n = a^{n^2}$ and computing the value of $a_{1/2} = \sqrt[4]{a}$. Goldbach's interpolation formulae yield, however, divergent expressions.

Later, Euler attempted to use series such as $\sum x^{n^2}$ and their powers for studying the representation of integers as sums of two and four squares (see n° 127, note 7).

[10] On the sign that has been rendered by $\mp$ in the original text of the formula that follows, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.

[11] Cf. n° 104 and Euler's reply n° 106, note 1.

[12] In Goldbach's copy, this sentence breaks off here with an "*&c.*".

[13] Cf. n° 106.
In Goldbach's copy, the paragraph that follows has been crossed out.

[14] Cf. Euler's reply n° 108, note 11.
The text of Goldbach's copy ends here.

[15] In a letter sent to Euler on June 8th, 1746 (R 2655: cf. also *supra* n° 101, note 5), Uhl had requested Euler to ask Goldbach for a Latin poem J.M. Gesner had written in 1720 to celebrate Th.S. Bayer's wedding. Uhl had edited a volume of Gesner's verse in 1743, and in his letter of thanks Gesner mentioned that he was unable to retrieve some of his early poems. A letter Bayer wrote to Gesner on August 5th, 1720 (later published in another collection by Uhl) shows why Uhl appealed to Goldbach: Bayer here stated he had received a batch of Gesner's Anacreontic poems which he "thought worthy of his great mind", and forwarded them "to Goldbach, the best poet of all, at Stockholm" (Uhl 1758, p. 21). However, Uhl's further search seems to have been in vain: no poems of Gesner's had apparently been printed then at Königsberg or were edited after 1746.

108
Euler to Goldbach
Berlin, July 26th, 1746

Sir,

the books that you ordered from here[1] shall be dispatched soon, since no good opportunity yet presented itself, as I heard from Mr. Haude, and payment will then most suitably be effected by way of Mr. Hainchelin. I convey all my most obedient thanks for your kind felicitation on the share of the Paris prize which I received. This was the fourth time I won some part of that prize.[2] For next year, when the question of determining time at sea by celestial observations has been proposed, I have already sent another paper.[3] However the question for 1748 is, in my opinion, so difficult that I do not yet know if I shall be able to make something up about it; nevertheless I should like to ask you most obediently, Sir, for a beautiful motto on that subject.[4]

I had found out in a most circuitous way that the sum of the series

$$1 + \frac{n}{4} + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12} + \ldots$$

equals 2^n; this seemed all the more curious to me as I could not properly prove it by any method known to me. In a similar manner I have since that time discovered that the series

$$1 + \frac{n}{4}x^2 + \frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}x^4 + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}x^6 + \frac{n\,(n+5)\,(n+6)\,(n+7)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^8 + \ldots$$

equals[5]

$$2^n\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\right)^n;$$

for $x=1$, this series goes over into the former. If one sets $x^2=\frac{1}{2}$, this becomes

$$1+\frac{n}{8}+\frac{n(n+3)}{8\cdot 16}+\frac{n(n+4)(n+5)}{8\cdot 16\cdot 24}+\frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{8\cdot 16\cdot 24\cdot 32}+\ldots=\left(4-2\sqrt{2}\right)^n.$$

If however, in order to determine the sum of this series, one were to develop all coefficients and arrange the series according to the powers of n, one should arrive at so very intricate series that hardly anything could be discovered from them. For example, by defining

$$A\colon 1+\frac{n}{4}+\frac{n\,(n+3)}{4\cdot 8}+\frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots=1+\beta n+\gamma n^2+\delta n^3+\varepsilon n^4+\ldots,$$

one has

$$\beta=\frac{1}{4}+\frac{3}{4\cdot 8}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\frac{5\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}+\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot 20}+\ldots,$$

which series taken negatively $(-\beta)$ expresses the term of index $\frac{1}{2}$ in the series[6]

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -\beta; & 0; & \frac{1}{2}; & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}; & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}; & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}; & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}, \ldots, \end{array}$$

consequently the term of index $\frac{3}{2}$ equals $-\beta+1$, the term of index $\frac{5}{2}$ is $-\beta+1+\dfrac{1}{3}$ and the term of index $\infty+\frac{1}{2}$ equals $-\beta+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}+\ldots$; the term of index ∞ is, however, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{10}+\ldots$. Now, since by the law of series the infinite-order terms must equal each other,[7] one has $\beta=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}-\ldots$, as you noted, Sir. But this also results from the sum of series A, which equals 2^n; for if $\log 2$ or $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\ldots$ is set equal to β, one has

$$2^n=1+\beta n+\frac{\beta^2n^2}{1\cdot 2}+\frac{\beta^3n^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\beta^4n^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots;$$

therefore in the assumed form $1+\beta n+\gamma n^2+\delta n^3+\varepsilon n^4+\ldots$ one has $\gamma=\dfrac{1}{2}\beta^2$, $\delta=\dfrac{1}{6}\beta^3$, etc., which could hardly be found out by studying the series A itself.

One should meet with the same difficulty if one tried to determine in this manner the sum of the series

$$B\colon\ 1 \quad + \quad \frac{n^2}{1\cdot 2} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)\left(n^2+16\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{n^2\left(n^2+4\right)\left(n^2+16\right)\left(n^2+36\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots .$$

If $\pi = 3.141\,59\ldots$ and $\mathrm{e} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,[!] + \ldots$, the sum of this series B equals $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}n\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n\pi}$.

On the other hand, the series

$$C\colon\ 1 \quad + \quad \frac{n^2}{1\cdot 2} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)\left(n^2+4\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{n^2\left(n^2+1\right)\left(n^2+4\right)\left(n^2+9\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \ldots$$

equals

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}n\pi} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}n\pi},$$

or

$$C = 1 + \frac{n^2\pi^2}{3\cdot 6} + \frac{n^4\pi^4}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \frac{n^6\pi^6}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12\cdot 15\cdot 18} + \ldots;$$

therefore one has

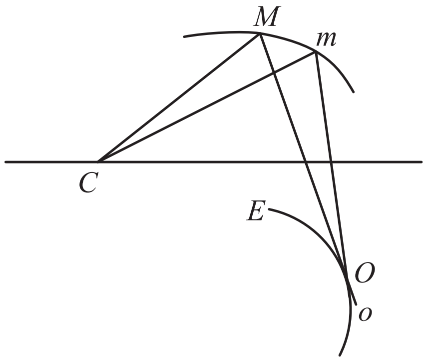
$$\frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1\cdot 2} \quad + \quad \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} + \ldots$$

and

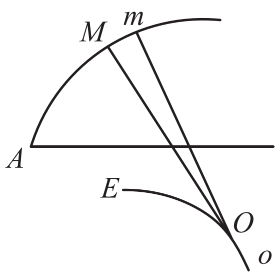
$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{8} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot\frac{1}{10} + \ldots .$$ [8]

Your discovery about the sum of series such as $\alpha a - \beta a^4 + \gamma a^9 - \delta a^{16} + \ldots$, where α, β, γ, δ, etc. take certain values,[9] is uncommonly profound. However I soon saw that series of that kind result by calculating in the usual way the term of index $\frac{1}{2}$ in the series a^1, a^4, a^9, a^{16} etc., which is $\sqrt[4]{a}$; but, regrettably, all these coefficients α, β, γ, δ, etc. become infinite, since $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}\,(1-1)^{-\frac{3}{2}}$, $\gamma = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,(1-1)^{-\frac{5}{2}}$, $\delta = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,(1-1)^{-\frac{7}{2}}$ and so on.

The doubt which you wished to raise against my solution of the well-known catoptric problem, as if this did not yield any other curve than only the ellipse,[10] is easily removed by considering the fact that the point O is not assumed to be constant, but is in fact a variable point on the caustic EOo.



For notwithstanding the fact that, by the nature of reflection, $CM + MO = Cm + mO$, it is yet not true that the differential of $CM + MO$ equals 0; actually it equals Oo, and therefore $CM + MO =$ const. + an arc of the caustic EO; this property is common to all caustics. By the way, my formulae yield some curves that obviously are not ellipses. Indeed the same thing occurs here as in investigating the radius of curvature MO of a curved line AM.



For although $MO = mO$, nonetheless it does not follow that *diff.* $MO = 0$ or that $MO =$const., but since the point O is variable along the evolute, one has *diff.* $MO = mo - MO = Oo$ and therefore

$$MO = \text{const.} + \text{ an arc of the evolute } EO.$$

If one requires the term of order $\frac{1}{2}$ of the series[11]

$$1 + \frac{5}{3} + \frac{43}{3 \cdot 5} + \frac{531}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{8601}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \ldots,$$

this equals $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$; no doubt it is this consideration which led you to that series, Sir. However it is remarkable that the law of progression can be so easily expressed.

Stirling noted[12] that the sum of the series

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+1)} + \frac{u\,(u+1)}{t\,(t+1)\,(t+2)} + \frac{u\,(u+1)\,(u+2)}{t\,(t+1)\,(t+2)\,(t+3)} + \ldots$$

is $\dfrac{1}{t-u}$, but I discovered that this series can be even made much more general:

$$\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+\frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)}+\ldots=\frac{1}{t-u}$$

if only a, b, c, d, etc. proceed in such a way that $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\ldots$ makes up an infinite sum. Now since this happens when a, b, c, d, etc. are the prime numbers,[13] one can say, for example, that

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 4\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots=1,$$

or that

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4\cdot 5}+\frac{3\cdot 4}{4\cdot 5\cdot 7}+\frac{3\cdot 4\cdot 6}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\frac{3\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 13}+\ldots=1,$$

where the factors in the numerators are prime numbers $+1$ and those of the denominators are prime numbers $+2$.

With this, I recommend myself to your further constant goodwill, remaining with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, July 26th, 1746.

[1] Cf. the beginning of n° 103.
[2] Cf. n° 105, note 5. Euler had earlier won prizes from the Paris Académie des Sciences in 1738 (with E. 34: cf. n° 52, note 9), 1740 (with E. 57: cf. n° 51, note 20) and 1741 (with E. 78).
[3] E. 150; cf. n° 91, note 9.
[4] The topic proposed was the theory of the orbital motions of Jupiter and Saturn; on the motto Euler is asking for, cf. n° 110, note 5.
[5] Newton's binomial theorem gives

$$2\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=1+\frac{1}{4}x^2+\frac{4}{4\cdot 8}x^4+\frac{5\cdot 6}{4\cdot 8\cdot 12}x^6+\frac{6\cdot 7\cdot 8}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^8+\ldots.$$

Raising this to the nth power yields the power series

$$\begin{aligned}2^n\Big(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\Big)^n&=1+\frac{n}{4}x^2+\left(\binom{n}{1}\frac{4}{4\cdot 8}+\binom{n}{2}\Big(\frac{1}{4}x^2\Big)^2\right)x^4+\ldots\\&=1+\frac{n}{4}x^2+\frac{n(n+3)}{4\cdot 8}x^4+\ldots;\end{aligned}$$

however, this is hardly how Euler would have derived the identity.
Instead he later proved these claims (in E. 686, which was presented to the Petersburg Academy in 1777) by solving the differential equation $(1-z^2)s''-zs'+n^2s=0$ in two different ways. Using standard techniques he finds the two independent solutions

$$s_1(z)=\Big(z+\sqrt{z^2-1}\Big)^n \quad\text{and}\quad s_2(z)=\Big(z-\sqrt{z^2-1}\Big)^n;$$

the fact that these are indeed solutions follows easily from the observation that

$$s'(z)=\frac{n}{\sqrt{z^2-1}}\cdot s(z).$$

Using the power series approach Euler then constructs the two independent solutions

$$s_3(z) = z^n - \frac{n}{4}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}z^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}z^{n-6} + \dots,$$
$$s_4(z) = z^{-n} - \frac{n}{4}z^{-n-2} + + \frac{n(n-3)}{4\cdot 8}z^{-n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{4\cdot 8\cdot 12}z^{-n-6} + \dots,$$

from which he concludes, by studying the values of the s_i at infinity, that

$$s_1(z) = 2^n s_3(z) \quad \text{and} \quad s_2(z) = 2^{-n} s_4(z).$$

For the connection with the series given in this letter, observe that substituting $x = \frac{1}{z}$ gives $2\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = 2z(z-\sqrt{z^2-1})$.

[6] Up to a factor $\frac{1}{2}$, this is the series of partial sums of the harmonic series, for which Euler had indicated the term with index $\frac{1}{2}$ in his first letter to Goldbach (cf. *supra* n° 1, note 11).

[7] This is similar to how Wallis derived his product formula for $\frac{4}{\pi}$; see Section 2.4.1 of the Introduction.

[8] By comparing the coefficients of n^2 in the equation

$$1 + \frac{n^2}{1\cdot 2} + \frac{n^2(n^2+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{n^2(n^2+1)(n^2+4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \dots = 1 + \frac{n^2\pi^2}{3\cdot 6} + \frac{n^4\pi^4}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12} + \dots,$$

Euler finds

$$\frac{\pi^2}{18} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \dots.$$

[9] Cf. n° 107, note 9.

[10] Cf. n° 107, note 13.

[11] Cf. n° 107, note 14.

[12] The reference is to Stirling's *Methodus differentialis*, *Propositio* V, *Exemplum* I: substituting t for $m-1$ and u for $m-n$ immediately yields Euler's formula. A link to the theory of the hypergeometric function is indicated in I. Tweddle's notes to his edition of Stirling's *Methodus*, p. 187–188.
In the late 1770s, Euler presented to the Petersburg Academy two more, slightly different generalisations, in the context of integration of algebraic functions: see his posthumously printed papers E. 670, § 16–34 (O. I/19, p. 119–128), and E. 685, § 10–22 (O. I/16.1, p. 274–281). In his introduction to O. I/16.1 (p. XCII–XCIV), Faber also discusses the connection with the hypergeometric function (in the modern sense).

[13] Euler had proved the divergence of the reciprocals of the prime numbers in E. 72, *Theorema* 19 (O. I/14, p. 242–244).

109
Goldbach to Euler
Petersburg, August (16th) 27th, 1746

Sir,

I do not recall whether I already mentioned in my last letter that the said missing sheets as well as Tome III of La Croze's *Correspondence*[1] have been forwarded to me by Court Physician Ribeiro; I thank you most humbly, Sir, for procuring them. On the title page it reads “preface by ...”; however, the fact that this preface is not to be found does not yet make me think there is another gap, but rather that it was not yet finished at the time. If Mr. Haude is going to send some books here in the future, I should be very glad to receive at the same opportunity those noted on the enclosed piece of paper.[2]

Whenever in the sums of series quantities occur which themselves have to be expressed by infinite series, the coefficients of n may well consist of very difficult series; however, I discovered the fact that the series

$$\beta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 8} + \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 8 \cdot 12} + \dots$$

adds to

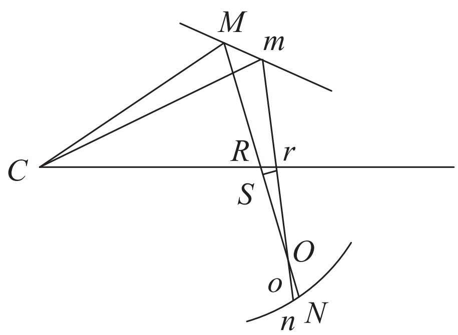
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

by a method very different from yours, Sir, and indeed without developing the terms $\frac{1}{4} + \frac{3}{4 \cdot 8} + \dots$, just by this argument: Since

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

and the coefficient of n in this series is[3] $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, it must also have the identical value in all series which equal 2^n; now I had no doubt at all that the series quoted by you, Sir, was summed correctly, and therefore I could indicate the value of β with great certainty.

I was well aware that the quantities α, β, γ, etc. assumed in my last letter signify infinite values,[4] and I very much doubt that it is possible to substitute finite values in their place; however, I do not yet understand why $\alpha = (1-1)^{-\frac{1}{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}(1-1)^{-\frac{3}{2}}$, and so on.



I had in fact seen that the point O cannot be fixed except in the ellipse,[5] but as I did not ponder the question sufficiently, I thought, since OR is changed into Or for an infinitely close situation, $RS = dq$ had to be the differential of OR and consequently $CM + MO$ should have to be constant and the entire curve an ellipse; however, by the clarification which you added, Sir, it is clear that the differential of $CM + MO$ is Oo and therefore RO goes over into ro for a very close position, so that, if $RO = w$, ro has to be $w - dq + Oo$. It also results from the figure that, when CR is maximal, the points O and R on the axis coincide and that, whenever this happens, one necessarily has $CM = CN$.

The sum[6] of the series

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)} + \ldots = A$$

can be determined in the following manner: Let $b = c = d = \ldots = 0$, then this series equals

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)} \left(\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \ldots \right),$$

i. e., since $\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \ldots = \frac{1}{t-u}$,

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t-u)} = \frac{1}{t-u}.$$

Let $c = d = e = \ldots = 0$, then the same series will be

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)} \left(\frac{1}{t} + \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^3} + \frac{u^3}{t^4} + \ldots \right)$$

or

$$A = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \frac{u\,(u+a)\,(u+b)}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t-u)} = \frac{1}{t-u}.$$ [7]

Now c, d, e and all the other "oddities" have the same property if they are defined to be actual numbers as far as one wants to, while all the rest is set equal to 0.

I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Aug. 27 (new style), 1746.

[1] Cf. nº 101, notes 2–4, and nº 102, notes 1–2.
[2] This list has not been preserved; about the delivery of the books ordered by Goldbach, cf. nº 110, note 10, nº 111, notes 2 and 6, and nº 112, note 1.
[3] On the sign that has been rendered by $\div$ in the original text of the formula that follows, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.
[4] Cf. nº 108, note 9.
[5] Cf. nº 108, note 10.
[6] The text of Goldbach's copy starts here.
[7] The text of Goldbach's copy ends here.

110

Euler to Goldbach

Petersburg, September 20th, 1746

Sir,

in a letter from St. Petersburg I have been told that Her Imperial Majesty has bestowed on you a handsome estate in Livonia;[1] so I most humbly congratulate you on this, Sir, even if I am thus bereft of all hope of ever seeing you again. I have also been told that a rumour has been spread in Petersburg by which I am said to have accepted the proposals presented to me by the President, His Excellency Count Razumovskiĭ, for another employment at the Academy, and am actually going soon to return there. However I can assure you, Sir, that I unequivocally declined this offer[2] and that my situation here is so good that I should be most reckless if I thought even the least bit about changing it. Professor Krafft also wrote me that he has been made a similar offer, in which it was affirmed that I had already resolved to return there.[3] I am more than a little worried by this false rumour in case it should reach His Royal Majesty's ears.

The preface to Tome III of La Croze's *Correspondence* has indeed not yet appeared. Since that time, more books – as specified by the enclosed invoice – have been sent to you by Mr. Haude;[4] Mr. Haude asks you to just pay the money to Mr. Hainchelin in St. Petersburg when they have arrived.

For the mottoes which you kindly sent me for my future paper on the perturbations in the motions of Saturn and Jupiter I convey my humblest thanks; they are entirely suitable for the style of my paper; I chose the middle one as it seemed to agree most exactly with my presentation.[5] By now I have almost completely overcome all difficulties, which are of an entirely different kind than those which I had encountered in dealing with the Moon; for Saturn keeps nearly the same motion as if it was attracted by the Sun alone, and is only disturbed a little by Jupiter, whereas the motion of the Moon depends for the most part on the Earth's force and is somewhat altered by the force of the Sun. Both cases have in common that the perturbations are very small, and indeed this is the only means to cope with the difficulties of the calculation, since everything depends on approximations. On the other hand, there might possibly be cases where one could not determine the motion of a planet in any way. Obviously, if the Moon were very much farther distant from the Earth, then it should not be any more a satellite of the Earth, but should circulate in its orbit around the Sun as a primary planet, suffering however in this some perturbation by the Earth, as Saturn does by Jupiter; that motion could still be determined. However, if the Moon were just so far distant from the Earth that the two forces of the Sun and of the Earth should become almost equal, so that the Moon could neither be a primary planet nor a satellite of the Earth, its motion should be so irregular that it could not be determined in any manner whatsoever. Thus it is very fortunate for Astronomy that no such case occurs in our planetary system. If the Moon kept a distance of approximately 300 Earth radii instead of the actual 60, the above-mentioned case should occur. Moreover I also noted that, if the Moon (at its present distance) just had a greater eccentricity or if its orbit were inclined by a greater angle with respect to the ecliptic, then all the tricks applied until now should again not suffice to predetermine its position even approximately. Now since this case also does not occur in our system, it really appears as if this system has been established according to the bounds of our understanding and that such cases perhaps are to be found only in other systems, where the inhabitants possess a greater intellect and a deeper insight into analysis.[6] For by the law of mutual attraction, by which all motion in the world seems to be governed, the determination of the motion of those bodies is based on the integration of some differentio-differential equations; so the entire question depends on our ability in analysis.

That not only all the coefficients α, β, γ, etc. in the formula which you recently communicated, Sir, become infinite, but also they can be expressed by negative powers of the binomial $1-1$, I discovered in the following way:[7] Let the series a^A, a^B, a^C, a^D, a^E, a^F, etc. be proposed, in which the term corresponding to the index x is to be a^X; then

$$\begin{aligned} a^X &= a^A + \frac{x-1}{1}\left(a^B - a^A\right) + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2}\left(a^C - 2a^B + a^A\right) \\ &\quad + \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(a^D - 3a^C + 3a^B - a^A\right) + \dots \end{aligned}$$

Define $\dfrac{x-1}{1} = \mathfrak{A}$, $\dfrac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} = \dfrac{x-2}{2}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $\dfrac{x-3}{3}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$, $\dfrac{x-4}{4}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$ etc.; then

$$\begin{aligned} a^X = \; & a^A\,(1 - \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} + \mathfrak{D} - \dots) \\ & + a^B\,(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{B} + 3\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 5\mathfrak{E} - \dots) \\ & + a^C\,(\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C} + 6\mathfrak{D} - 10\mathfrak{E} + 15\mathfrak{F} - \dots) \\ & + a^D\,(\mathfrak{C} - 4\mathfrak{D} + 10\mathfrak{E} - 20\mathfrak{F} + 35\mathfrak{G} - \dots)\,. \end{aligned}$$

Now by setting $a^X = \alpha a^A + \beta a^B + \gamma a^C + \delta a^D + \dots$, one has

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{(x-1)}{1} + \frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} - \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots \\ &= (1-1)^{x-1}, \end{aligned}$$

as is obvious by developing.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(x-1)}{1} - \frac{2(x-1)(x-2)}{1\cdot 2} + \frac{3(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3} - \dots \\ &= (x-1)\left(1 - \frac{(x-2)}{1} + \frac{(x-2)(x-3)}{1\cdot 2} - \dots\right) = (x-1)(1-1)^{x-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{(x-1)\,(x-2)}{1\cdot 2}\Big(1 - \tfrac{3(x-3)}{3} + \tfrac{6(x-3)(x-4)}{3\cdot 4} - \tfrac{10(x-3)(x-4)(x-5)}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots\Big)\\ &= \frac{(x-1)\,(x-2)}{1\cdot 2}\,(1-1)^{x-3}\\ \delta &= \frac{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\,(1-1)^{x-4}\end{aligned}$$

and so on; thus one now just has to set $x = \frac{1}{2}$.

Your proof, Sir,[8] that

$$\frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \dots = \frac{1}{t-u},$$

is in my opinion the only one by which this odd identity can be proved. Meanwhile by supposing definite numbers for a, b, c, …, t and u, one often gets series whose summation one should not have surmised.

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I have the honour to be with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Sept. 20th, 1746.

PS.[9] The books which you lately requested[10] will be dispatched at the next opportunity.

[1] It is not known who wrote to Euler about the Tsarina's gift to Goldbach, but the information is correct: cf. nº 111, note 1.

[2] Euler had indeed courteously but firmly declined the offer Razumovskiĭ had made him through Teplov, in a letter sent to Schumacher on June 25th (R 2141: JW 2, p. 89–91). On August 16th Euler wrote to Schumacher again, asking him to explain to Razumovskiĭ his reasons for staying in Berlin (R 2143: *ibid.*, p. 91–93).

[3] G.W. Krafft indeed had told Euler on August 29th, in a letter written from Tübingen, that the officials of the Petersburg Academy, in order to induce him to return, pretended Euler had already agreed to do so. However Krafft, who did not believe this, urgently asked Euler not to hurry his decision, stating that he himself had roundly declined the offer since he did not want to become again dependent on "those gentlemen's good graces" (R 1290: cf. JW 3, p. 158).

[4] Cf. nº 108, note 1.

[5] According to Euler's request (cf. nº 108, note 4), Goldbach had apparently included in his answer several proposed devices for the prize paper Euler was preparing for the Paris Academy's 1748 contest (E. 120, *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*). Euler finally chose a motto based on Ovid: "Ponderibus librata suis per inane profundum / Sidera, quo vis alma trahit retrahitque, sequuntur" ("Flung by their own weights through the deep void, the stars follow whither sublime power draws them back and forth.").

[6] This passage strangely combines Euler's insight into the difficulties with which the general three-body problem is fraught, and one of those peculiar speculations on providence that are so characteristic of his worldview – a kind of epistemological "anthropic principle".

[7] Cf. nº 108, note 9, and nº 109, note 4.

[8] Cf. nº 109, note 6.

[9] This PS has been added in the margin.

[10] Cf. nº 109, note 2.

111
Goldbach to Euler
Petersburg, October (14th) 25th, 1746

Sir,

the news, which you heard from Petersburg, that Her Imperial Majesty graciously bestowed a considerable estate in Livonia on me is well-founded, since she personally conferred on me for my lifetime the estate of Wolmarshof, which yields an annual revenue of 1400 roubles.[1] With regard to the Academy's affairs, I entirely disentangled myself from them as far back as 1742.

The said books[2] have not yet been delivered to me, but they may well have already arrived; indeed, some books have been sent to Dr. Ribeiro which belong neither to him nor to me.

The series[3]

$$\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+\ldots$$

exhibits two properties: firstly, one can determine by it, given a sum and some arbitrary number of initial terms, the series for which the sum is given; and secondly, one can prove for innumerably many series that their sums are infinitely large, which should be very difficult without this aid. By equating, e. g., the single terms of the series

$$\frac{1}{t}+\frac{u}{t\,(t+a)}+\frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)}+\ldots$$

to the single terms of this one:[4]

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\pi$$

and then expressing all the quantities a, b, c, etc. in terms of u and constants, it must follow that the series

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots$$

becomes infinitely large just in the single case when $u=\dfrac{t\pi-1}{\pi}$.[5]

For the rest, I shall always be pleased to learn that both you and your dear family are staying well; I remain very respectfully, Sir, your devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, October 25th, 1746.

PS. This very moment I have learnt that the books I mentioned[6] do belong to Doctor Ribeiro, but about mine I have got no news.

[1] Cf. n° 110, note 1.
Wolmarshof (today Valmiermuiža in Northern Latvia, about 400 km from Petersburg) had been, since the 1720s, a stronghold of the *Brüdergemeine* or "Moravian Church", the Pietist movement centered on Herrnhut; a seminary for training teachers had been established there in 1737. However, in 1743, after some disputes with the local Lutheran ministers, an ukase by Tsarina Elizabeth – apparently inspired by Goldbach's superior Brevern, a Baltic landowner himself – banished the "brethren" from Livonia. The reallocation of the Wolmarshof estate may have been both a reward for Goldbach's loyal service – the revenue almost doubled his already substantial salary at the College of Foreign Affairs – and a measure to appease the local upper class by the appointment of a German-born Lutheran.

[2] Cf. n° 110, note 4.

[3] The text of Goldbach's copy starts here.

[4] There is a *lapsus calami*: the right-hand side of the equation that follows should be $\frac{\pi}{4}$.

[5] Here Euler noted in the margin: "*hoc casu litterae a, b, c decrescunt, ideoque extremus terminus seriei fit infinitus.*" ("In this case the letters a, b, c decrease, and therefore the final term of the series becomes infinite.").
The text of Goldbach's copy ends here.

[6] Cf. *supra* note 2.

112
Euler to Goldbach
Berlin, November 29th, 1746

Sir,

Mr. Haude is more than a little concerned about the books dispatched to you from here;[1] Mr. Hainchelin here has undertaken to enquire about them. Meanwhile some more books are ready here to be sent to you, Sir, at the first opportunity; among them there is the *Analysis of the Infinitely Small*,[2] which Mr. Haude only received after dispatching the first consignment; I also had him add a copy of my papers which have separately been printed here.[3] If Prince Shcherbatov passes through here on his travels,[4] we shall try to send these books along with him. Mr. Bousquet promised me that my *Introduction to the Analysis of Infinite Quantities* shall also be finished this winter for sure.[5] Moreover, this year some excellent books have been published in France, among them Mr. Bouguer's *Treatise on Ships*, in which most of what I had thought to have first discovered about this subject is contained;[6] then Mr. Le Monnier's *Introduction into Astronomy*, in which the most recent remarkable discoveries in this science are explained.[7] I also hope soon to be able to send my new *Theory of the Motion of the Moon* to press here;[8] I think I have gone so far with it that by the help of my tables prepared from it, one can determine the position of the Moon at any time so accurately that the error never amounts to more than 100 seconds, whereas according to the Cassinian tables the error can sometimes run to $15'$ and according to the best English tables to $6'$.[9] I shall now also begin to prepare new *Tables of the Motion of Saturn* after having determined the perturbation which is caused by Jupiter;[10] this is the more necessary as Mr. Le Monnier, in his book just cited, remarks that the position of Saturn, calculated by the best tables, sometimes differs by half a degree from the observed position.

Baron von Mardenfeld[11] has arrived here well, and His Majesty the King accorded to him an annual pension of 5000 Imperial thalers.

At first sight it indeed appears to be very peculiar that by the help of the series

$$\frac{1}{t-u} = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \ldots$$

one can indicate a series of which both the sum and some arbitrary number of initial terms are given;[12] however, if one takes into account that the series which arises in this way will not be regular, the same thing can also be effected in an infinity of other manners. If I am, for example, to indicate a series which has S for its sum and $a+b+c+d+e+f$ for its first six terms, I look for any series that sums to S; let $S = A+B+C+D+E+\ldots$ be such a series. Then one will have

$$\begin{aligned} S \;=\; & \overset{1}{a} + \overset{2}{b} + \overset{3}{c} + \overset{4}{d} + \overset{5}{e} + \overset{6}{f} + \overset{7}{(A-a)} + \overset{8}{(B-b)} + \overset{9}{(C-c)} + \overset{10}{(D-d)} \\ & + \overset{11}{(E-e)} + \overset{12}{\big(F-f\big)} + \overset{13}{G} + \overset{14}{H} \;+\; \ldots \end{aligned}$$

The other property of the said series – that with its help one can prove for innumerably many series that their sums are infinitely large – also seems to be very curious; however, in actually applying it, one always encounters series of a kind where the matter is clearly evident by itself. For if the series

$$\frac{1}{t-u} = \frac{1}{t} + \frac{u}{t\,(t+a)} + \frac{u\,(u+a)}{t\,(t+a)\,(t+b)} + \ldots$$

is true, the infinite-order term

$$\frac{u\,(u+a)\,(u+b)\,(u+c)\,(u+d)\,\ldots}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)\,(t+d)\,\ldots}$$

must equal 0, which occurs if

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \ldots = \infty.$$

If one now compares this series with the proposed series

$$S = A+B+C+D+E+F \;+\; \ldots,$$

one has $t = \dfrac{1}{A}$, $u = \dfrac{S-A}{AS}$, and moreover $a = \dfrac{1}{B} - \dfrac{1}{A} - \dfrac{A}{BS}$, $b = \dfrac{1}{C} - \dfrac{1}{A} - \dfrac{A+B}{CS}$, $c = \dfrac{1}{D} - \dfrac{1}{A} - \dfrac{A+B+C}{DS}$, etc.; consequently $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \ldots$ will be equal to

$$\begin{aligned} & \frac{ABS}{A\,(S-A)-BS} + \frac{ACS}{A\,(S-A-B)-CS} + \frac{ADS}{A\,(S-A-B-C)-DS} \\ & + \frac{AES}{A\,(S-A-B-C-D)-ES} + \ldots \end{aligned}$$

If now the summation of the series is correct, one has $S-A-B-C-D-\ \ldots = 0$, and therefore in this case all infinite-order terms equal[13] $\dfrac{AZS}{A\cdot 0 - ZS} = -A$; thus they are all of finite magnitude. This becomes even more evident by the form

$$\frac{u\,(u+a)\,(u+b)\,(u+c)\ \ldots}{t\,(t+a)\,(t+b)\,(t+c)\ \ldots,}$$

which in this application becomes

$$\frac{S-A}{S}\cdot\frac{S-A-B}{S-A}\cdot\frac{S-A-B-C}{S-A-B}\cdot\frac{S-A-B-C-D}{S-A-B-C}\cdot\ldots;$$

consequently the value, when the continuation to infinity has been performed, equals

$$=\frac{S-A-B-C-D-E-\ \ldots}{S},$$

and this obviously equals 0 if the summation is correct.

A short time ago, a mathematician called Jacob Adami in Eastern Frisia asked me[14] for the interpolation of the series

$$x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots = s;$$

this series expresses the tangent corresponding to the arc x and arises by inverting the series

$$x = s-\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{5}s^5-\frac{1}{7}s^7+\frac{1}{9}s^9-\ldots$$

I replied to him that the term intermediate between the first, x, and the second, $\frac{1}{3}x^3$, equals

$$\frac{16}{\pi^3}x^2\left(1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}+\ldots\right).$$

Then the term intermediate between the second, $\frac{1}{3}x^3$, and the third, $\frac{2}{15}x^5$, equals

$$\frac{64}{\pi^5}x^4\left(1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^5}+\ldots\right).$$

Further, the term intermediate between the third, $\frac{2}{15}x^5$, and the fourth, $\frac{17}{315}x^7$, equals

$$\frac{256}{\pi^7}x^6\left(1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}+\ldots\right).$$

All my family asks to be recommended to your constant goodwill, and I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Nov. 29th, 1746.

[1] Cf. n° 111, note 2.

[2] This work cannot be identified with certainty. It is of course possible that Goldbach had ordered a copy of L'Hôpital's fundamental treatise, but this had last been printed in 1716; so it is at least as likely that the work he had asked for was the French translation of Edmund Stone's "sequel" on integral calculus, which bears almost the same title: this had been printed at Paris in 1735.

[3] The discussion of one of these texts half a year later (n° 117, note 1) shows that Euler refers to his *Opuscula varii argumenti* (E. 80).

[4] It is not clear to which member of the widespread princely family – "Knäß" or "Knäs" is a then current transliteration of the Russian word князъ (prince) – Euler refers; Mikhail Mikhaĭlovich Shcherbatov, later a leading exponent of the Russian Enlightenment, was then only 13 years old.

[5] In fact, the *Introductio* (E. 101/102) was delivered by Bousquet only in 1748 (cf. n° 129, note 2, and n° 130, note 9).

[6] On Bouguer's *Traité du navire*, cf. n° 130, note 10.

[7] Le Monnier's work, which is actually titled *Institutions astronomiques*, and the precise measurements reported in it became important in the research on planetary and lunar motion which occupied Euler in the following years (cf., among others, n° 133, notes 2 and 3).

[8] The *Theoria motus Lunae* (E. 187) still had to undergo substantial changes and finally appeared only in 1753.

[9] Jacques (II) Cassini's data on lunar motion are contained in his 1740 *Tables astronomiques*. With regard to English astronomical tables, Euler had written a few months earlier to J.C. Wettstein (R 2750 from July 16th, 1746: JW 3, p. 260) that he only knew those by Leadbetter and Brent. Leadbetter's *A Compleat System of Astronomy* (1728), *Astronomy of the Satellites of the Earth, Jupiter and Saturn* (1729) and *Uranoscopia* (1735) actually figure in the catalogue of Euler's private library; his *Astronomy: Or, the True System of the Planets Demonstrated* (1727) and *A Treatise of Eclipses of the Sun and Moon* (1731) also contain tables based on Newton's theory. Brent's *The Compendious Astronomer* had appeared in 1741. Halley's tables, which Euler asked Wettstein about, were published only in 1749.

[10] Cf. n° 110, note 5.

[11] Axel von Mardefeld had negotiated, as Prussian ambassador in Petersburg, Euler's contract with Berlin; after his return, he was appointed Second Cabinet Minister of Foreign Affairs.

[12] Cf. n° 111, note 3.

[13] In the equation that follows, Z denotes a "term of infinite index".

[14] Eleven letters from the lawyer and amateur mathematician Jacob Adami at Aurich (Eastern Frisia) to Euler, written between 1746 and 1759, have been preserved. Euler here refers to the first one, written on August 16th, 1746 (R 2); Euler explained the matter to Adami's satisfaction in a letter sent on September 10th, as we know from Adami's reply R 3.

113

Euler to Goldbach

Berlin, April 1st, 1747

Sir,

I attribute the fact that you have not honoured me for such a long time by a letter rather to the overload of your obligations than to some inadvertently committed offence by which I might have become unworthy of your favour. At least I hope from all my heart that you have not been prevented by an indisposition.

I therefore take the liberty to report to you, Sir, that finally with Count von Finkenstein's departure[1] the long-desired opportunity has been found for sending you the two remaining books as specified by the enclosure;[2] you either have already received them, Sir, or shall receive them very soon.

Recently I discovered a very marvellous order in the numbers which represent the sums of the divisors of the natural numbers; this appeared the more remarkable to me as an important connection with the order of the prime numbers seems to be hidden there.[3] For this reason, Sir, please award this idea some attention.

If n denotes any positive whole number, let $\mathbf{S}\,n$ signify the sum of all divisors of this number n. Thus one will have

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{S}\,1 = 1 & \mathbf{S}\,9 = 1+3+9 = 13 \\
\mathbf{S}\,2 = 1+2 = 3 & \mathbf{S}\,10 = 1+2+5+10 = 18 \\
\mathbf{S}\,3 = 1+3 = 4 & \mathbf{S}\,11 = 1+11 = 12 \\
\mathbf{S}\,4 = 1+2+4 = 7 & \mathbf{S}\,12 = 1+2+3+4+6+12 = 28 \\
\mathbf{S}\,5 = 1+5 = 6 & \mathbf{S}\,13 = 1+13 = 14 \\
\mathbf{S}\,6 = 1+2+3+6 = 12 & \mathbf{S}\,14 = 1+2+7+14 = 24 \\
\mathbf{S}\,7 = 1+7 = 8 & \mathbf{S}\,15 = 1+3+5+15 = 24 \\
\mathbf{S}\,8 = 1+2+4+8 = 15 & \mathbf{S}\,16 = 1+2+4+8+16 = 31 \\
 & \qquad \text{etc.}
\end{array}$$

Assuming the sign $\mathbf{S}$ to have this meaning, I discovered that

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}\,n = \mathbf{S}\,(n-1) \quad &+ \quad \mathbf{S}\,(n-2) - \mathbf{S}\,(n-5) - \mathbf{S}\,(n-7) + \mathbf{S}\,(n-12) \\
&+ \quad \mathbf{S}\,(n-15) - \mathbf{S}\,(n-22) - \mathbf{S}\,(n-26)\,\ldots,
\end{aligned}$$

where there are two consecutive + and − signs every time. The order of the numbers 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. that are to be subtracted becomes at once apparent from considering their differences as an alternating sequence, like this:

$$\begin{array}{lccccccccccccccccc}
 & 1, & & 2, & & 5, & & 7, & & 12, & & 15, & & 22, & & 26, & & 35, \\
\text{differences} & & 1, & & 3, & & 2, & & 5, & & 3, & & 7, & & 4, & & 9, &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 & 40, & & 51, & & 57, & & 70, & & 77, & & 92, & & 100, & & 117, & & 126, & & \ldots \\
5, & & 11, & & 6, & & 13, & & 7, & & 15, & & 8, & & 17, & & 9, & &
\end{array}$$

Further it is to be noted that in any instance no more terms must be taken than up to where one arrives at negative numbers; and if a term $\mathbf{S}\,0$ occurs, one must write for this the given number n itself, so that in any instance $\mathbf{S}\,0 = n$. The following examples will serve to clarify the truth of this theorem:

If		one has		
1. $n = 1$;	$\mathbf{S}\,1 =$	$\mathbf{S}\,0$		$= 1$
2. $n = 2$;	$\mathbf{S}\,2 =$	$\mathbf{S}\,1 + \mathbf{S}\,0$	$= 1 + 2$	$= 3$
3. $n = 3$;	$\mathbf{S}\,3 =$	$\mathbf{S}\,2 + \mathbf{S}\,1$	$= 3 + 1$	$= 4$
4. $n = 4$;	$\mathbf{S}\,4 =$	$\mathbf{S}\,3 + \mathbf{S}\,2$	$= 4 + 3$	$= 7$
5. $n = 5$;	$\mathbf{S}\,5 =$	$\mathbf{S}\,4 + \mathbf{S}\,3 - \mathbf{S}\,0$	$= 7 + 4 - 5$	$= 6$
6. $n = 6$;	$\mathbf{S}\,6 =$	$\mathbf{S}\,5 + \mathbf{S}\,4 - \mathbf{S}\,1$	$= 6 + 7 - 1$	$= 12$
7. $n = 7$;	$\mathbf{S}\,7 =$	$\mathbf{S}\,6 + \mathbf{S}\,5 - \mathbf{S}\,2 - \mathbf{S}\,0$	$= 12 + 6 - 3 - 7$	$= 8$
8. $n = 8$;	$\mathbf{S}\,8 =$	$\mathbf{S}\,7 + \mathbf{S}\,6 - \mathbf{S}\,3 - \mathbf{S}\,1$	$= 8 + 12 - 4 - 1$	$= 15$
9. $n = 9$;	$\mathbf{S}\,9 =$	$\mathbf{S}\,8 + \mathbf{S}\,7 - \mathbf{S}\,4 - \mathbf{S}\,2$	$= 15 + 8 - 7 - 3$	$= 13$
10. $n = 10$;	$\mathbf{S}\,10 =$	$\mathbf{S}\,9 + \mathbf{S}\,8 - \mathbf{S}\,5 - \mathbf{S}\,3$	$= 13 + 15 - 6 - 4$	$= 18$
11. $n = 11$;	$\mathbf{S}\,11 =$	$\mathbf{S}\,10 + \mathbf{S}\,9 - \mathbf{S}\,6 - \mathbf{S}\,4$	$= 18 + 13 - 12 - 7$	$= 12$
12. $n = 12$;	$\mathbf{S}\,12 =$	$\mathbf{S}\,11 + \mathbf{S}\,10 - \mathbf{S}\,7 - \mathbf{S}\,5 + \mathbf{S}\,0$	$= 12 + 18 - 8 - 6 + 12$	$= 28$
		etc.		

The reason for this order is the less apparent since one does not see in what relationship the numbers 1, 2, 5, 7, 12, 15, etc. stand to the nature of divisors. Also I cannot boast about having a rigorous proof; however, even if I had none at all, one could not doubt the truth, as this rule always held up to more than 300. Nonetheless, I have deduced this theorem from the following proposition:

If

$$s = (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^6\right)\left(1-x^7\right)\ \ldots \text{ to infinity,}$$

then also

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots,$$

where the exponents of x are the very same numbers that occurred above; and if this proposition is correct – as I do not doubt, even if I still lack a rigorous proof for it – then the stated theorem is also entirely well-founded. For from those two expressions for s, I get first

$$\frac{ds}{s} = \frac{-\,dx}{1-x} - \frac{2x\,dx}{1-x^2} - \frac{3x^2dx}{1-x^3} - \frac{4x^3dx}{1-x^4} - \frac{5x^4dx}{1-x^5} - \ldots$$

and then

$$\frac{ds}{s} = \frac{-\,dx - 2x\,dx + 5x^4dx + 7x^6dx - 12x^{11}dx - 15x^{14}dx + \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots};$$

consequently,

$$\frac{1 + 2x - 5x^4 - 7x^6 + 12x^{11} + 15x^{14} - \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots}$$
$$= \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{4x^3}{1-x^4} + \frac{5x^4}{1-x^5} + \frac{6x^5}{1-x^6} + \ldots;$$

but by transforming each of these last fractions into a geometrical progression, one obtains for them

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
1+ & x+ & x^2+ & x^3+ & x^4+ & x^5+ & x^6+ & x^7+ & x^8+ & x^9+ & x^{10}+ & x^{11}+ & x^{12}+ & \dots \\
 & +2x & & +2x^3 & & +2x^5 & & +2x^7 & & +\ 2x^9 & & +\ 2x^{11} & & \\
 & & +3x^2 & & & +3x^5 & & & +3x^8 & & & +3x^{11} & & \\
 & & & +4x^3 & & & & +4x^7 & & & & +4x^{11} & & \\
 & & & & +5x^4 & & & & & +\ 5x^9 & & & & \\
 & & & & & +6x^5 & & & & & & +6x^{11} & & \\
 & & & & & & +7x^6 & & & & & & & \\
 & & & & & & & +8x^7 & +9x^8 & +10x^9 & +11x^{10} & +12x^{11} & +13x^{12} & +\ \dots \\
\hline
\end{array}
$$

i. e.,

$$1+\ \mathbf{S}\,2\ x+\mathbf{S}\,3\ x^2+\mathbf{S}\,4\ x^3+\mathbf{S}\,5\ x^4+\mathbf{S}\,6\ x^5+\mathbf{S}\,7\ x^6+\mathbf{S}\,8\ x^7+\mathbf{S}\,9\ x^8\ +\ \dots$$

$$=\frac{1+2x-5x^4-7x^6+12x^{11}+15x^{14}-22x^{21}-26x^{25}+35x^{34}+\dots}{1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-\dots},$$

and from this the said theorem easily follows. But at the same time one sees that it is not so obvious and without doubt more beautiful topics must lie hidden there.

With this, I now most obediently recommend myself to your constant, highly esteemed favour and goodwill, being with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

Leonhard Euler

Berlin, April 1st, 1747.

[1] Karl Wilhelm Graf Finck von Finckenstein, who was also a honorary member of the Berlin Academy, had been named Prussian ambassador to the Russian Court.

[2] This list has not been preserved. The books may well be those mentioned in n° 112, note 2.

[3] Here Euler presents his famous recursion formula for the sum of the divisors $\mathbf{S}\,(n)$ of an integer n, which today is usually denoted by $\sigma(n)$. In E. 100, Euler had studied amicable numbers; in E. 152 (also from 1747, but printed only in 1750), he proved that $\sigma(mn) = \sigma(m)\,\sigma(n)$ for coprime integers m, n. The power series expansion of $\prod(1-x^n)$ was studied in E. 158 and E. 191.
The numbers 1, 5, 12, … are the "pentagonal numbers" $f_m = \frac{1}{2}(3m^2 - m)$ with $m = 1$, 2, 3, … (called thus because of their occurrence in patterns of dots arranged along the sides of regular pentagons); 2, 7, 15, … are "pentagonal numbers with negative index" $m = -1$, -2, -3 … (see n° 102, n° 144). The content of the present letter was presented to the Berlin Academy in June 1747 and printed as E. 175 in Formey's journal *Bibliothèque impartiale* for 1751. Finally, Euler's formula for $\mathbf{S}\,(n)$ and its proof were published in 1760 in the Petersburg *Novi Commentarii* as E. 243 and E. 244.
For different proofs of Euler's identity, see Uspensky / Heaslet 1939. An extensive case study of its genesis and its connection with identities for Jacobi's theta series was presented by Jordan Bell in 2010.

114

Goldbach to Euler

Petersburg, April (4th) 15th, 1747

Sir,

the only reason for which I have not written to you for several months is the fact that during that time nothing occurred to me which I should have thought worthy of being reported to you. Nonetheless I am most obliged to you, Sir, both for the letter you addressed to me then and for your last letter of April 1st, and I humbly thank you for the two books you sent;[1] the money shall be paid out at once to the person who will deliver them to me.

The observation which you communicated to me, Sir,[2] appears to me to be demonstrated already by the cited induction to such a degree that one could bet a hundred against one on its truth. But besides this, you already noted a long time ago[3] that

$$\begin{aligned} & A &&= (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\ \ldots \\ = \ & B &&= 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\ldots, \end{aligned}$$

and I recall that I drew the consequence – very easy by itself – that by doubling the powers of x in B and defining

$$C = 1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\ldots,$$

one necessarily has[4]

$$\frac{C}{B} = (1-x)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^7\right)\ \ldots .$$

I am not nearly as convinced of the truth of another theorem, namely that every number consists of three triangular numbers or that any number of the form $8m+3$ is a sum of three squares.[5] You already told me several years ago, if I rightly remember, that according to his own report, Fermat had been able to prove this, but I think inductions are inadequate for a proof of that kind, since one can indicate innumerable examples of values for m which are indeed correct but do not contribute to the generality of the theorem (as, e. g., when m has the form b^2+bc+c^2).[6] Meanwhile, if one could just prove that $(2p-1)^2+42$ always yields a sum of three squares (I only tested this up to the case $p=17$), I should think a good start on a complete proof of the theorem had been made; however, I do not see how one proposes to prove it without discovering at the same time a method by which the three squares themselves can be indicated. On the other hand, it is not nearly as difficult to prove that any number consists of three triangular numbers, one taken positively and two negatively.[7]

I have taken the liberty to send you, Sir, the enclosed list of some small treatises;[8] please forward it to Mr. Haude if he does not mind procuring such trifles. In case no other suitable opportunity arises, the parcel can be sent here next summer by the ships from Lübeck.

From the *Zeitungen von gelehrten Sachen* it can be seen that a certain Mr. Mitzler made some notes on your book about music, Sir;[9] as they are entirely unknown to me, please tell me in a few words what you think of them. Mr. Knutzen's new *Logic*, which I have also not yet seen, is much praised in the scholarly journals.[10] I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, April 15th, 1747.

[1] Cf. nº 113, note 2.
[2] Cf. nº 113, note 3.
[3] Cf. nº 74, note 13.
[4] In the formula that follows, the left-hand side should be $\frac{B}{C}$. As Bell (2010), p. 320, surmises, the error may be due to the change in the signification of the letters A and B with respect to Goldbach's earlier remark on analogous series (cf. nº 75, note 6).
[5] Euler had indeed noted the (easily shown) equivalence of the two statements in an earlier letter: cf. nº 74, text after note 8.
[6] Indeed, if $m = b^2+bc+c^2$, then $8m+3 = 8b^2+8bc+8c^2+3 = (2b+2c+1)^2+(2b-1)^2+(2c-1)^2$.
[7] See *supra* nº 53, note 10.
[8] This order list has not been preserved. In nº 117, Euler mentions that Haude is dealing with it; cf. also nº 119, note 4, nº 120, note 1, and nº 121, note 1.
[9] The scholar and musicologist Lorenz Mizler had already reviewed Euler's *Tentamen novae theoriae Musicae* (E. 33) in detail in the Leipzig periodical *Zuverlässige Nachrichten* in 1741. Now, in vol. III of his collection *Musikalische Bibliothek*, he had presented a partial translation of Euler's book into German with ample and very critical notes of his own (a last instalment was to follow in 1754). Goldbach apparently saw the announcement of Mizler's publication in the March 16th, 1747, issue of *Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen*, which says that Mizler has started translating Euler's work and added notes "which bear sufficient witness to his [i. e., Mizler's] strong insight" ("... welche von seiner starken Einsicht ein sattsames Zeugnis ablegen").
Mizler and his analysis of Euler's music theory have recently been the object of an extensive study: see Felbick 2012.
See also Euler's reply nº 115, note 11.
[10] Goldbach's vague reference possibly points to the (very favourable) review in the March 1747 issue of the Leipzig journal *Neuer Büchersaal*, the only one that we have been able to identify.
The Königsberg philosopher Martin Knutzen had actually sent several copies of his textbook *Elementa Philosophiae rationalis seu Logicae cum generalis tum specialioris* to Euler in 1746, asking for his opinion and for distribution within the Berlin Academy in exchange for other books (cf. Knutzen's letters R 1207–1217 to Euler).
See also Euler's reply nº 115, note 12.

115
Euler to Goldbach
Berlin, May 6th, 1747

Sir,

Mr. Haude shall not fail to send at the next opportunity the books which you request.[1]

I remember well the remark which you had made[2] on occasion of the identity

$$A=(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\ \ldots\ =B=1-x-x^2+x^5+x^7-\ldots,$$

namely that, if

$$C=1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\ldots,$$

then[3]

$$\frac{C}{B}=(1-x)\left(1-x^3\right)\left(1-x^5\right)\ \ldots;$$

however I have not been able to demonstrate correctly the equality between formulae A and B, either by this or by other considerations. In fact I concluded only by induction that A equals B and that in B the exponents of x really proceed according to the series 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, etc., even if I did continue the induction so far that I can take the matter to be entirely true. I should however be very keen on seeing a direct proof of that fact, which should certainly open a path towards the discovery of many other marvellous properties of numbers; but up to now all the effort I made has been in vain.[4]

I have likewise not yet been able to prove the said theorem of Fermat's,[5] that every number is a sum of three triangular numbers, which is indeed based on the fact that any number of the form $8m+3$ can be split into three squares. I have at least reduced this theorem to the following statement: An arbitrary number m being proposed, one can always subtract a triangular number from it in such a way that four times the remainder, increased by 1, is a prime number.[6] If this statement could be proved, the first one should also be beyond any doubt. For the sake of clarity I shall add here several examples of this:

$m-$ triangular	remainder	$4\cdot$ remainder $+1$	
$1-0$	1	5	prime
$1-1$	0	1	prime
$2-0$	2	9	not prime
$2-1$	1	5	prime
$3-0$	3	13	prime
$3-1$	2	9	not prime
$3-3$	0	1	prime

$m -$ triangular	remainder	$4 \cdot$ remainder $+ 1$	
$4-0$	4	17	prime
$4-1$	3	13	prime
$4-3$	1	5	prime
$5-0$	5	21	not prime
$5-1$	4	17	prime
$5-3$	2	9	not prime
$6-0$	6	25	not prime
$6-1$	5	21	not prime
$6-3$	3	13	prime
$6-6$	0	1	prime
$7-0$	7	29	prime
$7-1$	6	25	not prime
$7-3$	4	17	prime
$7-6$	1	5	prime
$8-0$	8	33	not prime
$8-1$	7	29	prime
$8-3$	5	21	not prime
$8-6$	2	9	not prime
$9-0$	9	37	prime
$9-1$	8	33	not prime
$9-3$	6	25	not prime
$9-6$	3	13	prime

Up to now it has always been the case that at least one prime number results; and since for greater numbers there are ever more cases, it is very likely that among these there is always at least one prime to be found – or at least a composite number which is a square or which can be split into two squares.[7] In fact, it is not necessary, in order to prove the first theorem, that in the latter there is a prime number among the fourfold remainders $+ 1$; if there is just either some square or some number that is not divisible by any number of the form $4p-1$, the proof of the former can be deduced from this. The reason for this is based on the following: I can now prove that

1. any prime number of the form $4n+1$ is a sum of two squares.

2. any non-prime number of the form $4n+1$, if only it has no divisor of the form $4p-1$, is also a sum of two squares.

Let now $4n+1$ be a number which is either prime or at least has no divisor of the form $4p-1$; then $4n+1$ and therefore also its double $8n+2$ are sums of two squares. So if $8m+3 = 8n+2+a^2$, $8m+3$ can be split into three squares. Thus one has $8m+1 = 8n+a^2$; set $a = 2x+1$, then $8m = 8n+4x^2+4x$ and $n = m - \frac{1}{2}\left(x^2+x\right)$. So, m denoting any number, if it is just always possible to subtract from m a triangular number in such a way that the remainder multiplied by 4 and increased by 1 has no divisor of the form $4p-1$, then $8m+3$ can be split into three squares.

On the other hand, for the fact that any prime number of the form $4n+1$ is always a sum of two squares I finally found, after a lengthy effort, the following proof, which is based on several preliminary propositions that are commonly taken to be true but for which I had not yet seen any valid proof and consequently had to seek one.[8]

Theorem 1. The product of two numbers which are both sums of two squares is also a sum of two squares.

Proof. Let the two proposed numbers be a^2+b^2 and c^2+d^2; then their product will be

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\,,$$

so it is a sum of two squares in two ways.

Indeed this proof is common knowledge, but those that follow are not.

Theorem 2. If a sum of two squares a^2+b^2 (where a and b are relatively prime numbers) is divisible by some prime number of the form p^2+q^2, then the quotient resulting from the division will also be a sum of two squares.

(This theorem does not necessarily follow from the last one; for one should be deceived if from the statement: "the product of two even numbers is even", one wanted to conclude "therefore, if an even number is divisible by an even number, then the quotient will also be even". How is one to know that this kind of conclusion is correct here? For this reason, in my opinion the following proof is needed.)

Proof. Since a^2+b^2 is divisible by p^2+q^2, $\left(a^2+b^2\right)p^2 = a^2p^2+b^2p^2$ will also be divisible; but $a^2\left(p^2+q^2\right)$ is also divisible by p^2+q^2, so the difference $b^2p^2-a^2q^2$, i.e., $(bp+aq)\,(bp-aq)$, is divisible by p^2+q^2. So, since p^2+q^2 is a prime number, either $bp+aq$ or $bp-aq$ will be divisible by p^2+q^2. Let therefore $bp\mp aq=mp^2+mq^2$; then $b=mp+\dfrac{mq^2\pm aq}{p}$. So, since $mq^2\pm aq$ must be divisible by p, whereas q and p are necessarily relatively prime numbers (otherwise p^2+q^2 should not be prime), $mq\pm a$ must be divisible by p. Let therefore $mq\pm a=np$; then $\pm a=np-mq$ and $b=mp+nq$. But by substituting these values one obtains $a^2+b^2=\left(m^2+n^2\right)\left(p^2+q^2\right)$ and $\dfrac{a^2+b^2}{p^2+q^2}=m^2+n^2$. Q. E. D.

Theorem 3. If a sum of two squares a^2+b^2 (where a and b still are relatively prime numbers) were divisible by some number x which is not a sum of two squares, then the quotient should either not be a sum of two squares, or it should certainly have some factor which cannot be a sum of two squares.

Proof. Let the quotient be z; because of $\dfrac{a^2+b^2}{x}=z$, one will have $\dfrac{a^2+b^2}{z}=x$. Now if z were a prime of the form p^2+q^2, then x also should be of the same form, contrary to the hypothesis. If z were the product of several primes of that kind, $\left(p^2+q^2\right)\left(r^2+s^2\right)\left(t^2+u^2\right)$, then because of $\dfrac{a^2+b^2}{p^2+q^2}=c^2+d^2$, $\dfrac{c^2+d^2}{r^2+s^2}=e^2+f^2$, and $\dfrac{e^2+f^2}{t^2+u^2}=g^2+h^2=\dfrac{a^2+b^2}{z}$ one should also have $x=g^2+h^2$, contrary to the hypothesis. Therefore, since the quotient z can neither be a prime of the form p^2+q^2 nor a product of several such primes, z must either be a number which is not a sum of two squares or have some factor which is not a sum of two squares. Q. E. D.

Theorem 4. A sum of two relatively prime squares a^2+b^2 cannot be divided by any x that is not itself a sum of two squares.

Proof. Assume x not to be a sum of two squares and let $a=mx\pm c$, $b=nx\pm d$; then m and n can always be chosen in such a way that $c<\frac{1}{2}x$ and $d<\frac{1}{2}x$. However, since a^2+b^2 is supposed to be divisible by x, c^2+d^2 will also be divisible by x, and since $c^2+d^2<\frac{1}{2}x^2$, the quotient will be smaller than $\frac{1}{2}x$; so there is some number z, not a sum of two squares, by which c^2+d^2 is also divisible (*Theorem 3*). Define again $c=mz\pm e$ and $d=nz\pm f$; then $e<\frac{1}{2}z$ and $f<\frac{1}{2}z$; so $e^2+f^2<\frac{1}{2}z^2$ is divisible by z; therefore the quotient (by which e^2+f^2 is again divisible) is smaller than $\frac{1}{2}z$, and this is either itself no sum of two squares or has some factor of that kind. So there is a number, not a sum of two squares, which is smaller than $\frac{1}{2}z$ and divides $e^2+f^2<\frac{1}{2}z^2$. In this way, one should finally arrive at some smallest number which is not a sum of two squares – say 3 – and which divides some sum of two squares g^2+h^2 smaller than $\frac{1}{2}g$; however this is absurd, so it follows that a sum of two squares a^2+b^2 admits no divisor x which is not itself a sum of two squares. Q. E. D.

Corollary 1. Any divisor of a sum of two relatively prime squares is therefore itself a sum of two squares. I am stating this for those sums of two squares a^2+b^2 whose roots a and b are relatively prime numbers; for if, e. g., $a=mx$ and $b=nx$, then a^2+b^2 can be divisible by any number x whatsoever.

Corollary 2. So any number x which is not a sum of two squares in whole numbers cannot either be a sum of two squares in fractions. For if $x=\dfrac{p^2}{q^2}+\dfrac{r^2}{s^2}=\dfrac{p^2s^2+q^2r^2}{q^2s^2}$, then $q^2s^2=\dfrac{p^2s^2+q^2r^2}{x}$; so x should divide the sum of two squares $p^2s^2+q^2r^2$, and consequently x must also be a sum of two squares in whole numbers.

I had in vain searched for a proof of this fact for a long time; I found this only recently, and I think it can lead to many other matters.

Theorem 5. If $4n+1$ is a prime number, then it is certainly a sum of two squares.

Proof. Indeed, if $4n+1$ is a prime number, I have shown that the formula $a^{4n}-b^{4n}$ will always be divisible by $4n+1$, whatever numbers are substituted for a and b. Thus, either $a^{2n}+b^{2n}$ or $a^{2n}-b^{2n}$ will be divisible by $4n+1$. But there are always innumerable instances for which the formula $a^{2n} - b^{2n}$ is not divisible by $4n + 1$;[9] in those instances, therefore, the formula $a^{2n} + b^{2n}$ will be divisible by $4n + 1$. But $a^{2n} + b^{2n}$ is a sum of two squares, therefore so is its divisor $4n + 1$. Q. E. D.

Theorem 6. A number a which is a sum of two squares in two ways is not prime.

Proof. Indeed, let $a = p^2 + q^2 = r^2 + s^2$ and set $p = r + x$, $q = s - y$; then

$$p^2 + q^2 = r^2 + 2rx + x^2 + s^2 - 2sy + y^2 = r^2 + s^2,$$

so $2sy = x^2 + y^2 + 2rx$ and $s = \dfrac{x^2 + y^2 + 2rx}{2y}$; therefore

$$\begin{aligned} a = r^2 + s^2 &= \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2 + 4rx\left(x^2 + y^2\right) + 4r^2x^2}{4y^2} + r^2 \\ &= \frac{\left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2 + 4rx + 4r^2\right)}{4y^2}. \end{aligned}$$

So the number a necessarily has at least two factors, both of which are sums of two squares. Q. E. D.

The theorem “Any number can be split into four squares” depends on this: “Any number of the form $4m + 2$ can always be split into two parts such as $4x + 1$ and $4y + 1$, none of which has any divisor of the form $4p - 1$” (which does not appear difficult, although I cannot yet prove it).[10] For then both $4x + 1$ and $4y + 1$ are sums of two squares, and therefore $4m + 2$ is a sum of four squares. Consequently, so is its double, $8m + 4$, and the fourth part of this, $2m + 1$, and thus every odd number; so the consequence is easily extended to all numbers.

I have not seen Mr. Mitzler’s critique of my *Music*, except for what is in the *Zeitungen von gelehrten Sachen*; by this I inferred that it is for the most part ill-founded, as the author did not sufficiently understand my ideas.[11] In Prof. Knutzen’s *Logic* I have not been able to discover much that is exceptional;[12] the least one can say is that it falls far short of the one which Prof. Segner in Göttingen published.[13] This year the Paris Academy again awarded me half the prize, which amounts to 2000 *livres*.[14]

With this I recommend myself most obediently to your constant goodwill, remaining with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, May 6th, 1747.

Mr. Buffon in Paris has invented a new kind of burning glass, by which he set alight some wood at a distance of 200 feet, and this distance can even be increased at will.[15]

[1] Cf. n° 114, note 8.

[2] Cf. n° 114, note 3.

[3] Euler has adopted Goldbach's mistake (see n° 114, note 4); in the formula that follows, the left-hand side should be $\frac{B}{C}$.

[4] Euler's study of this remarkable identity goes back at least to 1740 (see n° 74, note 13); in 1750, he finally discovered a proof that was published in E. 244 (see n° 144, note 7).

[5] Cf. n° 114, note 5.

[6] This conjecture is in fact much stronger and still undecided (it has been checked by brute force for all integers $\leq 10^6$). It is equivalent to the statement that every number $8m+3$ can be written in the form $(2x+1)^2 + 2p$ for a prime p (which necessarily has the form $p = 4n+1$). In the 1770s, Euler again studied this problem in E. 566.

[7] This weaker statement is obviously equivalent to Fermat's original conjecture and to the Four Squares Theorem.

[8] The Theorems 1–6 that follow and their proofs were published without substantial modification in E. 228. Much of the argument had already been clear to Euler five years earlier (cf. n° 47, note 4); in particular he had been aware that he would have to prove the statement of Theorem 4 below, and confident that this could be done; but the argument by infinite descent given here had eluded him for a long time (cf. also n° 74, n° 87). The analogous problem for four squares was to give him even more trouble (cf. n° 156), and it was finally Lagrange who overcame the difficulty.

[9] This statement remained unproven at this point; did somebody direct Euler's attention to this gap when he finally presented his reflections to the Berlin Academy in March 1749? In any case, in E. 228, the *Propositio V* substantially identical to the one given here is followed, instead of a proof, by an "Attempt at a proof" (*Tentamen demonstrationis*) and a caution disguised as a corollary: "This demonstration would be perfect if it could be shown that there always exist values which can be substituted for a and b so that the formula $a^{2n} - b^{2n}$ is not divisible by the prime number $4n+1$; for in these same cases the formula $a^{2n} + b^{2n}$ is necessarily divisible by $4n+1$." ("Demonstratio haec esset perfecta, si modo demonstrari posset, semper eiusmodi existere valores pro a et b substituendos, quibus formula $a^{2n} - b^{2n}$ non fiat divisibilis per numerum primum $4n+1$; iisdem enim casibus formula $a^{2n} + b^{2n}$ necessario est divisibilis per $4n+1$.").
Soon after the 1749 meeting of the Berlin Academy just mentioned, Euler was able to fill the gap: see n° 138, note 2, and E. 241 (published only in 1760).

[10] Again the modification (which Euler also discussed in E. 566) is stronger than the original theorem and has not been proved. See also n° 165, where Euler attributes to Goldbach the even stronger form of the statement where $4x+1$ and $4y+1$ are required to be prime.
Euler's claim is "almost" equivalent to the Four Squares Theorem for numbers of the form $4m+2$. In fact, if $4m+2 = a^2+b^2+c^2+d^2$, then congruences modulo 8 show that two numbers on the right hand side, say a and b, are even and the other two are odd. Now $a^2+c^2 = 4x+1$ and $b^2+d^2 = 4y+1$ satisfy Euler's conditions, except when a and c (or b and d) have a common prime factor of the form $4n-1$.
Hermite considered a similar problem in 1853 when he stated that any odd number can be decomposed into four squares in such a way that the sum of two of these squares does not have a common factor with the sum of the two others ("Tout nombre impair est décomposable en quatre carrés et, parmi ces décompositions, il en existe toujours de telles que la somme de deux carrés soit sans diviseurs communs avec la somme de deux autres"). As the editor of Hermite's works, Émile Picard, noted (*Œuvres*, t. I, p. 259), the statement is likely to be true, but the argument given by Hermite has a gap.

[11] Cf. n° 114, note 9.

[12] Cf. n° 114, note 10.

[13] Segner's *Specimen Logicae* had been published in 1740; in 1743, Euler had discussed a revised edition with the author (cf. R 2424, 2425).

[14] Euler had shared with Daniel Bernoulli a double prize of the Académie des Sciences for his work E. 150 on time measurement at sea (cf. nº 91, note 9, and nº 108, note 3).

[15] The Paris *Mémoires* for 1747, which contain Buffon's note on burning glasses, appeared in print only in 1752; so Euler must have heard about Buffon's experiments from another source.

116
Goldbach to Euler
Petersburg, (May 22nd) June 2nd, 1747

From the letter to Euler from June 2nd.[1]

I am very much obliged to you, Sir, for the theorems you communicated to me.[2] I think the most remarkable of them is your statement that it is not difficult to split $4m+2$ into two parts $4x+1$ and $4y+1$ in such a way that they both have no divisor of the form $4p-1$. I can reduce the problem "Split the number $8m+3$ into three squares" to this one: "Two numbers n and p being given, find a third one x so that $2+8n+8px-4x^2-4x$ yields a sum of two squares"; indeed, such a function composed of n and p must here be found for x which has among others the strange property that it equals 0 in all those cases where $2+8n$ is a sum of two squares, and -1 in all those cases where $2+8n-8p$ is a sum of two squares; these two conditions by themselves present such a difficulty[3] to me that I am beginning to doubt the truth of the entire theorem, although it is easy to indicate innumerable formulae for m for which $8m+3$ can be split into three squares, as for example $m=b^2 \pm bc + c^2$.[4]

Since the time when the report on Mr. Orffyreus' *perpetuum mobile* was issued in which the wheel was attested to have turned for six weeks, no public mention has been made – as far as I know – that this machine has been further perfected or applied to some use, which appears all the stranger since its author went on living for many years afterwards and perhaps is still alive. The Chief Architect in Vienna, Mr. Fischer von Erlach (if I am not mistaken), who inspected this machine together with Mr. Gravesande in the presence of the reigning Earl of Hessen, once spoke of it to me with great admiration, mentioning that, when the wheel stood still, he nudged it very weakly on purpose, whereupon it moved by itself ever faster, up to a certain degree of velocity at which it then went on steadily.[5]

I remain most respectfully, Sir, your most dutiful and devoted Goldbach.

St. Petersburg, June 2nd (n. st.), 1747.

[1] The first sheet of the original letter has apparently not been preserved; so the transcription of the first part follows the text given in Goldbach's copybook. However, Euler's reply makes it likely that a passage in which Goldbach wondered about Euler's reflections on the mind-body problem (see nº 117, note 1) was not entered in the copybook and is now lost.

[2] Cf. nº 115, in particular note 10.

[3] Starting at this point, the transcription follows the preserved part of the original letter.

[4] The text of Goldbach's copy ends here.

[5] The Saxonian inventor and entrepreneur Johann Ernst Elias Bessler, who styled himself "Orffyré" (or Orffyreus) by a rotation cipher, had exhibited, starting in 1712, several "self-moving wheels". His claim that these mechanisms achieved perpetual motion aroused much suspicion and controversial debates. The largest and most famous of Bessler's wheels was constructed, under the sponsorship of Landgrave Karl I of Hesse-Kassel, at Weissenstein Castle in 1717; it ran in a sealed room for six weeks without noticeable diminution of speed. In 1721, Bessler demonstrated its operation (always keeping its mechanism hidden) to the Austrian architect J.E. Fischer von Erlach (the younger) and the Dutch engineer J.W. 's Gravesande, who reported to the Royal Society that they could not see any possibility of fraud and recommended its purchase for £20 000. However, Bessler was angered by 's Gravesande's inquisitiveness to such a degree that he destroyed the machine. His later attempts to make a commercial profit from his invention came to nothing.
There is a lot of literature and ongoing debate on Bessler's *perpetuum mobile*: see, among others, Gould 1928, p. 137–179, and Schaffer 1995.
The "report" Goldbach refers to is probably Bessler's anonymous tract *Das Triumphirende Perpetuum Mobile Orffyreanum* from 1719, but he could have got additional information from any number of pamphlets and journal reports by Bessler, his supporters and opponents. Moreover, Goldbach seems to have met Fischer von Erlach in person shortly after Fischer's return to Vienna in 1722/23.
Cf. also Euler's reply n° 117, note 8.

117
Euler to Goldbach
Berlin, July 4th, 1747

Sir,

I am most humbly obliged to you for the trouble you took in deigning to consider my slight paper about the faculty of thinking.[1] Indeed my final conclusion is aimed only at those who take the soul to be some special substance but yet material; in this I particularly addressed some Wolffians known to me, who thought it had not been sufficiently established by their master that the soul is immaterial. According to that philosopher's doctrines they are actually quite right to doubt this; for if bodies and their elements are endowed with such a multitude of active forces directed at changing their state, it cannot be understood for what reason the force of thinking should be excluded from among them. Thus these people admit without any difficulty that for thinking an active force to change one's state is required, and with respect to them I think my proof is conclusive. However I have to admit that it does not hold water against those who believe the faculty of thinking can be present without any such force and is caused just by the mere force of inertia. But, I think, once one admits that no other force is present in matter than the force of inertia, then the faculty of thinking must necessarily be excluded. For, notwithstanding that in the human body and particularly in the brain the subtlest particles are in an almost incomprehensible motion – on which fact the materialists in particular base their opinion – yet nothing happens in all this but that each and every particle persists in its state as long as this is consistent with the state of the neighbouring particles, whereas otherwise a change in their motion has to occur according to the rules of mechanics. Now from this no other result can arise but a change of state with respect only to motion itself, and if one wants to claim that perhaps another result may also be associated with this, since the nature of bodies is not sufficiently well known to us, one is constrained to assert that other forces besides inertia must be present in them; and then my proof is again valid.

Mr. Haude asks to be most obediently recommended to you, Sir; he is making every effort to collect the books which you lately requested, but he has little hope to find them all, since the Italian ones in particular are hard to come by.[2]

I shall have few competitors next year at the Paris Academy, for Mr. Bernoulli, who had started working on it, desisted again, the calculations being too extensive and troublesome.[3] The motion of Saturn is still much less well known than that of the Moon, for until now the observed positions still differed from the best tables by up to 20 minutes. In order to determine these irregularities, such astounding calculations – both theoretical and practical – are required that I should not again undertake them again even for a triple prize. I actually calculated more than a hundred positions of Saturn by Jupiter, and by means of the theory I finally established tables which differ by no more than 5 minutes from all observations, old as well as new. Because of the error in the older observations a greater accuracy cannot be reasonably hoped for, as the new ones by themselves are not sufficient. By now Mr. Le Monnier in Paris is carrying out observations of such precision that one can be sure of them to a few seconds. It is from observations of that kind that I rectified my *Solar Tables*, finding with the greatest satisfaction that they now never differ from the observations by more than $5''$.

The paper on monads which received our prize has my complete approval, and indeed I also voted for it.[4] The doctrine of monads is utterly destroyed in it. We received thirty papers about this topic, and six of the best – both for and against the monads – are being printed.[5] At least in these the matter is exposed so clearly on both sides that the previous complaints that one had not well understood one another shall in future stop completely. The whole matter is based on developing this argument: Bodies are divisible; either this divisibility goes on without ever ending or it holds only up to a certain limit, where one arrives at objects that are no further divisible. In the latter case one has the monads, in the former infinite divisibility; these two propositions are so diametrically opposed that necessarily one must be true and the other false. All arguments for the existence of monads are mainly based on apparent absurdities with which infinite divisibility is said to be associated; but as people for the most part conceived wrong ideas about this infinity, these absurdities indeed cease to apply. The opinion on monads is again divided into two parties, one of these denying any extension to the monads, the other taking them to be extended but devoid of parts (since else they should be divisible), which last opinion I think is the easiest to refute. Those who postulate monads lacking extension must finally admit that from their composition no extended matter can result either; so they are constrained to state that both extension and material bodies themselves are mere appearances and phantasms, although at the start of their reasoning they had taken bodies to be real – so, if the conclusion were true, the premises should necessarily have to be wrong.

Mr. Buffon's burning glasses[6] are composed of many small plane mirrors, to the number of nearly 200, which can easily be positioned in such a way that the light from all of them is thrown to one place; by this he has the advantage that he can direct the focus as far as and where he wants to, wherever the Sun may be, which is not possible with ordinary burning glasses. He set some wood alight at a distance of 200 feet, and there is no doubt that a bird flying through the focus should be scorched.

If $2 + 8n + 8px - 4x^2 - 4x$ is a sum of two squares,[7] say $= a^2 + b^2$, then $3 + 8n + 8px$ or $3 + 8\,(n + px)$ equals $a^2 + b^2 + (2x + 1)^2$ and is therefore a sum of three squares. However I cannot see why, if $2{+}8n$ were already a sum of two squares by itself, then x should necessarily have to be 0, since in fact to any sum of two squares such numbers can be added that the sum keeps this property. Moreover, as $3 + 8\,(n + px)$ is to equal the formula $8m + 3$, one has $n + px = m$; consequently x only has to be determined in such a way that $2 + 8m - 4x^2 - 4x$ becomes a sum of two squares; i. e., one should have to investigate whether a square could be subtracted from $8m + 3$ in such a way that the rest is a sum of two squares, which is again the initial question. If one now supposes $2 + 8m$ to be a sum of two squares, then x can indeed be either 0 or -1, but several other cases besides these are often possible: take, e. g., the proposed number $8m + 3$ to be 59; then $8m + 2 = 58 = 49 + 9$ is a sum of two squares. If now $2 + 8m - 4x^2 - 4x$, i. e., $58 - 4x^2 - 4x$, is to be a sum of two squares, this indeed occurs if x is either 0 or -1; but besides these cases, x can also equal 1 or 2 or 3; for

$$58 - 4 \cdot 2 = 50 = 49 + 1 = 25 + 25;$$

moreover,

$$58 - 4 \cdot 6 = 34 = 25 + 9,$$

and if $x = 3$, one has

$$58 - 4 \cdot 12 = 10 = 9 + 1.$$

The reason for this lies in the fact that numbers of the form $8m + 3$ can often be sums of three squares in more than one way; in the example one has $59 = 1 + 49 + 9 = 25 + 25 + 9$. I see nothing in this circumstance that could make me suspect the certainty of the theorem $8m + 3 = 3\,\Box$.

I think Orffyreus is still alive,[8] as some time ago he claimed to have invented a ship to travel under water. He smashed his *perpetuum mobile* to pieces and declined to build it again, which renders the invention more than a little suspect. The circumstance which you mentioned, Sir, that this machine, when it was set into motion a little bit, subsequently moved ever faster up to a certain degree at which it went on, is also observed in every pendulum clock: For when the clock is wound up while the pendulum is standing still, the clock does not move either; but if one gives the pendulum even the smallest nudge, the weight can take effect and the movement starts its ordinary course. Instead of the weight, perhaps an elastic spring might have been mounted in the Orffyrean machine; it should well be possible to make such a one go on for a whole year without being wound up anew. In this manner all the reported properties of the machine can be explained, except for one, which also is commonly cited: that Orffyreus is said to have disclosed all the secret to the late Landgrave and this gentleman still took the machine to be a true *perpetuum mobile*, which one should not expect if the movement indeed had such a base. However I do not know whether this last circumstance is quite true.

With this, I take the liberty to send you, Sir, our Academy's program for the next two years.[9]

In my family no change occurred since then, except that recently my wife was again delivered of a male child, who has been named Hermann Friedrich and carried to the font by Count von Keyserling.[10] For the rest I have now employed a skilled private tutor, and our eldest son, whose ailments seem to have abated, makes daily further headway in analysis and astronomy. My family altogether asks to be most humbly recommended to you, and I have the honour to remain with the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, July 4th, 1747.

[1] The reference is to Euler's paper E. 90 on the "mind-matter problem"; this is contained in the *Opuscula* volume which he had sent to Goldbach half a year earlier (cf. n° 112, note 3). Apparently Goldbach had voiced his doubts in a part of his previous letter that is lost (cf. n° 116, note 1).
Assessments of Euler's rare forays into metaphysics have diverged strongly, both in his own time and later. Knutzen and, through him, Kant concurred with Euler's view that mind, which is non-local and immaterial, and matter, characterised by extension and inertia, are both primary, if interacting entities; monistic philosophers – both of idealist and materialist persuasion – harshly criticised the mathematician for overstepping the boundaries of his competence (cf., e. g., Breidert 1983).

[2] Cf. n° 114, note 8.

[3] In fact, Bernoulli had written to Euler on April 29th, 1747 (R 170: to be published in O. IVA/3): "I am in doubt whether to go on competing. ... I am fed up with the theory of Saturn, because it is so toilsome and yet still fraught with many doubts ..." ("[I]ch zweiffle ... ob ich noch ferners concurrieren werde. ... Die *theoria Saturni* ist mir sehr erlejdet, weilen sie so penibel ist und zuletst doch vielen *dubiis* annoch unterworffen ..."). However, as he told Euler in his next letter on August 16th, in the end Bernoulli sent in a prize paper, which did not win and has remained unpublished (cf. the analysis in Verdun 2010, p. 175–185).

[4] The paper that had been awarded the Berlin Academy's prize on June 1st, 1747, was *Untersuchung der Lehre von den Monaden und einfachen Dingen* by the Saxonian lawyer J.H.G. Justi. Euler is being somewhat less than candid. In fact, he had laboured a lot behind the scenes to make the Academy take a stand on the doctrine of monads acceptable to him: first giving the prize question an anti-monadist twist, then publishing an anonymous paper of his own (E. 81, *Gedancken von den Elementen der Cörper*) while the competition was running and finally preparing detailed and skilful notes on twenty-five entries. These reading notes – in all likelihood directed at the jury – have been preserved and published in Euler's *Opera Postuma* in 1862 (see E. 854). The champions of monads around Christian Wolff bitterly resented Euler's interference and violently complained of his bias, unleashing

a storm of pamphlets on both sides. On the entire complex of questions raised by the competition on monads, see J.J. Burckhardt's introduction in O. III/2 and the recent studies by H.-P. Neumann (2009, 2010, 2013) and J. Bronisch (2010, esp. p. 232–305).

[5] Along with Justi's prize-winning paper and its translation into French, the collection published by the Academy (*Dissertation qui a remporté le prix proposé par l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres sur le système des monades, avec des pieces qui ont concouru*, Berlin 1748) contains seven more pieces, of which four are also discussed in Euler's notes (see *supra* note 4) and thus were certainly considered by the jury: Nr. XI by G. Ploucquet, which received an *accessit*, Nr. X, which according to Euler is by Samuel König, Nr. III and Nr. XV (for which the authorship has not been established). Two more papers on monads – one by G.W. Wegner and one for which the authorship of the French philosopher Condillac has been established in the 20th century (cf. Condillac 1980) – cannot be identified in Euler's notes and may not have been judged; finally, a follow-up paper by Ploucquet was also included in the volume.
A manuscript of Euler's Nr. I, *Monadologia Sciographica* by the Celle high school rector Andreas Clavius, has recently been located at the Leipzig University Library and edited by H.-P. Neumann (2013, p. 472–487, 509–516).

[6] Cf. nº 115, note 15.

[7] Goldbach had proposed investigating this in the first extant part of nº 116.

[8] Cf. nº 116, note 5. Euler is wrong: Bessler had died in an accident on a building site on November 30th, 1745.

[9] The Academies' programs mainly communicated the prize questions. For 1748, the Berlin Academy had set a topic in ancient history (On the extent and the traces of Roman dominion in Northern Germany), for 1749 one in chemistry (On the composition and generation of nitre).

[10] Hermann Friedrich Euler had been born on May 8th, 1747; he did not reach adulthood (none of the Eulers' children born after Charlotte in 1744 did) but died on December 12th, 1750. The Baltic diplomat Hermann Carl Graf von Keyserling, who had been President of the Petersburg Academy in 1733/34, acted as Russian Ambassador to the Prussian Court from 1746 to 1748.

118
Goldbach to Euler
Petersburg, August (1st) 12th, 1747

Sir,

I have learnt with great pleasure from your last letter that the Almighty delighted you by the gift of a young son.[1] I congratulate both yourself and your wife again cordially on this increase of your family and hope to receive still many more welcome news of your well-being.

My humble thanks for the diverse explanations which you communicated to me. In my last letter[2] it should in fact read: "that in all those cases where $2+8n$ is a sum of two squares in a unique way ... and in all those cases where $2+8n-8p$ is a sum of two squares in a unique way ...".

In the series 1, 3, 7, 17, 41, 99, ..., which has the law of progression $A+2B=C$ or $B=A+\sqrt{2A^2\pm 2}$ and the general formula $\dfrac{(1+\sqrt{2})^x+(1-\sqrt{2})^x}{2}$, one sees at once that the terms in even places cannot be squares, since they all are $\square \pm 1$;

however I have to leave open whether all terms in odd places except the first are no squares either, as I do not yet see why this should be impossible; the same also holds for the question whether there are infinitely many cases when $2A^4-1$ yields a square, as in the cases $A=1$ and $A=13$.[3]

Dr. Kaltschmied, whom I met here four years ago and who may possibly also be known to you, Sir, recently sent me his disputation for a chair,[4] accompanied by a very obliging letter, which I could not but answer; so I humbly ask you, Sir, to have the enclosure sent to Jena when the opportunity arises. If there should be, on the other hand, any way in which I could be helpful to you in these parts, I shall certainly prove that I am indeed with sincere respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Aug. 12 (new style), 1747.

[1] Cf. n° 117, note 10.
[2] The text of Goldbach's copy starts here.
The addition proposed by Goldbach concerns the first paragraph of n° 116.
[3] The text of Goldbach's copy ends here.
The only integral solutions of the equation $X^2 = 2A^4 - 1$ are in fact those observed by Goldbach: $A = 1$ and $A = 13$.
The Diophantine equation $X^2 = 2A^4 - 1$ showed up in Størmer's solution of the equation $k\frac{\pi}{4} = m \arctan \frac{1}{x} + n \arctan \frac{1}{y}$ (cf. Størmer 1894, 1899), and the second solution $A = 13$, $X = 239$ mentioned by Goldbach gives rise to Machin's formula $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{239}$.
Størmer's proof was completed in 1942 by Ljunggren (see also Calcut 2009).
The existence of this "large" solution $(A, X) = (13, 239)$ can be explained by a rational 5-isogeny on one of the modular Abelian varieties of conductor 2^{10} (see Ellenberg 2004).
[4] Carl Friedrich Kaltschmied had studied medicine at Jena, completing his doctorate in 1732. In 1738 he was named extraordinary professor; in 1742 he travelled via Prussia and Courland to Petersburg, returning to Jena in May 1743 to resume his post. In 1747, he submitted the dissertation mentioned here, criticising the juridical distinction between animated and non-animated foetuses; on the strength of this he finally obtained a chair of medicine. Later he also held office as rector of the university and provincial physician.
See Euler's reply n° 119, note 5.

119
Euler to Goldbach
Berlin, September 2nd, 1747

Sir,

with my humblest thanks for your most kindly congratulation on the increase of my family,[1] I again recommend myself and all of them to your constant goodwill.

It is a very remarkable property that in these recurrent series where any term is determined by the two preceding terms, any term can also be indicated just from the one that precedes it, by means of a quadratic equation. Indeed, if in the series

$$\overset{1}{A},\quad \overset{2}{B},\quad \overset{3}{C},\ \ldots\ \overset{x}{P},\quad \overset{x+1}{Q},\quad \overset{x+2}{R},$$

one has $C = aB - bA$ and $R = aQ - bP$, then $Q^2 - aPQ + bP^2$ will be in a constant ratio to b^x, which for $x = 1$ is as $B^2 - aAB + bA^2$ to b; so one has

$$Q^2 - aPQ + bP^2 = (B^2 - aAB + bA^2)\, b^{x-1}.$$

In the series

$$\overset{1}{1},\quad \overset{2}{3},\quad \overset{3}{7},\quad \overset{4}{17},\quad \overset{5}{41},\quad \overset{6}{99},\ \ldots\ \overset{x}{P},\quad \overset{x+1}{Q}$$

cited by you, Sir, where $a = 2$, $b = -1$, $A = 1$, $B = 3$, one has

$$Q^2 - 2PQ - P^2 = 2\,(-1)^{x-1}$$

and $Q = P + \sqrt{2P^2 + 2\,(-1)^{x-1}}$ or $Q = P + \sqrt{2P^2 \pm 2}$. When I considered this, the idea occurred to me whether in a recurrent series where any term is determined by the three preceding terms, one could not perhaps also indicate any term from just the two that precede it, by means of a cubic equation. If in

$$\overset{1}{A},\quad \overset{2}{B},\quad \overset{3}{C},\quad \overset{4}{D},\ \ldots\ \overset{x}{P},\quad \overset{x+1}{Q},\quad \overset{x+2}{R},\quad \overset{x+3}{S},\ \ldots$$

one has $D = aC - bB + cA$ and $S = aR - bQ + cP$, I discovered that the following ratio always has to be constant:

$$\left.\begin{array}{llll} R^3 & -2aQR^2 & +\left(a^2+b\right)Q^2R & -(ab-c)\,Q^3 \\ & +bPR^2 & -(ab+3c)\,PQR & +\left(ac+b^2\right)PQ^2 \\ & & +acP^2R & -2bcP^2Q \\ & & & +c^2P^3 \end{array}\right. : c^x$$

which constant ratio is known, taking $x = 1$, by the initial terms A, B, C.

To return to the series 1, 3, 7, 17, 41, … cited by you, Sir, where

$$Q = P + \sqrt{2P^2 \pm 2},$$

it is indeed certain that no term of this except the first can be a square. For let any term P be a square, i.e., $P = z^2$, then $2z^4 \pm 2$ also should have to be a square, which cannot be true. For, taking at first the $-$ sign, let $2z^4 - 2 = 4\left(z^2 - 1\right)^2 \dfrac{p^2}{q^2}$, then $z^2 + 1 = \dfrac{2p^2z^2}{q^2} - \dfrac{2p^2}{q^2}$ and $z^2 = \dfrac{2p^2 + q^2}{2p^2 - q^2}$. Now since p and q are relatively prime numbers, z^2 cannot be a whole number unless $2p^2 - q^2 = 1$;[2] but then one has $q^2 = 2p^2 - 1$, so $z^2 = 4p^2 - 1 = P$; thus P is always smaller by 1 than a square and consequently cannot be a square in whole numbers.

If, on the other hand, the + sign holds, one has $2z^4 + 2 = \left(z^2 + 1\right)^2 + \left(z^2 - 1\right)^2$. Now in order to make this into a square, set $z^2 + 1 = a^2 - b^2$ and $z^2 - 1 = 2ab$, where it is to be noted that z must be an odd number, since else $2z^4 + 2$ should be an oddly even number and thus not a square. However, the formula $2z^4 + 2y^4$ in general cannot yield a square unless $y = z$, which I prove as follows: Since $2z^4 + 2y^4 = \left(z^2 + y^2\right)^2 + \left(z^2 - y^2\right)^2$, let $z^2 - y^2 = ab$, then $z^2 + y^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{2}$ and $2z^4 + 2y^4 = \left(\dfrac{a^2 + b^2}{2}\right)^2$. Now let $a = pq$ and $b = rs$, so that $z^2 - y^2 = pqrs$ and $z^2 + y^2 = \dfrac{p^2q^2 - r^2s^2}{2}$; let $z + y = pr$, $z - y = qs$, then $2z^2 + 2y^2 = p^2r^2 + q^2s^2$, consequently $z^2 + y^2 = \dfrac{p^2r^2 + q^2s^2}{2} = \dfrac{p^2q^2 - r^2s^2}{2}$ or $s^2 = \dfrac{p^2\left(q^2 - r^2\right)}{q^2 + r^2}$. Therefore $\dfrac{q^2 - r^2}{q^2 + r^2}$, i. e., $q^4 - r^4$, should have to be a square, which is impossible.

The formula $2A^4 - 1$, which is a square in the cases $A = 1$ and $A = 13$, can also yield squares in infinitely many other cases which are not in whole numbers. Indeed, for $A = \dfrac{1525}{1343}$ or $A = \dfrac{2\,165\,017}{2\,372\,159}$, $2A^4 - 1$ will also become a square. I am unable to decide whether any cases in whole numbers except the two cited above are possible.[3]

By Count Razumovskiĭ's carriage I sent to Mr. Köppen those of the books you lately requested[4] which could be obtained here; and if you have not already received them, Sir, they will arrive very soon. Mr. Haude asks you, Sir, to pay the price for them, as specified by the enclosed invoice, just to Mr. Köppen.

The enclosure to Dr. Kaltschmied[5] has been correctly dealt with at once.

With this I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Sept. 2nd, 1747.

[1] Cf. n° 117, note 10.
[2] Euler overlooks the possibility that p is odd and q even: in this case the greatest common divisor of $2p^2 + q^2$ and $2p^2 - q^2$ is 2. The proof, however, goes through almost unchanged: see n° 121, note 3.
[3] Cf. n° 118, note 3.
[4] Cf. n° 117, note 2.
[5] Cf. n° 118, note 4.

120
Goldbach to Euler
Petersburg, September (19th) 30th, 1747

Sir,

your letter of September 2nd was handed over to me on the 13th, together with the list of the books which I received and paid for soon after this.[1]

Perhaps[2] the equation which you observed with respect to recurrent series will agree with the following note: If, in the case where the law of progression is $C = aB - bA$, one takes the general term to be $m\alpha^{x-1} + n\beta^{x-1}$, the first term becomes $m+n$, the second $m\alpha+n\beta$, the third $m\alpha^2+n\beta^2 = am\alpha+an\beta-bm-bn$, so $\alpha^2 = a\alpha - b$ and $\beta^2 = a\beta - b$; it follows from this that α and β are two roots of the same equation, and if $\alpha = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, then $\beta = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. In the same way, if $D = aC-bB+cA$, by taking the general term to be $m\alpha^{x-1}+n\beta^{x-1}+p\gamma^{x-1}$, one has $\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c$, and if one of the three roots of this equation is called α, the other β, the third γ, one has the entire general term; in this it is to be regarded as most peculiar that, although in equations of the fifth, seventh, etc. degree these roots must be very complicated, yet the general terms composed of them shall always become integers, if only a, b, c, etc. as well as m, n, p, etc. are whole numbers; so the surd quantities contained in the roots of the equation mutually cancel each other.

In order to prove that $2z^4 - 2$ cannot be a square, Sir, you define

$$2z^4 - 2 = 4\left(z^2-1\right)^2 \frac{p^2}{q^2},$$

supposing p and q to be relatively prime numbers; but I do not see a sufficient reason for this supposition, and have the more reason to doubt it as you finally arrive at the conclusion that p is always smaller by 1 than some square, whereas in fact the number 17 and innumerable others show that p can also be greater by 1 than a square;[3] indeed one has

$$\begin{array}{lr}
\text{for } \square - 1 \text{ the terms} & 3 = 1^2 \cdot 2^2 - 1 \\
 & 99 = 5^2 \cdot 2^2 - 1 \\
 & 3363 = 29^2 \cdot 2^2 - 1 \\
 & \dots \\
\text{for } \square + 1 \quad \dots & 17 = 1^2 \cdot 4^2 + 1 \\
 & 577 = 6^2 \cdot 4^2 + 1 \\
 & 19\,601 = 35^2 \cdot 4^2 + 1 \\
 & \dots
\end{array}$$

and all the numbers 1, 5, 29, etc. are terms of the series which has for its law of progression $6B - A = C$, whereas 1, 6, 35, etc. are the sums of this same series.

The large fractional numbers which you found for $\sqrt{2A^4-1}$ make it very likely that besides 1 and 13 none can be substituted for A to make $2A^4 - 1$ a square in whole numbers;[4] all the same, propositions of this kind are remarkable just because they are so difficult to prove.

I can solve the following problem; but as I came upon it by chance, I do not know whether the solution is difficult or easy to discover: Two squares 1 and b^2 being given, find in infinitely many ways a third one, c^2, which fulfils the condition that the sum $1 + b^2 + c^2$ equals three other squares.[5]

I have not heard anything about Mr. Doppelmayer since the time of the disastrous experiment that was reported in the journals;[6] in case you know how he is doing and if he has been completely restored, please inform me. I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Sept. 30th, 1747.

PS.[7] I very much appreciate your reliability, Sir, in forwarding the letters addressed to you, and I wish that I were able to do some favours for you in return.

[1] Cf. n° 119, note 4.
[2] The text of Goldbach's copy starts here.
[3] See n° 119, note 2.
[4] Cf. n° 118, note 3, and n° 119, note 3.
[5] The text of Goldbach's copy ends here.
At the end of this paragraph Euler noted between the lines, preparing his reply:

$$\begin{aligned} c &= 2m + mnn + nb + 1 \\ 1 + bb + cc &= (nb + mnn + 1)^2 + (b + 2mn)^2 + (2m + 1)^2. \end{aligned}$$

Cf. n° 121, note 5, where an even more general formula is given.
[6] Goldbach had befriended the physicist and astronomer Doppelmayr at Nuremberg in 1720; he led an intensive correspondence with him that turned on many topics of natural science and went on until 1745 (Doppelmayr was also involved in the Bernoullis' and Goldbach's recruitment for the Petersburg Academy). In 1746, Doppelmayr received a powerful electrical shock while experimenting with a battery of "Leyden jars" (capacitors) and suffered a persistent paralysis in his right hand; at the time, rumours even circulated that he had been killed. Cf. Euler's reply n° 121, note 7.
[7] This has been added in the margin.

121
Euler to Goldbach
Berlin, October 24th, 1747

Sir,

I have correctly received your payment for the books sent to you, Sir, and delivered it to Mr. Haude,[1] who shall likewise not fail to dispatch at the next opportunity those which you last requested.

The equation for recurrent series that I lately mentioned is indeed based on the property of these series which you stated, Sir. For if in the series

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & x & x{+}1 & x{+}2 & x{+}3 & x{+}4 \\ A, & B, & C, & D, & \ldots & P, & Q\,, & R\,, & S\,, & T\,, \ldots \end{array}$$

one has $C = mB - nA$ and generally $R = mQ - nP$, and if one forms the equation $z^2 - mz + n = 0$, whose roots are to be a and b, so that $a + b = m$ and $ab = n$, then the general term will have the form $P = \alpha a^x + \beta b^x$; consequently one has $Q = \alpha a \cdot a^x + \beta b \cdot b^x$. Determining the values a^x and b^x from these two equations, I find $\alpha a^x = \dfrac{bP - Q}{b - a}$, $\beta b^x = \dfrac{aP - Q}{a - b}$ and, multiplying these together, $\alpha\beta a^x b^x = \dfrac{abP^2 - aPQ - bPQ + Q^2}{-a^2 + 2ab - b^2}$. Now, since $ab = n$ and $a + b = m$,

$$-a^2 + 2ab - b^2 = -(a+b)^2 + 4ab = -m^2 + 4n,$$

so

$$\alpha\beta n^x = \frac{nP^2 - mPQ + Q^2}{4n - m^2};$$

therefore

$$\frac{nP^2 - mPQ + Q^2}{n^x} = \alpha\beta\left(4n - m^2\right)$$

equals a constant quantity, which, taking $x = 1$, must be $\dfrac{nA^2 - mAB + B^2}{n}$.

Moreover, if in a recurrent series one has

$$D = mC - nB + pA \qquad \text{and} \qquad S = mR - nQ + pP,$$

I form the equation $z^3 - mz^2 + nz - p = 0$, whose roots are to be a, b, c; then

$$P = \alpha a^x + \beta b^x + \gamma c^x, \quad Q = \alpha a \cdot a^x + \beta b \cdot b^x + \gamma c \cdot c^x, \quad R = \alpha a^2 a^x + \beta b^2 b^x + \gamma c^2 c^x.$$

From these three equations I determine the values αa^x, βb^x, γc^x, which multiplied together yield $\alpha\beta\gamma a^x b^x c^x = \alpha\beta\gamma p^x$, since $a + b + c = m$, $ab + ac + bc = n$, and $abc = p$; by means of these formulae the letters a, b, c in the resulting equations can be expressed by m, n and p, and the equation linking P, Q, and R which I lately sent you results.[2]

I cannot quite understand the doubt which you raise against my proof that $2z^4 - 2$ cannot be a square, Sir; I think either I did not express myself clearly enough or you applied my proof to another case. If $2z^4 - 2$ were a square (in whole numbers), it should be even and consequently divisible by 4. Further, since $z^4 - 1 = \left(z^2 - 1\right)\left(z^2 + 1\right)$, the square must also be divisible by $z^2 - 1$, and thus by $\left(z^2 - 1\right)^2$ if $z^2 - 1$ has no square factors. Therefore, if $2z^4 - 2$ were a square, it should have to have a form such as $2z^4 - 2 = \dfrac{4\left(z^2 - 1\right)^2 p^2}{q^2}$, where q^2 is to cancel the square factors possibly contained in $z^2 - 1$. Now I am justified in supposing that p^2 and q^2 are relatively prime numbers or that the fraction $\dfrac{p^2}{q^2}$ is already reduced to smallest terms. For if p^2 and q^2 had some common divisor, this could be cancelled from the fraction $\frac{p^2}{q^2}$ by dividing. Consequently, if $2z^4 - 2 = \frac{4\left(z^2-1\right)^2 p^2}{q^2}$, one has

$$2\left(z^2+1\right)\left(z^2-1\right)q^2 = 4\left(z^2-1\right)^2 p^2$$

and therefore $\left(z^2+1\right)q^2 = 2\left(z^2-1\right)p^2$, which yields $z^2 = \frac{2p^2+q^2}{2p^2-q^2}$. Now since z^2 is a whole number, $2p^2 - q^2$ must be a divisor of $2p^2 + q^2$ and therefore also of $4p^2$ or of $2q^2$. However, as p^2 and q^2 are relatively prime numbers, this can not occur unless either[3] $2p^2 - q^2 = 1$ or $2p^2 - q^2 = 2$; indeed, since

$$\frac{2p^2+q^2}{2p^2-q^2} = 1 + \frac{2q^2}{2p^2-q^2} = \frac{4p^2}{2p^2-q^2} - 1$$

and p and q are relatively prime numbers, $\frac{2p^2+q^2}{2p^2-q^2}$ cannot become an integer in any other way. So let firstly (if this can be) $2p^2 - q^2 = 1$; then $z^2 = 2p^2 + q^2 = 4p^2 - 1$, which is impossible in whole numbers. If secondly $2p^2 - q^2 = 2$, then $z^2 = \frac{2p^2+q^2}{2} = q^2 + 1$, which is not possible either. So there is no way in which $2z^4 - 2$ can yield a square in integers.

If one substitutes z for z^2 in order to investigate in what cases $2z^2 - 2$ can become a square, there are cases of two kinds: I. $z = 4p^2 - 1$ and II. $z = q^2 + 1$. These are in fact the cases which you cite, Sir, but they do not invalidate my former proof, which – as far as I recall – was more general; indeed I had proved that not only $2z^4 - 2$, but also $2z^4 - 2u^4$ cannot be a square. As I just see, this proof of mine has now been printed in tome X of the *Commentarii*.[4]

I have solved the problem "Given two squares a^2 and b^2, find a third one x^2 for which the sum $a^2 + b^2 + x^2$ can also be split into three squares in another way"[5] as follows: Let

$$a^2 + b^2 + x^2 = (a + 2pr)^2 + (b + 2qr)^2 + (x - 2r)^2\,,$$

then

$$0 = 4apr + 4p^2r^2 + 4bqr + 4q^2r^2 - 4rx + 4r^2;$$

dividing by $4r$ one gets[6]

$$x = ap + pr^2 + bq + qr^2 + r,$$

where for p, q and r arbitrary whole numbers, both positive and negative, can be taken. From this an infinity of particular solutions is derived. Let, e. g., $p = 1$, $q = -1$, then $x = a - b + r$ and

$$a^2 + b^2 + x^2 = (a + 2r)^2 + (b - 2r)^2 + (x - 2r)^2\,.$$

Mr. Doppelmayer actually died soon after the disastrous experiment, as I have been assured by people coming from Nuremberg.[7]

My paper on Saturn not only arrived duly at Paris, but I also hear that people are very well satisfied with it and by far prefer it to all the others that have been entered.[8]

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Oct. 24th, 1747.

[1] Cf. nº 120, note 1.
[2] See the second paragraph of nº 119.
[3] This time, Euler has not missed the possibility $2p^2 - q^2 = 2$, validating Goldbach's objection (see nº 119, note 2, and nº 120, note 3).
[4] The reference is to E. 98, which Euler had presented at Petersburg in June and August 1738: thus the delay in publication of the *Commentarii* had by then increased to nine years.
[5] Euler generalises the problem raised by Goldbach in nº 120 (cf. note 5). The question was later revived in letters nº 142, 144 and 145.
[6] The equation that follows ought to read $x = ap + p^2r + bq + q^2r + r$. Goldbach noted this: see his reply nº 124, note 4.
[7] Cf. nº 120, note 6.
Euler's information is wrong: Doppelmayr was then still alive and only died three years later. One of the archivists dealing with the present letter noticed this: between the lines there is a note in an unidentified hand, indicating the correct date: "† 1. *Decbr.* 1750.".
[8] Cf. nº 110, note 5.
In a letter written on September 11th, Clairaut had complimented Euler on his contribution E. 120, reprimanding him, however, for entering an "anonymous" competition paper in his own handwriting (cf. R 419: O. IVA/5, p. 173–174).

122
Goldbach to Euler
Petersburg, (October 31st) November 11th, 1747

Sir,

I received your esteemed letter from Oct. 24th on Nov. 4th, but have to postpone my answer for some more time because of several other obligations that came up; nonetheless you should very much oblige me, Sir, in case Mrs. Lambert's admonishment to her children (of which I had requested three copies both in French and in German) is already among the books which are ready for me in Berlin, if you could send me, the sooner the better, a German and a French copy, both uncut and unbound, by the ordinary mail with the inscription "Printed matter".[1] I estimate the probability of the Paris prize[2] for you, Sir, to be at least 10 to 1. Please convey my due compliments to Mrs. Euler and to all your family. I remain most respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Nov. 11th, 1747.

[1] The Marquise de Lambert's *Avis d'une Mère*, a conduct book for young people first published in the late 1720s, was indeed popular and widely read at the time, but all the same, Goldbach's urgent request for three copies each of two different editions seems a bit puzzling: one might even be led to speculate whether the order had something to do with Goldbach's professional duties as a cryptographer.

[2] Cf. n° 121, note 8.

123
Euler to Goldbach
Berlin, December 14th, 1747

Sir,

Professor Braun, who has recently been received as a member of the Imperial Academy of Science, will have the honour of most obediently presenting these lines to you, Sir.[1] I have had occasion here to acquaint myself with him for many years, and since I have been instructed by His Excellency Count Razumovskiĭ to engage him as professor of logic and ethics at the university that is to be newly established, I believed I could do him no more important service than by also recommending him most obediently to you, Sir. I hope that his good conduct and his thoroughness in his studies will entirely justify the liberty which I am taking, Sir, and that you will kindly award him the goodwill of which you shall think him deserving.

The books that you ordered from here, Sir, will by now have duly arrived.[2]

As this letter is going to be delivered to you, Sir, around New Year, I am aware of a pressing obligation to convey my most obedient congratulations to you, Sir, and to wish you cordially both perfect health and the greatest well-being and satisfaction, recommending at the same time myself and all my family most obediently to your constant goodwill and grace and remaining for all my lifetime with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Dec. 14th, 1747.

[1] Joseph Adam Braun was born in 1712 in Asch (Bohemia) and studied philosophy at Jena and Leipzig. In 1744 he stayed in Berlin, in order to seek employment at the Petersburg Academy, and gave philosophy lessons to Teplov. Euler strongly recommended him, and in October 1747 Schumacher told Euler that Braun had been engaged as professor of logic, metaphysics and pedagogy at the Academy's university (cf. JW 2, p. 65, 94, 97, 105). Braun arrived at Petersburg on January 14th (25th), 1748.

[2] Cf. n° 122, note 1.

124
Goldbach to Euler
Petersburg, January (16th) 27th, 1748

Sir,

on Jan. 20th, I received your esteemed letter from Dec. 5th and the parcel of books as well, by which you again obliged me very much;[1] I should cordially desire to do you some favours here on my part, and you shall find me ever ready to do so. I should at once have paid the invoice that you mention, if it had been enclosed, but it must have been left behind at Berlin, since I could not find it even by meticulously searching all the books.

You will best understand from the enclosed sheet, which I ask you to return again to me, what my former doubts were based on.[2]

Your solution of the problem "given two squares a^2 and b^2, find a third one, x^2, with the property that $a^2+b^2+x^2$ is a sum of three squares in more than one way" is evident and general,[3] although the equation

$$4apr + 4p^2r^2 + 4bqr + 4q^2r^2 - 4rx + 4r^2 = 0$$

divided by $4r$ does not yield $x = ap+pr^2+bq+qr^2+r$ but $x = ap+p^2r+bq+q^2r+r$, this little calculating mistake does not impair the method itself.[4]

However, the proof that a sum of three odd squares can be indicated which yields $8m+3$ for any case of m remains very obscure.[5] It has occurred to me that, if one defines the three roots A, B, C asked for by

$$\begin{aligned} A &= 1 + am + bm^2 + cm^3 + dm^4 + \dots \\ B &= 1 + am - bm^2 - cm^3 - dm^4 - \dots, \end{aligned}$$

so

$$\begin{array}{rclllllll} A^2 &=& 1 & +2am & +2b\,m^2 & +2c\,m^3 & +2d\,m^4 & +2e\,m^5 & + \dots \\ &&&& +a^2 & +2ab & +2ac & +2ad & \\ &&&&&& +b^2 & +2bc & \\ B^2 &=& 1 & +2am & -2b\,m^2 & -2c\,m^3 & -2d\,m^4 & -2e\,m^5 & + \dots \\ &&&& +a^2 & -2ab & -2ac & -2ad & \\ &&&&&& +b^2 & +2bc & \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rcllllll} C^2 = & 1 & +8\,m & -2a^2m^2 & & -2b^2m^4 & -4bcm^5 & [+\dots] \\ && -4a &&&&& \end{array}$$

then, since $A^2+B^2+C^2 = 8m+3$, all the coefficients b, c, $d\dots$ can be determined by a alone, so that a remains an indeterminate quantity; for, setting

$$C = 1 + \alpha m + \beta m^2 + \gamma m^3 + \delta m^4 + \dots,$$

one has

$$\alpha = 4 - 2a, \quad \beta = -2a^2 - \alpha^2, \quad \gamma = -2\alpha\beta, \quad \ldots;$$

it should moreover follow from this that, if the theorem itself is true, the series A, B, C will always yield whole numbers, whatever a is assumed to be.

Yesterday Prof. Braun (with whom I hope to become still better acquainted) handed me your letter from Dec. 14th.[6] I humbly thank you, Sir, for your kind New Year's wish, and as I suppose that you will also have begun the new year happily on your part, I wish that the Almighty may further preserve both you and your dearest family in all prosperity imaginable; for myself I just desire new opportunities to convince you both of my perfect respect and of the sincere devotion and willingness to help with which I constantly remain, Sir, your most obliged

Goldbach.

Petersburg, Jan. 27th, 1748.

[1] Cf. n° 123, note 2. Euler's letter, which presumably accompanied the book parcel, has not been recovered.
[2] This enclosure appears to be lost; as Euler's reply shows (cf. n° 125, note 2), it probably raised further question about Euler's proof, given in n° 121, that $2z^4 - 2$ never yields squares in integers.
[3] Cf. n° 121, note 5.
[4] Cf. n° 121, note 6.
[5] Indeed both Euler and Goldbach have been thinking about this theorem proposed by Fermat (cf. n° 114, note 5) without finding a proof. Euler is skeptical about the possibility of a constructive solution as sketched here: see his reply n° 125.
[6] Cf. n° 123, note 1.

125
Euler to Goldbach
Berlin, February 13th, 1748

Sir,

you shall find enclosed here Mr. Haude's invoice, which was forgotten in sending the parcel and which amounts to no more than 3 thalers 15 groats and 6 pence;[1] if I could again serve you, Sir, by sending such books, I should not only be most happy to do so, as is my duty, but in the future this could also be done with the greatest ease by the coach mail service, as I am from time to time sending sizeable parcels to the Academy by this route.

The doubt which you had about my last letter, Sir, will at once be eliminated if you will kindly recall that the discussion there turned on whole numbers;[2]

indeed, as $P = 4p^2 - 1$, P cannot possibly be a square in whole numbers, whereas in fractions this should be possible in infinitely many ways.

I am still by no means able to prove that all numbers comprised by the formula $8m + 3$ can be resolved into three odd squares,[3] despite the fact that I racked my brains over this quite a lot. Whenever $8m + 3$ is a prime number, it is always contained in the form $2a^2 + b^2$, as for example $3 = 2 \cdot 1 + 1$; $11 = 2 \cdot 1 + 9$; $19 = 2 \cdot 9 + 1$; $43 = 2 \cdot 9 + 25$, etc.; I daresay I should be able to find a proof at least of this fact.[4] On the other hand I do not believe that a proof of the proposition that $8m + 3 = a^2 + b^2 + c^2$ can be found in such a way that the three roots a, b, c are themselves determined by it; one will only be able to show the possibility of a resolution. For this reason I do not have much confidence for the path which you took, Sir, since by this not just the possibility could be shown, but the three squares themselves could be indicated in general, which I however think is impossible. In my opinion the proof ought to resemble the one by which I proved that any prime number $4n + 1$ is a sum of two squares. I firstly prove that any sum of two squares $a^2 + b^2$ (where a and b may be taken to be relatively prime numbers) cannot have any other divisors than such as are also sums of two squares. Then, whenever $4n + 1$ is a prime number, I can indicate infinitely many numbers of the form $p^{2n} + q^{2n}$ that are divisible by $4n + 1$. Now since $p^{2n} + q^{2n}$ is a sum of two squares, $4n+1$, being a divisor of that formula, also has to be a sum of two squares. However, the resolution into two squares itself does not become evident by this; it is just its possibility which is proved.

The proposition that $8m + 3$ is always a sum of three squares can be stated in many other forms, which might perhaps be easier to prove.

If one could, for example, prove that, given any whole number m, it is always possible to indicate values for p and q in such a way that the cubic equation

$$x^3 - (2p - 1)\, x^2 + \left(2p^2 - 2p - 1 - 4m\right)\, x - q = 0$$

has all its three roots rational, then the matter should also be settled. For if the roots of this equation are a, b, c, one should have $2p - 1 = a + b + c$ and $2p^2 - 2p - 1 - 4m = ab + ac + bc$. Now, since

$$4p^2 - 4p + 1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

let us subtract

$$4p^2 - 4p - 2 - 8m = 2ab + 2ac + 2bc,$$

and the remainder is

$$8m + 3 = a^2 + b^2 + c^2.$$

However I have little hope of proving this, as the proof should have to work only for integral values of m; for in fractions the matter is often impossible.

I also considered this question in the following way: It must always be possible to subtract from $8m + 3$ a square $4x^2 - 4x + 1$ in such a way that the remainder $8m + 2 - 4x^2 + 4x$ becomes resolvable into two squares. Consequently half of this,

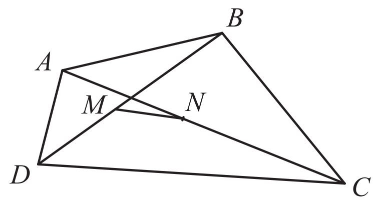
$4m+1-2x^2+2x$, also has to be a sum of two squares, viz., $4y^2-4y+1+4z^2$; so one should have

$$m = \frac{x^2-x}{2} + y^2 - y + z^2.$$

If one could therefore prove that the formula $\dfrac{x^2-x}{2}+y^2-y+z^2$ comprises in itself all integers, the theorem should also be established.

In his *Observations on Diophantus*, Fermat states that the equation $x^n = y^n + z^n$ is always impossible in rational numbers except for the cases $n=1$ and $n=2$; this means that no sum of two cubes can be a cube, no sum of two fourth powers a fourth power and in general no sum of two higher powers a power of equal degree. He claims to have a very ingenious proof for this, which he cannot add for lack of space. So it is a great shame that along with many others this was also lost.[5]

Recently I came upon the following geometrical theorem, which appears curious to me:[6] Similarly as in any parallelogram the sum of the squares of the sides equals the sum of the squares of the diagonals, in any quadrilateral which is not a parallelogram the sum of the squares of the sides is greater than the sum of the squares of the diagonals, and the excess can be precisely indicated as follows:



In the general quadrilateral $ABCD$, bisect the diagonals AC and BD in N and M and draw the line segment MN; then

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4 \cdot MN^2.$$

I most humbly thank you, Sir, for the kind reception you granted to Professor Braun,[7] hoping at the same time that everybody shall be well satisfied with his performance.

Lastly I recommend myself and my family to your constant favour and grace; I have the honour to remain with all due admiration, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Feb. 13th, 1748.

[1] Cf. n° 124, note 1.
[2] Cf. n° 125, note 2.
[3] Cf. n° 124, note 5.
[4] In n° 165, Euler writes that he still has not found a proof for the fact that primes $8n+3$ are represented by the quadratic form x^2+2y^2; in E. 256 he describes his numerical experiments

with primes represented by it. At that time, i.e., in 1753/54, he was able to prove that primes p dividing x^2+2y^2 for coprime integers x, y can again be written in this form, which implies that $p = 8n+1$ or $p = 8n+3$. The proof of the converse, namely that such primes divide x^2+2y^2 for suitably chosen coprime integers x, y, can be found in E. 449 from the early 1770s.

[5] Cf. also n° 169, notes 10–11. As will be seen there, Euler could prove "Fermat's Last Theorem" for $n = 4$, as well as – modulo some gaps – for $n = 3$. Kummer's approach using the arithmetic of cyclotomic fields eventually allowed proving the result for all exponents less than 4 000 000, but the general proof by Andrew Wiles and Richard Taylor used techniques that are a lot deeper. See the overviews by Ribenboim 1995 – an updated reprint of his original book from 1979 – and by Cornell et al. 1997.

[6] In the months that followed, Goldbach gave a proof of Euler's theorem: see *infra* n° 128, note 6. So did G.W. Krafft at Tübingen, to whom Euler had also communicated his observation in a letter written on February 17th (now lost): see Krafft's reply R 1296 dated March 18th, 1748, and his paper in the Petersburg Academy's *Novi Commentarii* (Krafft 1750). Euler communicated his own proof to both of them during the summer: see *infra* n° 129, note 9 (the letter to Krafft seems again to be lost but is attested by R 1297), and published it as Corollary 4 (§ 30) in E. 135.
Remarkably, Euler's result had been anticipated by more than seventy years: In his *Geometria Magna in Minimis*, published at Toledo in 1674, the Spanish Jesuit José Zaragoza had formulated and proved it as *Theorema LXXXVIII* of Pars II (see Recasens 1993, 2008). Zaragoza's proof, which uses the theory of the barycenter (*centrum minimum*) systematically developed in his treatise, lends itself more easily to further generalisation than Euler's; his work remained, however, virtually unknown until the 20th century.
According to Zacharias 1914, p. 991, the case where the quadrilateral is a parallelogram (mentioned here by Euler) was first stated and proved by Th. Fantet de Lagny (printed in the Paris *Mémoires* in 1707). For generalisations of Euler's result, see W. Schuster 1997.

[7] Cf. n° 124, note 6.

126
Goldbach to Euler
Petersburg, (March 26th) April 6th, 1748

Sir,

in your letter from Sept. 2nd, I had considered the words "P must always be smaller by 1 than a square" to be a condition qualifying the preceding formula $Q = P + \sqrt{2P^2 \pm 2}$; however, as I now see, they refer only to the equation $z^2 = 4p^2 - 1 = P$, so everything is in order.[1]

If you can prove, as you think you can, that all numbers $8m+3$ can be brought to the form $2a^2 + b^2$ if they are prime,[2] you will also easily find that all prime numbers $4m+3$ belong to the formula $2a^2 + b^2 + c^2$, since in my opinion this comprises all odd numbers; but if this were proved just for all prime numbers, it should be obvious that all positive numbers consist of four squares.

As regards transformations of a sum of four squares, I have discovered several of them, which I will express in the following manner: $\triangle$ is to denote a triangular number, $2\triangle$ twice a triangular number, $3\triangle$ three times a triangular number, etc., $\square + \square$ a sum of two squares, $2\square$ the double of a square etc.; according to this, any number shall be[3]

$$\begin{array}{llllll}
\text{(I.)} & 2\square+\square+4\triangle & \text{(IV.)} & 2\square+\square+\triangle & \text{(VII.)} & \triangle+2\triangle+4\triangle \\
\text{(II.)} & \square+2\square+2\triangle & \text{(V.)} & \square+\triangle+4\triangle & \text{(VIII.)} & \square+\square+2\triangle \\
\text{(III.)} & \square+2\triangle+4\triangle & \text{(VI.)} & 2\square+\triangle+2\triangle & \text{(VIIII.)} & \dfrac{\square+\square+\square}{2}
\end{array}$$

from which again many others can be deduced.

In the formula

$$a^2-a+b^2-b+c^2-c+d^2-d+1$$

it is obvious that it yields a sum of four squares when $d=-a-b-c+1$; but if d is taken to be any number whatsoever, the formula still has to be a sum of four squares.[4]

If anything new about this subject should occur to me, I shall have the pleasure to communicate it to you, Sir. For the meantime, I remain with great respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, April 6th (n. st.), 1748.

PS. If the numbers a, b, c in some case $2a^2+b^2+c^2=2n+1$ are given, the four squares for the sums $2n+3$, $4n+3$, $6n+3$, $4n+6$, $8n+6$, etc., and as well for $2n+2p^2+1$, $4f^2n+2f^2+d^2$, where p, f, d are arbitrary whole numbers, can be easily indicated; also the formula $2a^2+4b^2+(2c+1)^2+2$ always equals another $2A^2+4B^2+(2C+1)^2$, although the rigorous proof of this last proposition is still lacking.[5]

In the absence of a convenient opportunity to dispatch the enclosed letter to Dr. Gmelin, I take the liberty to address it to you, Sir, asking you – as there is no danger at all in delay – to keep it with you until a way turns up by which it can reach the Doctor postage-free.[6]

[1] Cf. nº 124, note 2. So Goldbach's doubts about the proof sketched in nº 119 and explained in more detail in nº 121 are now laid to rest.

[2] Cf. nº 125, note 4.

[3] In Goldbach's copy, entry (I.) in the table that follows reads: "$2\square+\square+\triangle$"; entry (VIIII.) has been crossed out. In the margin Goldbach noted "*vid. p.* 105", referring to his remarks in nº 128.
Liouville proved in 1862/63 that every positive integer n can be represented in the form $n=a\triangle+b\triangle+c\triangle$ for positive integers $a\le b\le c$ if and only if (a,b,c) is one of $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,1,4)$, $(1,1,5)$, $(1,2,2)$, $(1,2,3)$, $(1,2,4)$. For more results in this direction, see Sun 2007.

[4] Goldbach's copy closes with the first paragraph of the PS.

[5] Goldbach's formulae are the following:

$$\begin{aligned}
2n+3&=(a-1)^2+(a+1)^2+b^2+c^2,\\
4n+3&=(2a)^2+(b-c)^2+(b+c)^2+1^2,\\
4n+6&=(2a)^2+(b-c)^2+(b+c)^2+2^2,\\
6n+3&=(a+b+c)^2+(a+b-c)^2+(2a-b)^2+c^2.
\end{aligned}$$

Some of his examples are special cases of the following more general identities: if $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, then

$$2n = (a-b)^2 + (a+b)^2 + (c-d)^2 + (c+d)^2,$$
$$3n = (a+b+c)^2 + (a-b+d)^2 + (a-c-d)^2 + (b-c+d)^2,$$

which in turn are special cases of Euler's product formula for sums of four squares given in n° 127. Euler had already found this formula on fol. 61–62v of his *Notebook III* (PFARAN, f. 136, op. 1, n. 131), which spans the years 1736–1740 (see Matvievskaya / Ozhigova 1983, p. 156–157).

[6] This letter to J.G. Gmelin, who had left the Petersburg Academy in 1747 to return to his native Tübingen, has not been preserved. See also n° 141, note 7.

127
Euler to Goldbach
Berlin, May 4th, 1748

Sir,

Mr. Haude will obtain the books you asked for and set the *Pamela*,[1] which was left behind, on the new bill. I dispatched the letter to Dr. Gmelin at once to Tübingen.[2]

If the proposition that $8m+3$ equals $2a^2+b^2$ whenever $8m+3$ is a prime number is true, I do not see that $4n+3$ must always equal $2a^2+b^2+c^2$ whenever $4n+3$ is a prime number, unless one could prove that in this case it were always true that $4n+3 = 8m+3+4(2p+1)^2$. But perhaps this is correct even when $4n+3$ is not a prime number. At least it appears to me that

$$8n+7 = (8m+3)(2q+1)^2 + 4(2p+1)^2$$

if $8m+3$ is a prime number. Now if this were true, then indeed all prime numbers and consequently all numbers altogether should be sums of four squares. However I do hardly believe that anything can be achieved for proving either this or other theorems of Fermat's with general formulae.[3] For as far as the theorem is concerned that every number is a sum of three triangular numbers, this must be understood as referring solely to whole numbers; it should therefore be impossible to prove the general statement

$$n = \frac{a^2+a}{2} + \frac{b^2+b}{2} + \frac{c^2+c}{2},$$

since this is indeed false in many instances, viz., if $n = \frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$ or $\frac{5}{2}$ etc. In fact, if this statement were also true for fractional values of n, every number could even be equal to a sum of three squares, since

$$8n+3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$$

and $8n+3$ should comprise in itself all numbers. Consequently your formula VIIII, according to which (unless there is some slip of the pen) every number is equal to $\dfrac{\square+\square+\square}{2}$, cannot be right;[4] for if any number $n = \dfrac{\square+\square+\square}{2}$, then any even number $2n$ should equal $\square+\square+\square$, which is however impossible for infinitely many, as for 28, 60, etc. On the other hand formula VIII, $n = \square + \square + 2\,\triangle$, of whose truth I have been convinced by induction, appears very curious to me, although I do not see how it follows either from $n = \square+\square+\square+\square$ or from $n = \triangle+\triangle+\triangle$.

The formula

$$a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d + 1$$

is a sum of four squares in general, and not just in the case where $a+b+c+d = 1$; in fact, it equals

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{1}{2}\right)^2.$$

For notwithstanding that these squares are fractional, it is certain that any number which is a sum of four fractional squares is also a sum of four squares in integers.[5] The following theorem can also serve to determine in many cases the four squares themselves of which some number is composed: If $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ and $n = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$, then[6]

$$mn = A^2 + B^2 + C^2 + D^2,$$

where

$$\begin{aligned} A &= ap + bq + cr + ds \\ B &= aq - bp - cs + dr \\ C &= ar + bs - cp - dq \\ D &= as - br + cq - dp. \end{aligned}$$

Now since one can take the numbers a, b, c, d, p, q, r, s to be either positive or negative, combine them with one another arbitrarily or change their order, the resolution of the product mn is possible in very many different ways.

So in my opinion a proof of that sort of Fermat's theorems is not easily to be expected as long as one expresses the triangular, tetragonal, pentagonal numbers etc. by the usual general formulae, since in these fractional numbers are also included, which however are excluded from most theorems. For this purpose I considered the matter in the following guise:[7] Let

$$s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + x^{28} + \dots,$$

where no powers of x occur but those whose exponents are $= \triangle$. Taking now the square of this series, s^2 will equal a series in which no other powers of x occur but those whose exponents are $= \triangle + \triangle$, and s^3 will equal a series where the exponents of the powers of x are $= \triangle + \triangle + \triangle$. Now if one could prove that all powers of x occur in the series s^3, this should be a proof that every whole number is a sum of three triangular numbers. On the other hand, these series can easily be determined in general; for, defining

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + \dots,$$

the values of these coefficients for the different values of n are as follows:
when $n = 1$,

$$1, A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$$
$$1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0;$$

adding to this the same series in the way that can be seen,

$$\begin{array}{r}
1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0 \\
1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \\
1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0 \\
1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 \\
1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1 \\
1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0 \\
\hline
\end{array}$$

when $n = 2$,

$$1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0,\ 2;$$

adding to this the same series in the way that can be seen,

$$\begin{array}{r}
1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 0 \\
1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4,\ 2,\ 0,\ 2 \\
1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0,\ 2,\ 0,\ 1,\ 4 \\
1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 0 \\
1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 3,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1 \\
1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0,\ 3 \\
\hline
\end{array}$$

when $n = 3$,

$$1,\ 3,\ 3,\ 4,\ 6,\ 3,\ 6,\ 9,\ 3,\ 7,\ 9,\ 6,\ 9,\ 9,\ 6,\ 6,\ 15,\ 9,\ 7,\ 12,\ 3,\ 15,\ 15,\ 6,\ 12,\ 12,\ 9,\ 12,\ \dots.$$

If one could therefore show that in this series for $n = 3$ no term equals 0, it should be proved that every whole number is a sum of three triangular numbers. Similarly, from the series $n = 2$ one can see, since many terms equal 0, that many numbers are not sums of two triangular numbers, viz., 5, 8, 14, 17, 19, 23, 26, …

In the same way the composition of numbers from squares can also be represented: for this purpose I define

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + x^{49} + \dots$$

and

$$s^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + Hx^8 + Ix^9 + \dots$$

Now here the coefficients of the single powers of x for consecutive values of n are found in the following way:
exponents of x:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, \ldots$$

coefficients in the case $n = 1$:

$$1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

add to this

$$\begin{array}{r}
1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \\
1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \\
1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0 \\
1 \\
\hline
\end{array}$$

coefficients in the case $n = 2$:

$$1, 2, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 0, 2, 0, 0, 2$$

add to this

$$\begin{array}{r}
1, 2, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 0, 2, 0, 0 \\
1, 2, 1, 0, 2, 2, 0, 0, 1, 2, 2, 0, 0 \\
1, 2, 1, 0, 2, 2, 0, 0 \\
1 \\
\hline
\end{array}$$

coefficients in the case $n = 3$:

$$1, 3, 3, 1, 3, 6, 3, 0, 3, 6, 6, 3, 1, 6, 6, 0, 3$$

add

$$\begin{array}{r}
1, 3, 3, 1, 3, 6, 3, 0, 3, 6, 6, 3, 1, 6, 6, 0 \\
1, 3, 3, 1, 3, 6, 3, 0, 3, 6, 6, 3, 1 \\
1, 3, 3, 1, 3, 6, 3, 0 \\
1 \\
\hline
\end{array}$$

coefficients in the case $n = 4$:

$$1, 4, 6, 4, 5, 12, 12, 4, 6, 16, 18, 12, 8, 16, 24, 12, 5.$$

Here in the series for $n = 2$, 0 still occurs frequently, as with 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, which is a sign that these numbers do not equal $\Box + \Box$. In the series $n = 3$, 0 occurs with the numbers 7, 15; so these numbers are not sums of three squares; but in the series $n = 4$ no 0 occurs any more. Therefore one would only have to be able to prove this.

On the enclosed piece of paper I have copied Fermat's statements about his proofs of theorems;[8] from these one can roughly understand by what arguments these were inferred, and for this very reason their loss is the more to be regretted.

Here there is a rumour that I have been awarded the entire prize of the Paris Academy for this year; perhaps I shall myself be notified of this tomorrow.[9]

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, May 4th, 1748

Fermat in his Observations on Diophantus:[10]

> We have even discovered a general and most beautiful proposition, namely that any (integer) number is either triangular or composed of two or three triangular numbers; also that it is either square or composed of two or three or four squares; also that it is either pentagonal or composed of two or three or four or five pentagonal numbers, and so on to infinity. However we cannot add here the proof of this proposition, which consists of many diverse and very recondite mysteries of numbers. In fact we have decided to dedicate a work and even an entire book to this subject and to promote this part of Arithmetic far beyond the ancient and well-known bounds in a miraculous way.

[1] Samuel Richardson's epistolary novel *Pamela or Virtue Rewarded*, first printed in 1740, was a major bestseller of the time: by 1748 at least six editions in English and six translations into French, German, Dutch, Danish and Italian had been published. Most likely Goldbach had ordered from Berlin the second edition in German, published at Leipzig in 1743.

[2] Cf. n° 126, note 6.

[3] Euler had already stated in n° 125 that he did not believe in a solution of Fermat's problems by algebraic construction via "general formulae", as suggested by Goldbach.

[4] Cf. n° 126, note 3.

[5] An ingenious and simple method for proving this claim was found by Aubry in 1912; see also Weil 1984 (App. II to Ch. III, p. 292–295).

[6] Euler published this product formula in E. 242, which was presented to the Berlin Academy in June 1751 and printed in the Petersburg *Novi Commentarii* for 1754/55 in 1760.
Euler's formula for multiplying sums of four squares can be interpreted as the multiplicativity of the norm in Hamilton's quaternion algebra. In his *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Hurwitz showed that Euler's proof of the Four Squares Theorem can be formulated very naturally within the language of quaternions and follows from unique factorisation of quaternions in a similar way as Fermat's Two Squares Theorem follows from unique factorisation in the ring of Gaussian integers. In the 1920s, B.A. Venkov used quaternions for arithmetic proofs of certain class number formulae due to Dirichlet.
Euler's product formula for sums of four squares has even led to the absurd claim that Euler introduced quaternions in this letter to Goldbach (see Blaschke 1959).
An analogous formula for sums of eight squares was found by C.F. Degen: see Degen 1822. In 1898 Hurwitz proved that such formulae only exist for sums of 1, 2, 4 or 8 squares.

[7] Here Euler explains the idea of generating functions, published much later in E. 586 (see also his long letter R 1904 to Philippe Naudé from September (12th) 23rd, 1740: Smirnov 1963, p. 179–205). For Euler, generating functions remained a tool in combinatorics; the method gained a lot of weight through the work of Jacobi, who proved, e. g., the Four Squares Theorem by bringing in analytic methods (see his letter to Legendre from September 9th,

1828: *Werke* I, p. 422–425).
Cf. again n° 147, note 2.

[8] Cf. *infra* note 10.

[9] Euler had indeed won the 1748 prize of the Académie des Sciences for his paper E. 120 on the motion of Jupiter and Saturn: the official notification reached him "a few days" before May 11th, when he informed Schumacher about it (see R 2162: JW 2, p. 127–128).

[10] This note is written on a separate piece of paper enclosed with the letter. The – not quite literal – quotation is from Fermat's note on *Quaestio* IV / 31 in the 1670 edition of Diophantus' *Arithmetica*, p. 180–181.

128
Goldbach to Euler
Petersburg, (May 28th) June 8th, 1748

Sir,

I am still utterly convinced that not only $4n+3$ but also $4n+1$ and consequently every odd number can be brought to the formula $2a^2+b^2+c^2$; in fact this amounts to the same as the formula $\square+2\square+2\triangle$ cited by me as n.° II,[1] so if – as I understand – you do not doubt this latter, the equation $2n+1=2a^2+4b^2+c^2$ is also certain. On the other hand, the one which I added by mistake as n.° 8, $\dfrac{\square+\square+\square}{2}$, cannot be admitted;[2] it should read instead $2\square+\triangle+\triangle$ or $\dfrac{\square+\square}{2}+\triangle$. Besides this there is another ridiculous mistake in my copy of the table of formulae, which presumably will also be found in the original, as under n.° I and n.° IV the very same formula $2\square+\square+\triangle$ is cited.[3] As regards the formula $\square+\square+2\triangle$, which you think curious, Sir, this follows at once from the consideration that any $4n+1$ is a sum of two even squares and one odd one, in the same way that, on the other hand, $4n+2$ consists of two odd squares and one even one.

Although I have little hope for proving Fermat's theorem,[4] I yet discovered by its guidance several others which I think to be equally true, as for example:

Any square of an odd or oddly even number, as long as it is smaller than $8n+7$, is one of the four squares whose sum is $8n+7$. Similarly: any number $8n+2$ is of the form $(2\pm 2)^{2e}+\square+\square$.[5]

I do not actually want to pass the enclosed proof of your theorem on the squares of the sides of a quadrilateral off as being the shortest one, but I think one can very easily chance upon much more long-winded ones.[6] I was lately presented with the occasion for it by a good friend who told me he could prove a special case of it, namely that of a quadrilateral where two angles are right and two sides are parallel.

You should very much oblige me, Sir, by kindly having Mr. Haude requested to send me by mail, with the inscription "Printed matter", two copies of the calculation of the upcoming solar eclipse according to the Eulerian tables, but with the indispensable condition that the copies must arrive here at least eight days before the eclipse.[7]

It was very pleasant news to me that you received the entire prize of the Académie Royale des Sciences.[8] I congratulate you on this from all my heart, and my hope that you shall fare no worse in all future questions is growing all the time.

I have been partly informed about the welfare of your dearest family by Professor Braun; I shall be particularly pleased to learn of the further progress of Master Johannes Albertus, since I have great hopes that, in good time, he shall again occupy your position at St. Petersburg.

I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, June 8th (n. st.), 1748.

[1] See Goldbach's list of general formulae in n° 126.
According to Dickson 1927, the form $x^2 + y^2 + 2z^2$ represents every positive integer except those of the form $4^j(16k + 14)$. In particular, Goldbach's conjecture is true. As Euler shows in n° 129, this result is equivalent to the fact that numbers of the form $4n + 1$ are sums of three squares.
More generally, Panaitopol showed in 2005 that $ax^2 + by^2 + cz^2$, where $a \leq b \leq c$ are natural numbers, represents every odd natural number if and only if (a, b, c) is one of $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 3)$ or $(1, 2, 4)$.
[2] In fact this was number 9 (written as VIIII); cf. n° 127, note 4.
[3] This is not true: in the letter sent to Berlin, number I reads $2\,\Box + \Box + 4\,\triangle$ (cf. n° 126, note 3).
[4] Cf. n° 127, note 10.
[5] In Goldbach's copy the term $(2 \pm 2)^{2e}$ has been crossed out; in the margin, Goldbach noted "*vid. p.* ", without indicating the page number but certainly referring to n° 130.
[6] Cf. n° 125, note 6. The enclosure with Goldbach's proof has not been preserved.
The text of Goldbach's copy ends here.
[7] G.M. Lowitz, *Kurze Erklärung über zwey Astronomische Karten von der Sonnen- oder Erd-Finsternis den 25. Julius 1748 ....* The charts were calculated from Tobias Mayer's lunar tables based on Euler's theory. Cf. n° 130, note 1, and n° 131, note 1.
[8] Cf. n° 127, note 9.

129
Euler to Goldbach
Berlin, June 25th, 1748

Sir,

with regard to the presentation of the upcoming solar eclipse published at Nuremberg, of which you are requesting two copies, Sir,[1] an accident occurred which is the cause that, although several hundred copies of it lie here, it is yet not possible to satisfy your orders. In the best interest of the Academy, His Royal Majesty has imposed a customs tax on all maps that arrive here, which the local merchants of prints from Nuremberg are not yet willing to pay; therefore the charts that belong to them are still held at the Berlin depot. Some time ago I was in fact sent twelve copies of this Solar Eclipse Chart as a present, but I distributed all of them here except for a single copy, which has been framed. If I had known earlier of your wish, I should have sent some copies by mail with the greatest pleasure. Under the present circumstances I did not know what to do other than to ask Mr. Spener, who has taken over the late Mr. Haude's book trade, to write to Leipzig without delay – which has been done the day before yesterday – and to place the order for the requested copies to be immediately dispatched from there by direct mail to you, Sir, which can be done by tomorrow; since they should not be on the way for more than three weeks, I hope they will arrive a good eight days before the eclipse. This eclipse will be especially remarkable here, as it is not only going to be annular but also to occur around noon. Mr. Spener will also soon dispatch the books which you lately requested, Sir; I have taken the liberty to have added to them a copy of my *Introductio in Analysin infinitorum* recently published at Lausanne,[2] which I pray you should kindly accept as a small token of my dutiful devotion.

By now I have finally got to the bottom of the beautiful formulae that you recently communicated to me, Sir; by the way, I at once noticed the small copying mistake.[3] They are based, in my opinion, on the following three principal formulae: I. $n = \triangle + \triangle + \triangle$, II. $4n+1 = \square + \square + \square$ and III. $4n+2 = \square + \square + \square$; I have been utterly assured of their correctness for a long time, even if I cannot indicate their proof.

From the first one, $n = \triangle + \triangle + \triangle$, it follows that $n = \dfrac{a^2+a}{2} + \dfrac{b^2+b}{2} + \dfrac{c^2+c}{2}$. Now let $a = d+e$ and $b = d-e$, so $n = d^2 + d + e^2 + \dfrac{c^2+c}{2}$; consequently any number n equals $\square + 2\triangle + \triangle$, by which it is also evident that always $\triangle + \triangle = \square + 2\triangle$.

From the second, $4n+1 = \square + \square + \square$, it follows that

$$4n + 1 = 4a^2 + 4b^2 + (2c+1)^2 ,$$

so $n = a^2 + b^2 + c^2 + c$ and therefore

$$n = \square + \square + 2\triangle.$$

Moreover, since any whole number equals $a^2 + b^2 + c^2 + c$, it is also true that any even number $2n$ equals $a^2 + b^2 + c^2 + c$ and therefore

$$n = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2+c}{2} = \frac{\square + \square}{2} + \triangle.$$

Alternatively let $a = d+e$ and $b = d-e$, then

$$n = d^2 + e^2 + \frac{c^2+c}{2} = \square + \square + \triangle.$$

Similarly, any odd number will be $2n+1 = a^2 + b^2 + c^2 + c$; now since $c^2 + c$ is always even, one of the numbers a and b must be even and the other odd; therefore

$2n+1 = 4a^2 + (2b+1)^2 + c^2 + c$, and consequently

$$n = 2a^2 + 2b^2 + 2b + \frac{c^2+c}{2},$$

so

$$n = 2\,\square + 4\,\triangle + \triangle.$$

The third formula, $4n+2 = \square + \square + \square$, yields

$$4n+2 = 4a^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2,$$

so one has $n = a^2 + b^2 + b + c^2 + c$ and therefore $n = \square + 2\,\triangle + 2\,\triangle$. Setting $b = d+e$, $c = d-e$, this yields

$$n = a^2 + 2d^2 + 2d + 2e^2 = \square + 2\,\square + 4\,\triangle.$$

Furthermore, one also has $2n = \square + 2\,\triangle + 2\,\triangle$, so $\square$ is even, therefore $2n = 4a^2 + b^2 + b + c^2 + c$ and

$$n = 2a^2 + \frac{b^2+b}{2} + \frac{c^2+c}{2} = 2\,\square + \triangle + \triangle.$$

Moreover, as $\triangle + \triangle = \square + 2\,\triangle$, one has $n = 2\,\square + \square + 2\,\triangle$, so one also has $2n = 2\,\square + 4\,\square + 2\,\triangle$, and consequently

$$n = \square + 2\,\square + \triangle.$$

Alternatively, since $2n+1 = 2a^2 + (2b+1)^2 + c^2 + c$, one also has

$$n = a^2 + 2b^2 + 2b + \frac{c^2+c}{2} = \square + 4\,\triangle + \triangle.$$

Finally, it is also true that

$$2n+1 = \square + 2\,\triangle + 2\,\triangle = (2a+1)^2 + b^2 + b + c^2 + c$$

and $n = 2a^2 + 2a + \dfrac{b^2+b}{2} + \dfrac{c^2+c}{2}$, or

$$n = 4\,\triangle + \triangle + \triangle = \square + 2\,\triangle + 4\,\triangle.$$

So one also has $2n = 4\,\square + 2\,\triangle + 4\,\triangle$ or $n = 2\,\square + \triangle + 2\,\triangle$ or

$$2n+1 = (2a+1)^2 + 2\,\triangle + 4\,\triangle;$$

thus

$$n = \triangle + 2\triangle + 4\,\triangle.$$

Since $4n+2 = 4a^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$, one has

$$2n+1 = 2a^2 + 2b^2 + 2b + 2c^2 + 2c + 1.$$

Let $b = d+e$, $c = d-e$, then one has

$$2n+1 = 2a^2 + 4d^2 + 4e^2 + 4d + 1 = 2\,\square + \square + \square.$$

Therefore every odd number $2n+1$ equals $2\,\square + \square + \square$, which was your first, in my opinion very remarkable theorem, Sir.

So all the formulae discovered here are as follows:

I.	$n = \triangle + \triangle + \triangle$	IV.	$n = \square + \square + \triangle$	VII.	$n = \square + 2\,\square + 4\,\triangle$
II.	$n = \square + 2\,\triangle + \triangle$	V.	$n = 2\,\square + \triangle + 4\,\triangle$	VIII.	$n = 2\,\square + \square + 2\,\triangle$
III.	$n = \square + \square + 2\,\triangle$	VI.	$n = \square + 2\,\triangle + 2\,\triangle$	IX.	$n = \square + 2\,\square + \triangle$

X.	$2\,\square + \triangle + \triangle = n$	XIII.	$n = 2\,\square + \triangle + 2\,\triangle$
XI.	$\square + 4\,\triangle + \triangle = n$	XIV.	$n = \triangle + 2\,\triangle + 4\,\triangle$
XII.	$4\,\triangle + \triangle + \triangle = n$	XV.	$2n+1 = \square + \square + 2\,\square.$

Since both $8n+3$ and $8n+6$ can always be split up into three squares, it follows that $8n+7-p^2$ is a sum of three squares whenever $p^2 = 8m+4$ or $= 8m+1$, i. e., whenever p is either an odd or an oddly even number, as you stated, Sir.

However I cannot quite understand that any number $8n+2$ should be contained in the form $(2\pm 2)^{2e} + \square + \square$.[4] If this were to mean that one always has $8n+2 = \square + \square + q$, where q is either 0 or 16 or 256 or 4096 etc. – these being the values of $(2+2)^{2e}$ – then this should not be true in the instance $8n+2 = 154$, since $154 - q$ never becomes a sum of two squares, except if the exponent e could also equal 0 and consequently $q = 1$; however I still doubt whether an exception could not also be found in this case.

Lately I chanced upon a peculiar consideration, by means of which many Diophantine problems can be solved very easily. If one can, for example, determine rational numbers for x, y, z in such a way that the equation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$$

is satisfied, then all the surd[5] formulae in the following equations which arise from it must become rational:

$$\begin{array}{ll}
x = 1 \pm \sqrt{2y + 2z - y^2 - z^2}; & x - y = 1 \pm \sqrt{2z + 4y - 2xy - z^2} \\
y = 1 \pm \sqrt{2x + 2z - x^2 - z^2}; & y - x = 1 \pm \sqrt{2z + 4x - 2xy - z^2} \\
z = 1 \pm \sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2}; & x - z = 1 \pm \sqrt{2y + 4z - 2xz - y^2} \\
x + y = 1 \pm \sqrt{2z - z^2 + 2xy}; & z - x = 1 \pm \sqrt{2y + 4x - 2xz - y^2} \\
x + z = 1 \pm \sqrt{2y - y^2 + 2xz}; & y - z = 1 \pm \sqrt{2x + 4z - 2yz - x^2} \\
y + z = 1 \pm \sqrt{2x - x^2 + 2yz}; & z - y = 1 \pm \sqrt{2x + [4]y - 2yz - x^2}
\end{array}$$

$$x + y + z = 1 \pm \sqrt{2xy + 2xz + 2yz}.$$

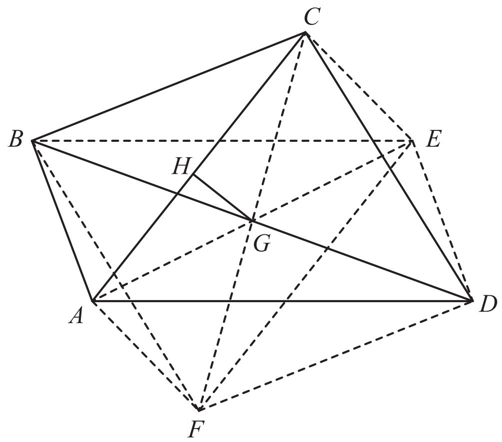
So if just one of these formulae is made rational, which is very easy, all the twelve others shall become rational by themselves. With respect to the first one this occurs when

$$\begin{aligned} x &= \frac{p^2+q^2+r^2+2pr+2qr}{p^2+q^2+r^2}, \\ y &= \frac{2p\,(p+q)}{p^2+q^2+r^2}, \\ z &= \frac{2q\,(p+q)}{p^2+q^2+r^2}. \end{aligned}$$

Consequently, if it is asked to determine three numbers x, y, z in such a way that all thirteen root formulae above become rational – a problem which should be nearly impossible to solve in the common way – infinitely many solutions can be easily indicated from this. If, e. g., $p = 1$, $q = 2$, $r = 2$, one has $x = \frac{7}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{4}{3}$.[6]

Just now, i. e., on the 24th, I receive by the mail coach from Petersburg a parcel sent on May 28th old style, i. e. June 8th new style,[7] which therefore has not been on the way for more than 16 days; I conclude from this that the charts from Leipzig are going to arrive on time.[8]

My proof of the theorem communicated lately[9] goes like this:



Let the proposed quadrilateral $ABCD$ have the diagonals AC, BD; first complete the parallelogram $ABED$, whose diagonals AE and BD shall bisect one another in G. Then draw CE and complete the parallelogram $ACEF$ with its diagonal CF; joining now BF and DF, $BCDF$ shall also be a parallelogram. Now since in any parallelogram the sum of the squares on the diagonals equals the sum of the squares on the sides, for ▱ $ACEF$ one will have

$$AE^2 + CF^2 = 2AC^2 + 2CE^2,$$

and for ▱ $BCDF$

$$BD^2 + CF^2 = 2BC^2 + 2CD^2,$$

so

$$2AC^2 + 2CE^2 - AE^2 = 2BC^2 + 2CD^2 - BD^2 = CF^2.$$

Furthermore ▱ $ABED$ yields

$$AE^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2AD^2;$$

adding this equation to the former, one has

$$\begin{array}{llcll}
2AC^2 + 2CE^2 & +BD^2 & = & 2AB^2 + 2BC^2 + 2CD^2 + 2AD^2 & -BD^2 \\
\text{adding} & BD^2 & & \text{(and dividing by 2)} & BD^2 \\
\hline
AC^2 + CE^2 + BD^2 & & = & AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2. &
\end{array}$$

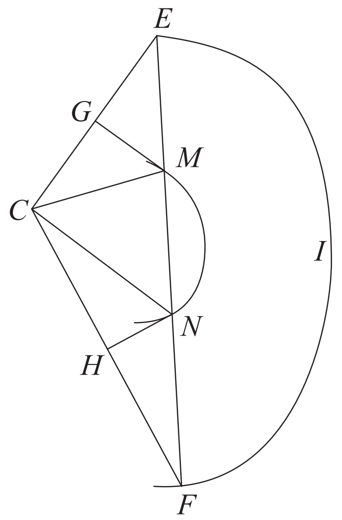
However, since AE, and BD as well, is bisected in G, AC will also be bisected in H, and the line GH shall be parallel to CE and equal to its half, so that one has $CE^2 = 4GH^2$; substituting this, one gets

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4GH^2,$$

QED.

If one asks, as is commonly done in geometry, for a proof in the style of the ancients, this has a great advantage over the one which you kindly communicated to me, Sir;[10] however, if one just wants to be convinced of the truth – which certainly is the main issue – my proof should lose all its advantage, since I presuppose in it the said property of parallelograms, which you not only do not need, Sir, but even prove simultaneously along with the rest.

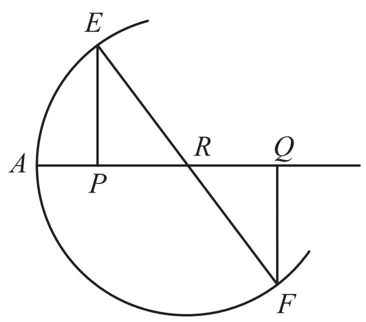
Mr. Oechlitz from Leipzig, who has been offered the chair of Higher Mathematics at St. Petersburg but declined this appointment,[11] invented a very nice solution of the much-discussed Catoptric Problem, which will not fail to please you, Sir:[12]



Let MN be one of the requested curves, which sends back all rays emitted from a fixed point C to the same point C after two reflections in M and N. Prolong MN on both sides to E and F so that $ME = CM$ and $NF = CN$; then the length EF will be constant and the points E and F will be on such a curve EF

that the straight line EF meets it perpendicularly on both sides. Now the whole matter depends on determining curves EF in such a way that the perpendicular lines EF drawn at any point intersect the same curve again at a right angle at F; indeed this property already implies the other one that the length of this line EF must be constant. Now one sees at once that the curve EIF can be a circle whose diameter is EF; but there are infinitely many other curves which have this property in common with the circle, as I shall soon show.

Once one has found such a curve EIF, the requested curve MN can very easily be determined from it, and this in an infinity of ways. For one can assume the radiant point C at will; and joining from there the straight lines CE and CF to the extremities of the line EF, bisecting them in G and H into two equal parts, erecting at the points G and H the perpendicular lines GM and HN, continued until they meet EF, not only will the points M and N lie on the requested curve MN, but GM and HN shall also be its tangents. Assuming EIF to be the circle of diameter EF, MN becomes an ellipse whose foci are the radiant point C and the center of the circle EIF.



On the other hand, in order to determine all possible curves EAF that are normally intersected again in F by their normals ERF, I define the abscissae to be $AP = x$, $AQ = X$, the ordinates $PE = y$, $QF = -Y$ (as this lies on the opposite side of the axis). Thus the subnormal PR equals $\dfrac{y\,dy}{dx}$ and the subnormal QR is $\dfrac{-\,Y\,dY}{dX}$. Now, since $PE : PR = QF : QR$, one has $y : \dfrac{y\,dy}{dx} = -Y : \dfrac{-\,Y\,dY}{dX}$ and consequently $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dY}{dX}$. Setting now $dx = p\,dy$, one also has $dX = p\,dY$ and $PR = \dfrac{y}{p}$, $QR = -\dfrac{Y}{p}$; so $PQ = \dfrac{y-Y}{p} = X - x$. Differentiating this equation yields

$$\frac{dy - dY}{p} - \frac{(y-Y)\;dp}{p^2} = dX - dx = p\,(dY - dy)$$

or

$$(dy - dY)\left(\frac{1+p^2}{p}\right) = \frac{(y-Y)\;dp}{p^2},$$

i. e.,

$$\frac{dy - dY}{y - Y} = \frac{dp}{p\,(1+p^2)} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{1+p^2}.$$

One therefore has

$$\log\,(y - Y) = \log\,(2a) + \log p - \log\left(1+p^2\right),$$

or

$$y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

and consequently

$$X - x = \frac{2a}{\sqrt{1+p^2}} = PQ.$$

Now since $PE + QF = y - Y = \dfrac{2ap}{\sqrt{1+p^2}}$, one has

$$EF^2 = PQ^2 + (PE + QF)^2 = 4a^2,$$

so $EF = 2a$, which is therefore constant.

As $y - Y = \dfrac{2ap}{\sqrt{1+p^2}}$, I define $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ and $Y = P - \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$, where P is to denote an arbitrary rational function of p; for in this way the condition of continuity is satisfied, since the formula $P \pm \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ is ambiguous in nature because of the radical sign and thus refers to both points E and F simultaneously. Since now $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$, one has $dy = dP + \dfrac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ and consequently

$$dx = p\,dy = p\,dP + \frac{ap\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

which has the integral

$$x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Hence, if P is assumed to be some arbitrary rational function of p, one has the following formulae for the curve AE:

$$\begin{aligned} AP &= x = \int p\,dP - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}, \\ PE &= y = P + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}, \end{aligned}$$

by which the coordinates of the other corresponding point F are simultaneously determined just by changing the sign of the root $\sqrt{1+p^2}$. If one wants to have algebraic curves, one just has to assume for P such a function of p that $\int p\,dP$ becomes integrable. If one defines, for example, $P = 2bp$, then

$$x = 2b \int p\,dp - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} = bp^2 - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + a$$

and

$$y = 2bp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

The first yields $px = bp^3 + ap - \dfrac{a}{\sqrt{1+p^2}}$, which added to the other one leads to $y+px = bp^3 + (a+2b)\,p$. By eliminating now the letter p from these two equations one gets the equation that links x and y. However, the above formulae are more convenient for construction, since in this example one has

$$\begin{aligned} AR &= bp^2 + a + 2b; \\ PQ &= \frac{2a}{\sqrt{1+p^2}}; \\ PR &= 2b + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}; \\ PE + QF &= \frac{2ap}{\sqrt{1+p^2}}. \end{aligned}$$

On the other hand, a very simple construction can also be given in general which comprises all curves having that property, whether they be algebraic or transcendental.

All my family asks me to thank you most obediently for your kind remembrance, Sir, and at the same time to recommend them most humbly to your further goodwill and favour. Our Johann Albrecht's health appears now to become more stable, and as he has considerably improved in mathematics but is lagging somewhat behind in the humanities, he is now attending a newly established school here which meets with general approval for its good organisation and its especially easy and convenient manner of teaching. Notwithstanding that it has been established only a year ago, I saw the other day at an examination to my great surprise that the boys have made great progress both in languages and in science, not excepting mathematics and physics, the like of which could be expected in other grammar schools either only after many years' time or not at all. As he is encouraged there in an agreeable way to learn all day, I have had to suspend my own teaching for some time in the hope that he shall progress all the faster after a good foundation in the humanities has been laid.

I have the honour to be with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, June 25th, 1748

[1] Cf. nº 128, note 7.
[2] Cf. nº 112, note 5.
[3] Cf. nº 128, notes 2 and 3.
[4] Cf. nº 128, note 5.
[5] According to a usage slowly becoming obsolete, this expression, a translation of the Greek ἄλογος, means irrational quantities, particularly quadratic irrationals.
[6] Quadrics such as $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$ with a known rational point (here, for example, $(x, y, z) = (0, 0, 1)$) can easily be parametrised using lines through P. Setting $X = x - 1$, $Y = y - 1$ and $Z = z - 1$, the equation becomes $X^2 + Y^2 + Z^2 = 2$. Using lines through $(X, Y, Z) = (-1, -1, 0)$, say

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix},$$

we find $t((p^2 + q^2 + r^2)t - 2(p + q)) = 0$; thus $t = 0$ or $t = \dfrac{2(p+q)}{p^2+q^2+r^2}$, which implies

$$X = \frac{p^2 + 2pq - q^2 - r^2}{p^2 + q^2 + r^2}, \quad Y = \frac{q^2 + 2pq - p^2 - r^2}{p^2 + q^2 + r^2}, \quad Z = \frac{2r(p+q)}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Substituting back, we get

$$x = \frac{2p(p+q)}{p^2 + q^2 + r^2}, \quad y = \frac{2q(p+q)}{p^2 + q^2 + r^2}, \quad z = \frac{p^2 + q^2 + r^2 + 2r(p+q)}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

These are, up to a permutation of x, y, z, Euler's formulae.
Euler's technique – the use of clever algebraic substitutions – goes back to Diophantus. There are no traces of a geometric interpretation of these substitutions in the work of Fermat or Euler.
[7] This was probably Schumacher's letter R 2165, which accompanied a booklet sent by the Petersburg Academy (cf. JW 2, p. 131).
[8] Cf. *supra* note 1.
[9] Cf. nº 125, note 6.
[10] Cf. nº 128, note 6.
[11] Christian Friedrich Oechlitz (born in 1723) had been recommended to Euler in 1745 by Heinsius, his teacher at Leipzig (see R 1003, 1006). In the following years Euler corresponded with Oechlitz (R 1908–1917), formed a high opinion of his talents and recommended him for several posts (see R 417 to Clairaut, R 1504 to Maupertuis and several letters to Petersburg officials published in JW 2, p. 94–133). After prolonged negotiations, Oechlitz finally declined an engagement at the Petersburg Academy in June 1748 (see Euler's letter R 2045 to Razumovskiĭ) and instead took up a post as private tutor on an estate in Saxony, where he died in 1753.
[12] Cf. nº 87, note 9.
The *Analysis* of Oechlitz's solution, which he had discussed beforehand with Euler (cf. R 1913–1914), was published in the *Nova Acta Eruditorum* for April and November 1747.

130

GOLDBACH TO EULER

Petersburg, July (2nd) 13th, 1748

Sir,

I thank you humbly for the great trouble you kindly took in order for the requested description of the solar eclipse to be delivered to me on time; I hope that it shall arrive here within the stipulated period.[1]

On the other hand,[2] I should not have replied so soon to your honoured last letter if I did not consider it necessary the sooner the better to correct the formula which I mentioned but expressed badly[3] by $(2 \pm 2)^{2e}$; in fact one has $8n+2 = (2 \pm 2)^{e+1} + \square + \square$, where e always denotes some positive whole number, or also $8n+2 = (1 \pm 1)^{2e+2} + \square + \square$, and similarly $8n+1 = (1 \pm 1)^{2e} + (1 \pm 1)^{2f} + \square$, where e and f denote positive integers;[4] it is also very likely that one even has $4n+1 = (1 \pm 1)^{2e+1} + \square + \square$. But I think it particularly remarkable that in this equation

$$4n + 3 = 2a^2 + 4b^2 + c^2 + 2 = 2A^2 + 4B^2 + C^2,$$

where a is an even and A an odd number, a can be chosen, for each case of the number n, in such a way that A equals $a+1$. In the case where $a = 0$ this is obvious, but in the other cases the proof is – as usual – lacking;[5] however it has to be well understood that the value of a can – as stated – be chosen in such a way and is not necessarily such: if, e. g., $n = 19$ and $4n+3 = 79$, then a can take two values, namely 4 and 6, where not the second, but only the first of these applies here in order for the equations

$$4 \cdot 19 + 3 = 2 \cdot 4^2 + 6^2 + 3^2 + 2 = 2\,(4+1)^2 + 2^2 + 5^2$$

to hold and for A to equal $a + 1 = 4 + 1$.[6]

I discovered the formulae I stated last time[7] in the following manner, which indeed agrees with your method, Sir: By assuming

$$(1.) \quad 4a^2 + 2b^2 + 4c^2 + 4c + 1 = 2n + 1,$$

one has

$$(2.) \quad n = 2a^2 + b^2 + 2c^2 + 2c = 2\,\square + \square + 4\,\triangle.$$

Let n be some even number $2m$, then b must also be an even number $2d$, so

$$(3.) \quad m = a^2 + 2d^2 + c^2 + c = 2\,\square + \square + 2\,\triangle.$$

Let $m = 2p$, then one must also have $a = 2e$, so

$$(4.) \quad p = 2e^2 + d^2 + \frac{c^2 + c}{2} = 2\,\square + \square + \triangle.$$

Let n in formula (2.) equal $2m + 1$, then $b = 2d + 1$, so

$$(5.) \quad m = a^2 + 2d^2 + 2d + c^2 + c = \square + 4\,\triangle + 2\,\triangle.$$

Let $m = 2p$, then $a = 2e$, so[8]

$$(6.)\quad p = 2e^2 + d^2 + d + \frac{c^2 + c}{2} = 2\,\square + 2\,\triangle + \triangle.$$

Let m in formula (4.) equal $2p + 1$, then $a = 2e + 1$, so

$$(7.)\quad p = 2e^2 + 2e + d^2 + d + \frac{c^2 + c}{2} = 4\,\triangle + 2\,\triangle + \triangle.$$

Let m in formula (3.) equal $2p + 1$, then $a = 2e + 1$, so

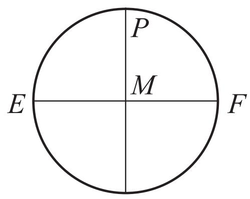
$$(8.)\quad p = 2e^2 + 2e + d^2 + \frac{c^2 + c}{2} = 4\,\triangle + \square + \triangle,$$

and so on.

The present that you are making me of your *Introductio in analysin infinitorum* shall be most welcome to me; I had not known at all or else entirely forgotten that you had written such a book, which will presumably now soon be reviewed in the scholarly journals.[9] At this opportunity I should like to know if your *Scientia navalis* is already printed, Sir, and also what you think of a treatise that Mr. Bouguer published on the same subject.[10] Moreover I should like to be informed whether the newly discovered planet which you mentioned in your Answers to the Questions about Comets has remained in its position[11] and been confirmed by further observations,[12] and again, whether the comet of 1742 caused any alteration in Mercury's orbit?[13]

Regarding the equation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$, this is transformed, by setting $x - 1 = A$, $y - 1 = B$, $z - 1 = C$, into $A^2 + B^2 + C^2 = 2$; thus it is at once evident that, when $A = \sqrt{2 - B^2 - C^2}$ is fixed to be rational, $-B^2 = A^2 + C^2 - 2$ or $B = \sqrt{2 - A^2 - C^2}$ or $C = \sqrt{2 - A^2 - B^2}$ must also be rational.[14]

For your solution of the problem about the diagonals of a quadrilateral[15] I convey my humble thanks, observing at the same time that if one of the four sides AB, BC, CD, DA is expressed by an oddly even number and the other three by odd numbers, then the three squares $AC^2 + BD^2 + 4GH^2$ cannot possibly consist of whole numbers.



The solution of the catoptric problem[16] by means of a curve whose normal intersecting the curve is everywhere constant is indeed very nice. I noticed in it that by the formula $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$ one must always have, for the case where y equals the maximal ordinate, $P = -ap + a\sqrt{1+p^2}$; however I cannot quite imagine what the curve should have to look like if one assumes the line EM intercepted from the vertex E to the maximal ordinate MP to be very small, say $\frac{a}{1000}$, and conclude from this that this intercept EM will have certain bounds.

I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, July 13th, 1748.

[1] Cf. n° 128, note 7, and n° 129, note 1.
[2] The text of Goldbach's copy starts here.
[3] Cf. n° 128, note 5, and n° 129, note 4.
[4] Here Euler noted between the lines: "217 *non succedit*" ("217 does not work out"). In his copy, Goldbach noted in the margin: "*fals*[*um*] *v*[*ide*] *p*[*aginam*]   " ("wrong, see p. . . . "), referring to n° 132.
[5] Consider the number $347 = 4 \cdot 86 + 3$. Then

$$\begin{array}{ll} 345 - 2 \cdot 0^2 = 3 \cdot 5 \cdot 23, & 347 - 2 \cdot 1^2 = 3 \cdot 5 \cdot 23, \\ 345 - 2 \cdot 2^2 = 337, & 347 - 2 \cdot 3^2 = 7 \cdot 47, \\ 345 - 2 \cdot 4^2 = 313, & 347 - 2 \cdot 5^2 = 3^3 \cdot 11, \\ 345 - 2 \cdot 6^2 = 3 \cdot 7 \cdot 13, & 347 - 2 \cdot 7^2 = 3 \cdot 83, \\ 345 - 2 \cdot 8^2 = 7 \cdot 31, & 347 - 2 \cdot 9^2 = 5 \cdot 37, \\ 345 - 2 \cdot 10^2 = 5 \cdot 29, & 347 - 2 \cdot 11^2 = 3 \cdot 5 \cdot 7, \\ 345 - 2 \cdot 12^2 = 3 \cdot 19, & 347 - 2 \cdot 13^2 = 3^2. \end{array}$$

Thus at least one of the two numbers $n - 2 - 2a^2$ or $n - 2(a+1)^2$ is always divisible by an odd power of a prime $\equiv 3 \bmod 4$, hence cannot be written as a sum of two squares. This shows that 347 is a counterexample to Goldbach's conjecture.
See also *infra* n° 131, note 6.
[6] The text of Goldbach's copy ends here.
[7] Cf. n° 126, note 3, and n° 129, note 3.
[8] In the formula that follows, the original has the *lapsus calami* $\frac{c^2+c^2}{2}$.
[9] Cf. n° 112, note 5, and n° 129, note 2.
A long review of the *Introductio* appeared in the April 1751 issue of *Nova Acta Eruditorum*.
[10] The difficulties with the publication of the *Scientia Navalis* had already been discussed much earlier (see *supra* n° 58, 72). Euler had abandoned his attempt to have the work printed at Lausanne, or in Berlin at the Petersburg Academy's expense, and sent the manuscript to Petersburg in June 1748; on July 12th (23rd), Schumacher informed Euler that Razumovskiĭ had just ordered to start printing it (see R 2166, 2170: JW 2, p. 133, 138). The book was finally delivered in summer 1749.
Bouguer's *Traité du Navire* had been on the market since 1746, and Euler felt that Bouguer had anticipated many of his discoveries in the public's eye because of the Petersburg Academy's inaction (cf. *supra* n° 112).
See also n° 131, note 9, and n° 132, note 3.
[11] The spelling "*possession*" instead of "position" in the original manuscript seems to have arisen from a slip of the pen.
[12] In his popular booklet *Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Würckung der Cometen* from 1744, Euler had indeed mentioned the likelihood that comets exist which describe elliptical orbits relatively close to the Sun: "Presumably some comets are at their aphelion not even as far distant from the Sun as Saturn is; of one

it has even be found that its aphelion is closer to the Sun than Jupiter – the perihelion being all the same farther out than Mars – and that this comet completes its regular course around the Sun in about 4 years. If this were really the case, that comet should rather be counted among the planets." ("Es ist ... zu vermuthen, daß einige Cometen in ihrem Aphelio nicht einmahl so weit, als der Saturnus, von der Sonne abstehen. Man hat von einem so gar schon gefunden, daß sein Aphelium der Sonne näher sey, als der Jupiter, das Perihelium gleich wohl weiter als der Mars abstände, und daß dieser Comet ungefehr in 4 Jahren seinen ordentlichen Lauf um die Sonne vollende. Sollte sich nun die Sache also verhalten, so müsste dieser Comet vielmehr zu den Planeten gezehlet werden.": E. 67, § VII: O. II/31, p. 146).
Unfortunately, Euler's source for this allegation and the celestial object to which it refers have still not been unequivocally identified. One comet discovered at that time – C/1743 C1 in Kronk's *Cometography* – may actually have a short orbital period: For this comet first observed by Grischow at the Berlin Observatory on February 10th, 1743 (see *supra* n° 64, note 11), Clausen proposed in 1833 an identification with comet D/1819 W1 sighted by Blanpain in 1819, which orbits in 4.8 years. However, because of the massive interference of Jupiter with that object, which was not observed again until 2003 (see Jewitt 2006), an extrapolation to 1743 still seems very conjectural, and other identifications have also been proposed. Moreover, an elliptical orbit with relatively small axis, eccentricity and period was also (wrongly) calculated for the very bright 1729 comet (Kronk's C/1729 P1) on the basis of Euler's theory by the Berlin astronomer Johann Kies (see Euler's letter R 508 to Delisle from September 1744).
Anyway, by 1748 Euler had taken his distances from these speculations based on insufficient data: see his reply n° 131, note 10.

[13] Here Goldbach's recollection of Euler's popular tract on comets is inexact: the question whether Mercury had been disturbed or even deflected from its orbit (cf. E. 68: O. II/31, p. 180) did not arise for the 1742 comet – Kronk's C/1742 C1 – but for the great 1743/44 comet C/1743 X1 observed by Loys de Chéseaux (cf. n° 76, note 5, and n° 78, note 9. See Euler's reply n° 131, note 11.

[14] Cf. n° 129, note 6.

[15] Cf. n° 129, note 9.

[16] Cf. n° 129, note 12.

131
Euler to Goldbach
Berlin, August 6th, 1748

Sir,

in the hope that you shall have received the requested eclipse charts duly and on time,[1] I do not doubt you will also be satisfied with their agreement. For notwithstanding that I discovered some improvements in the elements on which they are based, yet these are so small that no noticeable alteration should have arisen from them in the representation shown on the chart. Since the sky rather favoured us here in the most precise observation of this eclipse, I have reason to be completely satisfied with my new Lunar Tables.[2] Indeed, both the beginning and the end agreed with my calculation within less than a minute, the beginning being observed 15″ later and the end 30″ later than I had fixed them. But in particular this eclipse was indeed annular, as I had found, whereas not only the other tables, which yet are taken to be the best, did not indicate a ring, but also some Paris astronomers wanted to refute my calculation by some supposed correction applied to the tables and to assert the eclipse should be only partial here.[3] The calculations performed according to the other lunar tables missed predicting both the beginning and the end by 2, 3, and indeed up to 10 minutes. The day after tomorrow I shall see how precise my calculation will prove at the lunar eclipse.[4]

With regard to the formula $8n+2=(2\pm 2)^{e+1}+\square+\square$, although I cannot discover any instance to the contrary, I still do not understand its truth. However, I cannot admit the formula $8n+1=(1\pm 1)^{2e}+(1\pm 1)^{2f}+\square$, if it is to indicate that any number of the form $8n+1$ can always be split into three squares in such a way that two of these are at the same time powers of 2, not excluding 0. Indeed, for $8n+1=217$ this formula does not apply.[5] If it is certain that $8n+2=(1\pm 1)^{2e+2}+\square+\square$, then it follows directly that $4n+1=(1\pm 1)^{2e+1}+\square+\square$ just by dividing by 2, since $\dfrac{\square+\square}{2}=\square+\square$. I do not find any reason to doubt the correctness of the double formula

$$4n+3=2a^2+4b^2+c^2+2=2A^2+4B^2+C^2,$$

or that it is always possible to have $A=a+1$; but I cannot understand the reason for this either. Meanwhile theorems of that kind, which cannot be refuted by any example, are indeed all the more remarkable.[6]

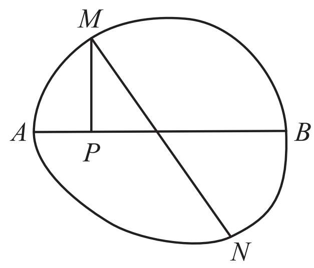
I convey my most humble thanks, Sir, for kindly communicating the proofs of the beautiful properties of numbers which you lately sent to me;[7] I am more than a little glad that they agree so nicely with those that I worked out.

The *Introductio in Analysin infinitorum*, which I had the honour to present to you, Sir, has been under the press for three years, and now my treatise on differential calculus is being printed by Mr. Bousquet.[8]

Since the Imperial Academy of Science renewed its claim on my *Scientia navalis*, I recently sent the entire work to His Excellency the President; please be so kind, if possible, as to help occasionally to speed its printing up by putting a word in with Mr. Schumacher, all the more since Mr. Bouguer's work on that subject already contains much of what I found out; and as my principles, on which the whole matter is based, are ever more generally known, I fear that everything will be published elsewhere if the printing of my work is not soon effected.[9] Not only has there been nothing new discovered about the alleged new planet, which was said to complete its orbit every 4 years, but I am assured that its author was not sufficiently knowledgeable in the theory of planets and comets to be able to draw such a conclusion from the observations.[10] After calculating the position of Mercury for the time of the 1744 comet more precisely, I found that it was not as close to the comet as I had initially thought, and that therefore no alteration in its course could have arisen.[11]

If the four sides of a quadrilateral are expressed by numbers in such a way that one is an oddly even number and the other three odd numbers,[12] the sum of the squares of the sides becomes a number of the form $8n+7$ and consequently cannot be split into three squares in rational numbers.

I cannot quite understand your objection to the form of a curve for which the normal intersecting the curve is everywhere constant.[13]



Let $AMBNA$ be such a curve, where the line MN normal at both ends equals $2a$, the abscissa $AP = x$, the ordinate $PM = y$ and P is some rational function of p; then I found that $x = \int p\,dP - \dfrac{a}{\sqrt{1+p^2}}$ and $y = P + \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$. From this one has $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{p}$ and consequently the ordinate y becomes maximal when $\dfrac{dy}{dx} = 0$, i. e., for $p = \infty$. However, P can be supposed to be such a function of p that in this case one does not have $P = -\,ap + a\sqrt{1+p^2}$ or $P = 0$ as $p = \infty$; but the maximal ordinate will equal $P + a$ if $p = \infty$ is substituted in P, and the abscissa becomes $x = \int p\,dP$.

Mr. Kratzenstein will have called on you, Sir; because of the shortness of time I could not give him a letter for you, but he seems to me a very nice and able man.[14]

Besides most obediently recommending myself and all my family I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Aug. 6th, 1748.

[1] Cf. n° 128, note 7, and n° 130, note 1.

[2] Euler had published his tables in the Berlin Academy's *Vollständiger Astronomischer Calender* for 1748, including (fol. [N3]) precise predictions for the solar eclipse due on July 25th and the lunar eclipse of August 8th.
As indicated in his letter R 2046 to Razumovskiĭ from August (13th) 24th (see JW 2, p. 141), Euler was then already working on the improved tables that were to be published in the *Calendarium* for 1749.
The complex history of the genesis and publication of Euler' lunar tables (of which many were hitherto unknown) is described in Verdun 2011.

[3] As Euler had learned from Delisle, Le Monnier had presented at the Académie des Sciences a calculation done by "one of his students, an abbé", who predicted that the eclipse would not be annular at Berlin (R 525: Yushkevich et al. 1968, p. 256). From the Académie's records, this astronomer could be identified: Guillaume Le Gentil, then a young intern at the Paris observatory, had also published his prediction, based on the tables in Le Monnier's *Institutions* and a correction term derived from a 1730 measurement by Cassini, in the July issue of the "Journal de Trévoux" (see Le Gentil 1748).

Euler rapidly presented his confirmed and refined calculations in a paper (E. 117) read to the Berlin Academy as early as September 12th, 1748. In a second paper (E. 142) read in December, he went on to describe his observations in more detail (and to postulate a lunar atmosphere because of the light scattered at the tips of the Moon's sickle); see also his letter R 2092 to Schmettau from December 13th (Yushkevich et al. 1968, p. 274).
The background of these debates on the theory of the Moon's motion is briefly sketched in Section 2.6.3 of the Introduction; a thorough study can be found in Verdun 2013.

[4] See n° 133, note 4.

[5] Cf. n° 130, note 4.

[6] See n° 130, note 5. The counterexample cited in the note shows that Goldbach's conjecture is, after all, wrong.

[7] Cf. n° 130, note 7.

[8] Cf. n° 130, note 9.
In 1750 Bousquet decided not to publish the *Institutiones calculi differentialis* after all, both because after falling out with Castillon he lacked a competent proofreader and for commercial reasons. Euler demanded the manuscript back (see his letter R 474 to Cramer from November 1751) and proposed to Schumacher to have it printed in Berlin at the Petersburg Academy's expense (see JW 2, p. 285). The work was finally published only in 1755.

[9] Cf. n° 130, note 10.

[10] Cf. n° 130, note 12.

[11] Cf. n° 130, note 13.
In E. 68 (O. II/31, p. 180), Euler had estimated the minimal distance between Loys de Chéseaux's comet C/1743 X1 and Mercury at 5000 Earth radii and suggested that the planet should have been noticeably disturbed or might even have been dragged off. As is evident here, his subsequent calculations led him to the same conclusion Joseph Betts published in the *Philosophical Transactions* for June 1744, p. 98: "that the Comet could have no sensible Influence upon ☿'s Motion".

[12] Cf. n° 130, note 15.

[13] Cf. n° 130, note 16.

[14] On Euler's recommendation the young physicist Christian Gottlieb Kratzenstein, who had studied medicine at Halle, had been called to the chair of mechanics at the Petersburg Academy and travelled to Russia in July 1748 (cf. JW 2, p. 94, 108–109, 136–137).

132
Goldbach to Euler
Petersburg, (August 27th) September 7th, 1748

Sir,

the solar eclipse represented in charts and the printed description going with them have been delivered to me the day before and consequently in good time;[1] I thank you most humbly, Sir, for sending them, at the same time cordially congratulating you on the precise agreement of this solar eclipse with your *Astronomical Tables* and hoping to receive the same kind of news with regard to the recent lunar eclipse.[2] I also did not fail to voice in the pertinent place the reminder concerning your *Scientia navalis* which you asked for,[3] and got the reliable information – which I already knew beforehand and you will have no doubt have heard from others – that the printing of this work is being pursued most assiduously.

The indicated formula[4] for $8n+1$ is indeed incorrect; however, on occasion of Fermat's theorem I also noticed that – exactly as every square that is either odd or has an oddly even root, if only it is smaller than $8m+7$, has the property that it is one of the four squares whose sum equals $8m+7$ – so also every square that is either odd or has an evenly even root, if only it is smaller than $8m+3$, has the property that it is one of the four squares whose sum equals $8m+3$;[5] now since 0 can be included within the evenly even squares, it happens as it were accidentally that all numbers $8m+3$ can also consist of only three odd squares.[6] If one denotes an even square by $\square$, an odd square by $\boxdot$, and an ambiguous square – which can be even or odd in different instances – by $\dot{\boxminus}$ or $\underset{\cdot}{\boxminus}$, all this can be expressed by the following formula:

$$4\,\dot{\boxminus} + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8m + 5 \pm 2,$$

where one must understand by $\dot{\boxminus}$ an odd square in the case of the upper sign $+$, and an even square in the case of the lower sign $-$.

I also observed that, setting

$$2\,(2a+1)^2 + 4b^2 + (2c-1)^2 = 4n-1$$

and

$$8n-6 = 2\,(2A+1)^2 + 4B^2 + 4C^2,$$

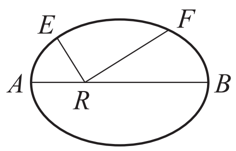
where n is the same positive integer, it is always possible to take $B=b$; let for example $n=29$, then both equations can be satisfied by setting $B=b=4$, for one has

$$2\cdot 1 + 4\cdot 16 + 49 = 115$$

and

$$2\cdot 49 + 4\cdot 16 + 4\cdot 16 = 226.$$

Regarding the curves whose normal intersecting the curve is everywhere constant,[7] I am of the opinion that, if in these curves an axis dividing the curve into two similar and equal parts is assumed which equals $2a$, then the maximal ordinate cannot but be equal to a, and this for the following reason:



Let the axis be $AB = 2a$ and the normal incident on it $ER = a-u$; then the normal RF reflected back from the axis at the same angle ($FRB = ERA$) will equal $a+u$. Consequently, since in the case where the normal is perpendicular to the axis the variable quantity u becomes $=0$ and therefore the normal itself $=a$, and since the maximal ordinate is none other than that normal which is perpendicular to the axis, it follows that the maximal ordinate equals a in all those curves; so I do not see in what manner the maximal ordinate can equal $a + P$ unless $P = 0$.[8]

I take again the liberty to ask for some books – as hereby specified[9] – from Mr. Spener's bookshop, remaining with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Sept. 7th (new style), 1748.

[1] Cf. nº 131, note 1.
[2] Cf. nº 131, notes 2–4.
[3] Cf. nº 131, note 9.
[4] The text of Goldbach's copy starts here.
[5] Let $a > 0$ be an integer with $a^2 < 8m + 7$, and assume that $a \equiv 1 \bmod 2$ or $a \equiv 2 \bmod 4$. Goldbach's first claim is that $8m + 7 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ has an integral solution. If $a \equiv 1 \bmod 2$, then $a^2 = 8n + 1$, and the equation $8(m - n) + 6 = b^2 + c^2 + d^2$ is solvable by the Three Squares Theorem. If $a \equiv 2 \bmod 4$, say $a = 4n + 2$, then $a^2 = 8n' + 4$, and again $b^2 + c^2 + d^2 = 8(m - n') + 3$ is solvable by the Three Squares Theorem.
Goldbach's claims concerning numbers of the form $8n + 3$ can be justified in a similar way.
[6] It is easily seen that the equation $8m + 3 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2$ is equivalent to $m = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2}$, hence follows from the fact that every integer is the sum of three triangular numbers.
[7] Cf. nº 131, note 13.
[8] The text of Goldbach's copy ends here.
Goldbach's objection is not valid: see Euler's reply in nº 133.
[9] This order list has not been preserved.

133
Euler to Goldbach
Berlin, October 12th, 1748

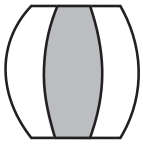
Sir,

it is true that the recent solar eclipse agreed more exactly with my new *Lunar Tables* than with all others,[1] including those that are held to be most exact; but there still occurred a small difference in time of about one minute, and the annular form did not last as long as I had found by my calculation. The first error is due in part to the difference between the meridians of Berlin and Paris, which has not yet been determined exactly enough, in part to the small inaccuracy inherent in the tables themselves which I cannot be confident to remove, for I based the elements of my tables, besides theory, on observations of lunar eclipses, about whose time one cannot be really certain to the minute. In fact, because of the penumbra neither the beginning nor the end of a lunar eclipse can be determined so precisely that one should not still miss by a minute or more. Regarding the duration of the annular form, I had assumed – along with most astronomers – too great a parallax for the Moon, but this very eclipse enabled me to determine this parallax most precisely; I found it to be smaller by more than $1'$ than it is indicated in Cassini's Tables, and Mr. Le Monnier indeed also observed that the parallax of the Moon is noticeably smaller than astronomers hitherto believed, by which I am the more confirmed in my view.[2] Based on this I corrected the article on parallax in my Tables and I hope in the future to have no error at all due to this point in calculating eclipses.[3]

We also observed here very assiduously the recent lunar eclipse.[4] According to my calculations this should have occurred on August 8th as follows: 1. the beginning at $11^{\mathrm{h}}\,03'\,53''$, 2. the end at $13^{\mathrm{h}}\,16'\,52''$. In the actual observation the difference between black-out and penumbra was so slight that one could not be sure either of the true beginning or of the true end by several minutes. The beginning appeared to us to have occurred at $11^{\mathrm{h}}\,4'$ to $5'$ and the end at $13^{\mathrm{h}}\,17'$ to $18'$. Others estimated both these moments partly earlier, partly later. In a blacked-out room of my house, I had the image of the Moon fall by way of a ten-foot telescope onto a sheet of white paper, on which the Moon very clearly showed with all its spots; I noted the beginning of the eclipse when I could not discern any more all the border of the Moon on the paper, and its end when the border again appeared whole all around, where it must however be admitted that both moments should have been observed earlier or later if the delineation of the image had been stronger or weaker. Indeed, by looking at the Moon straight through the telescope one could discern the darkened part even at its strongest darkening, since it was still illuminated by the rays of light penetrating the Earth's atmosphere. Likewise, the darkened section of the Moon seemed to be part of a smaller circle than the illuminated one, the cause of this being quite obvious from the reason just mentioned, as the rays that had penetrated the Earth's atmosphere were too weak to illuminate the Moon's rim on which they fell so obliquely, so that we could not discern all the darkened part.

The observation that $8m+5\pm 2 = 4\,\boxminus + \boxdot + \boxdot + \boxdot$ appears very remarkable to me,[5] and I conjecture that these considerations shall after all lead to the true source whence these properties flow.

Owing to other occupations, I have not been able for some time now to reflect on this topic; at the moment I am trying to realise an idea which I had for producing objective lenses which shall serve in the same way as the mirrors in the telescopes constructed according to Newton and Gregory. The error in the common objective lenses is due just to the fact that rays of light are not subject to the same refraction and thus, for example, the red rays form another focus than the blue ones, whereas all rays are reflected to the same focus by a mirror. This difference between the foci of the red and blue rays also becomes the greater the farther these are distant from the glass, and for an objective lens of 27 feet the red focus is farther than the blue one by an entire foot, which causes the blurring and the colours of objects seen through long telescopes. Thus if one could manufacture objective lenses which should throw all the rays together into a common focus, one could expect of these the same advantages as of mirrors. However, this cannot be effected by mere glass. The idea therefore occurred to me if it should not be possible to produce such objective lenses from glass and water or from two other different transparent materials; I doubted the less of this as we see that in the eyes, which consist of different transparent bodies, such a blurring due to the different refraction of light rays is not perceived.



I therefore imagined such a composite lens to consist of two glasses *abba*, *cddc* and their interstice *bccb*, which is filled with water. Denoting the radii of the curvatures *aa*, *bb*, *cc*, *dd* in general by the letters a, b, c, d, I determined by the law of refraction first the distance of the focus formed by the red rays and then the distance of the focus formed by the violet rays; then I equated these two expressions and calculated from this the relationship between the radii a, b, c, d. The solution turned out to be that both glasses must be moon-shaped, the radius of the convex face being to the radius of the concave face as 23 to 10. I had several of these moon-shaped lenses ground; however there is still the difficulty that the glass does not quite exactly take the same form that the bowl has. All the same I can already sense a noticeable advantage of this kind of objective lenses. I shall have several more of these glasses made in order to see whether the required ratio can be even more closely met by chance.[6]

You are entirely right, Sir, in stating that in those curves whose intersecting normals are everywhere constant, the maximal ordinate referred to a diameter of the curve must equal half this constant quantity;[7] so the matter just depends on whether in these curves there always is such an axis dividing the curve into two similar and equal parts – a question which I cannot answer affirmatively.

You shall soon receive the requested books,[8] Sir. I am recommending both myself and my family most obediently to your constant goodwill, remaining with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Oct. 12th, 1748.

[1] Cf. nº 131, notes 2 and 3.

[2] This question had troubled Euler for some time: In E. 112 from 1747 (§ 12: O. II/25, p. 5), he argued that the distance to the Moon – calculated by mechanical principles from the measured gravitational acceleration – should be larger and the lunar parallax smaller than the accepted values from Cassini's tables, and even suggested that Newton's inverse-square law of attraction might have to be modified to account for this measurement.
His satisfaction that both his own and Le Monnier's observations – these Euler could have known either from the 1746 *Institutions* or through Grischow from a report of the solar eclipse recently observed in Scotland – now confirmed the theoretical value against the former measurements is apparent in all his publications and letters from those months: see, e. g., his letter R 29 to d'Alembert from September 28th, 1748 (O. IVA/5, p. 293).

[3] Euler had already calculated lunar tables for the 1749 *Calendarium* of the Berlin Academy in June (see his letter R 526 to Delisle: Yushkevich et al. 1968, p. 259); in the following months,

he insisted several times on the improvement of his formulae based on the eclipses of July 25th and August 8th and the convergence of his values with Le Monnier's (cf., among others, E. 117, in particular § 39–41).

[4] Cf. n° 131, note 4.
Euler observed the lunar eclipse of August 8th/9th (evidently the times indicated in the letter must be understood as "p. m.", around midnight) from his home, in all likelihood again together with the astronomers Margaretha and Christine Kirch.

[5] Cf. n° 132, notes 5 and 6.

[6] A few weeks before this letter, on September 26th, 1748, Euler had presented his memoir on achromatic lenses (printed in 1749 as E. 118) to the Berlin Academy. Actually Hooke and Newton had already considered glass/liquid compound lenses around 1670; but Newton had then abandoned this idea in favour of his reflector telescope and even – apparently against his better judgment – asserted achromatic lenses to be impossible in his 1704 *Opticks* (see Bechler 1975). The sequel – a short controversy between John Dollond and Euler, finally resolved by Klingenstierna – has been described, among others, in the introduction to O. III/6. Ironically, it was not one of Euler's engineering colleagues but Dollond who implemented the technology by producing achromatic compound lenses with great success in the following decades. However, Euler continued to be aware of the scientific and economic benefits that could be obtained by pursuing the question further, as witnessed by his suggestion to the Petersburg Academy to pose the improvement of telescopes and microscopes as a prize question (JW 1, p. 13–16, 95–96, 173, 232), but also by the vast collection of his own papers on dioptrics in O. III/3–9.

[7] Cf. n° 132, note 8.

[8] Cf. n° 132, note 9.

134

Goldbach to Euler

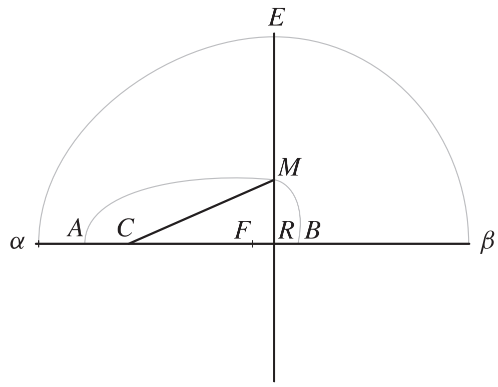
Moscow, (January 30th) February 10th, 1749

Sir,

I have not yet answered your letter from Oct. 12th, 1748, because I was prevented by some other obligations that came up, and in part by my journey here from Petersburg. The main thing that I have to remark for the moment with regard to the catoptric curve consists in this:

If the *catoptrica* which has $AB = a$ for its axis is called, for brevity's sake, curve A,[1] and the corresponding curve on the axis $\alpha\beta = 2a$, which has the property that all normals intersecting the curve also equal $2a$, is called curve α, then this curve α, since it always has an axis which is the axis AB continued on both sides, will have its maximal ordinate ER on the axis equal to a; from this I deduce, by a very simple reasoning, the following two corollaries:

I. If the distance of the vertex A from the radiating point C is called b, the abscissa CR equals x, and the ordinate $MR = y$ which corresponds to this abscissa is given in terms of x, the maximal intercept CR will always be determined by setting $CR = x = \sqrt{a^2 - 2ay}$.



II. If one takes $\alpha F = F\beta = a$ on the axis of curve α, $CF = a - 2b$ on curve A will be the smallest of all the lines intercepted by the radiating point C and the rays reflected back to the axis; so the locus of all rays reflected on the axis is between F and R.[2]

By the way, I also noticed that, whenever in the equation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta + 4 = A^2 + B^2 + C^2$$

the whole numbers denoted by these letters are all known, the numbers P, Q, R, S in the equation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

can be indicated.[3] Let, e. g., $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $\gamma = 7$, $\delta = 3$; $A = 3$, $B = 3$, $C = 9$, then $P = 3$, $Q = 3$, $R = 9$, $S = 1$.[4]

I have still not had any notice about the requested books[5] that should have been able to arrive by way of Lübeck a long time ago.

Please forward the enclosed letter to Mr. Schuster at your convenience.[6]

I shall be especially pleased to get news about your continuing well-being and that of your dear family; I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, Feb. 10th (n. st.), 1749.

[1] Thus Goldbach uses A and later α both for the points marked thus in the figure and for the curves described around them.

[2] Euler noted in the lower margin of fol. 129r: "n° I hat seine Richtigkeit, weil $CM = ME = RE - MR = a - y$; aber n° II ist nicht immer wahr." ("n° I is correct because $CM = ME = RE - MR = a - y$, but n° II is not always true.").

[3] Here Euler noted between the lines, preparing his reply: "*erit* $P = A$, $Q = B$, $R = C$, $S = \delta - 2$." (cf. n° 135, note 7).

[4] The last sentence has been added between the lines of the original letter. The text of Goldbach's copy ends with it.

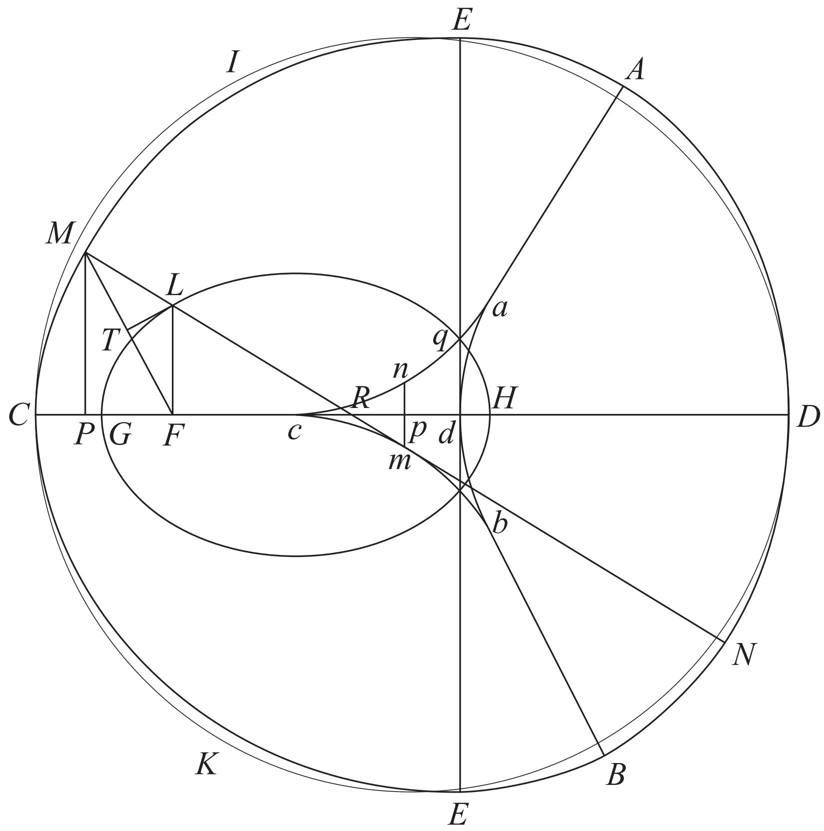
[5] Cf. n° 132, note 9, and n° 133, note 8.

[6] This letter to the Leipzig bookseller Jacob Schuster (cf. Euler's reply n° 135, note 9) has not been preserved.

135
Euler to Goldbach
Berlin, March 4th, 1749

Sir,

first I congratulate you on the journey to Moscow that you fortunately accomplished, and wish that the severe cold, the sad effects of which have been reported in all the journals,[1] may not have caused you any distress.



Since the well-known catoptric curve[2] depends on determining a curve whose normals intersecting the curve on both sides are everywhere of constant length, I went to the trouble of meticulously delineating, in the enclosed figure,[3] such a curve $CMEADNBEC$ in which all these normals CD, MN, IB, EE, AK are of equal length. The first thing I am pointing out is that there are such curves which have no diameter at all;[4] however, for the enclosed one CD is a diameter. Once such a curve has been found, one can arbitrarily assume the radiating point F either on the axis or outside it and then easily describe the catoptric curve GLH. In fact, drawing the line FM from the radiating point F to any point M of the first curve, bisecting it into two equal parts in T, and erecting in T the perpendicular line TL on it until it intersects the normal MR in L, L is a point on the *catoptrica* and LT is its tangent at that point. Now whenever the radiating point F has been assumed to be on the axis or diameter CD of the generating curve, the line GH is also going to be a diameter of the catoptric curve itself; but otherwise, when F is not taken on the axis CD, or when the generating curve CAB does not have any diameter, then in the catoptric curve, too, no diameter will be present. Thus it is certain, that, whenever the catoptric curve GLH has a diameter, the generating curve CAB will have that same diameter, but not conversely; therefore your observations, Sir, only apply when the catoptric curve has a diameter.

In whatever position the radiating point F is supposed to be, one gets the points G and H in the *catoptrica* by drawing through F the normal CFD on the generating curve and bisecting its parts CF and DF into two equal halves.

If the generating curve CAB has a diameter, say CD, and Ed is the greatest ordinate, then since Ed equals dE and is normal to the curve, one must have $EE = CD$ and consequently $dE = \frac{1}{2}CD$. Define $CD = 2a$, then the maximal ordinate dE equals a. So if in the catoptric curve one sets $Fd = x$, $dq = y$, then one has $Fq = Eq = \sqrt{x^2 + y^2} = a - y$, and therefore $x = \sqrt{a^2 - 2ay}$, as you found in your first remark, Sir; and in this case the intercept Fd between the radiating point F and the reflected ray is maximal or minimal. Indeed in my figure it is a maximum; however, if I had assumed the radiating point F on the other side towards D, it should be a minimum. Similarly as, in the figure, the line FR becomes maximal in Fd, so on the other hand Fc is its minimal value when cC is the curvature radius of the generating curve in C, and consequently cD the curvature radius in D. So this point c is not necessarily at the midpoint of the diameter CD; rather it shall become evident from what follows that this point c never lies at the midpoint of the line CD unless the generating curve CAB is a circle, and in this case the *catoptrica* becomes an ellipse.

Furthermore, if the generating curve is to be a quasi-circular curve which turns back into itself, then its evolute cab must be a curve with three cusps; infinitely many of these can be found which may be inscribed either in equilateral triangles or in triangles of general form. Here it is remarkable that, once such a three-cusped curve abc has been found, an infinity of generating curves CAB can be described by its evolution, according as one assumes a longer or shorter string. Indeed, taking Cc at will, one always has $mM = Cc + cm$, $bI = Cc + cmb$, $Aa = Cc + cmb - adb$, and $cD = Cc + cmb + anc - adb$. Now since $cmb + anc$ is necessarily larger than adb, cD can never equal Cc, so c cannot be at the midpoint of CD.

To indicate an example of such a three-cusped curve which is rectifiable, in order for both the generating curve and the *catoptrica* to become algebraic, let[5] $cp = t$, $pm = u$, and take $t = \dfrac{3c\left(1+3p^2\right)}{\left(1+p^2\right)^2}$, $u = \dfrac{6cp}{\left(1+p^2\right)^2}$; by eliminating p one gets the sixth-degree equation

$$4u^2\left(t^2+u^2\right)^2 = 12ctu^2\left(u^2+9t^2\right) - 243c^2t^4,$$

where $\dfrac{dt}{du} = p$. For the point d one has $p = 0$ and therefore $cd = 3c$. This curve can be inscribed in an equilateral triangle that has $ac = ab = bc = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}c$ for its side. Moreover this curve is rectifiable, for the arc cm equals $\dfrac{2cp\left(3-p^2\right)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + 2c$, and since at the cusps a and b one has $p = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, the arc $cmb = cna = adb$ equals $4c$. Thus, by taking $Cc = b$ one has $cD = b + 4c$; also

$$Mm = b + 2c + \frac{2cp\left(3-p^2\right)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = a + \frac{2cp\left(3-p^2\right)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

since $2a = 2b + 4c$. On the other hand, $pR = pu = \dfrac{6cp^2}{(1+p^2)^2}$, $Rm = u\sqrt{1+p^2} = \dfrac{6cp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$ etc., $MR = a - \dfrac{2cp^3}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$; therefore the abscissa of the generating curve is found to be

$$CP = a - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{c\left(1-p^2\right)}{(1+p^2)^2}$$

and its ordinate

$$PM = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{2cp^3}{(1+p^2)^2}.$$

I only remark here in passing that by defining s to be the arc which measures the angle CRM in a circle of radius $a = \frac{1}{2}CD$, the arc CM of the generating curve becomes $s + \dfrac{\frac{2}{3}c\left(1-3p^2\right)}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$; thus the circumference of the entire curve $CABC$ exactly equals the circumference of a circle of diameter CD. {This property[6] is common to all curves which arise by evolution of any three-cusped curves whatsoever; their total circumference always equals the circumference of a circle described on the diameter CD, which has been drawn in the figure with a pencil. The excess of the circle area over the area enclosed by the curve equals, in the present case only, the area of a circle whose diameter is $c = \frac{1}{4}cna = \frac{1}{3}cd$.} Conversely, the area of the curve is smaller than the area of the circle whose diameter equals CD by a circle whose diameter equals c, where $c = Dd - Cc$.

Now, since from this one evolute abc, which is at the same time the caustic of the *catoptricae* which result from it, infinitely many generating curves ABC arise, and every generating curve gives rise, depending on the arbitrary position of the radiating point F, to infinitely many *catoptricae*, so from one caustic abc infinite times infinitely many *catoptricae* result, all of them algebraic.

If

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+4\delta+4=A^2+B^2+C^2,$$

then

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=A^2+B^2+C^2+(\delta-2)^2,$$

which is to equal $P^2+Q^2+R^2+S^2$; so one evidently has $P=A$, $Q=B$, $R=C$ and $S=\delta-2$.[7]

Mr. Spener informed me that the requested books[8] have not been sent off from here, as it became too late, but shall be dispatched by the first ships; so you should think of giving orders about them in Petersburg.

The letter to Leipzig[9] was sent from here on the same day I received it. All my family (who, thanks to God, is in good health) asks to be most obediently recommended to you along with myself; I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, March 4th, 1749.

[1] See Euler's reply: n° 136, note 1.
[2] Cf. n° 87, note 9, and n° 129, note 12.
[3] The sheet on which the figure is drawn has been preserved along with letter n° 138.
[4] This emphasises again that Goldbach's argument in n° 132 is not valid; cf. n° 133, note 7.
[5] In what follows, Euler uses c and p both for the points marked thus in the figure and for parameters determining the curve.
[6] The passage enclosed in braces has been added in the margin.
[7] Cf. n° 134, note 4.
[8] Cf. n° 134, note 6.
[9] Cf. n° 134, note 7.

136
Goldbach to Euler
Moscow, March (16th) 27th, 1749

Sir,

I duly thank you for your kind congratulation on my journey to Moscow; I covered this stretch from January 8th to 17th (new style), at the period of time in which the greatest cold penetrated, all the same sleeping every night in my sleigh in the farmyards. According to the Frankfurt journals there was a quite extraordinary cold both at Petersburg and at Madrid on January 10th to 13th; it should be investigated through what intermediary tract this violent cold passed.[1]

By the figure that you sent me, Sir,[2] and by the case of the three-cusped curve inscriptible in an equilateral triangle as well, I cannot judge otherwise than that the arcs ac, ab, cb should be not just equal but also[3] similar, and that the points d, m, n should bisect these curves into equal parts; now if this is indeed so, then the points I and K must also be equally distant from the midpoint of the axis CD (which has not been designed by a letter in your figure, Sir, but could be called r);[4] from this it further follows that the generating curve can also be circumscribed to a regular hexagon and must coincide with the circle of radius Cr in the six points C, I, A, D, B, K. However, the figure which you sent me and which I herewith return (asking you to send it to me again) does not agree with this, since else all these points should have to lie on the circle drawn with a pencil; and even if the arcs ab, bc, ca were just equal in length and not similar, it should nevertheless necessarily follow that the points A, B, C form an equilateral triangle inscribed in the circle of radius Cr and that they fall on the circle drawn with a pencil, whose centre r is also the centre of the equilateral triangle; moreover[5] the distances of points EA and EB should have to be equal, whereas in the figure they differ by a clearly noticeable amount.[6] I just wanted to bring all of this to your notice, Sir, in order to convince you that I have not just superficially looked at the figure you sent to me, but considered it with some attention (which I am, in the common run, often lacking).

As I understand by your solution, the remark about the squares $A^2 + B^2 + C^2$ etc. which I had reported in my last letter was of no importance and due to a distraction.[7]

I have noted some more books on the enclosed piece of paper;[8] however, if you see that Mr. Spener does not want to take the trouble of sending them, I can very well have this kind of item sent from Leipzig in the future.

I remain with great respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, March 27th (new style), 1749.

[1] The journal report to which Goldbach refers could not be identified. According to Pfaff 1809, p. 118, a temperature of approximately −36 °C was measured in Russia, whereas in Germany, France and England the winter was mild.

[2] The text of Goldbach's copy starts here.
The reference is to the figure of the *catoptrica* sent with n° 135.

[3] The text of Goldbach's copy breaks off here in mid-sentence: apparently a sheet was cut out from his copybook (this must have happened before the folio numbers were written).

[4] Alongside this passage, Euler noted in the margin, correcting Goldbach's misconception and preparing his reply in n° 139:

$$\begin{aligned} \text{“}brI &= Cc + bmc \\ rI &= Cc + bmc - br \\ &\quad + cr \qquad - cr \\ rI &= rC + bmc - 2cr \end{aligned}$$

at (but)

$$\begin{aligned} bmc &< 2cr \\ rI &= rC - \quad [!] \\ rI &< rC.\text{”} \end{aligned}$$

[5] Here the following passage was crossed out: "die *arcus curvae generatricis AB* und *AC exactissime similes* und" ("the arcs AB and AC of the generating curve [should have to be] exactly similar and").

[6] Goldbach's assertion that there should be more symmetry is not justified: see his postscript nº 137 and Euler's reply in nº 139.
[7] Cf. nº 135, note 7.
[8] This order list has again not been preserved: Euler passed it on to Spener (see his reply nº 139, note 2).

137
Goldbach to Euler
[Moscow], (March 21st) April 1st, 1749

PS. When I happened to inspect the generating curve once more, I found that nothing essential was wrong with the figure you sent to me, Sir;[1] I wanted to report this in good time in order not to give you unnecessary trouble, just remarking at this opportunity that with respect to the exterior curve drawn with a pencil – which one might call three-humped and in which all the normals intersecting the curve are equal – the curve which bisects all the normals into two equal parts is three-cusped, as the interior figure shows.

The equation $4n+5 = 4\Box + 4\Box + 4\boxdot + \boxdot$ (where $\Box$ denotes an even square and $\boxdot$ an odd square) is always possible, but one cannot arbitrarily assume some value for the $\boxdot$ that is one of the four squares, as is the case with the equation $4\boxdot + \boxdot + \boxdot + \boxdot = 8n+7$, where any square smaller than $8n+7$ can be taken as one of these four squares.

April 1st, 1749.

[1] Cf. nº 136, note 6, and Euler's reply in nº 139.

138
Euler to Goldbach
Berlin, April 12th, 1749

Sir,

just a few days ago Mr. Spener dispatched via Lübeck the books which you had requested;[1] so they shall soon arrive at St. Petersburg.

Now I have finally discovered a conclusive proof that every prime number of the form $4n+1$ is a sum of two squares.[2] Letting the sign $\boxed{2}$ denote those numbers which are sums of two squares,[3] my propositions are as follows:

I. If $a = \boxed{2}$ and $b = \boxed{2}$, then also $ab = \boxed{2}$; this is easy to prove.

II. If $ab = \boxed{2}$ and $a = \boxed{2}$, then also $b = \boxed{2}$. The proof of this is harder and requires some lemmata.

III. A sum of two squares $a^2 + b^2$, where a and b do not have any common divisor, does not admit any other divisors than such as are themselves $\boxed{2}$.

IV. Any prime number $4n+1$ being proposed, $a^{4n}-1$ is always divisible by it unless the number a is itself divisible by $4n+1$. I presented the proof of this in the Petersburg *Commentarii*.[4]

V. Since $a^{4n}-1 = \left(a^{2n}+1\right)\left(a^{2n}-1\right)$, either $a^{2n}+1$ or $a^{2n}-1$ must be divisible by $4n+1$; so if a single case could be indicated where it is not $a^{2n}-1$ but $a^{2n}+1$ that is divisible by $4n+1$, it should be proved by n° III, since $a^{2n}+1=\boxed{2}$, that $4n+1$ must be a sum of two squares.

VI. *Theorem*: Every prime number of the form $4n+1$ is a sum of two squares.

Proof: If $4n+1$ were not $\boxed{2}$, then, since $a^{4n}-1$ or also $a^{4n}-b^{4n}$ is divisible by $4n+1$ (as long as neither a nor b is divisible by $4n+1$), it should never be $a^{2n}+b^{2n}$ but always $a^{2n}-b^{2n}$ which is divisible by $4n+1$. Consequently all the numbers $2^{2n}-1$, $3^{2n}-2^{2n}$, $4^{2n}-3^{2n}$, $5^{2n}-4^{2n}$, etc. (as long as their roots are smaller than $4n+1$) are divisible by $4n+1$. This means that the differences of the sequence $1, 2^{2n}, 3^{2n}, 4^{2n}, 5^{2n}, \ldots, (4n)^{2n}$ should be divisible by $4n+1$; so the second, third, fourth and finally the $2n$-th order differences, which are constant, should also be divisible by $4n+1$.

But from the theory of differences it is known that these differences of order $2n$, which are constant, equal $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots 2n$; since this number is not divisible by the prime number $4n+1$, it follows that not all the differences $2^{2n}-1$, $3^{2n}-2^{2n}$, $4^{2n}-3^{2n}$, etc. are divisible by $4n+1$; so there exists some difference $a^{2n}-b^{2n}$ which is not divisible by $4n+1$; therefore, since $a^{4n}-b^{4n}=\left(a^{2n}-b^{2n}\right)\left(a^{2n}+b^{2n}\right)$ is always divisible by $4n+1$ (for in the above series whose differences I considered, the terms are continued only up to $(2n+1)^{2n}$, so that a and b are both smaller than $2n+1$ and consequently neither a nor b is itself divisible by $4n+1$, these being the cases that had to be excluded), it is necessarily true that in this case the factor $a^{2n}+b^{2n}$ is divisible by $4n+1$; as this number is $\boxed{2}$, its divisor $4n+1$ must also be a sum of two squares. Q. E. D.

I can almost prove that any number is a sum of four or fewer squares; indeed, what I am lacking is just one proposition, which does not appear to present any difficulty at first sight.[5]

Let the sign $\boxed{4}$ denote any number which is a sum of four or fewer squares; then my propositions are as follows:

I. If $a=\boxed{4}$ and $b=\boxed{4}$, then also $ab=\boxed{4}$. The proof of this is concise: for let $a=p^2+q^2+r^2+s^2$ and $b=x^2+y^2+z^2+v^2$, then one has[6]

$$\begin{aligned} ab = \quad & (px+qy+rz+sv)^2+(py-qx\pm rv\mp sz)^2 \\ & +(pz\mp qv-rx\pm sy)^2+(pv\pm qz\mp ry-sx)^2 \quad = \boxed{4}. \end{aligned}$$

II. If $ab=\boxed{4}$ and $a=\boxed{4}$, then also $b=\boxed{4}$. This is the proposition on which the whole matter depends, and which I cannot yet prove.[7]

III. *Corollary*: Consequently, if $ab=\boxed{4}$ and $a\neq\boxed{4}$ (the sign $\neq$ is to signify the negation of equality, as proposed by you, Sir), then also $b\neq\boxed{4}$. Indeed, if it were the case that $b=\boxed{4}$, by n° II one should also have $a=\boxed{4}$, contrary to the hypothesis.

IV. If all prime numbers were of the form $\boxed{4}$, then every number at all should be contained in the form $\boxed{4}$. This is obvious by n° I, so the proof of the proposed theorem is reduced just to prime numbers.

V. An arbitrary prime number p being proposed, there always is some number of the form $a^2+b^2+c^2+d^2$ which is divisible by p, while none of the numbers a, b, c, d themselves is divisible by p. Indeed I can prove that there always are such numbers $a^2+b^2+c^2+d^2$, and even infinitely many of them, although I am not able, in general, to indicate any of them. The proof of this is particularly remarkable, but somewhat cumbersome; if you like, it can make up the contents of an entire letter in the future.[8]

VI. If $a^2+b^2+c^2+d^2$ is divisible by p, then, however large the numbers a, b, c, d may be, it is always possible to exhibit a similar form $x^2+y^2+z^2+v^2$ divisible by p in such a way that the single numbers x, y, z, v are no greater than half the number p.

Proof: Indeed, define $a=\alpha p \pm x$, $b=\beta p \pm y$, $c=\gamma p \pm z$, $d=\delta p \pm v$, so that x, y, z, v are numbers no greater than $\frac{1}{2}p$. Since one has

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)\,p^2 \pm 2p\,(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta v)+x^2+y^2+z^2+v^2$$

and this form is divisible by p, and since the first two members are automatically divisible by p on their own, the last member $x^2+y^2+z^2+v^2$ must necessarily also be divisible by p.

VII. If p is a prime number and therefore odd, the single numbers x, y, z, v will be smaller than $\frac{1}{2}p$, so $x^2+y^2+z^2+v^2<4\cdot\frac{1}{4}\,p^2=p^2$.

VIII. If p is any prime number, it will certainly be the sum of four or fewer squares.

Proof: By n° VI there is some number $a^2+b^2+c^2+d^2$ divisible by p, and by n° VII there will also be some number $x^2+y^2+z^2+v^2$ divisible by p so that $x^2+y^2+z^2+v^2<p^2$. Now if there were any numbers $\neq \boxed{4}$, there should exist a smallest number of that kind; let this be p, so p is the smallest of those numbers which cannot be resolved into four squares (here we are always referring to whole numbers). Now let $x^2+y^2+z^2+v^2=\boxed{4}=pq$, and since by hypothesis $p\neq\boxed{4}$, one should also have $q\neq\boxed{4}$; but $pq<p^2$, so $q<p$, and therefore one should have another number q smaller than p that is $\neq\boxed{4}$, which contradicts the hypothesis. Thus there is no smallest number that cannot be resolved into four squares, so there is no number $\neq\boxed{4}$ at all, and consequently all numbers p are $\boxed{4}$.

As I do not doubt that you shall like these proofs, Sir, I ask you to please give them your attention.

No change in my circumstances occurred since lately, except that a few days ago I won 600 Imperial thalers in a lottery, which is quite as good as if I had won a Paris prize this year.[9]

Besides most obediently recommending myself and all my family, I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, April 12th, 1749.

[1] Cf. n° 132, note 9, and n° 134, note 6; as Euler's reply n° 139 shows, n° 136 had not yet arrived.

[2] This completes a course of study Euler had embarked on seven years earlier: see the sketch in n° 47, note 4, and the first, still incomplete proof in 1747 (cf. n° 115, note 9). The proof of the critical fact which is presented here was published in great detail in E. 241 (printed, however, only in 1760).

[3] This kind of symbolic notation for numbers with specific properties seems to have been used in the present letter for the first time; it is absent from Euler's publications.

[4] Euler refers to his paper E. 54, which contains the first published proof of "Fermat's Little Theorem".

[5] Euler had noted this statement of Fermat's very early (cf. n° 5, note 7) and recently resumed his study along different paths: cf. n° 115 and n° 127.

[6] Cf. n° 127, note 6.

[7] Euler first stated this crucial lemma in 1743 (cf. n° 74, note 9), but its proof is going to resist all his efforts (cf., e. g., n° 146), and finally the discussion ends on a note of resignation (cf. n° 156, note 3).

[8] Euler later presented a proof – based on the multiplicative structure of quadratic residues – that any prime divides some sum of *three* co-prime squares, each of them smaller than $\frac{1}{4}p^2$ (see E. 242, *Theorema* 18).

[9] Lotteries had been held in Prussia since 1703; they were privately organised but needed a royal privilege, and part of the revenue had to be donated for public or charitable purposes: between 1745 and 1750, the Potsdam orphanage, the construction of the new Berlin Cathedral and a public secondary school benefited. Only in 1763, after the Silesian Wars, did the Prussian government establish a monopoly on lotteries.
Prizes in these lotteries could indeed be considerable: sometimes the first prize was a town house. The 600 Reichstaler Euler won corresponded to about a third of his annual salary at the Berlin Academy (the second largest after President Maupertuis') and approximately eight times the annual income of a skilled craftsman. The yearly prize of the Paris Académie des Sciences amounted to 2000 or 2500 *livres* (equivalent to 667 or 833 thalers).

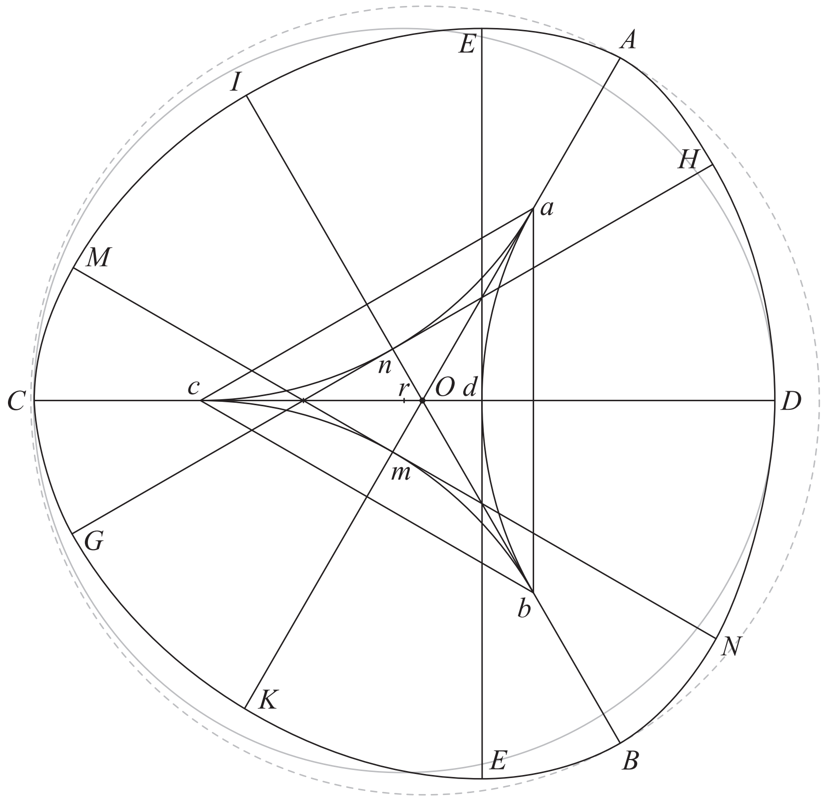
139
Euler to Goldbach
Berlin, April 15th, 1749

Sir,

I had hardly dispatched my last letter by the previous mail when I received your most honoured letter from March 27th;[1] I at once delivered the enclosed piece of paper to Mr. Spener,[2] who will not fail to send the requested books the soonest possible.

The day before yesterday, my wife was delivered of two daughters all at once;[3] thanks to God, both she and the children are well.

With this I have the honour to send my figure about the catacaustic curves back again,[4] and since it did not turn out to be sufficiently accurate – the arcs AE and BE should indeed be equal, as you observed, Sir – I add another figure which I drew more carefully.



In this, as in the former one, the three-cusped curve abc is equilateral and its three parts adb, bmc, cna are equal and similar to one another. Thus this curve has a centre in O, which is the centre of the circle circumscribed about the triangle abc. However, this point O is not the midpoint of the line CD, which you proposed to denote by the letter r. For by the nature of evolution cD is the string that formerly had lain on the arc cna and extended to A, so one has

$$cD = \text{ arc.}\, cna + Aa = \text{ arc.}\, cna + Cc$$

(since $Cc = Aa = Bb$) and therefore $cD + Cc = CD = \text{arc.}\, cna + 2Cc$. If now the point r is taken to be at the midpoint of the line CD, one has $Cr = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\,\text{arc.}\, cna + Cc$ and therefore

$$cr = Cr - Cc = \tfrac{1}{2}\,\text{arc.}\, cna = cn.$$

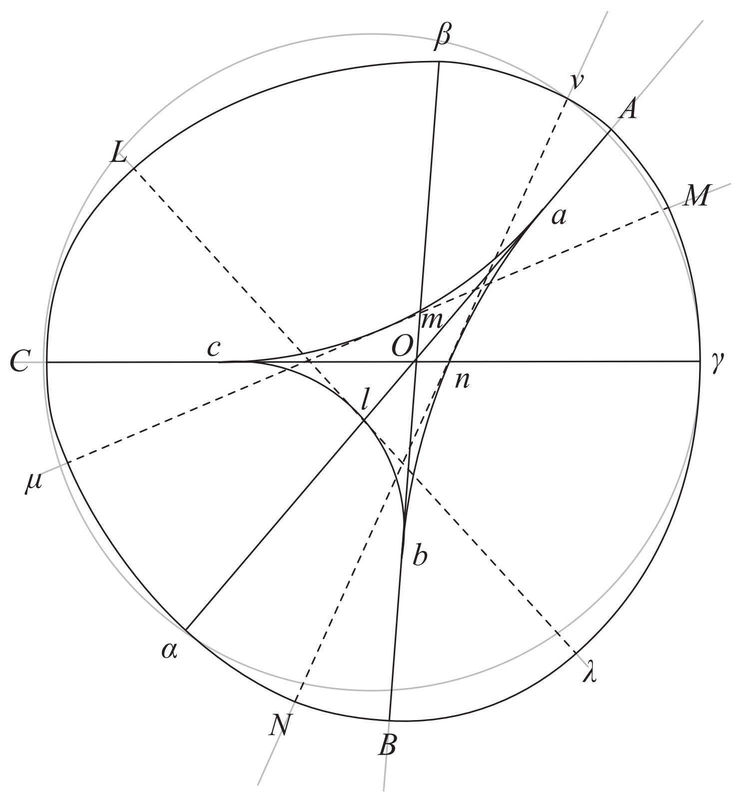
However, in the figure cO is greater than the arc cn, thus $cO > cr$ (the points d, m, n being assumed to be the midpoints of the arcs ab, ac, bc). Secondly, the lines OI and OK are not only equal to one another but also make equal angles with OC. For one has $OI = OK = OD$; but since the point O does not fall on the midpoint of the line CD, these three lines OI, OK, OD are in fact not as large as CO or AO and BO. This is also evident by evolution, since the string initially lying along $bmcC$ is extended to the straight line bOI. So one has $bI = bmc + Cc$

and $OI = bmc + Cc - bO$. On the other hand, $Cc = OC - cO$ and therefore $OI = bmc + OC - cO - bO$; because of $bO = cO$,

$$OI = OC - 2cO + bmc = OC - 2\,(cO - cm)\,,$$

and since $cO > cm$, one has $OI < OC$. So if a circle of radius $OC = OA = OB$ is described with centre O, this will touch the described curve at three points C, A, B, so this curve has three humps at A, B, C and three indentations I, D, K and may consequently be called three-humped. In the former figure the circle with centre r had been described, which I also represent here in pencil; from this it can be clearly seen in what manner this circle touches the three-humped curve in two points and intersects it in two others; also this circle and the three-humped curve must have the same circumference, therefore the area of the curve must be smaller than the area of the circle.

I add yet another figure, in which the three-cusped curve *abc* is not equilateral but of general shape; from this a three-humped curve ABC arises which is also of general shape.



Regardless of the fact that there are curves of that kind which are continuous or can be expressed by an equation, one can also sketch three-cusped curves of that kind freehand, without any rule, and describe by their evolution the three-humped curves, from which one can then go on to construct the required cataclastic curves[5] in an infinity of different ways. It is in this way that I formed, in the present figure, the three-cusped curve abc from three circular arcs ab, ac, bc touching one another, and delineated from it the three-humped curve; after drawing the tangents at the cusps a, b, c and at the midpoints l, m, n of the sides and assuming aA arbitrarily, one has $mM = ma+aA$, $c\gamma = cm+mM$, $l\lambda = c\gamma-cl$, $bB = l\lambda-lb$, $nN = nb+bB$ and so on, until one has gone around.[6]

Recently the idea occurred to me if it should not be possible to determine two numbers x and y in such a way that $xy\,(x+y)$ equals a given number a, or: some number a being proposed, find two rational numbers x and y (integer or fractional) so that $xy\,(x+y) = a$. This is always possible if the number a is contained in the form $pq\left(pm^3 \pm qn^3\right)$; I believe, however, that by far not all numbers are contained in this form, and that the problem is therefore often impossible, which seems to be the case for $a = 1$ or $a = 3$, etc.[7]

On the other hand, if the following problem is set: Some number a being proposed, find three rational numbers x, y, z so that $xyz\,(x+y+z) = a$, this problem is always possible and its solution can even be generally indicated, as I found out after taking a lot of trouble.[8] Indeed, taking s and t to be any arbitrary numbers, define

$$\begin{aligned}
x &= \frac{6ast^3\left(at^4-2s^4\right)^2}{\left(4at^4+s^4\right)\left(2a^2t^8+10as^4t^4-s^8\right)},\\
y &= \frac{3s^5\left(4at^4+s^4\right)^2}{2t\left(at^4-2s^4\right)\left(2a^2t^8+10as^4t^4-s^8\right)},\\
z &= \frac{2\left(2a^2t^8+10as^4t^4-s^8\right)}{3s^3t\left(4at^4+s^4\right)};
\end{aligned}$$

then

$$x+y+z = \frac{2a^2t^8+10as^4t^4-s^8}{6s^3t\left(at^4-2s^4\right)},$$

and from this one gets

$$xyz\ (x+y+z) = a.$$

Let, e. g., $a = 1$ and take $t = 2$, $s = 1$; then

$$x = \frac{48\cdot 14^2}{65\cdot 671},\quad y = \frac{3\cdot 65^2}{56\cdot 671},\quad z = \frac{2\cdot 671}{6\cdot 65};$$

therefore

$$x+y = \frac{1\,350\,723}{56\cdot 65\cdot 671} = \frac{3\cdot 671^2}{56\cdot 65\cdot 671} = \frac{3\cdot 671}{56\cdot 65}$$

and

$$x+y+z = \frac{671}{3\cdot 56},$$

so

$$xyz\ (x+y+z) = \frac{48\cdot 14^2}{65\cdot 671}\cdot\frac{3\cdot 65^2}{56\cdot 671}\cdot\frac{671}{3\cdot 65}\cdot\frac{671}{3\cdot 56} = 1.$$

Besides most obediently recommending myself and my family, I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, April 15th, 1749.

[1] Cf. nº 138, note 1.
[2] Cf. nº 136, note 8.
[3] Euler's twin daughters Ertmuth Louise and Helene Eleonora were born on May 15th, 1749; both of them only survived for about three months, dying on August 9th and 11th, respectively.
[4] Evidently Goldbach had returned this figure, which originally accompanied Euler's letter nº 135, with nº 136 (cf. also nº 136, note 6, and nº 137).
[5] The term "cataclastic curve" (*curva cataclastica*), denoting the curve with a closed reflection path that is sought, seems to have been coined *ad hoc* by Euler.
[6] The relation between the various curves discussed and sketched here is described in more detail in E. 106 and analysed in Speiser's introduction to O. I/27, p. XX–XXIII; see also nº 96, note 3.
[7] The equation $xy(x+y) = a$ describes, for nonzero values of a, an elliptic curve. In fact, the curve can be written in Weierstraß form as $y^2 = x^3 + 16a^2$. The rank r of these elliptic curves for small values of a is given by the following table:

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

This agrees with Euler's (trivial) observation that solutions exist if $a = pq(pm^3 + qn^3)$:

a	p	q	m	n
6	1	2	1	1
7	1	1	2	−1
9	1	1	2	1
12	3	1	1	1

Lucas (1878), p. 513, listed values of A for which $xy(x+y) = Az^3$ has no rational solutions $\neq 0$.

In a note published only in 1862 as part of E. 806 from his scrapbooks (*Opera Postuma* I, p. 235–236), Euler observed that solutions of $p^3 + q^3 = ar^3$ give solutions of $xy(x+y) = a$ via $x = p^2/qr$ and $y = q^2/pr$. In his solution of Fermat's Last Theorem for the exponent 3 (the unsolvability of $x^3 + y^3 = z^3$ in nonzero integers) in his *Algebra* (E. 388, Pars II, § 243: O. I/1, p. 486–489), Euler substituted $x = u+v$ and $y = u-v$ and found $2u(u^2+3v^2) = z^3$. With $\alpha = (u + v\sqrt{-3})/z$ and $\alpha' = (u - v\sqrt{-3})/z$, this equation can be written in the form $\alpha\alpha'(\alpha+\alpha') = 1$. Thus the Fermat cubic is birationally isomorphic to $xy(x+y) = 1$ over the field of cube roots of unity. The homogeneous map from $p^3+q^3 = ar^3$ to $xy(x+y) = az^3$ is given by $x = p^3$, $y = q^3$, $z = pqr$.
[8] These formulae give a parametrisation of a piece of the quartic surface $xyz(x+y+z) = a$. In the sequel to the note cited above (*Opera Postuma* I, p. 236–238), Euler gave the solution $(x, y, z) = (4, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ of $xyz(x+y+z) = 1$, and observed that $xyzw(x+y+z+w) = 1$ has the rational solution $(x, y, z, w) = (\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2})$. He observed the connection between $xyz(x+y+z) = 1$ and the equation $p^4 + q^4 + r^4 = s^4$ via the transformation $x = p^3/qrs$, $y = q^3/prs$, $z = r^3/pqs$.

Euler also transformed (*ibid.*, p. 239–240) $(p^2-q^2)(q^2-r^2) = s^4$ into $16xyz(x+y+z) = w^4$ by setting $p = x+y+2z$, $q = x+y$, $r = x-y$.

Elkies (2009) observed that $xyz(x+y+z) = a$ is birationally isomorphic to a K3-surface, hence cannot be "completely" parametrised. He used the machinery of algebraic geometry to find the parametrisation of the following curve on Euler's surface:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2r^5(r^4+12a)}{(r^4-4a)(3r^4+4a)}, \\ y &= \frac{(r^4-4a)^2}{2r^3(r^4+12a)}, \\ z &= \frac{2a(3r^4+4a)^2}{r^3(r^4-4a)(r^4+12a)}, \\ x+y+z &= -\frac{r^5+12ar}{2(3r^4+4a)}. \end{aligned}$$

It is still not known how Euler arrived at his parametrisation.

140
Goldbach to Euler
Moscow, June (5th) 16th, 1749

Sir,

I was greatly pleased to learn by your last two letters that both your family and your revenues have been increased within a short time,[1] on which I congratulate you no less than your wife from all my heart. I duly thank you for the communication of your theorems in the letter from April 12th;[2] that nothing was amiss in the figure sent to me, I have already recognised in my last postscript,[3] which will no doubt have arrived.

I think[4] it will not take you much trouble, Sir, to describe the curve which bisects all the verticals in the case where the three-cusped[5] curve on which it is based consists of nothing but circular arcs; it seems that this curve bisecting the verticals will have curious properties.

Regarding the resolution of any number into four squares, I understand very well that – as you remarked, Sir – everything depends on proving the second proposition:[6] If ab is $\boxed{4}$ and $a = \boxed{4}$, then also $b = \boxed{4}$. The same holds with regard to the proof of the following proposition: If a sum of four squares in fractional numbers equals some whole number, this same whole number will also equal four integer squares. On the other hand, I think the proof of this proposition is within my power: If any number is the sum of four odd squares, the same number is also the sum of four even squares, or: four odd squares equal to $8m+4$ being given, there are also four squares for the number $2m+1$.

If one could find the means to resolve the sum of four arbitrary squares $A^2+B^2+C^2+D^2$ into the following four squares: $a^2+b^2+\frac{\left(k^2-b^2\right)^2}{4}+d^2$ (where there are, after all, also four indeterminate quantities present), then one should at the same time have demonstrated that any number is $\boxed{4}$; for the latter four squares are such that their sum increased by 1 again becomes a sum of four squares, or: the five squares[7] $4a^2 + 4b^2 + \left(f^2 + 2bf\right)^2 + 4d^2 + 4$ always equal four squares.

I either[8] was not informed or forgot whether you have been awarded the prize for the question on the cause of perturbations in planetary motion, Sir;[9] as I presume that you will also have competed for the prize about the question on the direction of currents etc.,[10] I wish that your paper may, by adding some few viewpoints, become victorious next year. I am, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, June 16th (new style), 1749.

PS. If the sign $\boxed{4}$ denotes a sum of either 4 or fewer squares and $\underset{\shortmid}{\boxed{4}}$ a sum of no fewer than 4 squares, it can be very easily proved that any number of the form $8m + 7$ is $\underset{\shortmid}{\boxed{4}}$; if, on the other hand, it is granted[11] that all numbers $\underset{\shortmid}{\boxed{4}}$ are comprised by the formula $4^{e-1}\,(8m + 7)$, where e is an arbitrary positive integer, then it can be proved that any number is $\boxed{4}$.

[1] Cf. n° 139, note 3, and n° 138, note 9.
[2] Cf. n° 138, note 2.
[3] Cf. n° 137, note 1.
[4] The text of Goldbach's copy starts here.
[5] In the copy one reads by mistake "*verticalis*" instead of "*tricuspidalis*".
[6] Cf. n° 138, note 7.
[7] In the original letter the numeral 4 in front of d^2 in the formula that follows has been inserted later, possibly by the recipient; in Goldbach's copy it is missing.
[8] This paragraph is missing in Goldbach's copy.
[9] Cf. n° 107, note 4, and Euler's reply n° 141, note 3.
[10] Cf. Euler's reply n° 141, note 2.
[11] In Goldbach's copy the rest of this sentence has been crossed out.

141
Euler to Goldbach
Berlin, July 26th, 1749

Sir,

for your kind congratulation on the increase of my family[1] I most obediently thank you, at the same time taking the liberty to recommend them all again to your goodwill. I have not worked on the Paris question about currents;[2] I was informed that apparently only one paper was entered. I also doubt very much whether I shall be able to produce something thorough for next year. On the other hand, I have already sent a new treatise on the repeated question about Saturn, which shall be judged next Easter.[3]

I can also prove your theorem that, if $8m+4$ is a sum of four odd squares, this same number must also be a sum of four even squares, in the following way: Let

$$8m + 4 = (2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 + (2c + 1)^2 + (2d + 1)^2\,,$$

then, on dividing by 2, since $\dfrac{(2p+1)^2+(2q+1)^2}{2}=(p+q+1)^2+(p-q)^2$,

$$4m+2=(a+b+1)^2+(a-b)^2+(c+d+1)^2+(c-d)^2\,,$$

so $4m+2=4\square$. Since, however, $4m+2$ is an oddly even number, two of these four squares must be even and two odd. So one will have

$$4m+2=(2p+1)^2+(2q+1)^2+4r^2+4s^2,$$

therefore

$$2m+1=(p+q+1)^2+(p-q)^2+(r+s)^2+(r-s)^2\,,$$

and consequently

$$8m+4=4\,(p+q+1)^2+4\,(p-q)^2+4\,(r+s)^2+4\,(r-s)^2\,,$$

QED.

It follows from this that, whenever $2A$ is a sum of four squares, A too is a sum of four squares in whole numbers, and, more generally: If $2^nA=4\square$, then also $A=4\square$ in integers; or if in fractions one has $A=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2^n}$, then the number A will also be resolvable into four squares in whole numbers.

Now this is already part of the general theorem: If a sum of four fractional squares equals a whole number A, then this number will also be a sum of four squares in integers; or of this one, on which I based all my former proof: If $mA=4\square$ and $m=4\square$, then one will also have $A=4\square$. So, one case of this theorem is already proved: If $2A=4\square$, then also $A=4\square$, or: if $2^nA=4\square$, then also $A=4\square$. Moreover, I can prove several other cases, as:

Theorem: If $3A=4\square$ (I forgot in my former letter to introduce the sign $\boxed{4}$ for a sum of four integer squares),[4] then also $A=\boxed{4}$.

Proof: Since any square is either of the form $3n$ or $3n+1$, either all four squares are divisible by 3 or just one of them is. In the first case one has

$$3A=9a^2+9b^2+9c^2+9d^2,$$

so

$$A=3a^2+3b^2+3c^2+3d^2,$$

i.e.,

$$A=(a+b+c)^2+(a-b+d)^2+(a-c-d)^2+(b-c+d)^2\,.$$

In the second case one has

$$3A=(3a+1)^2+(3b+1)^2+(3c+1)^2+9d^2$$

and therefore

$$A = 1 + 2a + 2b + 2c + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2.$$

But this is

$$A = (1 + a + b + c)^2 + (a - b + d)^2 + (a - c - d)^2 + (b - c + d)^2 ,$$

so again $A = \boxed{4}$.

Theorem: If $5A = \boxed{4}$, then also $A = \boxed{4}$.

Proof: Indeed, either

$$\text{I.}\quad 5A = 25a^2 + 25b^2 + 25c^2 + 25d^2$$

or

$$\text{II.}\quad 5A = (5a + 1)^2 + (5b + 2)^2 + 25c^2 + 25d^2,$$

or

$$\text{III.}\quad 5A = (5a + 1)^2 + (5b + 2)^2 + (5c + 1)^2 + (5d + 2)^2 .$$

In case I,

$$\begin{aligned} A &= 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 5d^2 \\ &= (2a + b)^2 + (a - 2b)^2 + (2c + d)^2 + (c - 2d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

In case II,

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2a + 4b + 5a^2 + 5b^2 + 5c^2 + 5d^2 \\ &= (1 + a + 2b)^2 + (2a - b)^2 + (2c + d)^2 + (c - 2d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

In case III,

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2a + 4b + 5a^2 + 5b^2 + 1 + 2c + 4d + 5c^2 + 5d^2 \\ &= (1 + a + 2b)^2 + (2a - b)^2 + (1 + c + 2d)^2 + (2c - d)^2 = \boxed{4}. \end{aligned}$$

Here it must be remarked that a, b, c, d denote both positive and negative numbers, so I do not need to write $5a \pm 1$ instead of $5a + 1$ for generality's sake.

Summarising these theorems, the conclusion is:[5] If $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma A = \boxed{4}$, then one will also have $A = \boxed{4}$.

One can go even further, as:

Theorem: If $7A = \boxed{4}$, then also $A = \boxed{4}$.

Proof: Since any $\square$ is either of the form $7m$ or $7m + 1$ or $7m + 2$ or $7m + 4$, one has either

$$\text{I.}\quad 7A = 49a^2 + 49b^2 + 49c^2 + 49d^2,$$

consequently

$$A = 7\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) = \boxed{4},$$

since, in fact, $\boxed{4} \cdot \boxed{4} = \boxed{4}$; or

$$\text{II.}\quad 7A = (1+7a)^2 + (1+7b)^2 + (1+7c)^2 + (2+7d)^2\,;$$

or

$$\text{III.}\quad 7A = (1+7a)^2 + (2+7b)^2 + (3+7c)^2 + 49d^2;$$

or

$$\text{IV.}\quad 7A = (2+7a)^2 + (2+7b)^2 + (2+7c)^2 + (3+7d)^2\,;$$

or

$$\text{V.}\quad 7A = (1+7a)^2 + (3+7b)^2 + (3+7c)^2 + (3+7d)^2\,.$$

In case II,

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2a + 2b + 2c + 4d + 7a^2 + 7b^2 + 7c^2 + 7d^2 \\ &= (1+a+b+c+2d)^2 + (a-b-2c+d)^2 + (a+2b-c-d)^2 \\ &\quad + (2a-b+c-d)^2\,. \end{aligned}$$

In case III,

$$A = 2 + 2a + 4b + 6c + 7a^2 + 7b^2 + 7c^2 + 7d^2 =$$

(of which the resolution must still be discovered)[6]

etc.

If the number A could be resolved into four squares in the following way: $A = a^2 + b^2 + \frac{1}{4}\left(k^2 - b^2\right)^2 + d^2$, then one should indeed have, as you observed, Sir, $A + 1 = \boxed{4}$, for

$$A + 1 = \left(\tfrac{1}{2}\left(k^2 - b^2\right) - 1\right)^2 + k^2 + a^2 + d^2.$$

The theorem that you reported in your postscript is very nice; indeed, if all numbers $\boxed{\underset{\cdot}{4}}$ (which consist of no fewer than four squares) were contained in the form $4^{e-1}\,(8m+7)$, then I also find it should follow that any number is $\boxed{4}$. My proof of this is the following:

If all numbers $\boxed{\underset{\cdot}{4}}$ are contained in the form $4^{e-1}\,(8m+7)$, then all numbers not contained in the form $4^{e-1}\,(8m+7)$ should be $\boxed{4}$. So one should have $8m+1 = \boxed{4}$, as well as $8m+3 = \boxed{4}$ and $8m+5 = \boxed{4}$. But if $8m+5 = \boxed{4}$, then also $3\,(8m+5) = 8n+7 = \boxed{4}$. Or thus: Since $3\,(8n+7) = 8m+5$, one will have $3\,(8n+7) = \boxed{4}$, therefore also $8n+7 = \boxed{4}$.

From this it further follows that if one could just prove that all numbers of the form $8m+1$ are $\boxed{4}$, then all numbers of any sort will be $\boxed{4}$. For since $3\,(8n+3) = 8m+1$, one will have $3\,(8n+3) = \boxed{4}$, therefore $8n+3 = \boxed{4}$, too. Moreover, since $5\,(8n+5) = 8m+1$, one has $5\,(8n+5) = \boxed{4}$, so $8n+5 = \boxed{4}$, too. Finally one will therefore also have $8n+7 = \boxed{4}$; so all odd numbers, and consequently all even numbers, too, should be $\boxed{4}$.

I recently received the enclosed letter from Dr. Gmelin.[7] I remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, July 26th, 1749.

PS. The theorem for $7A = \boxed{4}$, which I did not fully execute, is completed by the following general theorem:

Theorem: Setting $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, if $mA = \boxed{4}$, then also $A = \boxed{4}$.

Proof: Let

$$mA = (f + mp)^2 + (g + mq)^2 + (h + mr)^2 + (k + ms)^2$$

and

$$f^2 + g^2 + h^2 + k^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(x^2 + y^2 + z^2 + v^2\right);$$

then

$$\begin{aligned} f &= ax + by + cz + dv \\ g &= bx - ay - dz + cv \\ h &= cx + dy - az - bv \\ k &= dx - cy + bz - av \end{aligned}$$

and one gets

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + 2\,(fp + gq + hr + ks) + m\left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right);$$

but from this one finds

$$\begin{aligned} A = {} & (ap + bq + cr + ds + x)^2 \\ & + (aq - bp + cs - dr - y)^2 \\ & + (ar - bs - cp + dq - z)^2 \\ & + (as + br - cq - dp - v)^2\,, \end{aligned}$$

so $A = \boxed{4}$ in whole numbers, QED.

If, e.g., $7A = (2 + 7p)^2 + (2 + 7q)^2 + (2 + 7r)^2 + (3 + 7s)^2$, one has $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = 3$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ and $v = 0$, so $f = 4$, $g = -2$, $h = 0$, $k = 1$. Consequently, if

$$7A = (4 + 7p)^2 + (7q - 2)^2 + (7r + 0)^2 + (7s + 1)^2\,,$$

one gets

$$\begin{aligned} A = {} & (2p + q + r + s + 1)^2 \\ & + (2q - p + s - r - 1)^2 \\ & + (2r - s - p + q - 1)^2 \\ & + (2s + r - q - p)^2\,. \end{aligned}$$

Lately the *Braunschweigische Anzeigen* set this exercise: How much shall a capital of 1000 thalers amount to in 640 years at a rate of 5 per cent, calculating by compound interest? Since the number that results is very large and it is nearly impossible to execute the calculation in the ordinary way, the solution is certainly not easy. I found the following sum:

$$36\,404\,192\,715\,744\,080\,\text{thalers } 22\,\text{groats } 11\tfrac{9}{10}\text{ pence,}$$

which should not miss the truth by $\frac{1}{10}$ penny.

The person who set the problem asks for an answer to be calculated in half an hour; however, it cost me as much as an entire hour, and I do not see how the work could be shortened.[8]

[1] Cf. n° 140, note 1.

[2] Cf. n° 140, note 10. In fact, Euler did not participate in the contest, which was postponed to 1751 and then won by Daniel Bernoulli's *Mémoire sur la nature et la cause des courans*.

[3] Cf. n° 140, note 9. The prize question on Saturn and Jupiter, which had already been posed for 1748 (cf. n° 107, note 4), was postponed twice, first to 1750 and then to 1752; finally Euler received a double prize for E. 384 (cf. n° 151, note 6, and n° 158, note 11).

[4] Actually Euler *had* defined this notation in n° 138.

[5] Thus Goldbach's progress in n° 140 towards the missing lemma (cf. n° 138, note 5) has encouraged Euler to the generalisation which leads to the PS that follows and "almost" yields a proof of the lemma and the Four Squares Theorem: see Lemmermeyer 2010.

[6] In the margin Euler noted, as an afterthought suggested by the general formula in the postscript:
"*ist* $(a-2b+c+d)^2+(b+2c+d-a+1)^2+(a+b-c+2d)^2+(2a+b+c-d+1)^2$."

[7] Johann Georg Gmelin had been professor of natural history at the Petersburg Academy and participated in its expedition to Kamchatka. In August 1747 he had left Petersburg, at first on leave from the Academy, but then deciding to stay in Württemberg and accept a chair of medicine at his hometown Tübingen. This greatly irritated the administration of the Petersburg Academy, and Euler had to act as an intermediary for a long time until the dispute could be settled (see JW 2, p. 98–218 *passim*).
Gmelin's letter to Goldbach has not been retrieved; the inventory of Goldbach's correspondence in Yushkevich / Kopelevich 1994, p. 192–195, only lists one letter from 1748.

[8] This interest problem appeared in the June 21st, 1749, issue of the popular journal *Braunschweigische Anzeigen*:

"Aufgabe: Wie steht auf das kürzeste zu berechnen, was 1000 Thlr. Kapital in 640 Jahren Zins auf Zins *à* 5 *pro Cent pro anno* betragen? Und kann solches jemand in höchstens nicht mehr als 8 Sätzen, und in $\frac{1}{2}$ Stunde möglich machen?".

In the issue for August 13th, an answer was published that is almost certainly due to Euler, since it is couched in exactly the same terms as the present letter:

"Antwort: 36404192715744080 Thlr. 22 gG [gute Groschen] $11\frac{9}{10}$ d[*eniers* – i. e. *Pfennige* (pence)]. In dieser Summe ist kein Pfennig weder zu viel noch zu wenig: Ja nicht einmal $\frac{1}{10}$ *d*[*enier*]".

The solver has needed an hour and cannot understand how it could be done in half an hour. Meanwhile he proposes a new problem where the capital is diminished by a fixed amount of 600 thalers every year, and asks for how long it will last. Two solutions of this problem by "M. Mellin" – possibly the Culm cathedral canon Michael Mellin – and by the Wolfenbüttel calculating master J.J. Fricke actually appeared in the issue for August 30th.

142

Goldbach to Euler

Petersburg, March (13th) 24th, 1750

Sir,

more than seven months have gone by since I received your last letter; this should not have happened unless, on the one hand, diverse distractions had come up and, on the other hand, that which I could have written had been altogether of too small worth according to my own judgment. I think the method which you invented in order to demonstrate that, whenever $mA = \boxed{4}$, then also $A = \boxed{4}$, is a discovery among discoveries,[1] and although I had believed the proposition that every number is the sum of four squares should admit an easier proof, yet I did not find any proof of that kind; however, I leave it open whether some small theorems which occurred to me *en passant* might not be useful for this, so I should like to present some of them to you, Sir:

I.

$$\beta^2 + \gamma^2 + (3\delta - \beta - \gamma)^2 = (2\delta - \beta)^2 + (2\delta - \gamma)^2 + (\delta - \beta - \gamma)^2 .$$

This transformation of three squares into three others seems to me to be of considerable utility, for among four squares $a^2 + b^2 + c^2 + 4k^2$, where all the letters denote odd numbers, there are always three squares for which the sum of the roots is divisible by 3; consequently these squares can be transformed according to this method in many ways, and perhaps even in all possible ways; thus for example the number 335 is transformed in this manner in all possible ways, namely

$$\begin{aligned}
&3^2 + 7^2 + 9^2 + 14^2 &&= 3^2 + 13^2 + 11^2 + 6^2 &&= 9^2 + 13^2 + 9^2 + 2^2 = \\
&15^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 &&= 15^2 + 1^2 + 3^2 + 10^2 &&= 15^2 + 9^2 + 5^2 + 2^2 = \\
&3^2 + 1^2 + 1^2 + 18^2 &&= 3^2 + 1^2 + 17^2 + 6^2 &&= 7^2 + 13^2 + 9^2 + 6^2,
\end{aligned}$$

so that in these transformations all even and odd squares are comprised into which the number 335 can be resolved.[2] It should already be sufficient if one had a means to transform the four squares $3^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon^2$ into the following four: $1^2 + \eta^2 + \theta^2 + 4\kappa^2$, since thus one should have proved that all numbers $8n + 7$ are sums of four squares. In fact, I have never yet encountered an example where the squares $3^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\varepsilon^2$ could not have been transformed into four squares one of which is 1 after two or three steps; for example, one finds

$$\begin{aligned}
3^2 + 13^2 + 15^2 + 2^2 &= 407 &&= 1^2 + 9^2 + 15^2 + 10^2, \\
3^2 + 9^2 + 15^2 + 10^2 &= 415 &&= 1^2 + 5^2 + 17^2 + 10^2, \\
3^2 + 5^2 + 17^2 + 10^2 &= 423 &&= 1^2 + 5^2 + 19^2 + 6^2, \\
3^2 + 5^2 + 19^2 + 6^2 &= 431 &&= 1^2 + 3^2 + 15^2 + 14^2;
\end{aligned}$$

the next four squares are again at once transformed into four squares one of which is 1 by a single operation exactly like the above, up to $3^2 + 3^2 + 21^2 + 2^2 = 463$, where by a first transformation one gets $15^2 + 15^2 + 3^2 + 2^2$, and from these by a second transformation $1^2 + 13^2 + 17^2 + 2^2$.

II.

However difficult it may be, the four squares into which the number $2m - 1$ can be resolved being given, to state what the four squares which equal the number $2m+1$ are going to be, yet the four former squares have a very precise connection with the latter, which is based on the three squares that equal $8m + 3$; indeed, if these are given, one has the squares for $2m - 1$ and for $2m + 1$ at the same time.

III.

If α, β, γ, δ are four arbitrary odd numbers which can be equated to the following:

$$\alpha = 2er + 1, \quad \beta = b + fr, \quad \gamma = c + gr, \quad \delta = r - e^2r - e - bf - cg,$$

where b, c and r are integers, then it can also be proved that any number $8m + 4$ or generally any number whatsoever is a sum of four squares. Indeed, one has

$$\begin{aligned}(2er + 1)^2 + (b + fr)^2 + (c + gr)^2 + \bigl(r - e^2r - e - bf - cg\bigr)^2 \\ = 1^2 + (b - fr)^2 + (c - gr)^2 + \bigl(r + e^2r + e + bf + cg\bigr)^2 .\end{aligned}$$

I cannot imagine that the person who set the problem in the *Braunschweigische Anzeigen* has better procedures for solving it than you, Sir; please tell me also whether the author published anything further about it.[3] The *Gazette d'Amsterdam* from August 5th, 1749, had the following announcement: "Mr. Quin Mackenzie Quin ... invented, at the age of 8 years, and had the honour to present to the King a method by which he multiplies and divides any number of digits whatsoever and checks the product and quotient in a single line. He performs this operation in less than three minutes even if the question involves multiplying 20 digits by 20 digits or 40 by 20. People who want to subscribe to this method shall be liable to pay one Guinea immediately and another one after the method has been communicated to them or to their agents." After that time I have not heard any more about this.[4]

You have been so kind, Sir, as to enclose with the books that were sent to me a long time ago your *Analysis Infinitorum*, for which I humbly thank you and ask you to accept the 7 thalers paid to Mr. Spener, in case they have not yet been delivered.[5] At the same time I take the liberty to add another list of books,[6] which I request Mr. Spener to send to Mr. Köppen via Lübeck in the same way, once the water is open; with this, I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, March 24th (new style), 1750.

[1] Cf. nº 141, PS and note 5.
[2] This is not true; in fact Euler noted between the lines: "$= 14^2 + 11^2 + 3^2 + 3^2$".
[3] Cf. nº 141, note 8.
[4] Goldbach literally cites an advertisement in the August 5th, 1749, issue of the *Gazette d'Amsterdam* edited by Louise Tronchin Dubreuil. Mackenzie Quin's self-published manual was also sent to the Petersburg Academy, where it was given to Winsheim for an expert assessment on April 2nd, 1750 (cf. *Protokoly*, t. II, p. 226).
[5] Euler had announced in June 1748 that he was going to add a complimentary copy of the *Introductio* (E. 101/102) to an order Spener was sending to Goldbach (cf. nº 129, note 2); his reply nº 143 shows that he is embarrassed by Goldbach's proposing to pay for the book.
[6] This order list has not been preserved.

143
Euler to Goldbach
Berlin, April 14th, 1750

Sir,

if I did not believe that, when my *Introductio* was delivered to you, you assumed at once there had been a gross error on the part of Mr. Spener, I should be quite inconsolable about this circumstance;[1] I should not know how to justify myself with regard to the outrageous procedure of presenting a work of mine and at the same time exacting payment for it at the highest price. However, your very enquiry whether I had received the payment which Mr. Spener put on the bill for this work, reassures me, Sir, and allows me the conviction that you are still far from blaming me for this blunder; I am all the more obliged to you for this gracious enquiry as without it I should never have noticed the mistake. For when, some time ago, I balanced my account with Mr. Spener and he owed me some money for a lot of books ordered from Basel, it indeed turned out that he wanted to pay me $7\frac{1}{2}$ thalers more than my calculation came to; but since I was sure of my reckoning, I assumed without further query he had committed an error to his own disadvantage, and consequently just cancelled this excess of $7\frac{1}{2}$ thalers. So I cannot accuse Mr. Spener either of having acted with malicious intent, and all the error is based on the fact that I then sent him the book to be enclosed with the books you had ordered, Sir, without mentioning that I was taking the liberty of most humbly presenting it to you. Now, since he also had acquired some copies of my work from third or fourth parties and was selling these at the fixed price, the same price was also put on your bill, at the same time crediting me with it. After this blunder was discovered by your letter, Mr. Spener at once acknowledged it and credited you with the excess amount you had paid; in your next bill it shall be conscientiously subtracted.[2] You will not take in bad part, Sir, the prolixity which my extreme concern about this bothersome affair wrought from me; nonetheless I am confident that my previous behaviour must have entirely acquitted me in your mind of such an ugly suspicion. I therefore do not presume that this affair could have had any part in causing your long silence; I rather supposed the causes to be of the same kind as those that prevented me, too, from writing to you, although I had several times put pen to paper. However, I now have the firm hope that it will be possible in the future to enjoy the priceless pleasure of your correspondence without interruptions.

On last Good Friday my wife was quite unexpectedly delivered of a small son after not quite seven month's pregnancy,[3] and since that time she has had to endure a very serious illness; however, by the grace of God everything is now conspiring to her recovery, and the child is also growing quite well. All the same, these circumstances did not yet allow me to consider more closely your beautiful theorems, Sir; therefore I cannot report anything more about them than that they appear to me to be most important for discovering an easier proof of Fermat's theorem.

In the *Braunschweigische Anzeigen* nothing more appeared about the question you mentioned, and in particular about the time needed for a solution.[4] The advertisement printed in the *Gazette d'Amsterdam*[5] is well known to me, and I was also very curious to learn more about it; but since that time nothing at all has been further heard of it. Therefore I believe it to have been nothing but an invention of the journalist's, as that sort of thing has often proved to be.

All my family asks to be most obediently recommended to you, Sir, and I do not desire anything so much as the continuation of your very special favour and goodwill.[6] I remain with quite the most perfect respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, April 14th, 1750.

[1] Cf. nº 142, note 5.
[2] Actually this did not work as simply: see nº 148–150.
[3] August Friedrich Euler was born on March 27th, 1750, but did not survive his first year (see nº 146).
[4] Cf. nº 142, note 3.
[5] Cf. nº 142, note 4.
[6] Euler's exceptionally ornate salutation shows he is still worried about the possibility that Goldbach might take Spener's blunder amiss.

144
Euler to Goldbach
Berlin, June 9th, 1750

Sir,

after his return from Leipzig, Mr. Spener tells me he brought with him all the books you requested except for some missing sheets in books formerly sent, which he has however ordered. As soon as these books have been bound according to your orders, he is going to send them; indeed, this may possibly have already happened, since I have not seen him for more than eight days. In particular I urgently instructed him on no account to forget the 7 thalers he had charged too much in the last invoice.[1]

Your theorem

$$\beta^2+\gamma^2+(3\delta-\beta-\gamma)^2=(2\delta-\beta)^2+(2\delta-\gamma)^2+(\delta-\beta-\gamma)^2\,,$$

Sir, gave me an opportunity for discovering the following theorems, of which it is the first:[2]

I. If $a+b+c=3m$, then

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2\,.$$

II. If $a+b+2c=3m$, then

$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2\,.$$

III. If $a+2b+2c=9m$, then

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2\,.$$

IV. If $a+b+3c=11m$, then

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(6m-c)^2\,.$$

V. If $a+2b+3c=7m$, then

$$a^2+b^2+c^2=(m-a)^2+(2m-b)^2+(3m-c)^2\,.$$

VI. If $2a+2b+3c=17m$, then

$$a^2+b^2+c^2=(4m-a)^2+(4m-b)^2+(6m-c)^2\,.$$

VII. If $a+3b+3c=19m$, then

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(6m-b)^2+(6m-c)^2\,.$$

VIII. If $2a+3b+3c=11m$, then

$$a^2+b^2+c^2=(2m-a)^2+(3m-b)^2+(3m-c)^2\,;$$

here it must be noted that the roots a, b, c may be taken to be negative as well as positive.

Such theorems can also be found for four squares: thus

I. If $a+b+c+d=2m$, then

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2\,.$$

II. If $a+b+c+2d=7m$, then

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(4m-d)^2\,.$$

III. If $a+b+2c+2d=5m$, then

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2\,.$$

IV. If $a+2b+2c+2d=13m$, then

$$a^2+b^2+c^2+d^2=(2m-a)^2+(4m-b)^2+(4m-c)^2+(4m-d)^2\,.$$

If therefore $3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2$ is to be reduced to $1^2+\eta^2+\theta^2+4\kappa^2$, where all the letters denote odd numbers, positive or negative, then, according to theorem II, the outcome is

1. If $3+\beta+\gamma+4\varepsilon=7m$, then

$$3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4\,(2m-\varepsilon)^2\,,$$

where m also is an odd number; so one should have to have either $2m-3=1$ or $2m-\beta=1$ or $2m-\gamma=1$. Now this is true in the following cases:

1. if $m=1$ and therefore $\beta+\gamma+4\varepsilon=4$;
2. if $m=2$ and therefore $\beta+\gamma+4\varepsilon=11$, which is impossible;
3. if $\beta=2m\pm1$ and $\gamma+4\varepsilon=5m-3\mp1$.

2. If $3+\beta+2\gamma+2\varepsilon=7m$, then

$$3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(2m-3)^2+(2m-\beta)^2+(4m-\gamma)^2+4\,(m-\varepsilon)^2\,.$$

So one should have to have either $2m-3=\pm1$ or $2m-\beta=\pm1$ or $4m-\gamma=\pm1$, where m is an even number. Thus this is true in the following cases:

1. if $m=2$ and therefore $\beta+2\gamma+2\varepsilon=11$,
2. if $\beta=2m\pm1$ and $2\gamma+2\varepsilon=5m-3\mp1$,
3. if $\gamma=4m\pm1$ and $\beta+2\varepsilon=-m-3\mp2$.

3. If $6+\beta+\gamma+2\varepsilon=7m$, then

$$3^2+\beta^2+\gamma^2+4\varepsilon^2=(4m-3)^2+(2m-\beta)^2+(2m-\gamma)^2+4\,(m-\varepsilon)^2\,,$$

where m is again an even number.

All the same I doubt that a square which equals 1 can always be determined by this second theorem alone.

One can also state similar theorems for five squares, such as:

I. If $a+b+c+d+e=5m$, then

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(2m-a)^2+(2m-b)^2+(2m-c)^2+(2m-d)^2+(2m-e)^2\,.$$

II. If $a+b+c+d+2e=4m$, then

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=(m-a)^2+(m-b)^2+(m-c)^2+(m-d)^2+(2m-e)^2$$

etc.

Now if one could prove that one of these latter squares can be made to equal 0, one should also have that which was asked for. Consequently this is true if either $a+b+c+d=0$ or $3a=b+c+d+2e$.

With respect to your second theorem on the link between $2m-1=4\,\square$ and $2m+1=4\,\square$, the resolution of the number $8n+3$ into three squares being granted, I understand it to mean this, Sir: Let $n=m-1$ and $8n+3=8m-5=a^2+b^2+c^2$, where a, b, c are odd numbers; then $8m-4=1+a^2+b^2+c^2$, so

$$4m-2=\left(\frac{1+a}{2}\right)^2+\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2,$$

where two of the roots are even and two odd; consequently this is of the form $4m-2=4p^2+4q^2+r^2+s^2$, so

$$2m-1=(p+q)^2+(p-q)^2+\left(\frac{r+s}{2}\right)^2+\left(\frac{r-s}{2}\right)^2.$$

Since a, b, c can be taken to be negative as well as positive, let $2p=\dfrac{a+1}{2}$, $2q=\dfrac{b+c}{2}$; then

$$2m-1=\left(\frac{a+b+c+1}{4}\right)^2+\left(\frac{a-b-c+1}{4}\right)^2+\left(\frac{a+b-c-1}{4}\right)^2+\left(\frac{a-b+c-1}{4}\right)^2.$$

Moreover, $8m+4=9+a^2+b^2+c^2$; thus

$$4m+2=\left(\frac{a+3}{2}\right)^2+\left(\frac{a-3}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b-c}{2}\right)^2,$$

where $\dfrac{a-3}{2}$ and $\dfrac{b+c}{2}$ will be even numbers and $\dfrac{a+3}{2}$, $\dfrac{b-c}{2}$ odd. Thus one has

$$2m+1=\left(\frac{a+b+c-3}{4}\right)^2+\left(\frac{a-b-c-3}{4}\right)^2+\left(\frac{a+b-c+3}{4}\right)^2+\left(\frac{a-b+c+3}{4}\right)^2.$$

It follows from this that, if $2m-1=p^2+q^2+r^2+s^2$, then one always has

$$2m+1=(p+1)^2+(q+1)^2+(r-1)^2+(s-1)^2\,;$$

this means that two of the roots of the squares for $2m+1$ will be greater by 1 than two of the roots of the squares for $2m-1$, and two smaller by 1. From this the following beautiful theorem arises:

Theorem: If $2m-1=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$ and $2m+1=a^2+b^2+c^2+d^2$, two of the roots a, b, c, d will be greater by 1 and the other two smaller by 1 than the roots α, β, γ, δ. Thus one has:

$$\begin{array}{ccllll}
1 & = & 0^2+ & 0^2+ & 0^2+ & 1^2 \\
3 & = & (0+1)^2+ & (0+1)^2+ & (0-1)^2+ & (1-1)^2 \\
3 & = & 0^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 1^2 \\
5 & = & (0+1)^2+ & (1+1)^2+ & (1-1)^2+ & (1-1)^2 \\
5 & = & 0^2+ & 0^2+ & 1^2+ & 2^2 \\
7 & = & (0+1)^2+ & (1+1)^2+ & (2-1)^2+ & (0-1)^2 \\
7 & = & 1^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 2^2 \\
 & & + & + & - & - \\
9 & = & 2^2+ & 2^2+ & 0^2+ & 1^2 \\
9 & = & 0^2+ & (-1)^2+ & 2^2+ & 2^2 \\
 & & - & + & + & - \\
11 & = & 0^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 3^2
\end{array}$$

It must be noted that α, β, γ, δ can be taken both to be positive and negative. Thus the theorem can also be stated like this: Each of the roots a, b, c, d will always differ by 1 from one of the letters α, β, γ, δ.

The following theorem thus appears to be remarkable:

If $2m-1=p^2+q^2+r^2+s^2$, then one always has

$$2m+1=(p\pm 1)^2+(q\pm 1)^2+(r\pm 1)^2+(s\pm 1)^2$$

if one only interprets the ambiguity of the signs the right way.

{NB. Not every resolution of $2m-1$ has this property, but there is always one which has this property.}[3]

Corollary: So one always has $\pm 2p\pm 2q\pm 2r\pm 2s+4=2$, or $\pm p\pm q\pm r\pm s+1=0$. This means: Every odd number $2m-1$ can always be split into four squares $p^2+q^2+r^2+s^2$ in such a way that $\pm p\pm q\pm r\pm s=1$. Here it must be noted that often one also finds four squares for which this property does not hold, as $27=0^2+1^2+1^2+5^2$ or $39=1^2+1^2+1^2+6^2$; but it is still true that one also has

$$27=\quad 1^2+\quad 1^2+\quad 3^2+\quad 4^2,\quad\text{where}\quad +1-1-3+4=1.$$

Thus, if the signs $+\ -\ -\ +$ are reversed and written underneath these squares, one has

$$\begin{array}{rllllll}
 & - & + & + & - & & \\
29 = & 0^2+ & 2^2+ & 4^2+ & 3^2, & \text{where} & +0+2-4+3=1 \\
 & - & - & + & - & & \\
31 = & 1^2+ & 1^2+ & 5^2+ & 2^2, & \text{where} & -1-1+5-2=1 \\
 & + & + & - & + & & \\
33 = & 2^2+ & 2^2+ & 4^2+ & 3^2, & \text{where} & +2-2+4-3=1 \\
 & - & + & - & + & & \\
35 = & 1^2+ & 3^2+ & 3^2+ & 4^2, & \text{where} & -1+3+3-4=1 \\
 & + & - & - & + & & \\
37 = & 2^2+ & 2^2+ & 2^2+ & 5^2, & \text{where} & +2+2+2-5=1 \\
 & - & - & - & + & & \\
39 = & 1^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 6^2. & &
\end{array}$$

Hence one cannot proceed further; another resolution of 39 must therefore be applied, which can be done by the IIIrd of the above formulae, since then one has $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$, $d = 6$; $a + b + 2c + 2d = 10 = 5m$, so $m = 2$ and consequently

$$\begin{array}{rllllll}
39 = & 1^2+ & 3^2+ & 5^2+ & 2^2, & \text{where} & 1+3-5+2=1 \\
 & - & - & + & - & & \\
41 = & 0^2+ & 2^2+ & 6^2+ & 1^2 & & \\
 & & & & & \text{or} & 1-3+5-2=1; \quad \text{then one has} \\
41 = & 0^2+ & 4^2+ & 4^2+ & 3^2. & &
\end{array}$$

Here one must again look for another resolution. By the second theorem one has $a = -1$, $b = 2$, $c = 6$, $d = 0$; $a+b+c+2d = 7 = 7m$, so $m = 1$, and consequently

$$41 = 3^2 + 0^2 + 4^2 + 4^2,$$

which is again of no avail. However, from this one gets $a = 0$, $b = 4$, $c = 4$, $d = 3$, $m = 2$ by the second theorem

{Here it is easier to use the theorems on three squares, especially the first one.}[4]

and consequently

$$\begin{array}{rllllll}
41 = & 4^2+ & 0^2+ & 0^2+ & 5^2, & \text{where} & -4+0+0+5=1 \\
 & + & - & - & - & & \\
43 = & 5^2+ & 1^2+ & 1^2+ & 4^2, & \text{where} & +5+1-1-4=1 \\
 & - & - & + & + & & \\
45 = & 4^2+ & 0^2+ & 2^2+ & 5^2, & \text{etc.} & \\
 & & & & & \text{or} & -5+1+1+4=1 \quad \text{or} \\
45 = & 6^2+ & 0^2+ & 0^2+ & 3^2. & &
\end{array}$$

Although I have gone so far in this matter that I can prove the theorem “Any number is the sum of four or fewer squares”, I still am unable to show that these four or fewer squares can always be indicated in integers; and therefore I am still far from Fermat's discovery. Indeed I do not believe one can reach this without starting at the triangular numbers; so one should try to prove that any whole number equals the sum of three or fewer triangular numbers.[5] However, there is no way in which an algebraic development can be helpful for this, since it is not even true that

$$n = \frac{x^2+x}{2} + \frac{y^2+y}{2} + \frac{z^2+z}{2}$$

in general, but just in those cases where n is a positive integer, whereas the formula

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + v^2$$

is true even if n is a fractional number, except for negative ones. But I have thought no more of this for a long time, so I also discovered nothing further.

Some time ago I had the honour of communicating to you, Sir, a discovery about the sums of divisors of the natural numbers:[6]

Numbers:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
	11,	12,	13,	14,	15,	...				
Divisor sums:	1,	3,	4,	7,	6,	12,	8,	15,	13,	18,
	12,	28,	14,	24,	24,	...;				

I remarked then that this series of the divisor sums is recurrent in such a manner that – denoting the sum of the divisors of the number n by $\mathbf{S}\,n$ – one always has

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\,n = \mathbf{S}\,(n-1) \quad &+ \quad \mathbf{S}\,(n-2) - \mathbf{S}\,(n-5) - \mathbf{S}\,(n-7) \\ &+ \quad \mathbf{S}\,(n-12) + \mathbf{S}\,(n-15) - \mathbf{S}\,(n-22) - \ldots . \end{aligned}$$

This discovery appeared to me to be all the more remarkable as its proof was not complete, but based on the theorem that

$$\begin{aligned} & (1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right)\,\ldots \\ = \quad & 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \ldots, \end{aligned}$$

which I had only found by induction and could in no way prove.[7] It also seemed curious to me that the exponents taken alternatively are the pentagonal numbers 1, 5, 12, 22, 35, ..., while the rest of them, 2, 7, 15, 26, 40, ... make up the series of the pentagonal numbers continued backwards; thus the above series can also be represented in this manner:

$$\ldots - x^{40} + x^{26} - x^{15} + x^7 - x^2 + x^0 - x^1 + x^5 - x^{12} + x^{22} - x^{35} + \ldots,$$

where the differences of the exponents make up an arithmetic progression.

However, since that time I have discovered the proof of this theorem, which is based on the following Lemma:

$$\begin{aligned} & (1-\alpha)\,(1-\beta)\,(1-\gamma)\,(1-\delta)\,\ldots \\ = \quad & 1 - \alpha - \beta\,(1-\alpha) - \gamma\,(1-\alpha)\,(1-\beta) - \delta\,(1-\alpha)\,(1-\beta)\,(1-\gamma) - \ldots; \end{aligned}$$

the proof of this is at once evident.

Thus, according to this lemma one has:

$$\begin{aligned} &(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right)\ \ldots = s \\ = \quad & 1-x-x^2(1-x)-x^3(1-x)\left(1-x^2\right)-x^4(1-x)\left(1-x^2\right)\left[\left(1-x^3\right)-\ldots\right] \end{aligned}$$

Let $s = 1 - x - Ax^2$, then

$$A = 1 - x + x(1-x)\left(1-x^2\right) + x^2(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right) + \ldots.$$

Develop the factor $1 - x$ everywhere:

$$\begin{array}{lllll} A = 1 - x & -x^2\left(1-x^2\right) & -x^3\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right) & & -\ldots \\ \quad\ +x\left(1-x^2\right) & +x^2\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right) & +x^3\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & & +\ldots; \end{array}$$

thus one gets

$$A = 1 - x^3 - x^5\left(1-x^2\right) - x^7\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right) - \ \ldots$$

Let $A = 1 - x^3 - Bx^5$, then

$$B = 1 - x^2 + x^2\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right) + x^4\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) + \ldots$$

Develop the factor $1 - x^2$:

$$\begin{array}{llll} B = 1 - x^2 & -x^4\left(1-x^3\right) & -x^6\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & \\ \quad\ +x^2\left(1-x^3\right) & +x^4\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) & +x^6\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) & +\ldots; \end{array}$$

one gets

$$B = 1 - x^5 - x^8\left(1-x^3\right) - x^{11}\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) - \ \ldots$$

Let $B = 1 - x^5 - Cx^8$, then

$$C = 1 - x^3 + x^3\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right) + x^6\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) + \ldots$$

Develop the factor $1 - x^3$:

$$\begin{array}{llll} C = 1 - x^3 & -x^6\left(1-x^4\right) & -x^9\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) & \ldots; \\ \quad\ +x^3\left(1-x^4\right) & +x^6\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) & +x^9\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^6\right) & \end{array}$$

thus

$$C = 1 - x^7 - x^{11}\left(1-x^4\right) - x^{15}\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right) - \ \ldots$$

Let $C = 1 - x^7 - Dx^{11}$.

Continuing this in the same way, $D = 1 - x^9 - Ex^{14}$, $E = 1 - x^{11} - Fx^{17}$, etc. Thus one has:

$$\begin{array}{rclcrcl}
s &=& 1 - x - Ax^2 & & s &=& 1 - x - Ax^2 \\
A &=& 1 - x^3 - Bx^5 & \text{or} & Ax^2 &=& x^2\left(1 - x^3\right) - Bx^7 \\
B &=& 1 - x^5 - Cx^8 & & Bx^7 &=& x^7\left(1 - x^5\right) - Cx^{15} \\
C &=& 1 - x^7 - Dx^{11} & & Cx^{15} &=& x^{15}\left(1 - x^7\right) - Dx^{26} \\
D &=& 1 - x^9 - Ex^{14} & & Dx^{26} &=& x^{26}\left(1 - x^9\right) - Ex^{40} \\
& & \text{etc.} & & & & \text{etc.,}
\end{array}$$

and from this it follows quite indubitably that

$$s = 1 - x - x^2\left(1 - x^3\right) + x^7\left(1 - x^5\right) - x^{15}\left(1 - x^7\right) + x^{26}\left(1 - x^9\right) - \dots$$

or

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - \dots$$

Besides most obediently recommending all my family, I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, June 9th, 1750.

[1] Cf. n° 142, note 5.

[2] Euler had already solved a particular problem of the same kind, which had been proposed by Goldbach in 1747: cf. n° 120, note 5, and n° 121, note 5.
These formulae are all special cases of the following simple observation: if m, x, y, z are integers satisfying $m(x^2 + y^2 + z^2) = 2(ax + by + cz)$, then

$$a^2 + b^2 + c^2 = (mx - a)^2 + (my - b)^2 + (mz - c)^2.$$

Setting $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$ etc. gives Euler's formulae.

[3] The remark set in braces was added in the margin by Euler.

[4] The remark set in braces was added with a reference sign in the lower margin.

[5] The theorem that every positive integer is the sum of three triangular numbers was first proved by Gauss in his *Disquisitiones*, art. 293, and lies much deeper than the Four Squares Theorem, which follows rather easily from the fact that every integer $8m + 3$ is a sum of three squares.
As Euler observed in E. 586, § 2, every rational number is the sum of four rational squares, whereas the corresponding result for triangular numbers is false: the equation

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2 + x}{2} + \frac{y^2 + y}{2} + \frac{z^2 + z}{2}$$

is equivalent to $7 = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 + (2z + 1)^2$, and 7 can easily be shown not to be the sum of three rational squares.

[6] Cf. n° 113, note 3.

[7] Cf. n° 74, note 13, and n° 115, note 2.
Euler had already presented some applications of this remarkable identity to number theory in E. 191, which was sent to the Petersburg Academy in January 1750. He published the proof given here in E. 244; a slightly more complicated version was found in his notebooks, and Euler gave two more proofs in E. 541. For a detailed analysis of Euler's work on the "Pentagonal Number Theorem", see Bell 2010.
Other derivations of Euler's product identity were given by Jacobi in 1829, by Fabian Franklin in 1881 (see also Hardy / Wright 2008), and by G.E. Andrews in 1983.

145

Goldbach to Euler

Petersburg, July (7th) 18th, 1750

Sir,

with great pleasure I learnt from your letter dated April 14th that your family has been increased by a little son and that both he and his mother are well.[1] Please convey my dutiful congratulation to her; I shall always take a vivid interest in everything that concerns you and your dear relatives. I also flatter myself that in a few years Master Johann Albert shall arrive here as Professor of Higher Mathematics and occupy this position most gloriously.[2]

I am, however, sorry that you have been caused some concern by the mistake in Mr. Spener's bill.[3] I humbly thank you for the most welcome present that you made me of the *Introductio in Arithmeticam*[!] *infinitorum*;[4] I had this forthwith bound at Moscow, and discovered in leafing through it that some of its propositions were already known to me by your former oral communications; however, I doubt very much whether at the present time I shall have sufficient opportunity and capacity for making further progress with it.

I easily understood the proof of the theorems concerning sums of three and four squares which you cite in your letter,[5] since it is generally true that, defining

$$z = \frac{2\,(\alpha e + \beta f + \gamma g + \delta h)}{e^2 + f^2 + g^2 + h^2},$$

the four given squares

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$$

equal

$$(ez - \alpha)^2 + (fz - \beta)^2 + (gz - \gamma)^2 + (hz - \delta)^2\,,$$

where the quantities e, f, g, h can be taken arbitrarily; if, moreover, these four quantities are such that the sum of the four roots satisfies

$$(e + f + g + h)\; z - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0,$$

then the four squares can always be transformed into three squares.

I shall add here some other propositions which have been known to me for a long time and prove themselves.[6]

(1.)

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + (2\delta + \alpha + \beta + \gamma)^2 \\ &= (\alpha + \beta + \delta)^2 + (\alpha + \gamma + \delta)^2 + (\beta + \gamma + \delta)^2 + \delta^2 \\ &= (\alpha + \delta)^2 + (\beta + \delta)^2 + (\gamma + \delta)^2 + (\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2\,. \end{aligned}$$

At the same time, from this the method is evident by which four given odd squares (different from one another) can be transformed into four others that are either even or odd; indeed, if in the given four squares δ is an even number, the first equation holds for even squares, and the second one for odd squares.

(2.) If in a single instance there are three squares satisfying $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=8m+3$, then there are also four squares for any case $2m+p^2\pm p+1$; indeed, if $8m+3$ equals three squares, then[7] $8m+3+(1+2p)^2$ equals four squares, and dividing everything by 4, $2m+p^2\pm p+1$ equals four squares.

(3.) The four fractional squares

$$\frac{\left(\pm p^2\alpha \mp 2q^2\beta - 2pq\gamma\right)^2 + \left(\mp 2q^2\alpha \pm p^2\beta - 2pq\gamma\right)^2 + \left(\mp 2pq\alpha \mp 2pq\beta + \left(2q^2-p^2\right)\gamma\right)^2}{\left(p^2+2q^2\right)^2}$$

where α, β, γ are assumed to be integers, equal the three integer squares $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

(4.) If $A^2+B^2+C^2=8m+3$, then

$$\frac{(A+B-C\pm 1)^2}{4\cdot 4}+\frac{(A-B+C\pm 1)^2}{4\cdot 4}$$
$$+\quad \frac{(-A+B+C\pm 1)^2}{4\cdot 4}+\frac{(-A-B-C\pm 1)^2}{4\cdot 4}=2m+1,$$

and by replacing 1 by 3, four squares that equal $2m+3$ result.

The preceding letter has been written more than eight days ago; I shall leave it at that for this time in order for the letter not to be held up even longer by new distractions. I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, July 18th, 1750.

[1] Cf. nº 143, note 3.
[2] Johann Albrecht Euler, Leonhard's eldest son and Goldbach's godson, was fifteen years old at the time; he became a member of the Petersburg Academy in 1766, two years after Goldbach's death. Cf. Euler's reply nº 146, note 4.
[3] Cf. nº 143, note 1.
[4] Cf. nº 129, note 2, and nº 142, note 5; despite Goldbach's variant of the title, he obviously refers to E. 101/102.
[5] Cf. nº 144, note 2.
[6] The identity below is equivalent to Euler's formula I. in nº 144.
[7] The expression that follows should more exactly be $8m+3+(1\pm 2p)^2$.

146
Euler to Goldbach
Berlin, August 15th, 1750

Sir,

first of all I convey my most obedient thanks for your kind felicitation on the happy delivery of my wife; however, I now have to report that a week ago yesterday this little son died after maintaining his life for $19\frac{1}{2}$ weeks in a very feeble state.[1]

In my last letter I had the honour to report to you, Sir, that I intended to travel to Frankfurt on Main in order to collect my mother and bring her here.[2] In the meantime I really undertook this trip, together with my wife and my eldest son. We travelled there by way of Magdeburg, Duderstadt and Kassel, returned by way of Hanau, Fulda, Erfurt, Merseburg and Wittenberg, and happily brought my mother here, after an absence of no more than 20 days.[3]

You have altogether too favourable an opinion yet of our Johann Albrecht:[4] for several years now I had him attend a local well-established school in order to do Latin and other necessary studies, and during this time he did not make special progress in mathematics; however, starting from Michaelmas I plan to keep him at home again, in the hope that he shall then shortly make up for what he missed in this subject.

Mr. Spener tells me he sent the requested books to you, Sir, a considerable time ago, deducing the notorious 7 thalers from the enclosed bill.[5]

The theorems on the resolution of numbers into three and four squares that you communicated are all remarkable and entirely correct; however, up to now I tried in vain to draw the slightest advantage from these theorems for those of Fermat's. Indeed I have proved that any number, whether integer or fractional, is the sum of four or fewer squares; but I am still lacking the following proof:

If a whole number n is the sum of four fractional squares $\frac{a^2}{p^2} + \frac{b^2}{q^2} + \frac{c^2}{r^2} + \frac{d^2}{s^2}$, then this same number is always also a sum of four squares in integers.[6]

And I see all too well that without this proof I am unable to achieve anything for the resolution of numbers into three triangular, five pentagonal, six hexagonal numbers, and so on; since everything here depends on whole numbers, universal formulae cannot help much here, as they also comprise fractions.[7] I derived the proof for squares from the consideration of the remainders left after dividing any number by a square; but this consideration cannot be applied to other polygonal numbers. From this I draw the certain conclusion that Fermat was led to his theorems by quite different speculations, which might perhaps be guessed at by assiduously pondering his works.[8]

I recently had an idea for determining a series $a+b+c+d+e+f+\dots$ when the products of each pair of adjacent terms are given, as follows:

Determine the series of numbers $a+b+c+d+e+f+\dots$ which proceeds by the certain and uniform law that $ab = 1$, $bc = 2$, $cd = 3$, $de = 4$, $ef = 5$, ...

Here it is immediately evident that, if just one term were known, the others are all determined from it; thus from the first one, a, the following terms are $b = \dfrac{1}{a}$, $c = \dfrac{2a}{1}$, $d = \dfrac{1 \cdot 3}{2 \cdot a}$, $e = \dfrac{2 \cdot 4a}{1 \cdot 3}$, $f = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot a}$. Now, by the nature of the series it follows that the terms of infinite order have to equal one another;[9] so, if two adjacent ones are equated, the following values must approximate the truth ever more closely:

$$a^2 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} = \dots$$

Thus one will have

$$a^2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 11 \cdot \dots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \dots} \text{ (to infinity).}$$

But this expression equals $\dfrac{2}{\pi}$ (where $1 : \pi$ is the ratio of diameter and circumference);[10] consequently $a = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$; so the following is a series which proceeds according to a uniform law:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \sqrt{\frac{\pi}{2}},\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \frac{1 \cdot 3}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \dots .$$

In this series

$$1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + \dots$$

I think it remarkable that by substituting $x = 1 - y$ the series that results is

$$\frac{1}{2} + 0y + 0y^2 + 0y^3 + 0y^4 + \dots,$$

where all finite powers of y vanish; however, this cannot be true of the infinite ones, since the sum of that series cannot possibly be always equal to $\frac{1}{2}$. This may indeed be correct for the case $x = 1$; but when $x < 1$, the sum is certainly greater than $\frac{1}{2}$. On substituting just $x = \frac{9}{10}$ or $y = \frac{1}{10}$, the sum already yields $0.499\,949\,2$, if I have not made any mistake in calculating.[11]

As I am prevented from continuing, I have to break off here, therefore recommending myself and my family as well most obediently to your constant favour and affection and remaining with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, August 15th, 1750.

[1] August Friedrich Euler had been born on March 27th, 1750 (cf. n° 143, note 3, and n° 145, note 1). His father's indications on his lifespan and the day of his death do not quite match; if the former is right, he died on August 10th, as also stated in other sources.

[2] In the extant letters this intention is not mentioned. All the same the existence of another letter, now lost, does not necessarily follow; Euler – who had indeed mentioned his plan to other correspondents at Petersburg (Schumacher, Teplov) – may simply be mistaken.
Leonhard Euler's mother Margaretha, *née* Brucker, had been widowed in 1745 (cf. n° 89, note 9). Her daughter Anna Maria Gengenbach, her younger son Johann Heinrich and his second wife Anna Margaretha, *née* Hugelshofer, accompanied her from Basel to Frankfurt and delivered her to Leonhard and his wife, with whom she was to stay at Berlin (mainly at their estate in Charlottenburg) until her death in 1761, at the age of 83.

[3] Euler describes his journey in somewhat greater detail in his letter R 2216 to Schumacher written on July 14th, 1750 (JW 2, p. 212–213). At Frankfurt, the Eulers stayed with Katharina's uncle von Loen from June 28th to July 3rd; this was the closest Euler ever again got to his native city of Basel after he had left there on April 5th, 1727, at the age of not quite 20 years.

[4] Cf. n° 145, note 2.

[5] Cf. n° 143, note 2, and n° 148–150.

[6] Cf. n° 138, note 7.

[7] Cf. n° 144, note 5.

[8] Fermat stated the Polygonal Number Theorem in full generality in a letter to Mersenne dated September 1636 (cf. Fermat, *Œuvres*, t. II, p. 65–66); in connection with the Four Squares Theorem he refers to Diophantus, who may have assumed it to be true, and to Bachet, who tried to confirm it numerically.

[9] This is an 18th-century way of stating that the sequence a, b, c, … (not the series which arises by summing it) converges; Euler seems to imply this by the requirement of "a certain and uniform law" and then uses it to determine the value of a.

[10] This is Wallis's product formula from *Arithmetica Infinitorum* (1656), Prop. CLXXXXI.

[11] Euler's calculation is in fact erroneous; he will correct it in the postscript n° 147 sent only two days later.
The series studied by Euler is almost a theta function: we have

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta_4(0,x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-x^k)^2}{1-x^{2k}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-x^k}{1+x^k}.$$

The function on the right has limit $\frac{1}{2}$ as $x \to 1$.
The result of Euler's substitution $x = 1-y$ is $1-(1-y)+(1-y)^4-(1-y)^9+\ldots$, and the coefficient of y on the right hand side is $1-4+9-16+\ldots$; this expression is equal to $\varphi(-2)$, where $\varphi(s) = (1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}$.
As Euler has "known" for some time, we have $\varphi(-2m) = \zeta(-2m) = 0$ (see E. 130, § 30). The reasoning behind this is explained in the *Institutiones calculi differentialis* (E. 212), Pars II, Cap. I, § 9, and in particular in E. 352, which was printed only in 1768 but may have been presented at the Berlin Academy as early as 1749.

147
EULER TO GOLDBACH
Berlin, August 17th, 1750

PS. I cannot omit to report the calculating error committed in my last letter,[1] where I found the sum of the series that was mentioned there to be smaller than $\frac{1}{2}$, whereas in fact, after repeated calculations, it is greater than $\frac{1}{2}$. Since that time I most diligently calculated several cases of that series

$$s = 1 - x^1 + x^4 - x^9 + x^{16} - x^{25} + x^{36} - x^{49} + \dots$$

and found that

for	$x = 0,$	one has	$s = 1,$	which is self-evident;
	$x = \frac{1}{2}$	...	$s = 0.560\,562\,104\,0$	
	$x = \frac{2}{3}$	...	$s = 0.506\,335\,1$	
	$x = \frac{7}{10}$	...	$s = 0.502\,937\,986\,1$	
	$x = \frac{8}{10}$	...	$s = 0.500\,059\,168\,3$	
	$x = \frac{9}{10}$	...	$s = 0.500\,000\,000\,5$	
	$x = 1$	...	$s = 0.5.$	

Thus, if x is just a very little bit smaller than 1, viz., $x = 1 - \omega$, then the sum s will be greater than $\frac{1}{2}$ by an almost imperceptible amount. Indeed, for $\omega = \frac{1}{10}$ one has $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{10}}$, and if one were to set $\omega = \frac{1}{20}$ or $x = \frac{19}{20}$, one can safely conclude that the excess of the sum s over $\frac{1}{2}$ should amount to just about $\frac{5}{10^{20}}$. However, I have up to now searched in vain for a sure manner for numerically determining the sum of this series closely when ω is a very small fraction. For if I wanted to set $\omega = \frac{1}{100}$ or $x = \frac{99}{100}$, I should have to calculate all terms of the series in decimal fractions to more than 100 digits, since $s = 0.500\,000\,0\dots$ and the number of zeros following after the 5 should come to 100. In fact, approximately one shall have $s = \frac{1}{2} + \frac{5}{10^{100}}$. Thus a method should be highly appreciated by which one could determine the value of s closely when ω is a very small fraction.

Fermat's theorems led me to consider the series

$$s = 1 + x^1 + x^4 + x^9 + x^{16} + x^{25} + x^{36} + \dots$$

in which no other powers of x occur but those whose exponents are square numbers. If one now takes the square of that series:

$$s^2 = 1 + 2x + x^2 + 2x^4 + 2x^5 + x^8 + \dots,$$

this series contains no other powers of x but those whose exponents are sums of two squares. In the series s^3, still not all powers of x are going to occur, but x^7,

x^{15}, x^{23}, x^{28}, ... will still be missing. Now if one could prove that in the series s^4 all powers of x must necessarily occur, it should be proved at the same time that any number is a sum of four or fewer squares.

Similarly, for the resolution of numbers into three triangular numbers one should have to prove that, defining

$$s = 1 + x^1 + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \dots,$$

the series s^3 resulting from this comprises all powers of x. And for pentagonal numbers it ought to be proved that, defining

$$s = 1 + x^1 + x^5 + x^{12} + x^{22} + \dots,$$

the series s^5 arising from it comprises all powers of x, and so on. In these series proposed for s I took all the coefficients equal to 1; however, the proof shall be identical if one assumes any positive coefficients whatsoever, and the matter should depend on choosing coefficients in such a way that the proof should be made easier. This appears to me the most natural way to arrive at a proof for Fermat's theorems.[2]

Additionally I will propose to you, Sir, a curious paradox in infinite analysis, which consists in the fact that one can often determine the integral of a differential equation without integrating it, and in fact even by differentiating it further, notwithstanding that this operation seems to be diametrically opposed to the final goal. Indeed, by differentiating a differential equation once more, one arrives at its differential or the differentio-differential of the requested integral equation: thus it must indeed appear miraculous that one should arrive by an operation of this kind at the integral equation itself. The following example will clearly exhibit this paradox:

Let the proposed differential equation, whose integral is to be determined, be $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Define $dy = p\,dx$; then the equation will go over into $y - px = a\sqrt{1 + p^2}$, which, differentiated again, yields

$$dy - p\,dx - x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

However, by the hypothesis one has $dy = p\,dx$, so

$$-x\,dp = \frac{ap\,dp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

and therefore

$$x = \frac{-ap}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Furthermore, by the equation $y - px = a\sqrt{1 + p^2}$ one has $y = px + a\sqrt{1 + p^2}$; so, substituting the value for x just determined, one gets

$$y = \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

Since, on the other hand, $x = \dfrac{-ap}{\sqrt{1+p^2}}$, one will have $x^2 + y^2 = a^2$; this is the required integral equation, and it has been discovered by differentiation.[3]

For the rest I refer to my last letter, remaining with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Aug. 17th, 1750.

[1] Cf. nº 146, note 11.

[2] Euler had already proposed this idea to Goldbach two years earlier (cf. nº 127, note 7). Cauchy's proof of the Polygonal Number Theorem (1815) reduces the general statement to Gauss's Triangular Number Theorem. A simplified version of Cauchy's proof was given by Nathanson in 1987.

[3] Some instances of singular solutions (as they came to be called later) of differential equations had been known for a long time: Leibniz, the Bernoulli brothers and Brook Taylor had already found particular integrals by a "paradoxical" differentiation process as sketched here by Euler. After some observations by Clairaut and d'Alembert, Euler investigated the phenomenon in E. 236 and in t. I of the *Institutiones calculi integralis* (E. 342), Sect. II, Cap. IV (see in particular § 564). A systematisation was then attempted by Lagrange in 1776. For a discussion within the context of the later theory, see Rothenberg 1908.
The topic arises again in nº 162 and nº 163 (see in particular note 12).

148
Goldbach to Euler
[Petersburg], (September 22nd) October 3rd, 1750

Sir,

although you had not given me notice of your imminent trip to Frankfurt, I was yet informed of it before I received your last letter;[1] I think highly of you for taking and partly putting into practice the fortunate decision to accommodate your mother in your house and look after her.

The calculating error that you had yourself suspected in your letter, Sir, seemed at once very likely to me; however, it should have cost me much trouble to indicate it properly if you had not done so yourself in your postscript.[2] Indeed, since the time when you departed from here, Sir, I can neither converse about these topics with anybody nor read anything of the kind in books, so they grow ever stranger to me. Thus, if you had not explained it so clearly, I should hardly have discovered the link between the equations $y\,dx - x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$ and $x^2 + y^2 = a^2$.[3]

From Fermat's theorem it also follows that the sum of the roots of four odd squares can always equal ± 2, or that, given any sum of four odd squares, the four squares can be chosen in such a way that the sum of the roots equals ± 2. Moreover, if it can be proved easily that the sum of four odd squares can be reduced to those four $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(2-\alpha-\beta-\gamma)^2$, then it is also easy to prove that $8m+4$ is always a sum of four odd squares.

In fact the notorious 7 roubles have not been taken into account in the invoice for which I recently paid 31 roubles 40 kopecks, but on the other hand I should not like to bother Mr. Spener with reminders of that kind;[4] I shall be well satisfied if instead of them I am sent the *Nouveau Secretaire de la Cour* (Paris 1744, in duodecimo) – a book that was specified in the order but did not arrive along with the others – when an opportunity arises; it cannot be a rare book, as it is sold at Frankfurt by Knoch and Esslinger's bookstore for 1 guilder 15 kreutzers.[5]

Please recommend me to all your family; I remain most respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Oct. 3rd (n. st.), 1750.

[1] Cf. nº 146, note 2.
[2] Cf. nº 146, note 11, and nº 147, note 1.
[3] Cf. nº 147, note 3.
[4] Cf. nº 143, note 2.
[5] There are several Paris editions of the widespread manual *Le Nouveau Secretaire de la Cour ...* by the French linguist and style instructor René Milleran (first published in 1714), but the only one from 1744 seems to have been printed in Amsterdam.

149
Euler to Goldbach
Berlin, November 14th, 1750

Sir,

I was more than a little dismayed to learn from your letter that Mr. Spener had not deduced the notorious 7 thalers in his last bill, since he had so firmly assured me this had been done.[1] When I complained to him, he was no less upset and protested that the deduction had indeed been entered in his books and omitted in the bill by a mere oversight. Lest this oversight could be committed again, I insisted that the excess amount should be refunded to you without delay by Mr. Köppen; Mr. Spener declared himself entirely willing to do so and now assures me by the enclosed piece of paper that this has already been done.[2] Indeed, although you did not want to carry the matter further, it was too important to me to let it rest; so I most humbly ask your pardon, Sir, if I did not exactly comply with your instruction in this affair. Meanwhile Mr. Spener will not fail to obtain the requested book for you.[3]

Recently it occurred to me to determine the general properties of the bodies that are enclosed by plane surfaces; indeed there is no doubt but that such general properties of a similar nature can be found for them as for rectilinear planar figures, whose properties consist in this:

1. in any planar figure the number of sides equals the number of angles; then also,

2. the sum of all the angles equals twice as many right angles as there are sides, decreased by 4.

However, whereas in planar figures just the sides and the angles had to be considered, for bodies more items enter into consideration, namely[4]

I. the faces; let their number be H,

II. the solid angles; let their number be S,

III. the joints where two faces meet along their sides, which – in the absence of an accepted term – I call edges; let their number be A,

IV. the sides of the single faces; let the number of all of them taken together be L,

V. the planar angles of the single faces; let their total number be P.

1. Firstly, for these five items it is obvious that $P = L$, since in all faces the number of angles equals the number of sides.

2. One also always has $A = \frac{1}{2}L$ or $A = \frac{1}{2}P$, since two sides of different faces meet every time to form an edge.

3. Therefore the total number of sides or of planar angles of all the faces that enclose the body is always even.

$$\left.\begin{array}{l}\text{4. One always has either } L = 3H \text{ or } L > 3H.\\ \text{5. One always has either } P = 3S \text{ or } P > 3S.\end{array}\right\}\ \text{On the other hand, } P = L.$$

This is clear, since no face can consist of less that 3 sides and no solid angle of less than 3 planar angles. On the other hand, I cannot yet quite rigorously prove the following proposition:

6. In any solid enclosed by plane surfaces the sum of the number of faces and the number of solid angles is greater by 2 than the number of edges:[5] one has $H + S = A + 2$, or $H + S = \frac{1}{2}L + 2 = \frac{1}{2}P + 2$.

7. It is impossible to have $A + 6 > 3H$ or $A + 6 > 3S$.

8. It is impossible to have $H + 4 > 2S$ or $S + 4 > 2H$.

9. No solid can be constructed in which all the faces have 6 or more sides, and none whose every solid angle is composed of six or more planar angles.

10. The sum of all the planar angles on the surface of any solid equals as many right angles as there are units in $4A - 4H$.

11. The sum of all the planar angles equals four times as many right angles as the number of solid angles, decreased by 8, or $4S - 8$ right angles.[6]

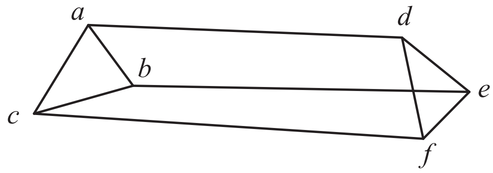
As an example take the triangular prism, where

1. the number of faces is $H = 5$,

2. the number of solid angles is $S = 6$,

3. the number of edges (ab, ac, bc, ad, be, cf, de, df, ef) is $A = 9$,

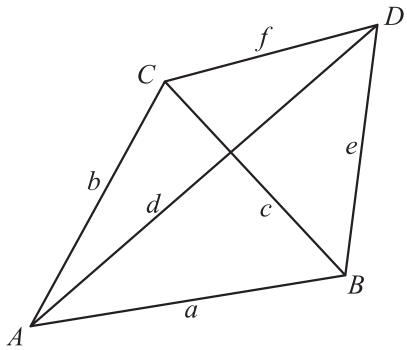
4. the number of sides and of planar angles is $L = P = 18$: the body is enclosed by two triangles and three quadrilaterals, so $L = P = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18$.



Now by theorem 6, one has $H + S\ (11) = A + 2\ (11)$. Moreover the sum of the planar angles will be (as there are two $\triangle$ equalling 4 right angles, and three $\square$ = 12 right angles) equal to 16 right angles $= 4\,(A - H) = 4S - 8$ right angles.

I am surprised that these general properties in stereometry have not yet been noticed by anybody, as far as I know,[7] but still more that the most important of them, viz., Th. 6 and Th. 11, are so hard to prove; indeed I still cannot prove them in a way which satisfies me.

In order to determine the volume of a body, I should assume at will some point inside it and draw straight lines from this to all the solid angles.[8] By this the body is dissected into pyramids with their vertex at the assumed point that have the faces for their bases. Pyramids that are not triangular can be easily cut up into triangular ones. Thus everything depends on calculating the volume of a triangular pyramid, which can be done as follows, the sides being known:



Let $ABCD$ be the proposed pyramid, in which the sides are $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $AD = d$, $BD = e$, $CD = f$; then the volume of this pyramid will be[9]

$$= \frac{1}{12}\sqrt{\begin{array}{ll} +a^2f^2\left(b^2+c^2+d^2+e^2-a^2-f^2\right) & -a^2b^2c^2 \\ +b^2e^2\left(a^2+c^2+d^2+f^2-b^2-e^2\right) & -a^2d^2e^2 \\ +c^2d^2\left(a^2+b^2+e^2+f^2-c^2-d^2\right) & -b^2d^2f^2 \\ & -c^2e^2f^2 \end{array}}$$

With this, I most obediently recommend myself to your constant affection and favour; I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Nov. 14th, 1750.

[1] Cf. nº 143, note 2, and nº 148, note 4.
[2] This voucher has not been preserved.
[3] Cf. nº 148, note 5.
[4] In order to present his new insights into the combinatorics of polyhedral bodies, Euler lacks well-established terms, which shows how new this mode of thinking about geometrical objects was at the time. There is a Latin term for the faces (*hedrae*, from Greek ἕδραι) which Euler retains, but since there is no separate word for the vertices, he uses "solid angles" (*anguli solidi*), and for the edges he has to coin a new use for the Latin word *acies* (literally "sharpness", "blade").
[5] This is the first mention of Euler's celebrated Polyhedron Formula, later presented to the Petersburg Academy in April 1752, but printed only in 1758 (E. 230 / 231).
[6] This is the polyhedral analog of the Gauss-Bonnet theorem: the "angular defects", i. e., the amounts by which the face angles at each vertex fall short of 2π (the value for a planar tiling), sum to 4π.
[7] Euler could not know that his results had indeed been anticipated in substance by more than a century: Statements very close to his Polyhedron Formula and his "polyhedral Gauss-Bonnet theorem" occur in a manuscript by Descartes from around 1630, *De solidorum elementis*. However, this paper was lost and is only known to us through a copy made by Leibniz in 1676, which was first published by Foucher de Careil in 1860 (*Œuvres inédites de Descartes*, Deuxième Partie, p. 214–226). See also *Œuvres de Descartes* (ed. Adam / Tannery), vol. X, p. 265–276, and the detailed study by Federico (1982).
[8] By explicitly assuming the existence of an interior point to which all vertices can be joined by straight lines, Euler shows that his idea of "a body enclosed by plane surfaces" – not clearly defined either in this letter or in his publications – implies this condition. Indeed the property of being "star-shaped" (intermediate between convexity and simple connectivity) is sufficient to render Euler's statements true, to prepare the ground for the first correct proof by Legendre (1794) and to exclude all the counterexamples constructed and examined in the following decades, among others, by L'Huilier, Hessel, Poinsot and von Staudt. All the same, these critiques were instrumental in clarifying the notions of polyhedra, their connectivity etc. The development through Poincaré's far-reaching generalisation is described in D.S. Richeson's monograph on *Euler's Gem* (2008).
[9] This volume formula for the tetrahedron – implying one for more general polyhedra – was also stated and proved in E. 231.
It is, however, already implicitly contained in a manuscript by the Italian Renaissance artist and geometer Piero della Francesca. In his treatise *Libellus de quinque corporibus regularibus* from ca. 1480, which was first edited from the only extant manuscript by G. Mancini in 1916 (after being plagiarised by Luca Pacioli), Piero gives, as *Casus* XI of the *Tractatus Secundus*, complete and entirely correct instructions – in the form of a "general example" – for calculating the altitude of an general tetrahedron: "The axis AG of a triangular tetrahedron $ABCD$ is to be sought where AB is 20, AC 18, AD 16, BD 15, BC 14, CD 13." ("Quadribasis triangularis $ABCD$ cuius AB est 20, AC 18, AD 16, BD 15, BC 14, CD 13, perquirendus est axis AG."); the result is: "... $240\frac{271215}{1382976}$ is left, and the root of this is the axis [i. e., the altitude] AG." ("... relinquitur $240\frac{271215}{1382976}$ cuius radix est axis AG.": quoted from the 1995 facsimile edition, vol. I, p. 66–67). As M.A. Peterson has shown in 1997, Piero's procedure is fully equivalent to Euler's formula (which Peterson ignores, by the way, attributing the rediscovery to Staudt, Cayley and Sylvester).

150

Goldbach to Euler

[Petersburg], June 4th / 15th, 1751

Sir,

I am very much obliged to you for the beautiful theorems about the properties of bodies that are enclosed by plane surfaces, which you communicated to me; however, I regret that the attention required from me for such speculations is – against my will – ever more fading away, by a progression that strongly converges to nothing. The only exception is that I sometimes think of Fermat's theorem, of which I have unexpectedly noticed the following cases where four squares increased by 8 are equal to four squares: Let α, β, γ, δ be four whole numbers – in any order and positive or negative; then $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8$ will equal four squares whenever either $\delta = 7+\alpha+\beta+\gamma$ or $= 2+\alpha+\beta+\gamma$ or $= 2\beta+2\gamma+3$ or $= \dfrac{2\alpha+2\beta+\gamma}{3}$ (if this number is an integer) or $= 3\alpha+2\beta+2\gamma$ or $= \alpha$ or $3\gamma+8$; in all these cases the four squares can be indicated very easily. This is also true if

$$\delta = \frac{\left(3q^2+1\right)\gamma - 2q\,(q+1)\,(\alpha+\beta+\gamma)}{3q^2-2q-1},$$

and this is an integer, $2q$ being another arbitrary whole number.[1]

The small mistake in Mr. Spener's bill has been completely corrected a long time ago, although I had not demanded it;[2] however I should be very glad if I could again receive in the usual way, by your intermediary, the books noted on the enclosed piece of paper.[3]

Some time ago I read in the journals that Mr. Philidor had taught the greatest chess players at Berlin to fear him; this makes me suspect he may also be known to you, Sir.[4]

Please make my compliments to your wife and to my godson as well; I remain very respectfully, Sir, your most obedient servant Goldbach.

June $\dfrac{\text{4th}}{\text{15th}}$, 1751.

[1] Here Euler noted in the margin, preparing his reply in nº 151:

$$\delta = k\alpha+m\beta+n\gamma+(kk+mm+nn)\,x-\frac{1}{2}x+\frac{4}{x}$$
$$\delta = k\alpha+m\beta+n\gamma-\frac{1}{2}x\,(kk+mm+nn+1)\,x+\frac{4}{x}$$

[2] So this "affair" which occupied both correspondents for more than a year (it was first mentioned in March 1750 – cf. nº 143, notes 1 and 2) is finally settled.

[3] This order list has not been preserved.

[4] Goldbach almost literally quotes the report in the *Berlinische Privilegirte Zeitung* for April 9th, 1750, according to which Philidor had "made the greatest heroes at that game fearful of him" ("sich bey den größten Helden in diesem Spiel bereits sehr furchtbar gemacht"). Euler, however, had not encountered Philidor in person: see his reply nº 151, note 5.

151

Euler to Goldbach

Berlin, July 3rd, 1751

Sir,

the joy with which your most honoured letter affected me was all the greater since I had waited for it a long time with fierce longing; in the meantime, to my greatest satisfaction some opportunities presented themselves from time to time to enquire after your well-being, Sir. In the same vein, I most humbly congratulate you on the splendid house which you bought some time ago, cordially wishing that you may always enjoy in this dwelling both perfect health and complete satisfaction.[1]

Some days ago, by chance I met here an good old friend of yours, Sir. This was Privy Councillor of Finance Deutsch, who meticulously enquired after all your circumstances, showed his very special satisfaction with your well-being and also instructed me to convey his most devoted compliment to you at the first opportunity.[2]

The requested books have already been ordered at Spener's bookstore; as soon as they are all collected and bound, they will be sent to you, Sir.[3]

I regret from all my heart that your interest in mathematical speculations is beginning to fall off; no doubt the lack of familiar conversation about this kind of investigation plays an important part in this. In fact, the observations about Fermat's theorem which you kindly communicated to me show no lessening at all in your powers to reflect on such topics. They gave me occasion to generalise this specification and to determine the value of δ in such a way that $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+e$ becomes a sum of four squares.[4] By supposing

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+e=(\alpha-kx)^2+(\beta-mx)^2+(\gamma-nx)^2+(\delta+x)^2,$$

I get

$$\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma-\frac{1}{2}x\left(k^2+m^2+n^2+1\right)+\frac{e}{2x}.$$

Now, in order for this formula to consist of whole numbers, I set

$$e\left(k^2+m^2+n^2+1\right)=ab,$$

resolving $e\left(k^2+m^2+n^2+1\right)$ into two factors which are either both even or both odd; then $\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma+\dfrac{a-b}{2}$ and $x=\dfrac{e}{a}$.

If now, as you [assume], Sir, $e=8$, the four squares whose sum equals $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8$ can be indicated in general by setting $\delta=k\alpha+m\beta+n\gamma+f$ and assuming f in such a way that $f=c-d$ where $2\left(k^2+m^2+n^2+1\right)=cd$, and then one has $x=\dfrac{4}{c}$ or $x=-\dfrac{4}{d}$.

Now numbers for k, m and n can be assumed at will, since always one, two or more suitable values for f result. Indeed, for

$$k = 1,\ m = 0,\ n = 0, \text{ one has } cd = 4 \text{ and } f = 0 \text{ or } f = 3;\ \delta = \alpha + \begin{cases} 0^* \\ 3 \end{cases}$$

$$k = 2,\ m = 0,\ n = 0, \text{ then } cd = 10 \text{ and } f = 3 \text{ or } f = 9;\ \delta = 2\alpha + \begin{cases} 3 \\ 9 \end{cases}$$

$$k = 3,\ m = 0,\ n = 0, \text{ then } cd = 20 \text{ and } f = 1,\ f = 8,\ f = 19;\ \delta = 3\alpha + \begin{cases} 1 \\ 8^* \\ 19 \end{cases}$$

$$k = 1,\ m = 1,\ n = 0;\ cd = 6,\ f = 1,\ f = 5, \text{ i.e., } \delta = \alpha + \beta + \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$

$$k = 2,\ m = 1,\ n = 0;\ cd = 12,\ f = 1,\ f = 4,\ f = 11;\ \ldots\ \delta = 2\alpha + \beta + \begin{cases} 1 \\ 4 \\ 11 \end{cases}$$

$$k = 2,\ m = 2,\ n = 0;\ cd = 18;\ f = 3,\ 7,\ 17;\ \ldots\ \delta = 2\alpha + 2\beta + \begin{cases} 3^* \\ 7 \\ 17 \end{cases}$$

$$k = 3,\ m = 1,\ n = 0;\ cd = 22,\ f = 9,\ 21,\ \ldots\ \delta = 3\alpha + \beta + \begin{cases} 9 \\ 21 \end{cases}$$

$$k = 3,\ m = 2,\ n = 0;\ cd = 28,\ f = 3,\ 12,\ 27,\ \ldots\ \delta = 3\alpha + 2\beta + \begin{cases} 3 \\ 12 \\ 27 \end{cases}$$

$$k = 3,\ m = 3,\ n = 0;\ cd = 38,\ f = 17,\ 37,\ \ldots\ \delta = 3\alpha + 3\beta + \begin{cases} 17 \\ 37 \end{cases}$$

$$k = 1,\ m = 1,\ n = 1;\ cd = 8,\ f = 2,\ 7,\ \ldots\ \delta = \alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 2^* \\ 7^* \end{cases}$$

$$k = 2,\ m = 1,\ n = 1;\ cd = 14,\ f = 5,\ 13,\ \ldots\ \delta = 2\alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 5 \\ 13 \end{cases}$$

$$k = 2,\ m = 2,\ n = 1;\ cd = 20,\ f = 1,\ 8,\ 19,\ \ldots\ \delta = 2\alpha + 2\beta + \gamma + \begin{cases} 1 \\ 8 \\ 19 \end{cases}$$

$$k = 2,\ m = 2,\ n = 2;\ cd = 26,\ f = 11,\ 25,\ \ldots\ \delta = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + \begin{cases} 11 \\ 25 \end{cases}$$

$$k = 3,\ m = 1,\ n = 1;\ cd = 24,\ f = 2,\ 5,\ 10,\ 23,\ \ldots\ \delta = 3\alpha + \beta + \gamma + \begin{cases} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 23 \end{cases}$$

$$k = 3,\ m = 2,\ n = 1;\ cd = 30,\ f = 1,\ 7,\ 13,\ 29,\ \ldots\ \delta = 3\alpha + 2\beta + \gamma + \begin{cases} 1 \\ 7 \\ 13 \\ 29 \end{cases}$$

$$k = 3,\ m = 2,\ n = 2;\ cd = 36,\ f = 0, 5, 9, 16, 35 \ldots\ \delta = 3\alpha + 2\beta + 2\gamma + \begin{cases} 0^* \\ 5 \\ 9 \\ 16 \\ 35 \end{cases}$$

here I marked the formulae communicated by you with an asterisk. One can also assume f arbitrarily and then determine k, m and n from it; for example, if f is to be 0 or $\delta = k\alpha + m\beta + n\gamma$, one has $c = d$, and therefore cd is a square. Let this be $= 4p^2$, then $k^2 + m^2 + n^2 = 2p^2 - 1$. Here it is evident that when p is an even number, $2p^2 - 1$ cannot possibly be the sum of three squares, so only odd numbers must be substituted for p; then the following values for k, m, n result:

$2p^2 - 1 = 1$	17	49	97	161	241	337
$k = 1$	4; 3	7; 6	9; 6	12; 11; 10; 9	15; 14; 13; 12	18; 16; 12
$m = 0$	1; 2	0; 3	4; 6	4; 6; 6; 8	4; 6; 6; 9	3; 9; 12
$n = 0$	0; 2	0; 2	0; 5	1; 2; 5; 4	0; 3; 6; 4	2; 0; 7

Since in this way for given α, β, γ infinitely many different values for δ can be found by assuming either f or k, m, n at will, and since the numbers k, m, n and f can also be taken to be negative, it should now remain to be proved that in this way all possible numbers for δ result; from this one should arrive at a very nice proof of Fermat's theorem, which should certainly lead to other important discoveries.

I have not seen the great chess player Philidor, as he stayed for the most part at Potsdam. He is said to be still a very young man, but he was accompanied by a mistress for whose sake he got into trouble with some officers at Potsdam, which obliged him to depart unexpectedly; else I should probably have found an opportunity to play with him. However, he published in England a book about chess, which I have got, and in which there are contained some manners of playing that are really very nice. His greatest strength consists in defence and good control of his pawns to change them into queens; once this has been prepared, he takes piece by piece in order to reach his goal and thus win the game.[5]

All my family asks to be most obediently recommended to you, Sir; but our Albrecht in particular is most deeply moved by your gracious remembrance and is asking me to convey his humble gratitude. For some time now he has been bothered by a fever, of which almost no house here is free; however we hope this will be of no consequence. Since winter I have kept him at home, where he is exercising himself in mathematics with great zeal; and after dealing with the principal topics in finite and infinite Analysis, I am now occupied with him on their application to Mechanics. At the same time, he is continuing mainly with Latin and also Greek, besides some other studies for which a foundation has been laid at school.

For some time now I have again struggled with Jupiter and Saturn and discovered several facts about them which paved the way for a better understanding of their motion. As this is again the prize question of the Paris Academy for next year, I sent another treatise on this topic there.[6]

With this I most obediently recommend myself to your constant affection and goodwill; I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, July 3rd, 1751.

[1] There is no mention of Goldbach's health and his move to a new house in the extant letters Schumacher – then Euler's main correspondent in Russia – sent him in 1750/51. However, another possible source of information is the Russian ambassador at Berlin, H.G. Groß, who had negotiated with Euler, on President Razumovskiĭ's behalf, during the winter about a possible return to Petersburg.

[2] See n° 152, note 2.

[3] Cf. n° 150, note 3.

[4] Goldbach and Euler are still trying to verify (parts of) Fermat's Four Squares Theorem using induction. This approach using formulae of the type " four squares + something = four squares " is discussed in many of the following letters.

[5] Cf. n° 150, note 4.
According to the sources quoted in Susanna Poldauf's biographical study (2001), Philidor had defeated three of Frederick's noble generals in a simultaneous blindfold match. The king himself shunned a foreseeable defeat, but at Potsdam a game in his presence was arranged, pitching another officer from his suite and "a certain jew" – presumably the strongest players they could muster – against the (unofficial) "world champion". (As argued above in n° 80, note 26, the Jewish player – almost certainly A.S. Gumpertz – was probably Euler's habitual chess partner.) Among Philidor's other opponents, the Crown Prince's tutor Béguelin is also named.
There is no independent record of Euler's anecdote that Philidor had to leave hastily because of a quarrel over a woman, but the reputation of the 23-year-old bachelor virtuoso certainly does not render this unlikely.
Philidor's book *L'Analyze des Echecs* had appeared in London in 1749; a German translation was announced for subscription in the *Berliner Privilegirte Zeitung* for April 9th, 1750, but seems to have been published only four years later at Strasbourg.

[6] About Euler's first prize paper on the theory of Jupiter and Saturn, E. 120, which had won the 1748 award, see *supra* n° 110, note 5, and n° 117, note 3. The second one, E. 384, had been prepared for the 1750 competition (see n° 141, note 3), which had, however, been prorogued again. Finally Euler received a double prize for it (see n° 158, note 11).

152
Goldbach to Euler
Petersburg, July (6th) 17th, 1751

Sir,

I have correctly received your two letters from July 3rd and 6th; I reserve my reply to the former, which pleased me very much, whereas the enclosed piece of paper shall serve as an answer to the latter.[1] For now, I just want to remark in a few words that in the equation where

$$3^2 + 5^2 + u^2 + 8 = u^2 + 42$$

is to equal three squares, u can be determined in infinite times infinitely many ways, one instance being

$$3^2+5^2+\left(4p^2-10p+7\right)^2+8=\left(4p^2-10p+3\right)^2+(4p-9)^2+(4p-1)^2\,;$$

on the other hand, I do myself not understand any more what I said in my last letter about the value δ expressed by α, β, γ, and q, and am in doubt whether it was correct; however, it is certain that

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\varepsilon^2+8=3^2+(1-\alpha+\beta)^2+(1-\alpha+\gamma)^2+\frac{(2\varepsilon q+\alpha-1)^2}{q^2}$$

if q is determined by the equation

$$\frac{\left(3q^2+1\right)}{2q}\,(1-\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)\;q=2\varepsilon.$$

Privy Councillor Deutsch is indeed one of my oldest friends; I shall always remember with great pleasure the courtesy with which he received me in Berlin both in 1718 and in 1724.[2] Please assure him, when the opportunity arises, of my perfect respect and devotion; by the same token, I remain with constant regard, Sir, your most humble servant Goldbach.

St. Petersburg, July 17th, 1751.

[1] Neither Euler's – apparently urgent – letter from July 6th nor the enclosure with Goldbach's reply have been preserved.

[2] Cf. nº 151, note 2.
Jacob Friedrich Deutsch (also a Königsberg professor's son) had studied law at Königsberg University at the same time as Goldbach; later he entered the Prussian civil service at Berlin. Goldbach had apparently kept company with this colleague from his hometown on the two occasions when he stayed in Berlin on his travels.

153
Goldbach to Euler
Petersburg, (July 23rd) August 3rd, 1751

Sir,

I send you my due thanks: (1.) for your kind congratulation on my new dwelling, (2.) for again procuring some books that I requested, (3.) for your news on the fortunate progress of Master *Johann Albert*, to whom I cordially wish a constant and perfect health, and (4.) for the communication of the many cases of

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=a^2+b^2+c^2+d^2.^{[1]}$$

It is indeed true, as you suspected, Sir, that except for yourself I do not have anybody with whom I could discuss such discoveries personally or in writing. I think the matter can be stated somewhat more briefly by assuming only three indeterminate quantities and setting

$$\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8=b^2+c^2+d^2,$$

for it is certain that if b is known in one case, then it can also be indicated in infinitely many others, as I pointed out in my last letter (where, however, $2p$ was needlessly written instead of p), since it can easily be proved that then one shall also have

$$\beta^2+\gamma^2+(\delta+pu)^2+8=(b+pu)^2+(c+2u)^2+(d+2u)^2\,,$$

defining $u=(\delta-b)\,p-(c+d)$.[2] I am quite aware that u can also be determined in innumerably many other ways, but I am a great lover of formulae that are succinct by themselves and can easily be made ever more general; for if one here has, e. g., $\delta+pu=\Delta$, $b+pu=B$, $c+2u=C$, $d+2u=D$, the infinitely more general equation

$$\beta^2+\gamma^2+(\Delta+PU)^2+8=(B+PU)^2+(C+2U)^2+(D+2U)^2$$

arises from it, where P denotes an arbitrary whole number and U is defined to equal

$$(\Delta-B)\,P-(C+D)\,.$$

It also follows from Fermat's theorem that $8n+4$ can always be split up into four odd squares the sum of whose roots equals 2, but not always into four odd squares the sum of whose roots equals 0.

Furthermore it is also true that a sum of four squares the sum of whose roots equals 0 can be resolved into three squares, too; but whether five squares the sum of whose roots equals 0 can always be resolved into four squares that can be indicated, I do not yet know; however, there are infinitely many cases where this is possible even if the sum of the roots does not equal 0; thus for example one has

$$\left(\left(2+p^2\right)b-c-d-e\right)^2+(c-2b)^2+(d-2b)^2+(e-2b)^2+4p^2b^2$$

which equals the four squares

$$\left(\left(4+p^2\right)b-c-d-e\right)^2+c^2+d^2+e^2.$$

Next, I ask you, Sir, to be so kind as to forward the enclosed list to Mr. Spener, so the books noted on it can be either added to the former lot or, if this should already have been dispatched, sent to me at another opportunity.[3] I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Aug. 3rd, 1751.

[1] Cf. nº 151, in particular note 4.
[2] This formula and the one for U that follows are not quite correct: they should be $u=\frac{1}{4}(\delta-b)\,p-\frac{1}{2}(c+d)$ and $\frac{1}{4}(\Delta-B)\,P-\frac{1}{2}(C+D)$, respectively.
[3] This order list has not been preserved. Cf. Euler's reply nº 154, note 1.

154

Euler to Goldbach

Berlin, September 4th, 1751

Sir,

I hear from Mr. Spener that the books which you requested shall be presently dispatched;[1] I wanted to wait for this news before replying to your two most honoured letters.

Meanwhile – however great the pleasure may be which I find in contemplating the properties of numbers – when I have spent some time on other investigations, this subject becomes so strange to me that I cannot again find my way in it so quickly. For this reason I could not at once understand the foundation of the beautiful theorem which you report, Sir, that a sum of four squares $a^2+b^2+c^2+d^2$, the sum of whose roots, $a+b+c+d$, equals 0, can always be resolved into three squares, though it is rather obvious, since

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 = (a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2 .$$

However it cannot be demonstrated in the same manner that a sum of five squares $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ can be resolved into four squares whenever the sum of the roots, $a+b+c+d+e$, equals 0. However, it is evident by the above that this resolution is possible whenever the five roots a, b, c, d, e are such that four of them added together yield zero, which can happen in so many ways – since it is allowed to take each root either to be positive or negative – that it should be hard to indicate five numbers in such a way that no four of them added together can be made to yield 0.

Stated otherwise, the sum of five squares $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ can be resolved into four squares in the following cases:

$$\begin{aligned}
&a\,..\,b\,..\,c\,..\,d = 0\\
&a\,..\,b\,..\,c\,..\,e = 0\\
&a\,..\,b\,..\,d\,..\,e = 0\\
&a\,..\,c\,..\,d\,..\,e = 0\\
&b\,..\,c\,..\,d\,..\,e = 0
\end{aligned}$$

where the sign .. has been used instead of $\pm$. Therefore each of these five equations comprises eight, and consequently forty are contained in it. Thus if the roots a, b, c, d, e are all taken to be positive, and among these forty formulae just one is contained which equals 0, then one can safely conclude that the sum of five squares $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ can be transformed into a sum of four squares.

Now all of this follows from the single theorem that $a^2+b^2+c^2+d^2 = \Box+\Box+\Box$ whenever $a+b+c+d=0$. Since a sum of four squares can, on the other hand, also be resolved into three squares in infinitely many other cases, it is possible to indicate infinitely many other conditions under which a sum of five squares can be resolved into four squares.

Whenever the four squares $a^2+b^2+c^2+d^2$ are such that $a+b+c+d=2$, one has

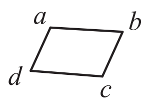
$$a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b-1)^2+(a+c-1)^2+(b+c-1)^2+1;$$

therefore $a^2+b^2+c^2+d^2-1$ is resolvable into three squares. Now since $8n+3$ is resolvable into three squares by setting

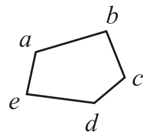
$$8n+3=(a+b-1)^2+(a+c-1)^2+(b+c-1)^2\,,$$

$8n+4$ equals $a^2+b^2+c^2+d^2$ in such a way that $a+b+c+d=2$; and this is the beautiful theorem that you deduced from Fermat's theorem, Sir.

Recently a consideration occurred to me which appeared more than a little curious to me. This concerns the number of ways in which a given polygon can be cut up into triangles by diagonal lines.



Thus a quadrilateral can be cut up into two triangles either by the diagonal ac or by bd, consequently in two different manners.



A pentagon is divided into three triangles by two diagonals, and this can be done in five different manners, namely by the diagonals

$$\text{I. } \begin{matrix} ac \\ ad \end{matrix}\,;\ \text{II. } \begin{matrix} bd \\ be \end{matrix}\,;\ \text{III. } \begin{matrix} ca \\ ce \end{matrix}\,;\ \text{IV. } \begin{matrix} db \\ da \end{matrix}\,;\ \text{V. } \begin{matrix} ec \\ eb \end{matrix}\,.$$

Further, a hexagon is divided into four triangles by three diagonals, and this can happen in 14 different manners.

Now the general question is: as a polygon of n sides is cut up into $n-2$ triangles by $n-3$ diagonals, in how many different manners can this be done? Defining x to be the number of these different manners, I found by induction:[2]

if	$n=$	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
then one has	$x=$	1,	2,	5,	14,	42,	132,	429,	1430.

From this I drew the conclusion that, in general,

$$x=\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdot 18\cdot 22\cdots(4n-10)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdots(n-1)}.$$

Indeed, $1 = \frac{2}{2}$, $2 = 1 \cdot \frac{6}{3}$, $5 = 2 \cdot \frac{10}{4}$, $14 = 5 \cdot \frac{14}{5}$, $42 = 14 \cdot \frac{18}{6}$, $132 = 42 \cdot \frac{22}{7}$, so from any number the next one is easily determined. Although the induction which I used was rather cumbersome, I do not doubt it ought to be possible to develop the matter in a much simpler way. Regarding the sequence of numbers 1, 2, 5, 14, 42, 132, ... I also noted its property that

$$1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 + 132a^5 + \ldots = \frac{1 - 2a - \sqrt{1-4a}}{2a^2}.$$

Thus, for $a = \frac{1}{4}$, one has

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{5}{4^2} + \frac{14}{4^3} + \frac{42}{4^4} + \ldots = 4.$$

All my family asks to be most obediently recommended to your constant goodwill, and I have the honour to remain for all my life with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Sept. 4th, 1751.

[1] Cf. nº 150, note 3, and nº 153, note 3.

[2] This seems to be the first appearance of the combinatorial problem of dissecting a polygon into triangles by diagonals and of the sequence that later became known as the "Catalan numbers". In late 1753 or 1754 Euler also communicated the question to J.A. von Segner (cf. Segner's letters R 2456 and 2457), who attempted a solution in t. VII of the Petersburg Academy's *Novi Commentarii* for 1758/59 (printed in 1761 with a critical "summary" by Euler which is listed by Eneström with the index number E. 265*). In t. X of the same journal (printed in 1766), S.K. Kotel'nikov, who had been Euler's student at Berlin from 1752 to 1756, again tried to deduce the general expression given by Euler in the present letter.
In the 1830s, Liouville proposed as a problem to examine whether Euler's line of reasoning and the resulting formula were correct; solutions by Lamé, Rodrigues, Binet and Catalan were published in his *Journal de mathématiques pures et appliquées* in 1838/39, and in 1901 the latter's name was attached to the resulting series in a textbook of combinatorics by Eugen Netto.

155
Goldbach to Euler
Petersburg, October (5th) 16th, 1751

Sir,

I was pleased to understand from your kind letter dated September 4th the easy law of progression of $1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + \ldots$.[1] If I had been given the task of determining the unknown coefficients b, c, d, ... in the series

$$A: \quad 1 + ba + ca^2 + da^3 + ea^4 + \ldots = \frac{1 - 2a - \sqrt{1-4a}}{2a^2},$$

I should hardly have undertaken the solution; but as I had already seen these coefficients expressed, I found two methods of solution:

(1.) Since by the summation $\dfrac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2a^2} = A$ it follows that $1+aA = A^{\frac{1}{2}}$ or that

$$B\colon\quad 1 + a + ba^2 + ca^3 + da^4 + \dots$$

multiplied by itself must equal A, one has

$$\begin{aligned} B^2 &= \left\{\begin{array}{llllll} 1 & +a & +ba^2 & +ca^3 & +da^4 & \dots \\ . & a & +a^2 & +ba^3 & +ca^4 & \dots \\ . & . & ba^2 & +ba^3 & +b^2a^4 & \dots \\ . & . & . & +ca^3 & +ca^4 & \dots \\ . & . & . & . & +da^4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \end{array}\right. \\ &= A\colon\quad 1 + 2a + 5a^2 + 14a^3 + 42a^4 \ \dots, \end{aligned}$$

which yields $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$, etc.

(2.) If in series A one substitutes $a = \alpha - \alpha^2$, then the sum of the series becomes

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2} = E\colon\quad 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + \dots,$$

and series A is transformed into[2]

$$\begin{array}{llllll} 1 & & & & & \\ . & +b\alpha & -b\alpha^2 & & & \\ . & . & +c\alpha^2 & -2c\alpha^3 & +c\alpha^4 & \\ . & . & . & +d\alpha^3 & -3d\alpha^4 & \\ . & . & . & . & +e\alpha^4 & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots \\ \multicolumn{6}{l}{= E\colon\quad 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4 \ \dots} \end{array}$$

Comparing the single terms of the transformed series A with those of series E, one gets $b = 2$, $c = 5$, $d = 14$, etc.

In my letter from June 15th, in discussing the equality of

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8$$

with four squares, I had also mentioned, among others, the case where $\delta = \dfrac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}$ is a whole number.[3] In your answer you silently passed over this case; however, in this case the four squares to be found are[4]

$$\frac{(2\alpha + 2\beta - \gamma + 6)^2}{3^2} + \frac{(2\alpha + 2\beta - \gamma - 6)^2}{3^2} + \frac{(-\alpha + 2\beta + 2\gamma)^2}{3^2} + \frac{(2\alpha - \beta + 2\gamma)^2}{3^2},$$

and the value of δ can be assumed still more general by requiring both

$$\delta = \frac{\alpha - 2q^2\beta - 2q\gamma}{1 + 2q^2}$$

and

$$\varepsilon = \frac{-2q\alpha - 2q\beta + \left(2q^2 - 1\right)\gamma}{1 + 2q^2}$$

to be whole numbers; then

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta - \alpha + \beta)^2 + \varepsilon^2 .$$

It follows from this that for any case $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8$, four integer squares can be indicated if $\gamma^2 + 2(\beta + \delta)(\alpha - \delta)$ is a square number, where α, β, ... are numbers taken in any order, both positive or negative.

Similarly, equating three odd squares $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ to $8n + 3$ and defining $\delta = u^2 - u - 4n - 1$ where u is any integer, one will have

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 4\delta^2 + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta - u)^2 + (\delta + u - 1)^2 .$$

Among the problems for whose solution a sure method is lacking, I count the following: Determine the number e by f and some constants in such a way that $2e^2 - f^2 + 2$ yields a square. *Solution*: Set $e = 13^2 f \pm 239$.[5]

From Mr. Spener I got the news that the books have already been dispatched from Berlin, which is very welcome to me;[6] for the rest, I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Oct. 16th (n. st.), 1751.

[1] Cf. n° 154, note 2.

[2] On the sign that has been rendered by $\mathbin{:\!\!+\!\!:}$ in the original text of the formula that follows, cf. Section 3.3.3 of the Introduction, note 21.

[3] Cf. n° 150, note 1.

[4] Goldbach thus proposes the following identity as an inductive step towards the Four Squares Theorem (cf. n° 151, note 4):

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \left(\frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}\right)^2 + 8 =$$
$$\left(\frac{2\alpha + 2\beta - \gamma + 6}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha + 2\beta - \gamma - 6}{3}\right)^2 + \left(\frac{-\alpha + 2\beta + 2\gamma}{3}\right)^2 + \left(\frac{-2\alpha - \beta + 2\gamma}{3}\right)^2 .$$

In the lower margin of fol. 149v, Euler noted: "Diese *Quadrata* sind auch

$$\left(\alpha - \frac{16}{9}\right)^2 + \left(\beta - \frac{16}{9}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(\delta + \frac{8}{3}\right)^2 \text{"}.$$

This is one of the rare calculating mistakes that Euler did not pursue further: the formula should actually read

$$\left(\alpha - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\beta - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\gamma + \frac{2}{3}\right)^2 + (\delta + 2)^2 .$$

[5] Here Euler noted between the lines and in the lower margin of fol. 150r, preparing his reply (see n° 156, note 4):

$$\begin{aligned} e &= f+1+\frac{2mn(f+2)-4nn(f+1)}{2nn-mm} \\ e &= \frac{2mn(f+2)-(mm+2nn)(f+1)}{2nn-mm} \\ e &= \frac{(mm-2mn+2nn)f+(mm-4mn+2nn)}{2nn-mm}. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} e = f \pm 1 & e = 29f \pm 41 \\ e = 5f \pm 7 & e = 169f \pm 239. \end{array}$$

In his reply, Euler solves the Diophantine equation $2e^2 - f^2 + 2 = d^2$ proposed by Goldbach: his formulae give a rational parametrisation of the quadric $d^2 - 2e^2 + f^2 = 2$, which can be easily derived using lines through the known point $(d, e, f) = (1, 0, 1)$. Euler then observes that the solutions become integers by making the denominator of e a unit, which requires solving the "Pell equations" $2n^2 - m^2 = \pm 1$. Goldbach's solution corresponds to the values $(m, n) = (239, 169)$ which come from $(1 + \sqrt{2})^7 = 239 + 169\sqrt{2}$, the 7th power of the fundamental solution. Goldbach had already implicitly mentioned this solution in n° 118 by stating that $2(A^2)^2 - 1$ is a square for $A = 13$.

[6] Cf. n° 154, note 1.

156
Euler to Goldbach
Berlin, December 4th, 1751

Sir,

your difficulty with regard to the development of the formula $\dfrac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2a^2}$ is immediately removed by developing the formula $\sqrt{1-4a} = (1-4a)^{\frac{1}{2}}$ into a series in the usual way. Indeed,

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4a} \;\; = \;\; & 1 - \frac{1}{2}\cdot 4a - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\cdot 4^2a^2 - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot 4^3a^3 - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot 4^4a^4 \\ & - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot 4^5a^5 \; - \dots \end{aligned}$$

or, indicating by P in each instance the numerical coefficient of the preceding term, including the power of 4,

$$\sqrt{1-4a} = 1 - 2a - \frac{4}{4}Pa^2 - \frac{12}{6}Pa^3 - \frac{20}{8}Pa^4 - \frac{28}{10}Pa^5 - \dots$$

or

$$\sqrt{1-4a} = 1 - 2a - \frac{2}{2}Pa^2 - \frac{6}{3}Pa^3 - \frac{10}{4}Pa^4 - \frac{14}{5}Pa^5 - \dots,$$

consequently

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4a} &= 1-2a-2\cdot\frac{2}{2}a^2-2\cdot\frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}a^3-2\cdot\frac{2\cdot 6\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}a^4\\ &\quad -2\cdot\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^5-\ldots\end{aligned}$$

One therefore gets

$$\frac{1-2a-\sqrt{1-4a}}{2a^2}=\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 6}{2\cdot 3}a+\frac{2\cdot 6\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4}a^2+\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^3+\ldots,$$

where it is remarkable that all these coefficients yield whole numbers, which can give occasion for particular considerations.

In the same way, $\sqrt[3]{1-9a}$ also yields a series whose coefficients are all whole numbers, namely

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1-9a} &= 1-3a-3\cdot\frac{6}{2}a^2-3\cdot\frac{6\cdot 15}{2\cdot 3}a^3-3\cdot\frac{6\cdot 15\cdot 24}{2\cdot 3\cdot 4}a^4\\ &\quad -3\cdot\frac{6\cdot 15\cdot 24\cdot 33}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^5-\ldots,\end{aligned}$$

and in general the following formula results:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1-n^2a} &= 1-na-n\,\frac{\left(n^2-n\right)}{2}a^2-n\frac{\left(n^2-n\right)\left(2n^2-n\right)}{2\cdot 3}a^3\\ &\quad -n\frac{\left(n^2-n\right)\left(2n^2-n\right)\left(3n^2-n\right)}{2\cdot 3\cdot 4}a^4-\ldots\end{aligned}$$

Your case where $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+8$ equals four squares, namely[1] $\delta=\dfrac{2\alpha+2\beta-\gamma}{3}$, indeed possesses a particular feature that I did not immediately notice, and I still do not see in what manner it is contained in the cases which I cited. By now I understand at least that it results by assuming two of the four requested squares to be of the form $(\delta+2)^2+(\delta-2)^2$, since then it remains to split up $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\delta^2$ into two squares: if these are set to be $(\delta+p)^2+(\delta+q)^2$, one has

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3\delta^2+2\,(p+q)\,\delta+p^2+q^2$$

and

$$3\delta+p+q=\sqrt{3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2-2p^2-2q^2+2pq}.$$

Letting now further $p=\gamma+m$, $q=\gamma+n$, one has

$$3\delta+2\gamma+m+n=\sqrt{\gamma^2-2\,(m+n)\,\gamma+3\alpha^2+3\beta^2-2m^2-2n^2+2mn}.$$

In order for this radical to equal

$$\sqrt{\gamma^2-2\,(m+n)\,\gamma+(m+n)^2},$$

or for $3\alpha^2 + 3\beta^2 = 3m^2 + 3n^2$, one can just set $m = \alpha$ and $n = \beta$ to get

$$3\delta + 2\gamma + \alpha + \beta = \pm\,(\gamma - \alpha - \beta)$$

or[2]

$$\delta = -\,\frac{2\alpha + 2\beta - \gamma}{3}\,.$$

If, in order to render the matter more general, two of the four requested squares are assumed to be

$$(q\delta + 2)^2 + (q\delta - 2)^2 = 2q^2\delta^2 + 8,$$

then necessarily $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \left(2q^2 - 1\right)\delta^2$ must equal two squares, say $(\delta + f)^2 + (\delta + g)^2$, i. e.,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \left(2q^2 + 1\right)\delta^2 + 2\,(f + g)\,\delta + f^2 + g^2$$

or

$$\left(2q^2 + 1\right)\delta + f + g = \sqrt{2fg - 2q^2\,(f^2 + g^2) + (2q^2 + 1)\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}.$$

Letting now further $f = \dfrac{q\gamma + m}{2q - 1}$ and $g = \dfrac{q\gamma + n}{2q - 1}$, an involved formula results, which I do not think worth the trouble to elaborate, since I now see that your other formulae, Sir, do not arise from it. However it seems that an infinity of operations of that kind can be performed, which give rise to ever different formulae; an infinity of relations between the letters α, β, γ, δ can therefore be indicated so that $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8$ can be resolved into four squares. In fact, since this is true without any restrictions, I do not see what this kind of determination can contribute to the proof that is sought.

I proved with the utmost rigour that, N being a whole number, one always necessarily has $N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$, where, however, A, B, C, D indicate both fractional numbers or integers. Thus it should just be left to prove that, whenever four fractional squares have an integral sum, the same sum must necessarily also be decomposable into four (or fewer) integer squares. Now I can indeed prove that, whenever $\dfrac{p^2}{q^2} + \dfrac{r^2}{s^2}$ equals a whole number N, then also $N = a^2 + b^2$ in whole numbers; but I cannot execute that other proof in the same way.[3]

If $2e^2 - f^2 + 2$ is to be a square and e is sought without paying attention to whether e becomes a fractional number or an integer, I found the general solution[4]

$$e = \frac{\left(m^2 - 2mn + 2n^2\right)f + m^2 - 4mn + 2n^2}{2n^2 - m^2},$$

where one can assume arbitrary numbers for m and n. However, if one just wants to have those integral values for e that make $2e^2 - f^2 + 2$ a square, the following formulae, continued to infinity, will serve:

$$\begin{array}{lrr} e = & f\pm & 1 \\ e = & 5f\pm & 7 \\ e = & 29f\pm & 41 \\ e = & 169f\pm & 239 \\ e = & 985f\pm & 1393 \\ e = & 5741f\pm & 8119 \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

The law of progression is such that, two immediately subsequent formulae of this kind being $e = Mf \pm m$, $e = Nf \pm n$, the one following them must be $e = (6N - M)\, f \pm (6n - m)$. Meanwhile one can also express all these formulae by a single general formula: Let q be any odd number, then I say that one will have

$$e = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^q + \left(\sqrt{2}-1\right)^q}{2\sqrt{2}}\, f \pm \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^q - \left(\sqrt{2}-1\right)^q}{2},$$

and it is also certain that all cases in which e can be expressed by whole numbers are contained in these formulae.[5] In the same manner, if

$$\left(b^2 \pm 1\right) e^2 \mp 4a^2 f^2 \pm 4c^2 \left(b^2 \pm 1\right)$$

is to be a square, then

$$e = \frac{\left(\sqrt{b^2 \pm 1} + b\right)^q + \left(\sqrt{b^2 \pm 1} - b\right)^q}{\sqrt{b^2 \pm 1}}\, af \pm \left(\left(\sqrt{b^2 \pm 1} + b\right)^q - \left(\sqrt{b^2 \pm 1} - b\right)^q\right) c;$$

thus in the case where $3e^2 + f^2 - 3$ equals a square,

$$e = \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^q + \left(\sqrt{3}-2\right)^q}{2\sqrt{3}}\, f \pm \frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^q - \left(\sqrt{3}-2\right)^q}{2}.$$

Besides most obediently recommending my family, I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Dec. 4th, 1751.

[1] Cf. nº 155, note 3.

[2] The equation with the plus sign, $3\delta + 2\gamma + \alpha + \beta = \gamma - \alpha - \beta$, leads to $\delta = -\dfrac{2\alpha + 2\beta + \gamma}{3}$ (which was correctly given in Goldbach's letter nº 150), and to

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 8 = (\delta + 2)^2 + (\delta - 2)^2 + (\delta + \gamma + \alpha)^2 + (\delta + \gamma + \beta)^2.$$

Choosing the minus sign in Euler's formula, $3\delta + 2\gamma + \alpha + \beta = -(\gamma - \alpha - \beta)$, leads to $\delta = -\gamma$, which is equivalent to Goldbach's case $\delta = \alpha$ in nº 150; the identity in question becomes

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\gamma^2 + 8 = \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma + 2)^2 + (\gamma - 2)^2.$$

[3] This ends the long discussion of the Four Squares Theorem, at least as far as Euler's correspondence with Goldbach is concerned (see also n° 5, note 7). Euler still lacks a convincing proof that if a positive integer N is the sum of three or four rational squares, then it is the sum of as many integral squares – a problem that Fermat had faced from 1636 on.
In his *Number Theory* (Ch. III, App. II, p. 292–295), André Weil presents a beautiful proof which goes back to Aubry 1912.

[4] Cf. n° 155, note 5.

[5] Clearly the values of e given by Euler are integral; whether all integral solutions can be obtained that way is at least not obvious, since the expression of e as a fraction need not be in lowest terms.

157
Goldbach to Euler
Petersburg, (April 28th) May 9th, 1752

Sir,

your *Dissertation on Sums of Divisors*, which you sent to the Petersburg Academy of Science, was communicated to me by Professor Grischow.[1] I am presently unable to form an appropriately considered opinion; however, your well-known insight into topics of this kind does not allow me to doubt the correctness of everything contained in the said paper. In particular, I was pleased to see that you observed such a beautiful order in the numbers 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, . . . ; I am entirely convinced that there are series whose law of progression, though it be concise and simple in itself, cannot be seen even by inspecting more than 100 subsequent terms.

Consider, for example, the series[2]

$$\begin{array}{ccccccccc} & \scriptstyle(1.) & \scriptstyle(2.) & \scriptstyle(3.) & \scriptstyle(4.) & \scriptstyle(5.) & \scriptstyle(6.) & \scriptstyle(7.) & \\ \alpha: & 1, & 1, & 5, & 7, & 1, & 23, & 43, & \ldots, \end{array}$$

which has for its law of progression that, given any term A and its index n, the subsequent term B shall equal $A \pm \sqrt{2 \cdot 3^n - 2A^2}$, where the + or − sign is to be taken in such a way that B is not divisible by 3; it follows from this that series α has a sister[3]

$$\begin{array}{ccccccccc} & \scriptstyle(1.) & \scriptstyle(2.) & \scriptstyle(3.) & \scriptstyle(4.) & \scriptstyle(5.) & \scriptstyle(6.) & \scriptstyle(7.) & \\ \beta: & 1, & 2, & 1, & 4, & 11, & 10, & 13, & \ldots, \end{array}$$

which has the property that twice the square of the term of index n in series β, added to the square of the term of the same index n in series α, yields 3^n; by this it is simultaneously evident that the law of progression of series β is $A \pm \sqrt{3^n - 2A^2} = B$, taking + or − in such a way that B is not divisible by 3.

Let, for example, $n = 4$: the term corresponding to this index in series α is 7, its square is 49, and twice the square of the term corresponding to this index in series β will be $2 \cdot 4^2$, so $7^2 + 2 \cdot 4^2 = 3^4 = 81$.

Similarly, the square of the term in series α whose index is 5 is 1^2, and twice the square of the term that corresponds to the index 5 in series β equals $2 \cdot 11^2$, so

$1 + 2 \cdot 11^2 = 3^5 = 243$, and so on. This yields an obvious solution of the problem: Split the number 3^{n+1} into three squares of which only two are equal.[4]

I also observed that

$$\Box + \Box + \Box = \frac{\Box + 2\,\Box + 3\,\Box}{6}$$

or that in the equation

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{p^2 + 2q^2 + 3r^2}{6}$$

where the whole numbers a, b, c are given, p, q, r can always be expressed by whole numbers.[5]

With this, I humbly ask you, Sir, to have the enclosed list of books delivered to Mr. Spener,[6] so the books may be sent here by water and addressed to Mr. Köppen.

I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, May 9th, 1752.

Turn over.

The statement that any number $\left(2m^2 + 1\right)^n$ can be resolved into three squares, two of which are equal, can be very easily proved in the following way: Let $\left(2m^2 + 1\right)^n = p^2 + 2m^2q^2$, then $\left(2m^2 + 1\right)^{n+1} = \left(p \pm 2m^2q\right)^2 + 2m^2\,(p \mp q)^2$; however, the premise is true in the case $n = 1$ (for one has $p = q = 1$), so the conclusion is also true, since from any case the subsequent one can be deduced in the same way.

Father Bouhours somewhere says: "Since these people repeatedly rebuked me for reading what I should not read, I have more than ever clung to reading the New Testament."[7]

A certain author criticised this as follows: "I should not read" is here a mistake in tense; he should have written "for reading what I should not have read", otherwise, one has to assume that the author is still reading the books he was rebuked for reading.

I would like to know if this critique, which is very subtle, is approved of by Mr. Achard or Mr. Formey, in case you have some opportunity of asking about it.[8]

[1] This paper, E. 244, contains the proof of the recursion formula for sums of divisors along the lines sketched in n° 144. Euler had sent it to Schumacher on March 7th, asking him to have it printed along with his earlier paper on the same question, E. 243, and to communicate it to Goldbach, "weil unser Briefwechsel über diese Materien einige Zeit rouliret" ("since our correspondence has turned on these matters for some time": cf. R 2260: JW 2, p.268). The astronomer A.N. Grischow, then Conference Secretary of the Petersburg Academy, had presented it at the meeting of April 6th (17th), 1752.

[2] Since there was little space left on the page for the mathematical argument that follows, Goldbach filled it with a doodle, adding "*vert*[*e*]" (turn over).

In the upper margin of the following page, above Goldbach's series, Euler noted a calculation that leads up to his reply n° 158:

$$\alpha : \overset{(1)}{-1},\ \overset{(2)}{1}\,,\ \overset{(3)}{5}\,,\ \overset{(4)}{7}\,,\ \overset{(5)}{-1}\,,\ \overset{(6)}{-23}\,,\ \overset{(7)}{-43}\,,\ -17,\ +215\ \text{[the last term should actually be } +95\text{]}$$

$$R = 2Q - 3P$$

$$n^{mus} = \left[-3\left(1+\sqrt{-\,2}\right)^{n-2} - 3\left(1-\sqrt{-\,2}\right)^{n-2} =\right] \frac{\left(1+\sqrt{-\,2}\right)^{n} + \left(1-\sqrt{-\,2}\right)^{n}}{2}$$

(n^{mus} means nth [term]; the expression set in brackets was cancelled and is hard to read).

[3] Here Euler noted between the lines:

$$+1,\ 2,\ 1,\ -4,\ -11,\ -10,\ +13$$

$$R = 2Q - 3P$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{-\,2}\right)^{n} - \left(1-\sqrt{-\,2}\right)^{n}}{2\sqrt{-\,2}}.$$

[4] Taking the norm of the equation $a + b\sqrt{-2} = (1 + \sqrt{-2}\,)^n$, one easily finds the integral solutions of the equation $3^n = a^2 + 2b^2$. Euler later used this technique extensively in his *Algebra* (E. 388, in particular ch. 11–12).

[5] Here Euler noted in the margin, again preparing his reply in n° 158:

$$p = 2a + b + c \qquad q = a - b - c \qquad r = b - c$$

$$p = 6f \quad q = 3g \quad r = 2h$$

$$aa + bb + cc = 6ff + 3gg + 2hh = (2f + g)^2 + (f - g + h)^2 + (f - g - h)^2$$

$$f = \frac{2a + b + c}{6};\ g = \frac{a - b - c}{3};\ h = \frac{b - c}{2}$$

$$p = 2a + b + c \qquad q = a - b - c \qquad r = b - c.$$

[6] This order list has not been preserved.

[7] The quotation is actually: "… [c]omme ces Messieurs m'ont reproché plusieurs fois que je lisois ce que je ne devrois point lire, je me suis attaché plus que jamais à la lecture des Livres sacrez." (Bouhours 1692, *Avertissement*, p. [XXXI]).

[8] The debate that follows in n° 158–161 involves four Berlin experts on French prose style: besides Achard and Formey, Euler will also consult Maupertuis and Béguelin.

158
Euler to Goldbach
Berlin, May 30th, 1752

Sir,

the series $\overset{1}{1},\ \overset{2}{1},\ \overset{3}{5},\ \overset{4}{7},\ \overset{5}{1},\ \overset{6}{23},\ \overset{7}{43},\ \ldots$, of which you observed the nice property, Sir, that $B = A \pm \sqrt{2 \cdot 3^n - 2A^2}$, is at first sight so irregular that it seems to proceed according to no definite law. However, since the said property holds whether the terms are assumed to be positive or negative, one can prefix signs to them in such a way that a very regular series results, namely:[1]

$$\overset{1}{-1},\ \overset{2}{+1},\ \overset{3}{+5},\ \overset{4}{+7},\ \overset{5}{-1},\ \overset{6}{-23},\ \overset{7}{-43},\ \overset{8}{-17},\ \overset{9}{+215},\ \ldots,\ \overset{n}{+P},\ \overset{n+1}{+Q},\ \overset{n+2}{+R};$$

this is in fact recurrent and has the property that $R = 2Q - 3P$; consequently, by virtue of the nature of these series,

$$P = \frac{-\left(1+\sqrt{-2}\right)^n - \left(1-\sqrt{-2}\right)^n}{2}$$

and

$$Q = \frac{-\left(1+\sqrt{-2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{-2}\right)^{n+1}}{2},$$

so $2 \cdot 3^n = Q^2 - 2PQ + 3P^2$ and therefore

$$Q = P + \sqrt{2 \cdot 3^n - 2P^2}.$$

The same thing also holds with respect to the sister series, which, if the right signs are added, takes the form:[2]

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & n & n+1 \; n+2 \\ +1, & +2, & +1, & -4, & -11, & -10, & +13 & \ldots & +p, & +q, \; +r; \end{array}$$

here also, $r = 2q - 3p$ and thus

$$p = \frac{\left(1+\sqrt{-2}\right)^n - \left(1-\sqrt{-2}\right)^n}{2\sqrt{-2}}$$

and

$$q = p + \sqrt{3^n - 2p^2}.$$

Moreover, with regard to the nice relationship of these two series I generally discovered that, if one has two similar series such as

$$\begin{array}{llllll} & (0) & (1) & (2) & (3) & (4) \\ \alpha\colon & 1, & a, & a^2-b, & a^3-3ab, & a^4-6a^2b+b^2, \\ & & & & & (n) \\ & & & & \ldots & \dfrac{\left(a+\sqrt{-b}\right)^n + \left(a-\sqrt{-b}\right)^n}{2} = X \\ \beta\colon & 0, & 1, & 2a, & 3a^2-b, & 4a^3-4ab, \\ & & & & \ldots & \dfrac{\left(a+\sqrt{-b}\right)^n - \left(a-\sqrt{-b}\right)^n}{2\sqrt{-b}} = Y, \end{array}$$

which are both recurrent and have the property that $C = 2aB - (a^2+b)A$, where A, B, C are three subsequent terms, then one always has $X^2 + bY^2 = \left(a^2+b\right)^n$. If one now substitutes $a = 1$, $b = 2$, your two series result, Sir.[3]

Your remark that one always has $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{p^2 + 2q^2 + 3r^2}{6}$, is based on $p = 2a+b-c$, $q = a-b+c$, and $r = b+c$. This gave me occasion to investigate in what cases it is possible that $a^2+b^2+c^2 = fp^2+gq^2+hr^2$. For this I substituted $p = \alpha a+\beta b+\gamma c$, $q = \delta a+\varepsilon b+\zeta c$, $r = \eta a+\theta b+\iota c$; then the following six equations must be satisfied:

$$f\alpha^2 + g\delta^2 + h\eta^2 = 1; \quad f\beta^2 + g\varepsilon^2 + h\theta^2 = 1; \quad f\gamma^2 + g\zeta^2 + h\iota^2 = 1;$$
$$f\alpha\beta + g\delta\varepsilon + h\eta\theta = 0; \quad f\alpha\gamma + g\delta\zeta + h\eta\iota = 0; \quad f\beta\gamma + g\varepsilon\zeta + h\theta\iota = 0;$$

the solution of these costs more than a little trouble. I established it to be as follows: for β, γ, ε, ζ one can assume whatever one wants, and moreover the numbers m and n are also arbitrary; then

$$\alpha = \frac{n}{m}\,(\beta\varepsilon+\gamma\zeta); \quad \delta = -\,\frac{m}{n}; \quad \eta = mn\,(\gamma\varepsilon-\beta\zeta);$$
$$\theta = m^2\gamma + n^2\zeta\,(\beta\varepsilon+\gamma\zeta); \quad \iota = -\,m^2\beta - n^2\varepsilon\,(\beta\varepsilon+\gamma\zeta);$$

and furthermore

$$f = \frac{m^2}{m^2\,(\beta^2+\gamma^2) + n^2\,(\beta\varepsilon+\gamma\zeta)^2};$$
$$g = \frac{n^2}{m^2 + n^2\,(\varepsilon^2+\zeta^2)};$$

and

$$h = \frac{fg}{m^2n^2}.$$

So one has

$$a^2+b^2+c^2 = \frac{3p^2+14q^2+r^2}{42}$$

if $p = 3a+2b-c$, $q = a-b+c$, $r = -\,a+4b+5c$. Thus an infinity of such theorems can be determined from these general formulae.[4]

About the passage from Father Bouhours that you quoted,[5] I first asked Mr. de Maupertuis, as he is among the forty of the Académie Française;[6] after reading the same and the critique as well several times, he said that he should use both "devrois" and "devois" without any reservation, adding: "it is funny that Father Bouhours has been criticised for this word".

Mr. Achard asks me to convey his most obedient compliment to you, Sir, for having so much confidence in him, and after pondering the matter well he thinks "devrois" to be better, but does not want to reject "devois".

I also enquired about it of Mr. Béguelin, the private tutor of Prince Frederick of Prussia, who is said to be uncommonly knowledgeable in matters of French language, and he entirely approves the critique.

Mr. de Maupertuis moreover suggested that one should investigate whether in Latin one ought to say "quos legere non debebam" or "non deberem", and then the decision in Latin, which neither he nor me dared take, should also hold in French. On this basis you shall best decide the matter on your own, Sir.

To me Mr. Béguelin's decision appears to have the best foundation, as he most assiduously studied the rules of the French language, whereas Mr. de Maupertuis and Mr. Achard just know them by application and both told me that they often have to give another twist to some statement as they are in doubt whether certain expressions they wanted to use are correct or not.

Mr. Spener shall procure the books that you request, Sir,[7] without delay; I have taken the liberty to add to your list another very important book, *La Monogamie* by Mr. de Premontval, which meets with general approval for its thoroughness and its exceptional arguments;[8] I am therefore quite certain that you shall approve the liberty which I took, Sir.

Recently some curious integrations occurred to me.[9] Indeed, in the same way as for the equation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

the integral is

$$y^2 + x^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^2},$$

the equation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

has the integral

$$y^2 + x^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4} - c^2x^2y^2;$$

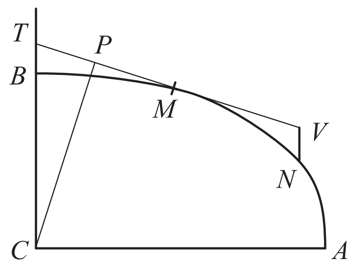
furthermore the equation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^3}}$$

has the integral

$$x^2 + y^2 + c^2x^2y^2 = 4c - 4c^2(x+y) + 2xy - 2cxy(x+y).$$

From this kind of formulae I deduced the following theorem:



If, in the quadrant ACB of an ellipse, the tangent VMT at an arbitrary point M is drawn which meets one of the axes, CB, at T, if TV is taken equal to CA and from V, VN is drawn parallel to CB, and if finally CP is the perpendicular on the tangent through the center C, then I say the difference of the arcs BM and AN will be rectifiable, namely $BM - AN = MP$.[10]

This year I was the sole recipient of the double prize, to the amount of 5000 *livres*, which had again been proposed for Saturn.[11]

Besides most obediently recommending all my family, I have the honour to remain with dutiful respect for all my lifetime, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, May 30th, 1752.

[1] Cf. nº 157, note 2.

[2] Cf. nº 157, note 3.

[3] Polynomials of the form $\dfrac{(a+\sqrt{b}\,)^n-(a-\sqrt{b}\,)^n}{2\sqrt{b}}$ later showed up in Lagrange's work; see, e. g., Lagrange 1769a (*Œuvres*, t. I, p. 729), and 1769b. Lagrange used them in his proof that 5 is a quadratic residue modulo primes of the form $5n+4$ (see Lagrange 1775: *Œuvres*, t. III, p. 789–795). The case $5n+1$ had already been settled by Euler in E. 449, § 96. Gauss presented Lagrange's method in art. 123 of his *Disquisitiones Arithmeticae*.

[4] Goldbach's question on the transformation of the ternary quadratic form $p^2+2q^2+3r^2$ into a multiple of $a^2+b^2+c^2$ touches a topic whose depth was not even recognised by Euler, who immediately considered the more general problem of transforming the diagonal ternary form $fp^2+gq^2+hr^2$ into a sum of three squares (or, more exactly, the other way round) via a linear substitution; in modern terms, Euler's transformation can be written in the form

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \epsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Applying the same idea to quadratic forms leads straight to Lagrange's theory of equivalence (for integral substitutions) and Gauss's genus theory (for rational substitutions). Whether Euler thought about applying this idea to quadratic forms is not known, but even if he did, his restriction to diagonal forms ax^2+by^2 would have prevented him from getting nontrivial results for binary quadratic forms, since such forms almost never can be transformed into the principal form x^2+aby^2 even using rational substitutions. For Lagrange's theory to work, one needs to consider forms $ax^2+bxy+cy^2$ with nonzero values of b.

Gauss later used transformations such as Euler's for transforming certain ternary forms into b^2-ac (the determinant of a binary quadratic form $ax^2+2bxy+cy^2$) in his *Disquisitiones Arithmeticae*, and applied this result to derive the principal genus theorem, the three squares theorem, and Legendre's necessary and sufficient conditions for the solvability of the equation $ax^2+by^2=cz^2$.

[5] Cf. nº 157, note 7.

[6] Maupertuis had been elected into the Académie Française in 1743. This institution supervises French language and literature; its forty members, who hold their office for life, are often referred to as “les quarante” or “les immortels”

[7] Cf. nº 157, note 6.

[8] Euler's advocacy of a quarrelsome religious skeptic like Prémontval is surprising; however, his book argues, in the form of a dialogue by correspondence, that natural law and revealed religion agree in supporting monogamy – with a proto-feminist twist: the book is dedicated to “the Ladies” by Prémontval's wife, Marie Victoire Pigeon d'Osangis. Euler and Prémontval were personally acquainted and exchanged some letters.

[9] On December 23rd, 1751 (later called the birthday of the theory of elliptic functions by Jacobi), Euler was asked to examine the collected papers (*Produzioni matematiche*) of Count Giulio Fagnano. Fagnano, a nobleman with mathematical interests from Sinigaglia (today Senigallia) on the Adriatic, had studied – inspired by a problem introduced by Johann I Bernoulli in 1698 – the lengths of certain curves and published several papers on this topic between 1714 and 1718. One of his memoirs dealt with what we now call elliptic integrals, a topic that Euler had studied before: see E. 65 and a letter to Daniel Bernoulli from 1742,

where Euler had mentioned the equation

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

(see Bernoulli's reply R 148, December 12th, 1742, to be published in O. IVA/3). In modern terms, Fagnano proved the duplication formula for elliptic integrals of the form $s(z) = \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$: he showed that if $z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$, then $s(z) = 2s(u)$.
Describing Euler's subsequent work on elliptic integrals, as well as the further development at the hands of Legendre, Gauss, Abel and Jacobi, is far beyond the scope of this commentary. Among the many books and papers devoted to this field, we mention Enneper 1876, Houzel 1978, Alling 1981, Ayoub 1984, Weil 1984 (in particular Ch. III, § XV), and Laudal / Piene 2004.
Euler published his result on the rectification of the difference of two arcs of an ellipse in E. 211 and studied the division by 2 of the arc of an ellipse in E. 264.

[10] For the proof of this theorem and an explication of the reasoning that led Euler to it, see the following letter n° 159, written only five days later. It clarifies a formula that Fagnano (cf. *supra* note 9) had given as early as 1716 and reprinted in his *Produzioni matematiche*, t. II, p. 338. See also Labrousse 1933.

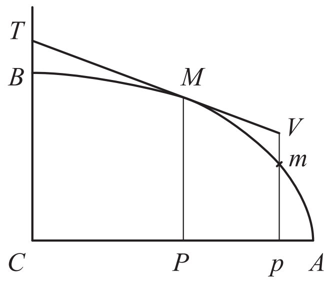
[11] Cf. n° 151, note 6.

159
Euler to Goldbach
Berlin, June 3rd, 1752

Sir,

since the last mail day, Mr. Formey also sent me his opinion about the cited passage of Father Bouhours; so I did not want to fail to send it to you, Sir.[1]

The property of the ellipse that two of its arcs can be indicated whose difference is rectifiable,[2] appears all the more remarkable as up to now elliptical arcs could in no way be compared with one another. However, since then I noted that by stating the problem inversely and looking for that curve which has the mentioned property, the solution can be found by the ordinary methods.



Indeed, determine a curve AMB which has the following property: if the tangent TMV at any point M meets the axis CB in T, if then TV is taken equal to CA

and if the perpendicular Vmp drawn from V to the axis CA intersects the curve in m, the difference of the arcs BM and Am is rectifiable and equals $\dfrac{CP \cdot Cp}{b}$.

Solution: Let the abscissa CP which corresponds to the point M be x and the arc $BM = s$; for the point m let the abscissa Cp be X and the arc $Bm = S$; because of the continuity of the curve, the relation linking X and S must be similar to the relation between x and s. Let the total arc AMB be A; then the arc Am equals $A - S$, and therefore one must have

$$BM - Am = s - A + S = \frac{xX}{b};$$

differentiating this,

$$ds + dS = \frac{X\,dx + x\,dX}{b}.$$

Then, since $TV = CA = a$ is the tangent of the curve at M, $ds : dx = TV : Cp = a : X$, so $ds = \dfrac{a\,dx}{X}$. But since the points M and m can be exchanged because of the curve's continuity, in the same way one has $dS = \dfrac{a\,dX}{x}$; therefore one arrives at

$$ds + dS = \frac{a\,dx}{X} + \frac{a\,dX}{x}.$$

But on the other hand, we found that $ds + dS = \dfrac{X\,dx + x\,dX}{b}$, so

$$\frac{a\,dx}{X} + \frac{a\,dX}{x} = \frac{X\,dx + x\,dX}{b}$$

or

$$ab\,(x\,dx + X\,dX) = Xx\,(X\,dx + x\,dX)\,;$$

integrating this equation yields

$$ab\left(x^2 + X^2\right) = X^2x^2 \pm c^4,$$

therefore

$$X^2 = \frac{abx^2 \mp c^4}{x^2 - ab} = \frac{\pm\, c^4 - abx^2}{ab - x^2}$$

and

$$X = \sqrt{\frac{c^4 - abx^2}{ab - x^2}}.$$

Consequently,

$$ds = \frac{a\,dx}{X} = \frac{a\,dx\sqrt{ab - x^2}}{\sqrt{c^4 - abx^2}}.$$

Let the ordinate PM be y; since $dy = \sqrt{ds^2 - dx^2}$, one gets

$$dy = \frac{dx\sqrt{a^3b - a^2x^2 - c^4 + abx^2}}{\sqrt{c^4 - abx^2}}.$$

Now, as the constant c can be assumed at will, there are infinitely many curves which solve the problem; among them there is one algebraic curve which results when $c^4 = a^3 b$; in this case,

$$dy = \frac{x\,dx\sqrt{ab-a^2}}{\sqrt{ab\,(a^2-x^2)}},$$

and, by integrating,

$$y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{b}\right)(a^2-x^2)};$$

but this is the equation of an ellipse with $CA = a$, $CB = a\sqrt{\dfrac{b-a}{b}}$ and therefore $b = \dfrac{a^3}{a^2 - CB^2}$; thus, conversely, the above-mentioned property of the ellipse can be deduced from this. Indeed, taking the tangent $TMV = CA$, by which the point m is defined, one will have

$$BM - Am = \frac{CP \cdot Cp\,\left(CA^2 - CB^2\right)}{CA^3},$$

and the value of this expression reduces to the segment of the tangent intercepted between the point M and the perpendicular to the tangent through C.

I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, June 3rd, 1752.

[1] Cf. nº 157, note 8.
The enclosure mentioned here has been preserved along with the present letter. On fol. 101r one finds the following note by J.H.S. Formey, dated "*Berlin ce 30 mai 1752*" and addressed to "*Monsieur de Goldbach / Conseiller d'Etat Actuel de S*[*a*] *M*[*ajesté*] *I*[*mperiale*] */ dans le departement des Affaires etrangeres / à / S.*^{t} *Petersbourg*":
"*La Critique qui concerne le P. Bouhours ne paroit point fondée, & son expression est grammaticale, aussi bien que convenable à ce qu'il veut exprimer. Je devois n'auroit pas exprimé une simple convenance, mais une obligation étroite. Or ce n'est que par raison de convenance que le P. Bouho*[*u*]*rs auroit dû ne pas trop s'enfoncer dans la lecture des Auteurs profanes. Et sa façon de parler suppose qu'il les lisoit bien encore, mais moins qu'auparavant. Dans le cas où il y auroit tout à fait renoncé, l'expression propre seroit: que je n'aurois pas dû lire.*"
("The critique concerning Father Bouhours does not seem to be well-founded, and his expression is grammatically correct as well as suitable for that which he wants to express. "I should have read" would have expressed a strict obligation rather than a simple convention; but the reason that Father Bouhours ought not to have submerged himself too much in reading worldly authors is just a matter of convention. Also, his manner of speaking suggests that he was indeed still reading them, but less often than before. If he had completely renounced them, the suitable expression should be "which I ought not to have read")."
[2] Cf. nº 158, note 10.

160

Goldbach to Euler

[Petersburg, June/July 1752][1]

Sir,

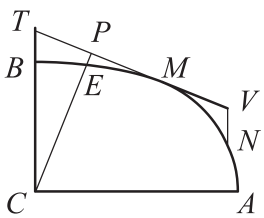
I duly received your two very welcome letters from May 30th and June 3rd here on the 10th and 14th of the same month. Regarding the series that you mentioned,[2] whose progression I had determined by certain formulae, I am pleased to see that you also determined their general terms; I remember on this occasion that I already orally communicated to you a long time ago that all finite quantities, whether rational or in any way irrational, can be expressed by the sole series $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ..., and all the artifice just consists in determining the variations of the $+$ and $-$ signs.[3] Thus, one has for example

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\ldots=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}-\tfrac{1}{14}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{18}+\ldots;$$

here the $+$ and $-$ signs are varied in such a way that in the odd-order terms the signs alternate, viz., $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{[18]}-\ldots$, whereas in the even-order terms[4] the same signs are present which apply for twice their values; thus the term $\frac{1}{8}$ has the $+$ sign since $\frac{1}{4}$ has the $+$ sign, and $\frac{1}{12}$ has the $-$ sign since $\frac{1}{6}$ has the $-$ sign, etc.

By the way, the results that you report with respect to the two series where $X^2+bY^2=\left(a^2+b\right)^n$ and also to $\square+\square+\square=f\,\square+g\,\square+h\,\square$, all testify to your great ability, which you have acquired to a greater degree than countless others, to understand this kind of calculation and to render it infinitely more general.[5]

I did not know beforehand, and indeed perhaps never thought about it, whether it is possible to divide the quadrant of the ellipse into a certain number of equal parts;



however, from the statements in your letter, Sir,[6] one can easily conclude that it is (1.) actually possible to divide this quadrant into two equal parts by taking $PM=0$, but (2.) quite impossible to divide the quadrant into a greater number of submultiples without rectifying, at the same time, an assignable part of this quadrant. Indeed, let $AN=BE$ in your figure, Sir, be some arbitrary submultiple of the entire quadrant, then the arc $EM=BM-BE$ equals the straight line PM.

I very much thank you, Sir, for deciding to enclose with the books on my list, which I had ordered from Berlin, an additional one by Mr. Premontval.[7]

With respect to the integrals of the equation $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$, I should like to know if you only discovered the cases $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ or if you are able to solve more of them.[8] For the rest, the integral of $\dfrac{x^{-1}dx}{\sqrt{1-x^n}} = \dfrac{my^{-1}dy}{\sqrt{1-y^p}}$ is known to me, but I do not want to add it here since I am afraid it might strike you as all too naive; on the other hand I willingly admit that I could not have discovered even this by now if I had not noted it down in a book a long time ago.

I cordially congratulate you on the prize which you again received from Paris. I got the first news of this from the French journal, but the precise amount of the prize had slipped my mind. In case you are willing to send a copy of the paper to Professor Grischow, I shall ask him to lend it to me for a few days.[9]

Finally, with respect to the difficulty caused by a certain expression of Father Bouhours, I have every reason to thank you, Sir, for kindly communicating to me the explanations of four so famous men,[10] but at the same time I regret having caused you more trouble than I should have thought. Nevertheless I am quite convinced opinions should have been no less divided if the difficulty had been proposed to the Forty themselves for decision; in fact, one could say on this occasion the same thing Father Bouhours wrote in his *Suite des Remarques nouvelles*:[11] "I consulted some very skilled persons about this question and was surprised to see that their opinions do not at all agree", by which – according to the opinion of the same critic[12] – he again committed an error, since he should have said "did not at all agree". In this manner one could almost arrive at the conviction that the Forty, when they stated in their observation about Vaugelas' 201st *Remark*: "We unanimously decided that one must say ..." ought rather to have said "one should have said", and so on.[13]

I am an old admirer of Mr. Achard, the only one among the four scholars that you mentioned, Sir, whom I know in person: as far back as 27 years ago, I heard him preach to my uncommon satisfaction, and I still particularly remember two of his sermons, one about slander and one about the third request in the Lord's Prayer.[14]

You would oblige me, Sir, by communicating to me the two or three brief formulae by which the laws of motion are expressed by Mr. de Maupertuis, and telling me in what way they differ from Leibniz's formulae, or also by just reporting whether you quite approve of the former; indeed I know that these formulae are to be found in a certain volume of the *Miscellanea*, where I even saw them in leafing through it, but I do not remember any more from whom I had got that volume at the time.[15]

Besides cordially wishing you all satisfaction and most dutifully recommending myself to all your family, I remain, Sir, your faithful servant G.

[1] In the file containing Goldbach's letters to Euler, this undated letter was haphazardly entered between n° 46 and n° 51, both from 1742. In the upper margin of fol. 40r, there is a note by an unidentified (19th-century?) hand: "1752, zwischen dem 9. Mai und 7. October". Since Goldbach received Euler's letter n° 159 on June 14th and Euler's reply n° 161 is dated August 5th, the present letter must have been written in the second half of June or in July 1752.

[2] Cf. n° 158, notes 1–2.

[3] Cf. n° 55, note 13.
A well-known theorem due to Riemann 1867 (*Werke*, p. 235) says that any conditionally convergent series can be rearranged in such a way that it (a) converges to any given real number, (b) oscillates between any two given real numbers, or (c) diverges. However, Goldbach's casual remarks both in n° 55 and here strongly suggest that the core of that insight must have been part of "mathematicians' folklore" a long time before Riemann's formal statement.

[4] Here the original text of Goldbach's letter contains several mistakes that have been corrected: The last numerator in the preceding series was 28 instead of 18, there was a wrong relative pronoun (*quae* instead of *qui*), and instead of *locis paribus* ("in the even-numbered places"), Goldbach erroneously repeated *locis imparibus* ("in the odd-numbered places").

[5] Cf. n° 158, notes 3 and 4.

[6] Cf. n° 159, note 2.

[7] Cf. n° 158, notes 7 and 8.

[8] Cf. n° 158, note 9, and Euler's reply n° 161, note 4.

[9] Goldbach probably learned of Euler's victory (cf. n° 158, note 11) from the June 1752 issue of the *Mercure de France*, where it is reported under *Nouvelles de la Cour, de Paris, &c.*
The "Piece" Goldbach refers to is Euler's prize-winning paper E. 384, which seems, however, to have been printed and distributed only in 1769 (cf. n° 161, note 5).

[10] I. e., Maupertuis, Achard, Béguelin and Formey (cf. n° 158, note 5, and n° 159, note 1).

[11] D. Bouhours, *Suite des Remarques nouvelles sur la Langue Françoise* (1692), p. 11.

[12] Cf. n° 157, note 7.

[13] *Observations de l'Academie Françoise sur les Remarques de M. de Vaugelas* (Académie Française 1704), p. 231.

[14] Two volumes of Achard's sermons were posthumously published in 1774.

[15] Maupertuis had not published anything in the *Miscellanea* of the "old" Berlin Society; Goldbach presumably refers to his paper *Les Loix du Mouvement et du Repos déduites d'un Principe Métaphysique* in the second volume of the new Berlin Academy's *Mémoires* (Maupertuis 1748).
Goldbach's enquiry about Maupertuis' laws of motion is probably not as innocent as it sounds: it is hardly imaginable that by the time he wrote this letter, he had not heard of the ugly dispute unleashed when Samuel König claimed Maupertuis' "metaphysical principle" had been anticipated by Leibniz but could not produce the original of the Leibniz letter on which he based this assertion.
See Euler's reply n° 161, note 8.

161

Euler to Goldbach

Berlin, August 5th, 1752

Sir,

I still remember quite well having heard from you that all possible numbers can be expressed by the series $1 \,.\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{3} \,.\, \frac{1}{4} \,.\, \frac{1}{5} \,.\, \frac{1}{6} \,\ldots$ by just substituting the appropriate $+$ or $-$ signs for the dots.[1] You also had disclosed several series of that kind to me, Sir, and if I am not mistaken, the one you recently communicated was also among them:

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\ldots$$

Now, since that series equals $\frac{\pi}{4}$, where π denotes the circumference of the circle whose diameter equals 1, one has

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\ldots$$

and consequently

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

a series which I also recorded in my *Introduction to Analysis*, p. 244.[2] In the same place many other series of that kind are to be found, e. g.:

$$\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots,$$

where the number 2 has the $-$ sign, the prime numbers of the form $4n-1$ the $-$ sign, the prime numbers of the form $4n+1$ the $+$ sign, and composite numbers receive that sign which is appropriate by reason of their multiplicative composition from primes: thus $\frac{1}{60}$ has the sign $-\cdot-\cdot-\cdot+=-$, since $60=2\cdot2\cdot3\cdot5$. Further, one has

$$\pi=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\ldots,$$

where 2 has the $+$ sign, the prime numbers of the form $4n-1$ the $+$ sign, and the prime numbers of the form $4n+1$ the $-$ sign. Moreover,

$$\frac{3\pi}{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\ldots,$$

where 2 has the $+$ sign, the prime numbers of the form $4n-1$ the $+$ sign, and the prime numbers of the form $4n+1$, excepting 5, the $-$ sign. All series of that kind follow from these two formulae, where the factors proceed according to the prime numbers:[3]

$$\text{I.}\quad \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ldots}$$

$$\text{II.}\quad \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ldots},$$

from which infinitely many others can be deduced. Multiplying, for example, the first by $\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$, one will have

$$\pi = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ldots}$$

and when this has been developed into a series,

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \ldots,$$

where 2 has the $+$ sign, the prime numbers of the form $4n-1$, excepting 3, the $-$ sign, and the prime numbers of the form $4n+1$ the $+$ sign. Then, since

$$0 = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1+\frac{1}{13}\right)\ldots},$$

one can also produce an infinity of series that equal 0, as for example

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \ldots,$$

where all prime numbers have the $-$ sign. From the formulae indicated in my book, many more than those presented there can be found; thus, e. g.,

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ldots},$$

where the prime numbers of the form $6n-1$ have $+$ and the prime numbers $6n+1$, $-$. Multiplying by $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$,

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)\ldots}$$

and therefore

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} \ldots,$$

where 2 has $-$; 3, $+$; $6n-1$, $-$; and $6n+1$, $+$. However, I can produce no other series by means of this method than such as have their sums either equal to 0 or depending on the quadrature of the circle.

Regarding the integrals of the equation $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$, I cannot indicate any others but those for the cases $n=2$, $n=3$, $n=4$, and $n=6$.[4] In case I forgot to report this last case to you, Sir, for the differential equation $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^6}} = \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^6}}$ the integral equation is

$$x^4 + y^4 - 4cx^4y^4 + 4c^2x^2y^2\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y^2 + 2c\left(x^2+y^2\right) + c^2 = 0,$$

where c signifies the constant which has been added by the integration and which can be assumed arbitrarily; so this is the complete integral.

The integration of the equation $\dfrac{x^{-1}dx}{\sqrt{1-x^n}} = \dfrac{my^{-1}dy}{\sqrt{1-y^p}}$ does not at once meet the eye either, as you seem to say, Sir; however, since each member is separately integrable by logarithms, an algebraic integral of it can be given – a property which does not hold for the above formulae, since neither $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ nor $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ nor $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$ can be integrated in any way either by the circle or by logarithms; it is therefore all the more remarkable that algebraic integral equations can still be indicated for those differential equations.

As to your formulae, Sir, by substituting $\sqrt{1-x^n} = v$ I get $x^n = 1 - v^2$ and

$$\frac{n\,dx}{x} = -\frac{2v\,dv}{1-v^2},$$

so

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^n}} = -\frac{2}{n}\cdot\frac{dv}{1-v^2},$$

and, integrating,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^n}} = -\frac{1}{n}\log\frac{1+v}{1-v} = -\frac{1}{n}\log\frac{1+\sqrt{1-x^n}}{1-\sqrt{1-x^n}}.$$

Similarly,

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{1-y^p}} = -\frac{1}{p}\log\frac{1+\sqrt{1-y^p}}{1-\sqrt{1-y^p}} + \text{const.},$$

so

$$\frac{1+\sqrt{1-x^n}}{1-\sqrt{1-x^n}} = C\left(\frac{1+\sqrt{1-y^p}}{1-\sqrt{1-y^p}}\right)^{\frac{mn}{p}},$$

which is the complete integration of the differential equation $\dfrac{x^{-1}dx}{\sqrt{1-x^n}} = \dfrac{my^{-1}dy}{\sqrt{1-y^p}}$.

It is very doubtful whether I am going to receive any copies of my paper on Saturn from Paris;[5] up to now I have got none, and it is very difficult to obtain this kind of articles from Paris; in fact a book that Mr. Bouguer sent me for a present was lost on the way.[6] If I should be able to obtain some, I shall not fail to present one to you, Sir, whereas it should not have occurred to me to send one to Professor Grischow.

When recently dining with Mr. de Maupertuis, I raised the subject of the French passages that you mentioned, Sir; opinions converged to the effect that grammatically both the present and the imperfect are correct, but the meaning is different. Thus it is correct to say "We unanimously decided that one must say ...", since one should not only then have said so, but always ought to say so. On the other hand, if it were written "one should have said", this should indicate nothing more than just that one should have said so in the proposed instance; so it could not be regarded as a permanent law.[7]

The question that you wanted to raise with regard to the formulae on the laws of motion given by Mr. de Maupertuis, Sir, concerns no doubt those by which he determines the rules for the transfer of motion in the collision of both elastic and inelastic bodies; since these are identical to those that have been known for a long time, they also agree with Leibniz's. However, as far as the principle by which Mr. de Maupertuis deduced these rules is concerned, this is indeed entirely novel. For although it has already been asserted for a long time that Nature acts by the easiest way, yet neither Leibniz nor anybody else showed what quantity it properly is that is a minimum in the operations of Nature. Mr. de Maupertuis calls this quantity the quantity of action and defines it by the product of the mass, the velocity and the space; he very nicely derives from it not only the rules of motion but also other things. For my own part, I had also already demonstrated a long time ago that in the motion of celestial bodies the formula $\int Mv\,ds$, where M denotes the mass, v the velocity and ds the element of space covered, always is a minimum. So $Mv\,ds$ is the elementary quantity of action and $\int Mv\,ds$ the total one, which must therefore be a minimum according to Mr. de Maupertuis.[8]

Besides most obediently recommending all my family, I have the honour to remain with due respect for all my lifetime, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Aug. 5th, 1752.

The books that you requested, Sir, have already been dispatched from here a fortnight ago.[9]

[1] Cf. n° 55, note 13, and n° 160, note 3.

[2] These series and their "Euler products", as they came to be called, are presented in § 288–293 of the *Introductio*, t. I (E. 101, p. 304–312 of vol. O. I/8).

[3] Euler's product formula for L-series of Dirichlet characters χ,

$$L(s,\chi) := \sum \chi(n) n^{-s} = \prod (1-\chi(p)p^{-s})^{-1},$$

is valid for all complex values of s with real part > 1. Dirichlet (1839) determined the limit $\lim_{s\to 1} L(s,\chi)$ for Dirichlet characters. Showing the convergence (for $s = 1$ and characters different from the principal character) of the series on the left and the product on the right side is much more involved; this was first established in Mertens 1874b. A proof of the convergence of the Euler product can also be found in § 109 of Landau's *Handbuch* (1909). Hardy (1909) constructed a sequence a_n for which $\lim_{x\to 1}\prod(1+a_n x^n) = 2\prod(1+a_n)$. The claim that, for nontrivial Dirichlet characters χ, we have

$$L(s,\chi) = \lim_{n\to\infty}\prod_{p\le n}(1-\chi(p)p^{-s})$$

for all s with real part $> \frac{1}{2}$ implies the Generalised Riemann Hypothesis for $L(s,\chi)$; for this and many more relevant references see Landau 1905. The problem of the convergence of L-series was taken up again recently by D.M. Goldfeld (for elliptic curves) and K. Conrad; for references, see Conrad 2005.

[4] Cf. n° 158, note 9, and n° 160, note 8.

[5] Cf. n° 160, note 9.

[6] Delisle had sent Bouguer's *La figure de la Terre ...*, Paris 1749, to Euler as a present from the author in May 1751 (see Bouguer's letter R 314); but as Bouguer's letter R 317 from April 2nd, 1752, shows, Euler had not received it.

[7] Cf. n° 160, note 13. This closes the debate about French style started in n° 157, notes 7–8.

[8] Cf. n° 160, note 15.
Just as he does here, Euler consistently attributed the identification of the principle of least action as a general guideline for physics to Maupertuis, while acknowledging earlier authors' use of it (and his own – see E. 65, *Additamentum* II) in solving particular questions. Just at the time he wrote the present letter he was working on several apologetical texts (E. 182 and E. 197–199), defending Maupertuis' discovery and questioning König's interpretation of the suspect quotation from a Leibniz letter. It was and still is a matter of vivid debate whether Euler's intervention was mainly based on his superior insight into the scientific question or on an unholy alliance with his vain boss at the Academy, compounded by ideological prejudices: see, e. g., Brunet 1938, J.O. Fleckenstein's introduction to O. II/5, the monograph by Pulte (1989) and the case study by U. Goldenbaum (2004). Most experts agree that the judgment of the Berlin Academy that Maupertuis obtained in April 1752 with Euler's active collaboration, denouncing the Leibniz letter cited by König as a fake, was biased and unfair. Ultimately both opponents' careers were seriously damaged; Euler's reputation, too, suffered.

[9] This remark was added in the margin of fol. 105v. Cf. n° 157, note 6, and n° 160, note 7.

162
Goldbach to Euler
Petersburg, (September 26th) October 7th, 1752

Sir,

my proof that

$$\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{2}{7}+\ldots = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots$$

is a particular case of the general proposition

$$\begin{aligned} A:&\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{d}+\frac{1}{8a}+\frac{1}{e}+\ldots \\ = B:&\quad \frac{2}{a}-\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{2}{d}+\frac{2}{e}-\ldots; \end{aligned}$$

indeed, the odd terms of series A equal $\frac{B}{2}$, and the even and odd terms of the same series A taken together, i. e., $\frac{B+A}{2}$, equal A, so $A = B$. While here the $+$ and $-$ signs in series B have been taken to alternate, one can also assume all the terms to be positive or to vary according to any law, if just the sum of B is finite; consequently, if one discards the condition that the terms of series A must continuously decrease (disregarding the variation of the $+$ and $-$ signs), any series B can be transformed into A; but on the other hand I do not see how even a single one of those which you discovered, Sir, can be deduced from this. Your observation that all series of that kind either equal 0 or depend on the quadrature of the circle seems remarkable to me.[1]

Your statement about the integrable cases of the equation $\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^n}}$ must be no doubt be understood to refer only to those where n is a whole number;[2] for it appears quite certain to me that every equation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{m+1}}}} = \frac{a\,dy}{\sqrt{1-y^{\frac{1}{m+1}}}},$$

where m is taken to be a positive integer, is integrable. However, in the cases indicated by you, where n equals 2 or 3 or 4 or 6, I think the values of y actually look somewhat cumbersome when one expresses the constant generically by C,[3] since then irrational quantities are always involved; but by substituting $C = -1$ one has

$$\begin{aligned} \text{for the case}\quad n=2,\quad y^2 &= 1-x^2\\ n=3,\quad y^2 &= \frac{\left(x^2+x-2\right)^2}{(1-x)^4}\\ n=4,\quad y^2 &= \frac{1-x^2}{1+x^2}\\ n=6,\quad y^2 &= \frac{-2x^4+x^2+1}{\left(1+2x^2\right)^2}. \end{aligned}$$

Here one sees that all these cases are comprised by the formula

$$\frac{ax^4+bx^3+cx^2+ex+f}{1+px+qx^2+rx^3+sx^4};$$

so if somebody were to look for more cases, he should do very well to set the constant C equal to -1 right from the start.

Enclosed, you will find a piece of paper by your own hand,[4] on which many years ago you deduced from the equation $x^2+y^2-1=0$ the other one $x^2-1=2cy+c^2$; but I doubt that one can equate $x\,dx + y\,dy$ to $dy\sqrt{x^2+y^2-1}$ when by hypothesis both of them equal 0. Otherwise it should actually also follow that, taking X and Y to be any functions of x and y whatever, $x\,dx + y\,dy$ could equal $XY\,dy\sqrt{x^2+y^2-1}$.

When, a few days ago, I received some volumes both of the old and new *Commentarii* as a gift from the Academy of Science, upon opening tome II of the latter I chanced upon Mr. Winsheim's *Dissertation on Perfect Numbers*,[5] in which he accepts (p. 77) the perfect numbers indicated by you, Sir, and especially the ninth one, with the salubrious clause "until the contrary has been proved"; however I doubt whether you have already perused the nice excerpt from Mersenne that he quotes, which in my opinion is very worthy of reading. Actually I do not know whether Mersenne's *Cogitations* or Leuneschloß's *Paradoxes* were published first, but I see that with respect to ten or eleven perfect numbers still to be discovered, they both made use of an identical expression: "Whoever finds eleven more of them", Mersenne says, "may be certain of having outdone everything that analysis has yet achieved", taking their discovery, however, to be not impossible; whereas Leuneschloß says (*Paradoxes*, 46 and 47): "The enormous and infinite multitude of numbers comprises just ten perfect numbers; whoever discovers ten more may be certain of having outdone everything that analysis has yet achieved"; but this addition is superfluous if, as the author pretends, there are just ten perfect numbers in the order of nature.[6]

Asking you to recommend me to your dearest family, I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Oct. 7th, 1752.

[1] Cf. n° 161, notes 2–3.

[2] Cf. n° 161, note 4.

[3] Actually Goldbach writes lower-case c here and in the next instance, but after the general formula, where c has a different meaning, he uses upper-case C for the integration constant. The same distinction has been applied here.

[4] This enclosure, which Euler apparently sent back with his reply (cf. n° 163, note 11), seems to be lost.

[5] At Goldbach's suggestion Euler had started in 1730 to think about the primes among the Mersenne numbers 2^n-1, which give rise to all the even perfect numbers $2^{n-1}(2^n-1)$ (cf. n° 7). In E. 26 he rejected the common notion (advanced, among others, by Christian Wolff), according to which *all* 2^p-1 with prime p are prime; on the other hand he "ventured to assert" that those numbers are prime for $p = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 41$ and 47 and thus yield ten perfect numbers (discounting 1, which nowadays is not considered perfect).
Euler himself later disproved this claim for $p = 47$ by communicating the divisor 2351 of $2^{47}-1 = 140\,737\,488\,355\,327$ in letters to Krafft and Winsheim (the first, from 1741, appears to be lost; the second, R 2816 from December 21st, 1748, has been printed in 1976 (cf. JW 3, p. 374)). The case $p = 41$ is still indicated as "Prim[us] dubius" in Winsheim's 1751 paper; in a footnote, Winsheim remarks that it is missing in Mersenne who cites instead $p = 67$, 127 and 257 (only the second of these is correct). Apparently Giovanni Plana was the first to indicate the factorisation of $2^{41}-1 = 13\,367 \cdot 164\,511\,353$ (cf. Plana 1863).
Winsheim further states correctly that neither Bongo's 1591 list of 28 allegedly perfect numbers nor the list of 22 – the largest of them has 48 digits – that Goldbach's old friend Hansch claimed in a 1739 letter (delivered to Winsheim only in 1748) yields any more genuine cases than the seven already known for a long time and Euler's new one for $p = 31$. Euler had definitely stated in his letter to Winsheim he had proved (by checking all potential

divisors) that $2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647$ is prime, but it took him until 1772 to repeat this assertion in public (cf. E. 461).
More of Euler's insights on perfect numbers can be found in two manuscripts dating probably from the late 1740s but published only in 1849. Both in E. 798, § 8, and in E. 792, § 106–109, Euler gives a short proof that all even perfect numbers must be of the form $2^{n-1}(2^n - 1)$ where $2^n - 1$ is prime, thus confirming the generality of Euclid's construction, and states that odd perfect numbers – if any exist – must be of the form $(4m+1)^{4n+1}y^2$ where $4m+1$ is prime and y is odd.

[6] Winsheim agrees with Mersenne's critique of Bongo, which he quotes from the 1644 *Cogitata Physico Mathematica*, *Praefatio generalis*, § XIX; the *Mille De Quantitate Paradoxa* by the Heidelberg professor Johann Leuneschloß appeared only in 1658.

163
Euler to Goldbach
Berlin, October 28th, 1752

Sir,

I very well recall your method of transforming any series

$$\frac{2}{a} - \frac{2}{b} + \frac{2}{c} - \frac{2}{d} + \ldots$$

into another, such as

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{4a} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2b} \ldots;$$

it is definitely true that by its help some transformations can be discovered which cannot be derived by the method I use, since this is restricted to a certain sort of numbers. On the other hand, my method also yields series that have nothing in common with the other one. As my method encompasses just a definite kind of variation in the signs, it follows that the sum of all series arising from it either equals 0 or depends on the quadrature of the circle. However, if I could also apply other variations of signs, I do not doubt that any quantity could be produced as a sum.[1]

As prime numbers differ so very much with respect to their double form as $4n + 1$ or $4n - 1$, and the quantity of both categories is infinite,[2] I investigated by approximation the sum of the following series:

$$A = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} - \frac{1}{29} + \frac{1}{31} - \frac{1}{37} - \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{47} \ldots,$$

where the primes of the form $4n - 1$ have the $+$ sign and those of the form $4n + 1$ the $-$ sign, in the hope that perhaps the sum might be rational. However I found this sum to be $= 0.334\,980$ and consequently somewhat greater than $\frac{1}{3}$; if the result had been precisely $\frac{1}{3}$, the matter should indeed have warranted some reflection.[3]

The number of all primes being infinite, but an infinite of the lowest order – since I showed that, taking the number of all numbers to be n, the number of primes will equal $\log n$, but $\log n$ is smaller than $n^{\frac{1}{m}}$ however large the number m may be[4] – the question arises whether the number of primes which are contained, e. g., in the formula a^2+1 is still infinite, as it is certainly infinitely smaller than the number of all primes.[5] After that, even if this were infinite, one could pose the same question about the primes of the form a^4+1 or a^8+1, etc. I investigated the prime numbers contained in the form a^2+1 and found that a^2+1 becomes a prime in the following cases:[6]

$a =$ 1, 2, 4, 6, 10, 14, 16, 20, 24, 26, 36, 40, 54, 56, 66, 74, 84, 90, 94,
110, 116, 120, 124, 126, 130, 134, 146, 150, 156, 160, 170, 176, 180, 184,
204, 206, 210, 224, 230, 236, 240, 250, 256, 260, 264, 270, 280, 284, 300,
306, 314, 326, 340, 350, 384, 386, 396, 400,
406, 420, 430, 436, 440, 444, 464, 466, 470, 474, 490, 496,
536, 544, 556, 570, 576, 584, 594,
634, 636, 644, 646, 654, 674, 680, 686, 690, 696, 700,
704, 714, 716, 740, 750, 760, 764, 780, 784,
816, 826, 844, 860, 864, 890,
906, 910, 920, 930, 936, 946, 950, 960, 966, 986,
1004, 1010, 1036, 1054, 1060, 1066, 1070, 1094, 1096,
1106, 1124, 1140, 1144, 1146, 1150, 1156, 1174, 1176, 1184,
1210, 1234, 1244, 1246, 1274, 1276, 1290, 1294,
1306, 1314, 1316, 1320, 1324, 1340, 1350, 1354, 1366, 1374, 1376, 1394,
1406, 1410, 1416, 1420, 1430, 1434, 1440, 1456, 1460, 1494.

I pushed ahead with this test up to 1500; by this I can indicate many prime numbers which are not only greater than 100 000 – which is as far as the tables of prime numbers go[7] – but also than 1 000 000; otherwise it should certainly be very difficult to indicate a prime number greater than 1 000 000. If, on the other hand, a^4+1 is to be a prime number, the following few values of a apply:[8]

$a = 1, 2, 4, 6, 16, 20, 24, 34.$

However I am still far from solving Fermat's problem of determining a prime greater than any given number. If one were able to find a regular series whose every term were contained among these values of a, then the problem should be solved. But there is certainly no algebraic series of which all terms can be primes: for let X be the term which corresponds to the index x, and therefore A the term which corresponds to some given index a, then, by assuming $x = nA + a$, the term X becomes divisible by A and consequently not prime.[9]

My integration of the equation $\dfrac{dx}{\sqrt{a+bx^n}} = \dfrac{dy}{\sqrt{a+by^n}}$ not only presupposes that n is a whole number, but I still can indicate the integrals only in the cases $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, and $n = 6$; for $n = 5$ I have not yet been able to find the integral.[10] If, on the other hand, $n = \dfrac{1}{m+1}$, the formulae are actually anyway integrable, so they do not yield anything special. What appeared curious to me was actually the fact that, while the formulae in the cases $n = 3$ or $n = 4$ or $n = 6$ can in no way be reduced to the quadrature either of the circle or the hyperbola, yet the equation itself can be integrated algebraically, even in full generality.

As regards the enclosed piece of paper,[11] I recall having written it when still at your place, Sir, in order to show that by integration one does not always find all cases that satisfy a differential equation; in my Mechanics I had noted some important cases of this. I can make the case even simpler by proposing the differential equation $a\,dx = (a - x)\,dy$, which is evidently satisfied when $x = a$, a case that is however not discovered by integrating. In the same way, if I have $\dfrac{P\,dz}{Z} = dy$ or $P\,dz = Z\,dy$, where Z is some function of z and P a quantity composed in any way from y and z, then $Z = 0$ is a solution, since then z equals a certain constant and thus $dz = 0$. Now by substituting for z some more complicated formula, such as $x^2 + y^2 - a^2$, one obtains from $Z = 0$ some cases of the integral which are never discovered by integration. Thus, if $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} = V\,dy$, where V is an arbitrary function of x and y, $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ certainly satisfies the equation.[12]

I have not yet received tome II of the *Novi Commentarii.* It is true that I cannot assert whether $2^{30}\left(2^{31} - 1\right)$ is a perfect number or not, since I do not know whether $2^{31} - 1$ is a prime number or not.[13] However I cannot see why there should not be infinitely many perfect numbers. On the other hand, since in order to find them it is required to exhibit all those cases for which the formula $2^n - 1$ yields a prime number, I do not see how one can indicate more than seven, namely $2^1\left(2^2 - 1\right)$, $2^2\left(2^3 - 1\right)$, $2^4\left(2^5 - 1\right)$, $2^6\left(2^7 - 1\right)$, $2^{12}\left(2^{13} - 1\right)$, $2^{16}\left(2^{17} - 1\right)$, $2^{18}\left(2^{19} - 1\right)$; one does not know even eight, much less ten.[14] That much is certain: if $2^n - 1$ is to be a prime number, n must also be prime; however, there are many primes which substituted for n do not make $2^n - 1$ prime, as $n = 11$, $n = 23$, $n = 29$, $n = 37$, etc. So if Mersenne or Leuneschloß asserts the number of perfect numbers to be finite, I think this is unfounded, although I do not believe more than seven besides 1 can be indicated with certainty.[15] I recall having seen Leuneschloß's treatise at your place, Sir; but as I cannot find any notice of this author in any encyclopedia, I should like to humbly ask you, Sir, for some details about his treatise and, if possible, his person.

Besides most obediently recommending all my family, I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Oct. 28th, 1752.

[1] Cf. nº 162, note 1.

[2] Later Euler claimed not only that there are infinitely many primes in every admissible arithmetical sequence, but also that the sum of their reciprocals is always infinite (see E. 596). He also remarked that the infinity of primes of the forms $p = 4n + 1$ and $q = 4n - 1$

immediately follows from the empirical fact that the difference between $\sum \frac{1}{p}$ and $\sum \frac{1}{q}$ is finite.

[3] Both in E. 596 and in E. 819, Euler indicates approximations and convergence-improving transformations of the sum $\sum(-1)^{(p-1)/2}\frac{1}{p}$. A.A. Markov checked his calculations for O. I/4; Mertens (1874b, p. 58) calculated the value 0.334 981 325 29 . . ..

[4] Apparently it was Euler who first attempted to measure the "size" of infinite sets: For sets A of natural numbers > 1 he formed the infinite product $\prod_{a\in A}\frac{a}{a-1}$. Interpreting his results, which used infinitely large numbers, in a natural way, we find that Euler gave heuristic arguments suggesting that $\prod_{p\le x}\frac{p}{p-1} \sim \log x$ and observed that $\prod_{a\ge 2}\frac{a^2}{a^2-1} = 2$ (see n° 29, note 2). From these results he concluded that there are infinitely many more primes than there are squares.

The sum of the reciprocals of the primes, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$, may have been considered for the first time – as an example of a series in which no formula can be indicated either for the general term or for the partial sums, yet some formal "telescoping" manipulation involving the infinite sum is possible – in a letter Goldbach wrote to Daniel Bernoulli on November 4th, 1723 (*Correspondance* (1843), t. II, p. 186). However Goldbach does not discuss the convergence or divergence of the series and (contrary to the claim in Yushkevich / Kopelevich 1994, p. 132) does not attribute this problem to Jacob Bernoulli.

Euler's claim at the end of E. 72 that the sum of the reciprocals of all primes (here 1 is excluded) is "so to speak the logarithm of the harmonic series", that is, equal to $\log\log\infty$, seems to amount – again interpreted in the most natural way – to $\sum_{p\le x}\frac{1}{p} \sim \log\log x$; in particular, $\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$ diverges.

In Legendre's *Théorie des nombres* Euler's asymptotic equations show up in the following form (Legendre 1830, 4ème Partie, § VIII, art. 397):

$$\sum \frac{1}{q} = l(lG - 0.08366) + C,$$
$$\prod\Big(1-\frac{1}{q}\Big) = \frac{A}{lG - 0.08366},$$

where the sum and the product are over all primes $< G$, l denotes the natural logarithm, and $A \approx 1.104$ and C denote unknown constants. Legendre refers to Euler only in connection with the formula

$$\sum_{p\ge 3}\frac{1}{p^2} \approx 0.202247,$$

which he credits to Euler: in fact, in his *Introductio*, t. I, § 282, Euler computed approximations to $\sum p^{-n}$ for all even integers $2 \le n \le 36$.

Legendre's empirical formulae were proved by Chebyshëv (1852), and then by Mertens (1874b), who remarked that Chebyshëv's proof "did not remove all doubts". In fact, Mertens proved

$$\prod_{q\le x}\Big(1-\frac{1}{q}\Big)^{-1} = \mathrm{e}^{\gamma+o(1)}\log x,$$
$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sum_{q\le x}\frac{1}{q} - \log\log x\Big) = 0.261\,497\,212\,8\ldots,$$

where $\gamma = 0.577\,215\,664\ldots$ is Euler's constant.

[5] Cf. supra n° 70, notes 10 and 18.

It is still not known whether there are infinitely many primes of the form a^2+1. Hardy and Littlewood conjectured in 1923 that the number of primes of the form a^2+1 is asymptotic to $c\sqrt{n}/\log n$; for heuristics supporting this conjecture, see Conrad 2003. Iwaniec proved in 1978 that there are infinitely many integers a such that a^2+1 is the product of at most two primes (see also Guy 2004, Section A1). Moreover, there *are* infinitely many primes of the form a^2+b^4 (see Friedlander / Iwaniec 1998).

[6] The table that follows contains three mistakes: $a = 844$ should be deleted since $844^2+1 = 712\,337 = 757\cdot 941$; $a = 1080$ should be added since $1080^2+1 = 1\,166\,401$ is prime; $a = 1234$ should be deleted since $1234^2+1 = 1\,522\,757 = 421\cdot 3617$.
A similar table "Numeri primi formae $aa+1$" was published in the Petersburg *Novi Commentarii* for 1762/63 (E. 283). The first of the errors just mentioned was already corrected in this publication, the third was rectified by the editor of *Opera Omnia* I/3, Ferdinand Rudio (see his notes (2), p. 23, and (1), p. 42), whereas the second seems to have been noticed only by Golubev in 1956.

[7] One such table that Euler owned – it appears in the *Catalogus librorum meorum* in his "Notebook VI" – is J.G. Krüger's *Gedancken von der Algebra, nebst den Primzahlen von 1 biß 1000000* (1746); in spite of the title's (possibly misprinted) claim, the last prime listed there is 100 999.

[8] The value $a = 28$ should be added to the list that follows since $28^4+1 = 614\,657$ is prime.

[9] Goldbach had already affirmed this in 1743, without indicating a proof but stating it to be very easy: cf. nº 73, note 7, and Goldbach's reply nº 164.

[10] Cf. nº 158, note 9, and nº 162, note 2.

[11] Cf. nº 162, note 4.

[12] Euler's reference points to his first examples of "singular solutions" of differential equations in his *Mechanica*, vol. II, *Scholia* § 268, § 303 or § 335.
See also nº 147, note 3, and the references quoted there.

[13] Cf. nº 162, note 5.
Strangely Euler does not mention here his correspondence with Winsheim from 1748, although his letters must have had a considerable influence on Winsheim's paper. In R 2814 from November 9th, 1748, Euler explains how he has proved that $M_{31} = 2^{31}-1$ does not have any prime factors < 2000: its prime factors, he writes, necessarily have the form $62n+1$. He then lists the primes < 2000 of this form and shows, as an example, the necessary calculations for $p = 1303 = 42\cdot 31+1$. (The claim that M_{31} does not have any prime factors less than 2000 will resurface in nº 165). In his next letter to Winsheim, R 2816 from December 21st, 1748, Euler lists the following factors q of Mersenne numbers M_p:

p	11	23	29	37	43	47	53	73	79	83
q	23	47	233	223	431	2351	6361	439	2687	167

Euler has by now checked that $M_{31} = 2^{31}-1$ is not divisible by any prime $< 50\,000$, and since $\sqrt{M_{31}} \approx 46\,341$, this proves that M_{31} is prime. Euler has also verified that the remaining Mersenne numbers M_p with $p < 100$ do not have any factor below 10 000.
In his published note E. 461 to Johann III Bernoulli from 1771, Euler will state that he has verified the primality of M_{31} by checking all possible factors of the form $248n+1$ or $248n+63$ up to 46 339. Already in 1748, he had known that the factors q must have the form $62n+1$; now he has seen that, in addition, $q \mid (2^p-1)$ implies that 2 is a square mod q, which, by the "second supplementary law" of quadratic reciprocity, implies that $q \equiv \pm 1 \bmod 8$. If Euler's 1771 account is true, then the argument he gave in 1748 had a gap since, at that time, he was not yet able to prove the second supplementary law.

[14] The reason for this discrepancy with the letter R 2816 to Winsheim (see *supra* note 13) is not clear: Had Euler forgotten what he had found four years earlier, had he become suspicious of his own argument, or did he not want to disclose Winsheim's dependence on him to the Petersburg academicians after his colleague's death in March 1751?

[15] Euclid had already proved that $N_p = 2^{p-1}(2^{p-1}-1)$ is a perfect number if $M_p = 2^p-1$ is prime. Ibn al-Haytham (see Rashed 1989) claimed and attempted to prove that, conversely, every perfect number has this form. Descartes, in a letter to Mersenne dated November 15th, 1638, claimed he could prove that every even perfect number has Euclid's form, and that

every odd perfect number must have the form ps^2 for some prime p; the same claim was later made by Frénicle in a letter to Huygens, who added the condition that p must have the form $4n+1$ (cf. *Œuvres de Fermat*, t. III, p. 567). Euler proved these claims in E. 798. The existence of odd perfect numbers remains an open problem, although a host of conditions are known which an odd perfect number would have to satisfy.

The seven perfect numbers N_p known to Euler at this point are those with $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$; the last two had been discovered by Cataldi in 1588 (see Cataldi 1603). In the *Praefatio Generalis* to his *Cogitata*, § XIX, Mersenne had claimed that N_p is perfect for $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$. The four new instances in this list are all primes p with $|p - 2^m| \leq 3$ (where $5 \leq m \leq 8$) for which $2^p - 1$ has no small factor; evidently Mersenne had concluded from the limited empirical evidence available to him that $2^p - 1$ should be prime if p is prime and differs by at most 3 from a power of 2. Actually only two of Mersenne's "hunches" – those about M_{31} and M_{127} – were right: M_{67} and M_{257} are in fact composite, and Mersenne missed the primes M_{61} (which is even included by his guessed rule), M_{89} and M_{107}.

Around March 1640, Frénicle wrote a letter to Fermat challenging him to name a perfect number with 20 digits or more; since $N_{31} = 2\,305\,843\,008\,139\,952\,128$ has 19 decimal digits, Frénicle must at least have suspected that M_{31} is prime. In June 1640, Fermat writes to Mersenne and tells him that the number N_{37}, contrary to what he had previously thought, is not perfect since M_{37} is divisible by 223.

In E. 26, Euler had claimed that N_p is perfect for the seven values given above, and as well for $p = 31$, 41 and 47; only the first of these is correct (see *supra* note 13 and nº 162, note 5).

164

Goldbach to Euler

Petersburg, November (7th) 18th, 1752

Sir,

you kindly wrote me some time ago that the books which Mr. Spener addressed to me were already dispatched from Berlin in July;[1] however, up to this moment I do not know to which merchant in Petersburg they were addressed or if they were even left behind at Lübeck.

As it is not known to me by what shortcuts you obtained the difference of the series $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+\dots$ and $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{[29]}+\dots$, if you have already published the method, please tell me where it is to be found.[2]

I take it to be certain that the number of all primes of the form a^2+1 is infinitely large,[3] even if I cannot immediately prove it, and I do not think your reason for doubting it – that the number of primes of the form a^2+1 is infinitely smaller than the number of all primes – is at all relevant, since no infinite number can be taken so small that it is not infinitely greater than some other infinite.[4]

Mersenne assuredly did not say that only ten perfect numbers are possible, as he himself indicates eleven, among which your eighth one, Sir, is however not comprised;[5] he does not state either that the number of perfect numbers is finite, but only that no range of numbers can be indicated which is so large that it could not be *devoid* of perfect numbers. You will be able to see that for yourself – in case tome II of the *Commentarii* has still not arrived – from the general preface to Mersenne's *Cogitata Physico Mathematica*, § 19, as cited by Mr. Winsheim.

As regards Leuneschloß's *Paradoxa mathematica*, they were printed at Heidelberg in 1658, in octavo; however, I never possessed this book myself, but borrowed the copy which I read in 1716 from the Old City Library at Königsberg, and returned it there before I departed for the last time in 1718, so it is impossible that you could have seen the book at my place in Petersburg. On the other hand, I remember – though not with utter certainty – that some years ago you wrote me from Berlin you had got the book, along with Bongo's 1591 list, from the Royal Library.[6] I am not aware of anything further about this Leuneschloß than that I read somewhere he had been a professor at Heidelberg; if I am not mistaken, he is also referred to by some as "Luneschlos", so his name should have to be looked up in the encyclopedias in both spellings. It seems that he found his paradox on perfect numbers in Mersenne and afterwards, when writing it down from memory, deviated from Mersenne's true meaning.

I had already observed in one of my earlier letters that no algebraic formula can yield only prime numbers;[7] indeed, taking the formula to be, for example, $x^3 + bx^2 + cx + e$, it is obvious that whenever x is a multiple of the absolute term e, then (and consequently infinitely often) the formula will yield a non-prime number; but if e were to equal 1, I merely substitute $x + p$ for x, as then the formula is changed into

$$\begin{array}{llll} x^3 & +3px^2 & +3p^2x & +p^3 \\ & +bx^2 & +2bpx & +bp^2 \\ & & +cx & +cp \\ & & & +1 \end{array}$$

and whenever x is a multiple of the number $p^3 + bp^2 + cp + 1$, the formula yields a non-prime number.[8] Now since this case where the highest power of x equals 3 can be extended to all other whims of nature, whatever the power of x is, it is impossible to indicate an algebraic series in which there should not occur infinitely many terms consisting of non-prime numbers.

I have yet another small theorem to add, which is quite new and which I take to be true until the contrary is proved: Any odd number equals the sum of twice a square and a prime, or: $2n - 1 = 2a^2 + p$, where a is to signify a whole number, including 0, and p a prime number; for example, $17 = 2 \cdot 0^2 + 17$; $21 = 2 \cdot 1^2 + 19$; $27 = 2 \cdot 2^2 + 19$, and so on.[9] With a dutiful recommendation to your dearest family, I remain, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Nov. 18th, 1752.

[1] Cf. nº 161, note 9.
[2] Cf. nº 163, note 2.
[3] Cf. nº 163, note 5.
[4] Cf. nº 163, note 4.

[5] Cf. n° 163, note 15. Goldbach errs: Euler's eighth perfect number

$$2^{30}\left(2^{31}-1\right) = 2\,305\,843\,008\,139\,952\,128$$

indeed figures in Mersenne's list.

[6] Euler had really borrowed and read both books in 1741 at Goldbach's suggestion: cf. n° 39, notes 5–6, and n° 40, notes 11–12.

[7] Cf. n° 163, note 9.

[8] Goldbach's argument breaks down if the proposed factor equals 1, but an appropriate choice of p is obviously always possible.

[9] Here Euler noted in the margin: "ist wahr biß 550" ("[this] is true up to 550"); see his reply n° 165, note 3. In n° 167, Euler finally writes that he has now verified the conjecture for all numbers up to 2500.
In 1856, Moritz Stern and his students checked the conjecture up to 9000 and found the two counterexamples 5777 and 5993 (see Stern 1856). Hodges verified in 1993 that these remain the only counterexamples up to 10^6. Hardy and Littlewood (1923) conjectured that every sufficiently large odd number can be written as the sum of a prime and the double of a square. The weaker statement that every number is the sum of a prime and two squares was proved by Linnik in 1960.

165
Euler to Goldbach
Berlin, December 16th, 1752

Sir,

I was most annoyed to learn that the books which you had ordered had been left behind on the way;[1] I at once confronted Mr. Spener with it and saw from his answer this had happened by what was more than a slight negligence. I especially regret that these books will now have to wait till next summer. In future I shall engage another bookseller for this kind of commission, who shall, as I am assured, apply every possible care.

I am far from being able to indicate the true sum of the series

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}\ldots;$$ [2]

I just calculated this sum by an approximation the quality of which I do not recall any more, my sole intention being to find out whether the sum might perhaps be simple, as I had already noticed it was nearly $\frac{1}{3}$.

Your theorem that any odd number $2n-1$ is the sum of a doubled square $2a^2$ and a prime number p, captivated all my attention; putting it to the test, I found that it is indeed true for all numbers $2n-1$ up to 1000. By virtue of the same one can actually assert that, the number $2n-1$ being proposed, there is always a doubled square $2a^2$ so that $2n-1-2a^2$ results to be a prime number.[3]

In order to discover a proof of this fact it occurred to me whether one could perhaps prove that the greater the number $2n-1$, the more prime numbers should have to arise from the form $2n-1-2a^2$. For since the theorem is true for small numbers, one could then conclude the more safely for large numbers. I consequently observed for any non-prime number $2n-1$ how many prime numbers arise from it, but soon discovered that even if $2n-1$ is a very large number, it still can happen that just one single prime number occurs. For example, if $2n-1 = 785$, then $785 - 2a^2$ is a prime in a unique case, namely when $a = 18$. The same thing also happens when $2n-1 = 1703 = 13 \cdot 131$, the case being $1703 - 2 \cdot 21^2 = 821$; so if 821 were not a prime number, the theorem should not hold here. I have examined many other, even larger numbers, for which I saw in advance that the prime numbers arising in this way must be scarce, but have not been able to discover an exception. I therefore believe this theorem, but nonetheless should not swear by it.

Another quite similar theorem occurred to me, namely, that some power of 2 could always be subtracted from a non-prime odd number $2n-1$ in such a way that the remainder is a prime. Putting this to the test, it was found to be true up to very large numbers; but when I arrived at $959 = 7 \cdot 137$ an exception appeared, since $959 - 2^a$ can in no way yield a prime.[4]

Recently the following negative theorems occurred to me:

I. If n is not a number of the form $\square + 2\,\triangle$, then $4n+1$ is certainly not prime.

II. If n is not a number of the form $\square + \triangle$, then $8n+1$ is certainly not prime.

III. If n is not a number of the form $2\,\triangle + \triangle$, then $8n+3$ is certainly not prime.

The latter two are based on the reason that if $8n+1$ or $8n+3$ is prime, then it is also contained in the form $2\,\square + \square$, as, e. g., $3 = 2 \cdot 1 + 1$, $11 = 2 \cdot 1 + 9$, $17 = 2 \cdot 4 + 9$, $19 = 2 \cdot 9 + 1$. However I cannot prove this;[5] notwithstanding this I take it to be as certain as that $4n+1 = \square + \square$ whenever $4n+1$ is prime, which I have proved.[6]

I am most humbly obliged to you, Sir, for the information you kindly gave me about Leuneschloß. I was mistaken in thinking I had seen the book itself at your place, Sir; probably just some excerpts which you kindly communicated to me were involved. Here I have not been able to find the book. I do not either recall having read Bongo's book, but shall look it up at the local library.[7] I still have not received tome II of the *Novi Commentarii* in order to check what the late Mr. Winsheim wrote about perfect numbers.[8] In my opinion no perfect numbers can be said to be certain but the following:

$$\text{I. } 2^0\,(2-1) = 1; \quad \text{II. } 2^1\,\big(2^2-1\big) = 6; \quad \text{III. } 2^2\,\big(2^3-1\big) = 28; \quad \text{IV. } 2^4\,\big(2^5-1\big);$$

$$\text{V. } 2^6\,\big(2^7-1\big); \quad \text{VI. } 2^{12}\,\big(2^{13}-1\big); \quad \text{VII. } 2^{16}\,\big(2^{17}-1\big); \quad \text{and VIII. } 2^{18}\,\big(2^{19}-1\big);$$

since with respect to the subsequent formulae 2^p-1 (where p is a prime) one cannot be certain whether they are prime or not. The next one should be $2^{30}\,\big(2^{31}-1\big)$, if indeed $2^{31}-1$ were a prime number; but this can be neither asserted nor examined. That much at least is certain that the number $2^{31}-1$ can have no other divisors than those contained in the formula $62n+1$; from this I found out that no divisor smaller than 2000 occurs.[9]

On occasion of de Moivre's equations I discovered many similar formulae, for which the root can be indicated notwithstanding the fact that the equation has no rational divisors.[10]

For example, the equation

$$x^5 = 5\alpha x^2 + 5\beta x + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^3}{\beta}$$

has the root

$$x = \sqrt[5]{\frac{\beta^2}{\alpha}} + \sqrt[5]{\frac{\alpha^3}{\beta}};$$

thus $x^5 = 10x^2 + 10x + 6$ has the root $x = \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{4}$. Moreover, the sixth-degree equation

$$x^6 = 6x^4 + 28x^3 + 18x^2 - 12x + 2$$

has

$$x = \sqrt[6]{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt{2}.$$

These cases appear the more remarkable since these equations cannot be dissected into (rational) factors.

Then I also perceived that, if a formula such as

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4}$$

is proposed, which is to be cleared of radical signs, this can be done without going beyond the fifth power of x. This seems to be paradoxical, as there are four radical signs of the fifth order, which cannot be eliminated by a single operation of raising to the fifth power. However, the following rational fifth-degree equation results:

$$x^5 = 5s\,(AD+BC)\,x^3 \begin{array}{l} +\,5As\,(AC+BB) \\ +\,5Ds^2\,(CC+BD) \end{array} xx \begin{array}{l} +\,5A^3Bs \\ +\,5s^2\left(AC^3+B^3D\right) \\ -\,5s^2\left(A^2D^2+B^2C^2\right) \\ +\,5ABCDs^2 \\ +\,5CD^3s^3 \end{array} x$$

$$\begin{array}{l} +\,A^5s + B^5s^2 + C^5s^3 + D^5s^4 \\ -\,5ACs^2\left(A^2D+B^3\right) \\ +\,5ABs^2\left(ABD+AC^2\right) \\ -\,5BDs^3\left(C^3+AD^2\right) \\ +\,5CD^2s^3\left(B^2+AC\right) \end{array} .$$

Consequently, the root of this equation is again

$$x = A\sqrt[5]{s} + B\sqrt[5]{s^2} + C\sqrt[5]{s^3} + D\sqrt[5]{s^4};$$

and since the above equation is general, I think that all roots of fifth-degree equations are contained in this form, and in any instance that is proposed the matter depends on determining the letters A, B, C, D and s, whereupon s will ultimately be determined by an equation of degree only 4, as I suspect. I further conclude from this that, any equation

$$x^n - \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} - \gamma x^{n-3} + \delta x^{n-4} - \varepsilon x^{n-5} \ldots = 0$$

being proposed, the root will always have the form

$$x = \frac{1}{n}\alpha + A\sqrt[n]{s} + B\sqrt[n]{s^2} + C\sqrt[n]{s^3} + D\sqrt[n]{s^4} + \ldots;$$

this much at least is certain that for $n = 2, 3$ or 4, the determination of the variable s depends on an equation of order 1, 2 or 3; from this one can infer that in general s is determined by an equation of order $n-1$.

In my papers I found yet another theorem which you once communicated to me, Sir, namely that any oddly even number $4a+2$ always equals a sum of two prime numbers of the form $4n+1$, e. g., $6 = 1+5$, $10 = 5+5$, $14 = 1+13$, $18 = 1+17 = 5+13$, $22 = 5+17$, $26 = 13+13$, $30 = 1+29 = 13+17$, $34 = 5+29 = 17+17$; here I observe that not only no exception occurs for small numbers, but for larger ones it is all the less to be expected.[11]

Indeed the numbers for which such a dissection is possible only in one way are 2, 6, 10, 14, 22, 26, 38, 50, 62, 86, and from here on to 150 – and even up to 230 – there is no additional case; it is all the less to be suspected among those that follow since the number of resolutions always increases; thus 210 can be resolved in nine ways.

With this I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Dec. 16th, 1752.

[1] Cf. nº 164, note 1.
[2] Cf. nº 164, note 2.
[3] Cf. nº 164, note 9.
[4] Romanov (1934) proved that the integers of the form $2^n + p$ have a positive lower density (it is apparently an open problem whether these numbers have a density). Erdős (1950) showed that there exist arithmetic progressions of odd integers, none of which has the form $2^a + p$. Crocker (1971) proved that there are infinitely many odd integers which are not of the form $p + 2^a + 2^b$. Granville and Soundararajan (1998) showed that if every odd integer is the sum of a squarefree number and a power of 2, then there are infinitely many primes p for which $p^2 \nmid 2^{p-1} - 1$. See also Guy 2004, Section A19.
[5] If $p = 8n+1$ is prime, then $p = a^2 + 2b^2$. Here a is odd and b is even, hence $8n+1 = (2x+1)^2 + 8y^2$, and so $n = y^2 + \dfrac{x^2+x}{2}$ is the sum of a square and a triangular number.
In E. 256, Euler showed that odd divisors of numbers a^2+2b^2 have the form $8n+1$ or $8n+3$, and that all such divisors can be represented by the form a^2+2b^2. The converse, namely that primes $8n+1$ and $8n+3$ can be represented as a^2+2b^2, is proved in E. 449, § 85 and 88.
For another proof that primes of the form $p = 8n+1$ are represented by x^2+2y^2, see *infra* nº 173.

[6] Cf. nº 138, note 2, and E. 241.
[7] Cf. nº 164, note 6.
[8] Cf. nº 162, note 5.
[9] See, however, nº 163, notes 13 and 14.
[10] In the following, Euler resumes an investigation from the 1730s, when he had tried to generalise the solution of 3rd- and 4th-degree equations by radicals. De Moivre's examples (published in the *Philosophical Transactions* for 1707) of irreducible 5th-degree equations that could yet be solved by radicals had motivated Euler to conjecture, in E. 30, a general procedure by which the degree of any algebraic equation was to be reduced by "resolvents" (a term newly coined in that paper).
The "de Moivre quintic" is the equation $x^5 + 5x^3 + 5x = t$. More generally, one can consider equations of the form $(x + \sqrt{x^2 + 4a}\,)^5 + (x - \sqrt{x^2 - 4a}\,)^5 = 2^k t$, which is solvable for all choices of the parameters a and t (and even with the exponent 5 replaced by an arbitrary positive integer). The quintic $x^5 + 5ax^3 + 5ax + b = 0$ has discriminant $5^5(4a^5 + b^2)^2$. Setting $\gamma = 4a^5 + b^2$, its roots are given by

$$x_1 = \frac{\sqrt[5]{\sqrt{\gamma} - b} - \sqrt[5]{\sqrt{\gamma} + b}}{\sqrt[5]{2}},$$

$$x_2 = -\frac{\zeta\sqrt[5]{\sqrt{\gamma} - b} + \zeta^4\sqrt[5]{\sqrt{\gamma} + b}}{\sqrt[5]{2}}, \qquad x_4 = \overline{x_2},$$

$$x_3 = \frac{\zeta^2\sqrt[5]{\sqrt{\gamma} - b} + \zeta^3\sqrt[5]{\sqrt{\gamma} + b}}{\sqrt[5]{2}}, \qquad x_5 = \overline{x_3},$$

where ζ is a primitive 10th root of unity. See also Spearman / Williams 1996.
Here Euler tries to substantiate the ideas he had explicitly left open at the end of E. 30 "for others who like such tasks or for himself at a later time, for now content only to have perhaps shown an apt and practicable way" ("[a]liis ... quos huiusmodi occupationes iuvant ... vel mihi ad aliud tempus relinquo hoc solo nunc contentus me fortasse idoneam atque genuinam viam ostendisse": O. I/6, p. 19). The calculations Euler presents here to Goldbach were elaborated further in his paper E. 282, sent to the Petersburg Academy in 1759 and finally printed in 1764.
[11] This strong version of the Goldbach conjecture (where 1 is again counted as a prime) evidently implies the Four Squares Theorem, as Euler notes in E. 566, where he also collects numerical evidence for it. Desboves (1855) formulates and checks for $n \leq 2\,500$ the even stronger conjecture that every number of the form $4n + 2 \geq 6$ is both the sum of two primes $p \equiv 1 \bmod 4$ and the sum of two primes $p \equiv -1 \bmod 4$. Desboves also links the question to a variant of "Bertrand's postulate" (which had by then been proved by Chebyshëv), namely the assertion that for $n > 5$ there are always at least two primes between n and $2n$.

166

Goldbach to Euler

Moscow, March (1st) 12th, [1753][1]

Sir,

I am very glad to hear that my theorem "any odd number can be split up into the double of a square and a prime number" has been found to be correct up to the number 1000 and no exception presented itself even in greater numbers; all the same it must still be taken for a mere conjecture, and there is some reason to doubt that its proof, if it were indeed possible, will ever be discovered.[2]

As you report, Sir, that you wanted to try whether from a *non-prime* odd number a power of 2 can always be subtracted in such a way that a prime number is left, I conclude from the restriction *non-prime* that you found the statement to be false for prime numbers, and should like to learn for which prime number this can be seen; actually the same idea occurred to me several years ago with respect to prime numbers, but I did not continue it further than up to 89.[3]

I had not observed earlier that all prime numbers of the form $8n+1$ should equal $2\,\Box+\Box$;[4] but upon closer inspection I discovered that, if $4n+1$ is a prime number, then it equals $d\,\Box+\Box$, where d denotes an arbitrary divisor of the number n, by which, hopefully, the bounds of the theorems on the resolution of prime numbers into squares shall be somewhat extended.[5]

It is quite certain that as early as 1741 you borrowed both Bongo's treatise and Leuneschloß's *Paradoxes* from the Berlin library and read them, Sir, since you actually reported this to me yourself in detail on September 9th of the same year.[6]

Your reflections on the determination of a fifth-degree root appear so well-founded and sufficient to me that, if the root cannot be obtained in this way, I very much doubt that anybody will succeed in discovering it. As you observe, Sir, everything depends on whether the quantity s can be determined by a fourth-degree equation, an investigation which requires an iron patience.[7]

I recall quite well that no even number has yet been indicated which is not the sum of two primes, but it had slipped my mind that every oddly even number is the sum of two primes of the form $4n+1$;[8] I think it is curious that between 86 and 230 no unique cases occur, since up to 86 there are already ten to be found. On the other hand, for the theorem $2n-1=2a^2+p$ many unique cases occur, even including some prime numbers: thus $17=2a^2+p$ uniquely for $a=0$, similarly 127 for $a=0$,[9] and it almost seems as if the number p which belongs to some unique case does not occur again in another unique case: for example, $57=2\cdot 5^2+7$ is a unique case since in the formula $2a^2+p$ no other number than 7 can be assumed for p; but I have to leave open whether besides this there are other unique cases where $2n-1=2a^2+7$, and it might indeed not even deserve further investigation.[10]

In my notes I found that as far back as about thirty years ago, I observed in what way one can have the equality

$$An^2 - Bn^4 + Cn^6 - Dn^8 + \ldots = n^{\sqrt{2}},$$

where A, B, C, etc. are expressed by series of rational numbers which, taken separately, have a sum that is more than finite; I am however uncertain if perhaps I already reported this to you at another time, Sir, or if it has even been printed in the *Commentarii*.[11]

As I suppose that Mr. Spener will now try to have the books that were left behind at Lübeck transported here by the first ships, I am asking on the enclosed list for some other books to be added to the former.[12]

Although I had the pleasure several times to learn from the French journals that you received the prize of the Paris *Académie des Sciences*, I do not really know how many times this was the case; I should like to be informed about this.[13] I remain with special respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, March 12th, 1752.[14]

[1] In spite of Goldbach's erroneous indication of the year (cf. *infra* note 14), this letter must have been written in 1753, as proved both by its place in the dialogue between Euler and Goldbach and by the fact that Goldbach returned to Moscow only in January 1753; this was already taken into account in the Fuß and Yushkevich-Winter editions.
In the upper margin of the original there is a note by a 19th-century hand (possibly Fuß's): "Dieser Brief ist, wie aus dem Copirbuch zu ersehen, 1753 geschrieben" ("As can be seen from the copybook, this letter was written in 1753"). The reference to a "copybook" is probably not to Goldbach's personal correspondence book, which seems to have been discontinued by 1750 (see Section 3.1 of the Introduction, note 3), but to some mailing log of his office.

[2] Cf. n° 165, note 3.

[3] Cf. n° 165, note 4.
Here Euler noted between the lines: "bey 127 trifft es nicht ein" ("this is not true for 127"). See his reply n° 167, note 2.

[4] Cf. n° 165, note 5.

[5] In his reply n° 167 Euler shows that this assertion can be upheld only if, in $4dm+1 = x^2+dy^2$, the numbers x and y are allowed to be rational. Variants and extensions of this conjecture are again discussed in n° 180–182. Euler generalised it still further when he proposed in E. 556 the following conjecture: If the equation $fx^2 + gy^2 = sz^2$ is solvable in integers for $s = h$, then it is also solvable whenever s is a prime number of the form $s = h \pm 4fg$. Since $1 = x^2 + dy^2$ is trivially solvable, Euler's conjecture implies that $x^2 + dy^2 = sz^2$ has solutions whenever $s = 1 + 4md$. On the totality of Euler's contributions to this question, which ultimately led to Gauss's Principal Genus Theorem, see Frei 1979 and Lemmermeyer 2007, p. 531–533.

[6] Cf. n° 164, note 6, and n° 165, note 7. Evidently Goldbach was able to verify in his personal correspondence files what Euler had written twelve years earlier in n° 40.

[7] Cf. n° 165, note 10.

[8] Cf. n° 165, note 11.

[9] This is not correct: 127 can also be written in the form $2a^2 + p$ as $2 \cdot 3^2 + 109$ or $2 \cdot 7^2 + 29$. Goldbach may have meant to write 137, which indeed has no decomposition of this form for $p \neq 0$. Neither Euler nor the earlier editors of the correspondence noticed this mistake.

[10] Cf. nº 164, note 9.
Stern (1856) found that the primes less than 9000 represented uniquely in the form $2a^2 + p$ are $p = 17$, 137, 227, 977, 1187 and 1493; Hodges (1993) verified that no more "unique cases" occur up to 10^6.

[11] Indeed Goldbach had presented several methods for interpolating series in his paper *De terminis generalibus serierum* printed in 1732; he had also discussed them in his 1729 correspondence with Daniel Bernoulli (see *Correspondance* (1843), t. II, p. 280–304), then certainly accessible to Euler. Applying Goldbach's interpolation method to the geometric series leads to a result of the form proposed here, as can be seen from the "reconstruction" in Euler's reply (nº 167, note 5); however – as Bernoulli had already pointed out – the practical utility of the series is limited, since its coefficients are given by divergent series.

[12] Cf. nº 165, note 1. The enclosed order list has not been preserved.

[13] For a list of the prizes Euler won at the Paris Académie des Sciences, see his reply nº 167, note 8.

[14] The year "1752" indicated by Goldbach is in error and was corrected with a reference sign in the margin of the original – probably by the same 19th-century hand that wrote the note at the head of the letter quoted in note 1.

167
Euler to Goldbach
Berlin, April 3rd, 1753

Sir,

besides most humbly congratulating you on your fortunate arrival at Moscow, I have the honour to report that Mr. Spener firmly promised to dispatch by the first ships the books left behind and to add to them those requested in your last letter.[1] It will, though, be necessary to address them to somebody at Petersburg, and as you did not give me any instructions about that, I shall tell Mr. Spener to address them to Mr. Köppen.

Regarding the idea whether possibly from any odd number a power of 2 could be subtracted in such a way that a prime number is left, I added the condition "from any non-prime odd number" because I saw at once that this does not work for the prime number 127; but since it does not hold either for the non-prime number 959, the entire conjectured theorem must be dropped.[2]

With regard to the discovery you made upon closer inspection, Sir, that, if $4n+1$ is a prime number and d any divisor of n, one always has $4n+1 = da^2+b^2$, I am very eager to learn whether you can prove this theorem, since by this the bounds of the theorems on the resolution of prime numbers into squares should indeed be enormously extended.[3] For my own part, I observed this same theorem a long time ago and am as convinced of its truth as if I had a proof for it. Thus, just as $4 \cdot 1m + 1$ always equals $a^2 + b^2$, which I am able to prove, it is equally certain that $4 \cdot 2m+1 = 2a^2+b^2$, $4 \cdot 3m+1 = 3a^2+b^2$, $4 \cdot 5m+1 = 5a^2+b^2$, etc.; however, I still lack the proof for this. A particular circumstance must be noted here, namely that the resolution can sometimes not be done in whole numbers. Thus even if $4dm+1$ is a prime number, there are cases where this number $4dm+1$

cannot possibly be brought to the form $da^2 + b^2$ in whole numbers. Nevertheless the theorem still remains true, since the resolution is always possible in fractions; this is all the more remarkable since no number can be brought to the forms a^2+b^2, $2a^2 + b^2$, $3a^2 + b^2$ and some others in fractional numbers unless it is contained in the same form in whole numbers. The following are instances of this kind:

I. $4 \cdot 22+1 = 89$ is prime; so 89 ought to be contained in the form $11a^2+b^2$, but this is not possible in whole numbers; however, in fractions $89 = 11\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$ or also $89 = 11\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{3}\right)^2$.

II. $4 \cdot 28 + 1 = 113$ is prime; so 113 ought to be contained in the form $14a^2 + b^2$, which is impossible in whole numbers. However, in fractions one has $113 = 14\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{31}{3}\right)^2$.

III. $4 \cdot 34 + 1 = 137$ is prime, and yet one does not have $137 = 17a^2 + b^2$ in whole numbers; but in fractions $137 = 17\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{31}{3}\right)^2$.

IV. $4 \cdot 57 + 1 = 229$ is prime, and yet one does not have $229 = 19a^2 + b^2$ in whole numbers; but in fractions $229 = 19\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2$.

Up to here the denominators were only 2 or 3; but there also are cases where no solution in fractions of this kind takes place and larger denominators must be used. For example, $4 \cdot 3 \cdot 61+1 = 733$ is prime, and yet one does not have $733 = 61a^2+b^2$ in whole numbers; in the smallest possible fractions, $733 = 61\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{127}{5}\right)^2$.

Consequently the theorem must be expressed like this: If $4n + 1$ is a prime number and d a divisor of n, then this number $4n + 1$ is sure to be contained in the form $da^2 + b^2$, if not in whole numbers, then at least in fractions; and one will have to take this circumstance into account for the proof.

As the cases where $2n-1$ equals $2a^2+p$ just in a unique way occur so scarcely, it should indeed be a troublesome task to investigate whether one might have $p = 7$ in another unique case besides $57 = 2 \cdot 5^2 + 7$; at least I found none such up to 2500.[4] If this could be asserted, the following theorem should follow:

If $2a^2+p$ is the sum of a doubled square and a prime number in a unique way, $2b^2 + p$ will certainly be such a sum in more than one way unless $b = a$.

I remembered very well that you communicated the development of $n^{\sqrt{2}}$ to me a long time ago, Sir, and I also know that it must be among my papers;[5] however it is very difficult for me to pick something out among them, and I could hardly recall the basis of this development until by chance the idea of interpolation occurred to me again. Now since, the series $\overset{0}{a}, \overset{1}{b}, \overset{2}{c}, \overset{3}{d}, \overset{4}{e}$, etc. being proposed, the term which corresponds to the index x is

$$\begin{aligned}(1-1)^x a \quad &+ \quad (1-1)^{x-1} xb + (1-1)^{x-2} \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} c \\ &+ \quad (1-1)^{x-3} \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} d + \ldots,\end{aligned}$$

the term corresponding to the index $\frac{1}{2}$ equals

$$a\sqrt{1-1}+\frac{b}{2\sqrt{1-1}}-\frac{1\cdot 1\cdot c}{2\cdot 4\ (1-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1\cdot 1\cdot 3d}{2\cdot 4\cdot 6\ (1-1)^{\frac{5}{2}}}-\dots$$

If one now substitutes n^1, n^2, n^4, n^8, n^{16}, $\dots$ for a, b, c, d, e, $\dots$, $n^{\sqrt{2}}$ is the term corresponding to the index $\frac{1}{2}$, therefore

$$n^{\sqrt{2}}=n\,(1-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1n^2}{2\,(1-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1\cdot 1n^4}{2\cdot 4\ (1-1)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1\cdot 1\cdot 3n^8}{2\cdot 4\cdot 6\ (1-1)^{\frac{5}{2}}}-\dots$$

Defining, since the first term $n\,(1-1)^{\frac{1}{2}}$ equals 0,

$$n^{\sqrt{2}}=An^2-Bn^4+Cn^8-Dn^{16}+\dots,$$

one has

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\,(1-1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dots\right)\\
B &= \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\,(1-1)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dots\right)\\
C &= \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,(1-1)^{-\frac{5}{2}}=\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(1+\frac{5}{2}+\frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\dots\right)\\
& \text{etc.;}
\end{aligned}$$

these are no doubt your series of rational numbers, Sir, which, taken separately, have a sum that is more than finite.

With respect to the series $An^2-Bn^4+Cn^8-Dn^{16}+\ \dots\ =n^{\sqrt{2}}$ it deserves to be noted that

$$\begin{aligned}
An^2\left(2-\sqrt{2}\right) &- Bn^4\left(4-\sqrt{2}\right)+Cn^8\left(8-\sqrt{2}\right)\\
&- Dn^{16}\left(16-\sqrt{2}\right)+En^{32}\left(32-\sqrt{2}\right)-\dots=0,
\end{aligned}$$

whatever number n is assumed to be.

On occasion of the above considerations the following problem also occurred to me:

Determine a sum of two squares x^2+y^2 which is also contained in the form $2a^2+b^2$.

Solution: Take $x=p^2-q^2$ and $y=r^2\pm 2pq$, then

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= \left(p^2-q^2\right)^2+\left(r^2\pm 2pq\right)^2=\left(p^2+q^2\right)^2\pm 4pqr^2+r^4\\
&= \left(p^2+q^2-r^2\right)^2+2\,(p\pm q)^2\,r^2,
\end{aligned}$$

which is what was asked for.[6]

You kindly enquire, Sir, how many times I was awarded the prize of the Paris Academy.[7] As I did not note this down and did not keep copies of my papers either, I cannot exactly report either the years or the part of the prize that I received each time. However the questions for which I carried off the prize were: I. On the Nature of Fire, II. On the Capstan, III. On the Tides of the Sea, IV. On the Theory of the Magnet, V. On Observing the Hour at Sea, VI. On the Inequalities of Saturn, VII. On the same question.[8]

Lately I came, I do not recall where, upon the following problem: Find a number that is polygonal in two, or in three, or in four ways.[9]

If one should propose to take the problem like this: find a number that is simultaneously triangular and tetragonal, or that is simultaneously triangular and pentagonal, etc., then it could probably be solved. If however three conditions were proposed, for example: find a number that is simultaneously triangular, tetragonal and pentagonal, the problem should perhaps be impossible. On the other hand, if one does not determine the number of sides, then it is possible, however many times the number is to be polygonal, and the solution is rather nice. Let z be the number that is asked for, x the root and n the number of sides of the polygonal number; then

$$z = \frac{(n-2)\,x^2 - (n-4)\,x}{2};$$

from this one gets

$$n = \frac{2z + 2x^2 - 4x}{x^2 - x} = 2 + \frac{2z - 2x}{x^2 - x} = 2 - \frac{2z}{x} + \frac{2\,(z-1)}{x-1}.$$

So $2z$ must be divisible by x and $2z - 2$ by $x - 1$, i. e., two numbers are required that differ by 2 and have divisors that differ by 1 (the greater number the greater divisor and the smaller the smaller); and if this condition can be met in several ways, then z is a polygonal number in equally many ways. For example,

$$\begin{array}{lcl} & & \text{Divisors differing by 1:} \\ \text{Numbers differing by 2:} & \left.\begin{array}{r} 450 \\ 448 \end{array}\right\} & \begin{array}{llll} 3, & 5, & 9, & 15. \\ 2, & 4, & 8, & 14. \end{array} \end{array}$$

(I drop the divisors $\begin{array}{c} 225 \\ 224 \end{array}$ as they should yield "digonal" numbers.)

So, letting $2z = 450$ or $z = 225$, one has the following dissections:

$$\text{I.}\quad n = 2 - \frac{450}{3} + \frac{448}{2} = 76; \qquad \text{II.}\quad n = 2 - \frac{450}{5} + \frac{448}{4} = 24;$$
$$\text{III.}\quad n = 2 - \frac{450}{9} + \frac{448}{8} = 8; \qquad \text{IV.}\quad n = 2 - \frac{450}{15} + \frac{448}{14} = 4.$$

Therefore 225 is (I.) tetragonal, (II.) octagonal, (III.) 24-gonal and (IV.) 76-gonal.

Now the search for such numbers certainly is a problem which depends on the nature of numbers in a special way and can give rise to nice speculations.[10]

All my family asks to be most obediently recommended to you, and I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, April 3rd, 1753.

Today, dining at His Excellency State Minister von Arnim's, I met Privy Councillor von Froben, who enquired meticulously after you, Sir, and told me he formerly used to entertain a very close friendship with you. He very insistently asked me to convey his most devoted compliment to you.[11]

[1] Cf. n° 166, note 12.
[2] Cf. n° 165, note 4, and n° 166, note 3.
[3] Cf. n° 166, note 5.
[4] Cf. n° 166, note 10.
[5] Cf. n° 166, note 11.
[6] Much of the subsequent correspondence will turn on generalisations of this problem.
[7] Cf. n° 166, note 13.
[8] The seven prize-winning papers cited here are – in Euler's not quite chronological order – E. 34 (for the 1738 competition), E. 78 (1741), E. 57 (1740), E. 109 (1746), E. 150 (1747), E. 120 (1748), E. 384 (1752). Euler does not mention two entries which only got an "accessit" (honorable mention): E. 4 on the masting of ships (1727 competition) and E. 108 on the inclination compass (1743).
[9] In a letter to Carcavi from August 1659, Fermat remarks that he has studied the following problem from Diophantus' last book: "Find in how many ways some given number can be polygonal" ("Dato numero, invenire quot modis multangulus esse possit": Fermat, *Œuvres*, t. II, p. 435). Fermat comments that the text of Diophantus is corrupted and the method given by Bachet (*De numeris multangulis*, Prop. X, p. 23–26 of Bachet's 1621 edition) is too difficult for large numbers. Fermat claims to have found a better method, with which he is, however, not yet satisfied.
The question also shows up in a fragment of Diophantus' book on polygonal numbers that was edited by Heath in 1885, p. 243–244 (cf. also Wertheim 1897).
Let $f_r^m = \frac{1}{2}((m-2)r^2 - (m-4)r)$ denote the r-th m-gonal number. Then the equation $f_r^m = f_s^n$ with $m < n$ has infinitely many solutions except when $(m-2)(n-2)$ is a perfect square and $(m,n) \neq (3,6)$. Matvievskaya (1960) mentions that Euler called this "Bachet's problem". The special case $n = 4$ was already discussed by Euler in E. 29.
See also Dickson's *History of the theory of numbers* (1919), vol. 2, p. 7, D.S. Lucas 1973 and Krausz 1999.
[10] In E. 29, § 19–22, Euler finds squares that are triangular or pentagonal and determines for which orders a polygonal number can be made a square. In his 1770 *Algebra* (Pt. II, Sec. II, § 88–91), he returns to these questions and also finds numbers which are simultaneously triangular and pentagonal (cf. E. 388, O. I/1, p. 373–375).
Question 1468 in the *Ladies' Diary* for 1828, p. 36–37, asked for numbers that are simultaneously triangular, pentagonal and hexagonal (see Dickson 1919, vol. 2, p. 19); Charles Gill determined numbers that are simultaneously m-gonal and n-gonal (Gill 1836, vol. I, n. 4, p. 220–225).
[11] Friedrich Emanuel von Froben, then "Geheimer Justiz-, Hof-, Kammergerichts-, Dom-, Kirchen- und Schulrat" and curator of the Joachimsthal high school, had studied and practised law at Königsberg; as Goldbach's reply shows (see n° 168, note 1), they met both there and after his move to Berlin in 1719. Among Goldbach's papers at the Moscow archive, there is a 1731 letter from Froben.

168

GOLDBACH TO EULER

Moscow, June (17th) 28th, 1753

Sir,

I have had the good fortune to know Privy Councillor Froben for 35 years and am very pleased that he still remembers me; I have always admired his outstanding qualities, and I still vividly remember the many courtesies which he paid me partly at Königsberg, partly in Berlin.[1]

I have actually not found a rigorous proof that $1+4ef=P^2+4Q^2$, but some pertinent observations occurred to me, which you shall perhaps find to offer a perspective, Sir.[2] In what follows, by p I always understand the prime number $1+4ef$, where $e>f$, and also set $a^2+b^2=p$. In a given particular instance I should choose to make use of the following method: Firstly I search for a number Q which has the property that $1+4ef+4fQ^2=\Box$; this appears to be easy to do by the successive substitution of $Q=1$, $Q=2$, etc., since many numbers unsuitable for this goal can be discarded as it were at first sight: taking, e. g., the given number to be 89 and $f=2$, one sees at once that no number ending in 1 can be assumed for Q since the required square should then end in 7, which is preposterous. Now as soon as such a suitable number for Q has been found, I set the root of the discovered square or $\sqrt{1+4ef+4fQ^2}$ equal to $4fv+1$, where v is to be taken either positively or negatively in order to satisfy the solution, and then $1+4ef=\dfrac{(e-v)^2+eQ^2}{v^2}$;[3] for the numbers cited by you, Sir, one finds in the case of 89, $Q=2$; of 113, $Q=1$; of 137, $Q=2$; of 229, $Q=5$; of 733, $Q=3$. From this,[4] one also has the double equation

$$p=\frac{P^2+eQ^2}{v^2}=\frac{(4fv+(P+v):e)^2-4fQ^2}{(P+v)^2:e^2}.$$

I further remark (1.) that, as the numbers a, b, e, f are known, it suffices just to have $p=\dfrac{R^2\pm 2abe}{h^2}$, where R and h are rational, whereas $2ab$ may be a square or not; for then

$$Q=\frac{-\ (a+b)\pm R}{e+h^2}=\frac{P-\ (a+b)}{h}$$

and

$$p=a^2+b^2=P^2+eQ^2.$$

(2.) I observed that when $1+4ef+4fQ^2=\Box$, the number Q is either one of the two squares a^2 and b^2 or at least one of their factors; e. g., for 89, where $a=8$, $b=5$, one has[5] $Q=5$; in the case of the number $137=4^2+11^2$ one has $Q=2$; however, I am not yet convinced of the universal certainty of this observation. On the other hand, I can most rigorously prove (3.) that, if α is a number of the form $\beta^2+e\gamma^2$, then one also has

$$\alpha\ \left(e+x^2\right)\left(e+y^2\right)\left(e+z^2\right)\ \ldots=P^2+eQ^2.\text{[6]}$$

(4.) The nature of the numbers P and v in the equation $1+4ef=\dfrac{P^2+eQ^2}{v^2}$ definitely depends on the number e, for P^2 and v^2 must be such that upon division by e they both leave the same remainder;[7] thus, for example, in the case $89=\dfrac{9^2+11\cdot 5^2}{2^2}$, where $e=11$, one has $P^2=81$, $v^2=4$, and therefore the common remainder upon division by 11 equals 4. On the other hand, the remainders of the squares P^2 and Q^2 upon division by v^2 must be such that, if the remainder of P^2 equals α, the remainder corresponding to Q^2 equals $\dfrac{uv^2-\alpha}{e}$ where u is a whole number; thus, in the same example, one has $\alpha=1$, $\dfrac{uv^2-\alpha}{e}=\dfrac{4u-1}{11}=1$ (since 25 divided by 4 leaves the remainder 1), and u equals the whole number 3.

(5.) For the solution of the problem of determining two squares whose sum equals P^2+2Q^2, which you communicated to me, Sir, I shall offer to you, as a compensation of some kind, the solution of the following problem:[8] determine two squares whose sum equals P^2+eQ^2, where e is any number. Let n and e be arbitrary numbers, then

$$\left(\frac{4n^2+e}{4n}\right)^2+\frac{4e^2}{(e-1)^2}=\left(\frac{4n^2-e}{4n}\right)^2+\frac{e\,(e+1)^2}{(e-1)^2}$$

or

$$\left(\frac{4n^2+e}{4n}\right)^2+\frac{4e^2m^2}{(e-m^2)^2}=\left(\frac{4n^2-e}{4n}\right)^2+e\left(\frac{e+m^2}{e-m^2}\right)^2,$$

whatever numbers are substituted for e, m, and n.[9]

My expression for $n^{\sqrt{2}}$ consists in the following:[10] let $a=1$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$, $d=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}$, $e=\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$ etc.; then

$$\begin{aligned} n^{\sqrt{2}}= \ & (a+b+c+d+\ldots)\,n^2\\ & -(b+2c+3d+4e+\ldots)\,n^4\\ & +(c+3d+6e+10f+\ldots)\,n^8\\ & -(d+4e+10f+20g+\ldots)\,n^{16}\\ & +(e+5f+15g+35h+\ldots)\,n^{32}\\ & -\ldots;^{[11]} \end{aligned}$$

this is no different from

$$n^{\sqrt{2}}=n^2-\frac{1}{2}\left(n^4-n^2\right)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(n^8-2n^4+n^2\right)-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(n^{16}-3n^8+3n^4-n^2\right)+\ldots,$$

which expresses the term corresponding to the index $\frac{1}{2}$ in the series

$$n^{2^1}+n^{2^2}+n^{2^3}+n^{2^4}+\ldots.$$

Besides cordially wishing you every satisfaction and dutifully recommending myself to all your family, I remain, Sir, your most devoted servant Goldbach.

Moscow, June 28th (new style), 1753.

See the PS.[12]

[1] Cf. n° 167, note 11.
[2] Cf. n° 167, note 3.
[3] On this paragraph, Euler noted in the lower margin of fol. 160v: "*Ratio investigationis: sit* $1 + 4ef = \dfrac{pp + eQQ}{vv}$ *erit* $pp - vv$ *divis[ibilis] per* e: *sit ergo* $p = ne - v$ *erit* $4fvv = nne - 2nv + QQ$ *et* $n + 4fv = \sqrt{(nn(1 + 4ef) + 4fQQ)}$. *Ergo quaerantur numeri* n *et* Q *ut* $nn(1+4ef)+4fQQ = \square$ *eritque* $1+4ef = \dfrac{pp + eQQ}{vv}$." ("The reasoning of this enquiry is: let $1 + 4ef = \dfrac{p^2 + eQ^2}{v^2}$, then $p^2 - v^2$ will be divisible by e: so let $p = ne - v$, then $4fv^2 = n^2e - 2nv + Q^2$ and $n + 4fv = \sqrt{n^2(1 + 4ef) + 4fQ^2}$. Therefore one has to look for numbers n and Q that make $n^2(1 + 4ef) + 4fQ^2$ a square: then one will have $1 + 4ef = \dfrac{p^2 + eQ^2}{v^2}$.").
See Euler's reply n° 169, note 4.
[4] Goldbach added this sentence in the margin with a reference sign.
[5] Here Euler noted the numbers 2 and 17 between the lines, referring to other suitable values of Q.
[6] This is a special case of an identity well known to Euler, mentioned e. g. in n° 173.
[7] Here Euler again noted in the margin: "$PP - vv$ *divis[ibilis] per* e".
[8] In the lower margin of fol. 161r, Euler noted, without a clear reference to some specific passage: "*Haec aequatio* $x^n + y^n = z^n$ *est impossibilis si* $n > 2$." ("The equation $x^n + y^n = z^n$ is impossible when $n > 2$.").
It is not clear whether Euler's resumed study of Fermat's "Last Theorem" was prompted by Goldbach's letter: Euler's reply (see n° 169, note 10) rather suggests he took his cue from rereading the 1670 *Arithmetica*, where Fermat's marginal note was published by his son.
[9] This phrase, starting from "*vel*" ("or"), was added later in the margin with a reference sign. In the same margin, alongside Goldbach's supplement but oriented upside down with respect to it, one reads another calculation by Euler which prepares his reply (see n° 169, note 7):

$$\begin{aligned}(eqq - yy + rr)^2 + 4rryy &= (eqq - yy - rr)^2 + e \cdot 4qqrr\\ (nyy - mxx + zz)^2 + 4mxxzz &= (nyy - mxx - zz)^2 + 4nyyzz\\ &= (nyy + mxx + zz)^2 - 4mnyyxx.\end{aligned}$$

[10] Cf. n° 167, note 5.
[11] Here Euler noted between the lines:

$$\frac{2(n-1)}{1(n+1)} + \frac{2(n-1)^3}{3(n+1)^3} + \frac{2(n-1)^5}{5(n+1)^5} + etc. = A = 2B$$

quare $A\sqrt{2} = h$ *erit* $= 2B\sqrt{2}$

$$n^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{h}{1} + \frac{hh}{1 \cdot 2} + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

These formulae will again appear in Euler's reply (see n° 169, note 9).
[12] The postscript mentioned here seems to be lost. Could it have concerned the translation of G.F. Müller's anonymous pamphlet, which Euler mentions in his reply (cf. n° 169, note 1)?

169

EULER TO GOLDBACH

Berlin, August 4th, 1753

Sir,

the copies of the *Letter by an Officer of the Russian Fleet* that you asked for have been dispatched from here several mail days ago, so hopefully they will already have reached you. This writing was sent to me on the order of His Excellency the Count and Hetman in order to have it printed here, and I also took care of the German translation.[1] Meanwhile you can rest assured, Sir, that I shall not report this to Petersburg by a single word; in fact, I am in correspondence with nobody there any more except for Councillor Schumacher, to whom I never report any news either. Also, since our President is absent my business obligations have increased so much that I answer few letters any more, because I am not only saddled with all the Academy's administration but also have to submit a report to the President every mail day and moreover to report directly to His Royal Majesty.[2]

As I know that you are interested in letters from great lords, Sir, I take the liberty of communicating a Royal letter written by His own hand, which I received after sending some peaches from the Academy's garden to His Royal Majesty:[3]

> "I have well received your letter from the 24th of this month with the gifts that accompanied it; however great a pleasure I drew from the beauty and the good taste of the fruit you sent me, I felt even more pleased by the attention which you were so kind as to show me by this gesture. I thank you and am looking forward to an occasion for proving my thankfulness.
>
> Potsdam, May 26th, 1753."

Your manner of developing the formula $1 + 4ef = P^2 + 4Q^2$ indeed appears to encompass far more within its scope, and possibly a conclusive proof could even be deduced from it; but with my present distractions I hardly dare tackle this investigation. The method for bringing the number $1+4ef$ to the form $\dfrac{S^2 + eQ^2}{v^2}$ – namely in those cases where the resolution cannot be done in whole numbers – also seems to me to deserve full attention. I tried to effect this somewhat more generally in the following manner:[4]

Let $1 + 4ef = \dfrac{S^2 + eQ^2}{v^2}$; since consequently

$$v^2 - S^2 = eQ^2 - 4efv^2 = e\left(Q^2 - 4fv^2\right),$$

I see that $v^2 - S^2$ must be divisible by e. Assume therefore $S = ne - v$, then

$$2nev - n^2e^2 = e\left(Q^2 - 4fv^2\right)$$

or

$$Q^2 - 4fv^2 + en^2 - 2nv = 0$$

and, multiplying by $4f$,

$$16f^2v^2 + 8nfv + n^2 = 4efn^2 + 4fQ^2 + n^2;$$

from this one gets

$$n + 4fv = \sqrt{(1 + 4ef)\, n^2 + 4fQ^2}.$$

Thus the whole matter depends, any case of the numbers e and f being given, on discovering numbers n and Q in such a way that $(1 + 4ef)\, n^2 + 4fQ^2$ becomes a square.[5]

If one is ready to make do with trying, it will not be difficult to find n and Q in any case if just the numbers e and f are not too large; however, when e and f are large numbers, one will hardly succeed by trying. But a sure method seems hardly to be feasible to me, since there are cases where no resolution at all comes about, namely when $1 + 4ef$ is not a prime number, and I do not discern in what way this condition could be introduced into the method.

That problems of this kind can be very hard may be understood by considering the search for a whole number x which makes $nx^2 + 1$ into a square, where n is a non-square positive integer. If, for example, $61x^2 + 1$ is to become a square, the smallest integer x for which this occurs is $x = 226\,153\,980$; so how could one find this astonishing number by trial? Moreover, if $109x^2 + 1$ is to become a square, the smallest x equals $15\,140\,424\,455\,100$ and the root of the square which arises, $\sqrt{109x^2 + 1}$, is $158\,070\,671\,986\,249$. I recently discovered these large numbers by a certain method within a few minutes.[6]

In the same way as infinitely many sums of two squares $a^2 + b^2$ can be found that are simultaneously contained in the form $v^2 + ez^2$, on occasion of the fractional formulae which you kindly communicated to me, Sir, I discovered another one in whole numbers. In fact, one has[7]

$$\left(eq^2 - y^2 + r^2\right)^2 + 4r^2y^2 = \left(eq^2 - y^2 - r^2\right)^2 + e \cdot 4q^2r^2.$$

Even more generally, I can also indicate numbers which are simultaneously contained in the forms $a^2 + mb^2$ and $v^2 + nz^2$; in fact,

$$\left(ny^2 - mx^2 + u^2\right)^2 + m \cdot 4u^2x^2 = \left(ny^2 - mx^2 - u^2\right)^2 + n \cdot 4u^2y^2.$$

The only thing that is a pity about the nice series for $n^{\sqrt{2}}$ which you discovered, Sir, is that it becomes divergent whenever n is a number greater than 1.[8] However, this can be easily remedied by substituting $\dfrac{1}{m}$ for n, since then m is a fraction smaller than 1, and $n^{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{m^{\sqrt{2}}}$. On the other hand, the sums of the series $a + b + c + d + \ldots$ and also $b + 2c + 3d + 4e + \ldots$ are still infinite, so even with that trick the practical calculation is not made easier. For this purpose I found the following method: First determine the series

$$\frac{(n-1)}{1\,(n+1)} + \frac{(n-1)^3}{3\,(n+1)^3} + \frac{(n-1)^5}{5\,(n+1)^5} + \frac{(n-1)^7}{7\,(n+1)^7} + \ldots = s,$$

which is always convergent. Then, letting $2s\sqrt{2} = h$, one has[9]

$$n^{\sqrt{2}} = 1 + \frac{h}{1} + \frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{h^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots$$

In Fermat there is another very beautiful theorem for which he claims to have found a proof.[10] Indeed, on occasion of the Diophantine problem of finding two squares whose sum is a square, he states it is impossible to find two cubes whose sum is a cube, or two fourth powers whose sum is a fourth power, and in general that the formula $a^n + b^n = c^n$ is impossible whenever $n > 2$. Now I actually have found proofs that $a^3 + b^3 \neq c^3$ and $a^4 + b^4 \neq c^4$, where $\neq$ signifies that equality is impossible; but the proofs for these two cases are so different from one another that I see no chance of deriving from them a general proof of $a^n + b^n \neq c^n$ when $n > 2$.[11] On the other hand, it can be seen – as it were through a veil but fairly plainly – that the greater n, the more impossible the formula must be. Meanwhile I have not even yet been able to prove that the sum of two fifth powers cannot be a fifth power.[12] To all appearances this proof rests on a fortunate inspiration, and as long as one does not chance upon it, all pondering may well be useless.[13] Furthermore, in the same way that the equation $a^2 + b^2 = c^2$ is possible, so is $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$;[14] it seems to follow that $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ is also possible, but up to now I have not been able to discover an instance of this. On the other hand, one can indicate five fourth powers that have a fourth power for their sum.[15]

Besides humbly recommending myself and my family, I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Aug. 4th, 1753.

[1] The history behind this anonymous brochure needs some explanation: The French geographer and astronomer Joseph-Nicolas Delisle, one of the founding members of the Petersburg Academy, had fallen out with its administration and finally obtained permission to return to Paris in 1747. In 1750/52 he published a map of the Northern Pacific, based on the Academy's second expedition to Kamtchatka, in which he at once claimed to have masterminded the project and harshly criticised its execution. The President of the Petersburg Academy, K.G. Razumovskiĭ, commissioned a reply from G.F. Müller, then head of the geography department, who had participated in the expedition. A clumsy French translation of the resulting pamphlet (originally written in Russian) was sent to Euler with the request to have it published in some Western journals without revealing its origin ("insgeheim, ohne zu melden, von wannen sie communicirt worden": R 2300, Schumacher to Euler, (March 30th) April 10th, 1753: JW 2, p. 306–307). In his reply Euler reported that he had had the style checked by "a skilled Frenchman" who lived at his house (the young mathematician Louis Bertrand from Geneva) and that a translation into German was being prepared (by the writer and journalist J.V. Krause who often collaborated with Spener), and promised to have the pamphlet printed in several journals (R 2301: *ibid.*, p. 307–308). On May 19th Euler could already send printed copies of both translations to Schumacher (R 2304: *ibid.*, p. 309–310). Formey's *Nouvelle Bibliothèque Germanique* published Müller's pamphlet – its full title is *Lettre d'un Officier de la Marine Russienne à un Seigneur de la Cour concernant la Carte des nouvelles découvertes au Nord de la Mer du Sud, et le Mémoire qui y sert*

d'explication, publié par M. de L'Isle à Paris en 1752 – in the July–September 1753 issue (t. XIII, p. 46–87). An English translation with a commentary by Arthur Dobbs, who also adopted the Russians' viewpoint, appeared in 1754; Euler had this again translated into German and forwarded to Russia (cf. R 2336: *op. cit.*, p. 341).
On the subject matter of the dispute, see, e. g., Breitfuss 1939.
As the present letter shows, Goldbach had asked Euler for some copies of the brochure(s) and for confidentiality (possibly in the lost PS: cf. n° 168, note 12).

[2] In the aftermath of the König affair (cf. *supra* n° 161, note 8), Maupertuis had left Berlin in April 1753 to recover his health, leaving Euler (as Director of the Mathematical Class) in charge of most of the Academy's daily business without conferring executive powers to him. Euler's weekly reports to Maupertuis have been lost: the extant correspondence, published in O. IVA/6, has a gap from April 1753 to July 1756.

[3] Both the original of this note and a copy with a Russian translation are preserved in the Petersburg archives, which shows how much Euler appreciated those royal missives, notwithstanding his differences with Frederick. It was first published in 1852 in *Œuvres de Frédéric le Grand*, vol. XX, p. 230, then as R 646 in O. IVA/6, p. 332–333.

[4] Cf. n° 168, note 3.

[5] The equation $(1+4ef)n^2+4fQ^2=m^2$ is a special case of the equation $ax^2+by^2=cz^2$, which was later extensively studied by Euler himself in E. 556, by Lagrange and by Legendre. In order to show the solvability of Euler's equation using Legendre's criterion, one has to make sure that $(\frac{f}{p})=+1$, where $p=1+4ef$, and that $(\frac{p}{q})=1$ for all odd primes $q\mid f$, which is trivial. Thus proving the solvability is essentially equivalent to showing the special case $(\frac{f}{p})=+1$ of the quadratic reciprocity law for primes $p\equiv 1 \bmod 4f$.

[6] On "Pell's equation", cf. Section 2.1.1 of the Introduction, note 26, and letter n° 9, note 7. Euler's "new method" for solving this equation is based on the periodicity of the expansion of $\sqrt{D}$ into a regular continued fraction, which he exposed in E. 323. The phrase "within a few minutes" glosses over the labor that is still involved in the calculation; in E. 559, Euler writes more realistically that the computation of the smallest solution for $D=61$ is quite tedious ("non parum taediosas operationes exigit": O. I/4, p. 76), and then presents a collection of shortcuts.

[7] Cf. n° 168, note 9.

[8] Cf. n° 168, notes 10 and 11. It is indeed difficult to make sense of Goldbach's original series, since it not only diverges but has coefficients that are all infinite. See, however, the ingenious alternative that follows, which had already been sketched in Euler's note between the lines of n° 168.

[9] Starting from

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\Big)=1+x^2+x^4+x^6+\dots,$$

we find

$$\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\dots;$$

substituting $x=\dfrac{n-1}{n+1}$ yields

$$\log\sqrt{n}=\frac{(n-1)}{1(n+1)}+\frac{(n-1)^3}{3(n+1)^3}+\frac{(n-1)^5}{5(n+1)^5}+\frac{(n-1)^7}{7(n+1)^7}+\dots,$$

that is, $s=\frac{1}{2}\log n$. With $h=2s\sqrt{2}$ we therefore get $\mathrm{e}^h=\mathrm{e}^{2s\sqrt{2}}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}\log n}=n^{\sqrt{2}}$.

[10] Cf. n° 168, note 8, and n° 125, note 5.

[11] Euler mentioned Fermat's "Last Theorem" (the unsolvability of $x^n+y^n=z^n$ in positive integers for $n>2$) for the first time in n° 125. See also n° 171, where he repeats the statements made here.
The proof for the exponent $n=4$ proceeds via an infinite descent argument that has become classical. Euler gives this proof (whose structure is essentially identical to that of Fermat's,

as published by Frénicle de Bessy in 1676) in E. 98 and again in vol. II of his *Algebra* (E. 388, § 202–208).

As stated here, Euler had recently discovered the more difficult proof for the exponent $n = 3$. His proof, as given in his *Algebra* (E. 388, § 243), has a gap; remarkably, this was almost immediately spotted by the Berlin mathematician Abraham Joseph Wolff, who drew Euler's attention to it in a letter (R 2818 from August 9th, 1770: see Lausch 1992).

A masterful exposition of the proof for $n = 3$ was found in Gauss's papers and published in 1863 in vol. II of his *Werke*.

[12] The first proof of Fermat's Last Theorem for the exponent $n = 5$ was sketched by Dirichlet in 1828 and completed independently by Legendre and Dirichlet himself. Dirichlet's proof was similar to Euler's proof of the case $n = 3$, but Dirichlet avoids trouble by carefully proving the necessary lemmas (assumed without proof by Euler) using Lagrange's theory of binary quadratic forms with discriminant 20.

[13] As is well known, this proof – finally completed by Andrew Wiles in 1994/95 – required even more new ideas and took much longer than Euler can have expected.

[14] Euler generally solved the equation $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ in E. 255; in modern terms, he showed that the cubic surface $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ is rational. See also E. 272 and his *Algebra*, t. II (E. 388), § 244–249.

[15] All of Euler's attempts to find integer solutions of the equation $a^4+b^4+c^4+d^4 = e^4$ (see, e. g., *Opera Postuma* I, p. 216–217) were unsuccessful, although – he still insisted – "by analogy" this should be possible ("etiamsi iste casus secundum analogiam possibilis videatur": E. 776, § 25). The first solution $30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$ was found by Robert Norrie in 1911.

In the same place, Euler also repeated his claim that he knew several instances of *five* fourth powers whose sum is a fourth power, but he never seems to have published these. That the result is true follows from the parametric identity

$$(4x^4 - y^4)^4 + (4x^3y)^4 + (4x^3y)^4 + (2xy^3)^4 + (2xy^3)^4 = (4x^4 + y^4)^4$$

given by Fauquembergue in 1898; some instances of this – the smallest one is $3^4 + 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 2^4 = 5^4$ – would certainly have been accessible to Euler's calculating powers. On the other hand, Euler conjectured – certainly again by analogy with the cubic case – that the equation for *three* fourth powers, $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$, has no solutions. The Petersburg Academy's summary of his 1772 paper E. 428 even asserts (erroneously) that this is "usually" proved in number theory ("inter theoremata, quae circa proprietates numerorum versantur, id quidem demonstrari solet"); in the paper itself (which deals with a solution of $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$ that also came as a surprise to Euler) no such claim is made. However, in E. 716, § 3, Euler not only states it to be certain that no sets of three fourth powers can possibly be indicated which sum to another fourth power ("certum est nequidem exhiberi posse tria biquadrata, quorum summa sit pariter biquadratum"), but even generalises his conjecture by claiming (in modern notation) that the equation $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = x^n$ is "impossible" in positive integers whenever $2 \leq k < n$.

The case $n = 5$ of this conjecture was finally shown to be false in 1966 by Lander and Parkin, who found the solution $27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5$ by a computer search. In 1988 Elkies disproved Euler's conjecture also for $n = 4$ by giving an infinite family of solutions of $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$: the minimal counterexample is $95\,800^4 + 217\,519^4 + 414\,560^4 = 422\,481^4$. For more on this field, where many questions are still open, see Guy 2004, Section D1.

170
Goldbach to Euler
Petersburg, April (15th) 26th, 1755

Sir,

if I am not mistaken, my last letter to you was written on June 28th (new style), 1753, and a considerable time has therefore elapsed during which nothing occurred to me that I should have thought worthy of being communicated to you. Nonetheless, I have often considered the property that a prime number of the form $1+4ef$ can be brought to the other one P^2+eQ^2, where P and Q are rational,[1] and reduced it to diverse forms: thus, for example, if $1+4ef = R^2+2abeS^2$, this prime number can always be transformed into P^2+eQ^2, or also: if two rational numbers h and m can be found in such a way that $h-m$ and hm are rational and $h = \dfrac{\sqrt{4f-m^2}}{\sqrt{em^2+1}}$, then the numbers P and Q that were asked for can likewise be indicated in rationals; moreover, if $Q^2 = 4fv^2+2mv-em^2$ can be determined, one has

$$1+4ef = \frac{(4fv+m)^2-4fQ^2}{m^2} = \frac{\left(em^2-v\right)^2+eQ^2}{v^2};$$

and finally, since the prime number $1+4ef$ equals two squares a^2+b^2 that can be determined in any case whatever, it is sufficient to identify a rational number k which satisfies the condition that $a^2\left(e+k^2\right)+b^2\left(e-k^2\right)$ becomes a square, for then it is not difficult to find the required numbers P and Q, as one has

$$a^2+b^2 = \frac{\left(h^2+1\right)^2 a^2}{4h^2} + e\frac{k^2\left(h^2-1\right)^2 a^2}{h^2\left(e-k^2\right)^2},$$

where h is defined by

$$h = \frac{b\left(e-k^2\right) \pm \sqrt{a^2\left(e+k^2\right)^2+b^2\left(e-k^2\right)^2}}{a\left(e+k^2\right)}.$$

Furthermore, the following property is also remarkable, although I did not strive to prove it: If some square, upon division by a prime number p of the form $4n+1$, leaves the number r, there is also another square which, divided by the same number p, yields the remainder $p-r$.[2]

In the same vein, a prime number $4n+1$ can leave as many different remainders by dividing arbitrary squares as there are ones in $2n$; thus, e. g., for $n=1$ the divisor 5 can leave just two remainders, namely 1 and 4; for $n=3$, the divisor 13 leaves six remainders by dividing squares, namely 1, 3, 4, 9, 10, 12, and so for the rest.

With this, I remain with great respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, April 26th (n. st.), 1755.

PS. I was most pleased to learn a short time ago of the promotion of your eldest son,[3] on which I congratulate you, Sir, as well as him. I am assured that he has already attained an extraordinary knowledge in mathematics; but nevertheless he shall have to put up – in case he has a taste for scholarly disputes – with being refuted by his opponents, in Hermann's style, as "Leonhard Euler, Leonhard's Son".[4]

As Mr. Spener sent me his catalogues, I hope he will be as kind as to procure me the books specified by the enclosed list partly from his own and partly from other bookshops.[5] I humbly beg you not to take it amiss, Sir, that I address this list to you; on my own part I offer myself, in case you should want to give me some commissions here, for executing them with the proper attention.

[1] After a lengthy interruption in the correspondence Goldbach again takes up a question he has posed in 1753 (cf. nº 166, note 5).

[2] Goldbach's observation is equivalent to the statement that -1 is a quadratic residue modulo primes of the form $4n + 1$. See Euler's reply in nº 171.

[3] On December 5th, 1754, Johann Albrecht Euler had been elected, on Maupertuis' proposal, to membership in the Berlin Academy. Müller (R 1717: JW 1, p. 74), who had learnt about this from the journals, and Schumacher (R 2370: JW 2, p. 373) also sent his father their congratulations.

[4] Goldbach alludes here to an earlier controversy when Jacob Hermann had criticised Nicolaus II Bernoulli in several papers, insinuating (not without reason) that Nicolaus only acted as a mouthpiece for his father's opinions (see for example the caustic reference to "Doctiss. Nic. Bernoulli Johannis Celeberrimi Viri dignissimus Filius" in Hermann 1717, p. 350).

[5] This order list has not been preserved. Cf. Euler's reply nº 171, note 4.

171
Euler to Goldbach
Berlin, May 17th, 1755

Sir,

when I did not have the pleasure of receiving a letter from you for such a long time, I should have been in very great sorrow about your condition if I had not heard from time to time from State Councillor Schumacher that you are staying well.[1] All the same, I was more than a little preoccupied by the fear that I might possibly have incurred your displeasure; however, now this has been all the better eliminated by your most welcome letter as, notwithstanding all my pondering, I cannot recall any inadvertence. I dutifully acknowledge my obligation for the most gracious interest that you are kindly showing in the promotion of my eldest son,[2] your most obedient godson, Sir, and dare to most humbly recommend him to your further favour and goodwill. He is applying himself with all possible zeal to deserve the special grace which he was shown by his reception into our Academy better and better as time goes by. However, the study of mathematics is by now so extensive that it takes a long time until one can so firmly establish oneself in all its parts that one can accomplish something substantial without any suggestions; it is therefore true that without my help he should not yet be able to produce anything special.

In particular this means that he must by no means interfere in scholarly disputes, since otherwise his opponents should not be so very wrong in replying to him in Hermann's style.[3] However I am confident that he shall gradually achieve ever greater strength and depend on my constant help only for a short time to come.

Mr. Spener is going to gather and dispatch the books that you request, Sir, without delay; I specially instructed him to make sure that the volumes conform to your explicit requirements.[4]

As regards your observations on the theorem that the number $1 + 4ef$ is contained in the form $P^2 + eQ^2$ whenever it is prime,[5] I endeavoured to fathom them with the greatest satisfaction and perceived some very important procedures in them; it is just a pity that they are still so far from yielding a complete proof. However it is already more than a little helpful that, since one is assured of the theorem's truth, all the formulae derived from it can certainly be resolved, which otherwise should be very difficult to do. By all the efforts I have given to this matter, it appears to me safe at least to conclude that one shall never find a proof of such a nature that, given some prime number $1 + 4ef$, the squares P^2 and Q^2 could explicitly be indicated; one will have to be content with a proof which demonstrates the possibility of having $1+4ef = P^2+eQ^2$, without showing a way to actually perform this resolution. Indeed, since this is only possible if $1 + 4ef$ is a prime number, I do not see in what manner this necessary condition could be taken into consideration. It is therefore a useless effort to try to determine the numbers P and Q generally in terms of e and f; for if this were possible, then necessarily the numbers P and Q could also be discovered when $1 + 4ef$ is not a prime number, but this is certainly often impossible.

I have finally succeeded well in proving that $1+4f = P^2+Q^2$ whenever $1+4f$ is a prime number; however the proof is of no use at all in actually resolving such a prime $1 + 4f$ into two squares.[6]

Lately I also achieved the proofs for $1 + 8f = 1 + 4 \cdot 2f = P^2 + 2Q^2$ and $1+12f = 1+4\cdot 3f = P^2+3Q^2$, namely for those cases when these numbers $1+8f$ and $1 + 12f$ are prime; but I have not yet been able to advance further.

On the other hand, I see that these formulae must extend even further: for one not only has $1 + 8f = P^2 + 2Q^2$, but also $3 + 8f = P^2 + 2Q^2$ whenever they are prime numbers. Then there is also $7 + 12f = P^2 + 3Q^2$. Then, taking $e = 5$, one has the theorems $1 + 20f = P^2 + 5Q^2$ and $9 + 20f = P^2 + 5Q^2$, which, however, I cannot prove; but perhaps one might sooner find the means to reach a general proof by considering these cases along with the others.[7]

Regarding the theorem that, if some square divided by the prime number $p = 1 + 4n$ leaves the remainder r, then another square must leave the remainder $p - r$,[8] I proved this a long time ago. For if $1 + 4n$ is a prime and a the given number, then infinitely many numbers $a^2 + x^2$ can be found that are divisible by

$1+4n=p$; consequently, if a^2 upon division by p leaves the remainder r, then x^2 must leave $p-r$.

You know the proof that $a^4 \pm b^4 \neq p^4$, Sir. Recently I also completed the proof that $a^3 \pm b^3 \neq p^3$, but further than this I cannot advance. Fermat however proved not only this but also that $a^5 \pm b^5 \neq p^5$, $a^7 \pm b^7 \neq p^7$ and generally that $a^n \pm b^n \neq p^n$, except for the cases $n=1$ and $n=2$. Here, to all appearances, everything depends on a special inspiration, and as long as one does not come upon this, all effort is useless:[9] one will no doubt have to take into account that a^5+b^5 can have no other prime divisors, besides $a+b$, than such as are of the form $10m+1$, a fact that I have proved.[10]

All my family is, thanks to God, still quite well and asks to be most obediently recommended to you; I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, May 17th, 1755.

[1] On March (19th) 30th, 1754, Euler had asked Schumacher whether Goldbach, from whom he had not heard for a long time, was still well (R 2336: JW 2, p. 342). No answer of Schumacher's to this enquiry has been preserved.

[2] Cf. n° 170, note 3.

[3] Cf. n° 170, note 4.

[4] Cf. n° 170, note 5.

[5] Cf. n° 170, note 1.

[6] In fact he had achieved this proof several years earlier (cf. n° 138, note 2), but the paper containing it (E. 241) was still unpublished.

[7] Cf. n° 165, note 5.
The results on primes of the form $20n+1$ and $20n+9$ were proved by Lagrange, who had to invent the theory of reduction of binary quadratic forms to this end, and who also had to prove that 5 is a quadratic residue modulo primes $5n+4$ (see Lagrange 1775/77). These results were shown to be special cases of genus theory in Gauss's *Disquisitiones*.

[8] Cf. n° 170, note 2.

[9] Cf. n° 169, notes 10 and 11.

[10] This is a special case of a theorem proved in E. 134, § 34–38: If p and q are primes with $q \mid (a^p+b^p)$ and $q \nmid (a+b)$, then $q=2pn+1$. See also E. 262, § 54–55, and E. 792, Cap. IX. Dirichlet mentions this result in his *Habilitationsschrift*, omitting the proof and referring the readers to works by Euler and Legendre, "qui et haec et reliqua Euleri inventa arithmetica summa cum perspicuitate exposuit" ("who exposed this and other arithmetical results by Euler with the greatest perspicacity": Dirichlet 1827).

172

Goldbach to Euler

Petersburg, (July 25th) August 5th, 1755

Sir,

I have duly received your most welcome letter from May 17th on the 29th of the same month and was very pleased to learn from it that you approve of my observations on the transformation of the prime number $1 + 4ef$ into $P^2 + eQ^2$; although you state that the proposition which you have proved, that the number $1 + 4f$ equals $P^2 + Q^2$ whenever it is prime, does not contribute at all to actually determining the numbers P and Q,[1] I am still of the opinion that whatever can be found by a certain and determined number of trials should be held to be known; thus, for example, when a problem is reduced to a fourth-degree equation, where the root that satisfies it must be identified by one, two, or three trials.[2] Another problem which I take to be similar is that of determining all divisors of a number known to be composite, since it can be solved by a finite number of trials, and so on. Now in the case in which you found, Sir, that any prime number of the form $1+4f$ equals P^2+Q^2, the numbers P and Q should at the same time be held to be known, since they can be identified by a finite number of trials; indeed I have just to equate P or Q successively to the whole numbers 1, 2, 3, etc. and subtract their squares from the prime number $1+4f$ until the remainder becomes a square; moreover, many shortcuts for choosing suitable numbers can be indicated.[3]

In case they are not too involved and require very great attention, I should like to see the proofs for the cases $1 + 8f$ and $1 + 12f$.

Besides this, I also discovered that, if y [is defined][4] by the equation

$$\frac{\left(ay^2 + 2by - a\right)\left(by^2 - 2ay - b\right)}{\left(y^2 + 1\right)^2} = abeS^2$$

and, given a rational S, y also becomes rational, then the following equation also holds:

$$a^2 + b^2 = \frac{\left(\left(ay^2 + 2by - a\right) - \left(by^2 - 2ay - b\right)\right)^2}{\left(y^2 + 1\right)^2} + 2abeS^2;$$

as I already remarked in my last letter, this case can always be reduced to the form $P^2 + eQ^2$, and moreover, if P or Q is given just in a single instance of this last formula, I can determine from it innumerable similar rational cases, namely:

$$\frac{\left(ePy^2 + 2eQy - P\right)^2 + e\left(Q + 2Py - eQy^2\right)^2}{\left(ey^2 + 1\right)^2}$$

where I assume y to be any rational number; thus, e. g., since $89 = \frac{9^2}{2^2} + \frac{11 \cdot 5^2}{2^2}$, where $P = \frac{9}{2}$, $Q = \frac{5}{2}$, $e = 11$, one also has, taking $y = 2$, that the prime number 89 equals $\frac{607^2 + 11 \cdot 179^2}{90^2}$, which shall perhaps give rise to some more observations.

I dimly remember having heard a long time ago that the letters addressed to you, Sir, are always delivered to you free of postage;[5] but if this is not correct, I shall in the future have my letters sent to you via Königsberg, by way of my correspondent there.[6] Also I should not yet have written this time, except that I hope to receive the books noted on the enclosed sheet from Mr. Spener still this year.[7] Meanwhile I humbly ask your pardon, Sir, for again bothering you with this.

For the rest, I was very pleased to learn that you and all your family are well; please recommend me strongly to them. I cordially wish I could prove by some real test that I am with special respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Aug. 5th, 1755.

[1] Cf. nº 171, notes 5 and 6.
[2] Goldbach is probably thinking of quartic equations with integer coefficients and an integer solution, which is necessarily a divisor of the constant term and can thus be found by a finite number of trials. Euler described this elementary procedure in his *Vollständige Anleitung zur Algebra*, t. II (E. 388), § 195–198.
[3] Goldbach is certainly in agreement with modern views on algorithmic solutions in noting that, in view of Euler's existence proof, the "trial-and-error" method succeds after at most $\sqrt{2f}$ substitutions for P.
[4] The words in brackets have been added to repair the incomplete sentence of the original.
[5] See Euler's reply nº 173, note 10.
[6] Among Goldbach's correspondents in the 1750s two professors of medicine at Königsberg, M.Ph. Hartmann and J.Ch. Bohl, can be identified. However, the reference might also be to J.G. Thegen (see nº 74, note 14).
[7] This order list has not been preserved. See Euler's reply nº 173, note 1.

173
Euler to Goldbach
Berlin, August 23rd, 1755

Sir,

the books that you had requested were just going to be dispatched when your last letter arrived; however, this shall now cause just a few days' delay. Mr. Spener assures me that next week everything will certainly be sent off to Lübeck.[1]

It is true that the reduction of the prime number $1 + 4f$ to the form $P^2 + Q^2$ must be accepted as possible even if no rule can be given for finding, in every case, the squares P^2 and Q^2 themselves and the matter depends on mere trials.

However I had just mentioned this to show that, in order to prove the theorem that $1+4f=P^2+Q^2$, the proof cannot be performed by an actual resolution:[2] indeed, the number f being given generically, I think it impossible to determine the numbers P and Q in terms of f. The same is true for the theorem that $1+8f=2P^2+Q^2$ (where $1+8f$ is a prime number); its proof cannot possibly be such that the values of the numbers P and Q are actually expressed in terms of f. My proof for it is based on the following propositions:

I. If the number $2a^2+b^2$ is not prime, it does not admit any divisors except such as are themselves of the form $2p^2+q^2$ (assuming, of course, that a and b are relatively prime).

II. If $1+8f$ is prime, the form $a^{8f}-b^{8f}$ is always divisible by $1+8f$, whatever numbers are taken for a and b (as long as just none of them is divisible by $1+8f$). Therefore, since $a^{8f}-b^{8f}=\left(a^{4f}-b^{4f}\right)\left(a^{4f}+b^{4f}\right)$, one of the factors, either $a^{4f}-b^{4f}$ or $a^{4f}+b^{4f}$, will be divisible by $1+8f$.

III. However, not all numbers of the form $a^{4f}-b^{4f}$ are divisible by $1+8f$; for if each of the numbers $2^{4f}-1$, $3^{4f}-1$, $4^{4f}-1$, $5^{4f}-1$, ..., $(8f)^{4f}-1$ were divisible by $1+8f$, then their differences, their second differences and all those that follow should be divisible by $1+8f$ as well; but the ultimate, constant differences equal $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdots 4f$, and since this is not divisible by $1+8f$, it follows that not all these numbers can be divisible by $1+8f$.

IV. There are therefore numbers a and b for which $a^{4f}-b^{4f}$ is not divisible by $1+8f$; consequently, in these cases the number $a^{4f}+b^{4f}$ is certainly divisible by $1+8f$. But one has $a^{4f}+b^{4f}=\left(a^{2f}-b^{2f}\right)^2+2a^{2f}b^{2f}$, so this is a number of the form P^2+2Q^2, and since it is divisible by $1+8f$, by (I.) the divisor $1+8f$ itself must necessarily be a number of the same form P^2+2Q^2.

Once a single instance has been found in which the formula x^2+ey^2 equals some given number N, infinitely many others can be determined – in fractions, of course. Thus, if $a^2+eb^2=N$, set $x=a+pz$ and $y=b-qz$, then

$$a^2+2apz+p^2z^2+eb^2-2ebqz+eq^2z^2=N;$$

but $a^2+eb^2=N$, therefore $2apz+p^2z^2-2ebqz+eq^2z^2=0$, so one has

$$z=\frac{2ebq-2ap}{p^2+eq^2}.$$

Thus, taking any numbers for p and q, one will have

$$x=\frac{eaq^2+2ebpq-ap^2}{p^2+eq^2}$$

and

$$y=\frac{bp^2-ebq^2+2apq}{p^2+eq^2}.$$

Moreover, when e is a negative number, then from a single instance $a^2-eb^2=N$ in whole numbers that has been found, infinitely many others, also in integers, can be determined. I show this briefly as follows:

Theorem: If $a^2 - eb^2 = N$, infinitely many instances in whole numbers x and y can be indicated for which one has $x^2 - ey^2 = N$ (assuming only e is no square number).

Proof: Whatever the number e may be, as long as it is not a square, the numbers p and q can always be determined in such a way that $p^2 - eq^2 = 1$ or $p^2 = eq^2 + 1$. Now, since by hypothesis $a^2 - eb^2 = N$, one will also have

$$\left(a^2 - eb^2\right)\left(p^2 - eq^2\right) = N.$$[3]

However,

$$\left(a^2 - eb^2\right)\left(p^2 - eq^2\right) = a^2p^2 - eb^2p^2 - ea^2q^2 + e^2b^2q^2 = (ap \pm ebq)^2 - e\,(bp \pm aq)^2 .$$

So, taking $x = ap \pm ebq$ and $y = bp \pm aq$, one will have $x^2 - ey^2 = N$. After that, in the same way as from the first instance $x = a$, $y = b$ two new ones were determined, from these other instances can again be calculated, and from those more others to infinity, QED.

So the entire matter depends on indicating, for any number e, the numbers p and q in such a way that $p^2 = eq^2 + 1$; as Pell and Fermat already showed, this can always be done in whole numbers. The appended table can serve for this end.

In order to have $p^2 = eq^2 + 1$,

for	take	and
$e = 2$	$q = 2$	$p = 3$
$e = 3$	$q = 1$	$p = 2$
$e = 5$	$q = 4$	$p = 9$
$e = 6$	$q = 2$	$p = 5$
$e = 7$	$q = 3$	$p = 8$
$e = 8$	$q = 1$	$p = 3$
$e = 10$	$q = 6$	$p = 19$
$e = 11$	$q = 3$	$p = 10$
$e = 12$	$q = 2$	$p = 7$
$e = 13$	$q = 180$	$p = 649$
	etc.	

This table contains the smallest values for p and q, determined by the so-called Pell method.[4] However, this method is rather cumbersome when the numbers for p and q become large, as happens in the case $e = 13$, and I discovered some means for shortening it a lot.[5] In fact it happens in some cases that the smallest numbers p and q become enormously large; thus when $e = 61$, one has $q = 226\,153\,980$ and $p = 1\,766\,319\,049$; when $e = 109$, $q = 15\,140\,424\,455\,100$, $p = 158\,070\,671\,986\,249$.

In the past, you also considered numbers such as $\square + \triangle$ or $\square + 2\,\triangle$, Sir; recently these led me to some curious exclusion theorems. Thus,

I. Since not every number is the sum of a square and a triangular number, or of the form $\square + \triangle$, there are infinitely many numbers not contained in this form; if n is a number of that kind, then the number $8n + 1$ is certainly not prime.

II. There are infinitely many numbers not contained in the form $\Box + 2\,\triangle$. Let n be such a number, then $4n+1$ is certainly not a prime number.[6]

Recently I came by chance upon the following problem: Find a cubic equation $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$ which has all its roots rational, and in which the coefficients A, B, C are square numbers. Or: the roots being p, q, r, they must be such that firstly $p+q+r$, secondly $pq+pr+qr$, and thirdly pqr are square numbers. I think this problem the more difficult since I believe no smaller numbers can be found for p, q, r than these: $p = 252\,782\,198\,228$, $q = 1\,633\,780\,814\,400$, $r = 3\,474\,741\,058\,973$.[7]

Lately I again did some investigations on differential equations – such as Riccati's – that can be integrated only in certain cases. Assuming i to be any whole number, the following equations are always integrable:[8]

I. $dy + y^2\,dx = a^2x^{2n-2}dx + ((2i+1)\ n \pm 1)\ ax^{n-2}dx.$

II. $dy + y^2\,dx = \dfrac{(in \pm 1)\,(in + n \pm 1)\ abx^{n-2}dx}{(a - bx^n)^2}.$

This means that the equation

$$dy + y^2\,dx = \frac{mabx^{n-2}dx}{(a - bx^n)^2}$$

is integrable whenever

$$n = \frac{\sqrt{1 + 4i\,(i+1)\,m} \pm (2i+1)}{2i\,(i+1)}.$$

Thus, for $i = 2$, $m = 3$, one has $n = \dfrac{\sqrt{73}+5}{12}$; so the equation

$$dy + y^2\,dx = \frac{3abx^{\frac{\sqrt{73}-19}{12}}dx}{\left(a - bx^{\frac{\sqrt{73}+5}{12}}\right)^2}.$$

is integrable. Taking, further, $n = 2$ and $i = 2$, the following equation will be integrable (where one has set $a = 1$, $b = 1$):

$$dy + y^2\,dx = \frac{15\,dx}{(1 - x^2)^2};$$

here the integral is

$$y = \frac{15x + 14x^3 - 2x^5}{(1 - x^2)\,(1 + 6x^2 + 2x^4)}.$$ [9]

III. $dy + y^2\,dx = \dfrac{in\,(in \pm 1)\ bx^{n-2}dx}{a + bx^n};$

IV. $dy + y^2\,dx = \dfrac{in\,(in \pm 1)\ a\,dx}{x^2\ (a + bx^n)};$

V. The equation

$$dy + y^2\,dx = \frac{\lambda\,(\lambda-1)\;a^2 - \mu abx^n + \nu\,(\nu-1)\,b^2x^{2n}}{x^2\,(a+bx^n)^2}\,dx$$

is integrable whenever, taking for i a whole number, one has

$$\mu = i\,(i+1)\;n^2 - (2i+1)\;n\,(\lambda-\nu) + \lambda + \nu - 2\lambda\nu.$$

As far as I know, nobody here enjoys an exemption from paying postage,[10] and since I have been here, my correspondence has probably cost me as much as 200 thalers a year; however, for no letters do I pay the postage money with greater pleasure than for those which I have the honour of receiving from you, Sir; I just wish I could have this pleasure more often, if it could be done without any incommodity on your part.

Recently the Royal Academy at Paris honoured me by receiving me among its foreign members.[11] The Count d'Argenson himself imparted this news to me in a letter of which I take the liberty of enclosing a copy for you, Sir.

All my family and especially your godson[12] ask to be most obediently recommended to you, and I have the honour to remain for all my life with dutiful respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, August 23rd, 1755.

> "Versailles, June 15th, 1755.
>
> The King has just chosen you, Sir, in accordance with the wish of His Royal Academy of Science, for filling a position of Foreign Associate in this Academy; as it nominated at the same time Lord Macclesfield, President of the Royal Society of London, to fill a similar position that was left vacant by Mr. Moivre's death, His Majesty decided not to fill the next position of this kind which will become vacant. The extremely rare occurrence of such an arrangement is too evident a distinction than that I could fail to bring it to your notice and to assure you of my great satisfaction with it. The Academy vividly desired to see you involved in its work, and His Majesty could not but endorse its testimony of the deep respect which you so justly merit. Let me assure you, Sir, that no one can be more perfectly devoted to you than I am.
>
> M. d'Argenson.
>
> To Mr. Euler, Director of the Class of Mathematics at the Academy of Berlin."[13]

In my *Mechanica*, t. II, p. 405, the following series occurs:

$$1-\frac{n}{3}+\frac{n\,(n-2)}{3\cdot 5}-\frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{n\,(n-2)\,(n-4)\,(n-6)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}-\ldots,$$

and its sum is stated to equal $\frac{1}{n+1}$. I cannot rightly recall any more in what manner I then arrived at this sum, but I believe I had the honour of conferring with you on the subject several times, Sir.[14]

[1] Cf. nº 172, note 7.
[2] Cf. nº 171, note 6, and nº 172, note 3.
[3] This identity lies behind Goldbach's remark (3.) in nº 168.
[4] Cf. nº 9, note 7.
[5] Cf. nº 169, note 6.
[6] Euler had already found these theorems in 1752 (cf. nº 165, note 5).
[7] This is not true, as Euler knew by 1762: Whereas at the end of his paper on this equation, E. 270 – which had been presented to the Berlin Academy in February 1755 – he says that the above triple can be "safely enough" stated to be the smallest, the summary preceding its publication in *Novi Commentarii* VIII indicates the much smaller solution (272, 306, 578), again proclaiming it to be "apparently" the smallest (see O. I/2, p. 520; 530). In fact the parametric solution by Fauquembergue (1899) yields the even smaller solution (80, 225, 320).
[8] On Riccati's equation and its integrable cases, see Section 2.4.2 of the Introduction and the literature quoted there.
[9] Here Euler committed a calculating error: the solution should be $\frac{15x+10x^3-x^5}{(1-x^2)\,(1+6x^2+x^4)}$.
[10] Cf. nº 172, note 5.
[11] Euler had been elected as a foreign associated member of the Académie des Sciences on June 15th, 1755; but since there was actually no vacant place (the Earl of Macclesfield, then President of the Royal Society, being elected at the same meeting "*ex officio*" as de Moivre's successor), the Academy had to ask King Louis XV to accept Euler as a "membre surnuméraire". In 1761, Euler succeeded Stephen Hales in one of the eight regular foreigners' places.
[12] Johann Albrecht Euler.
[13] The original of d'Argenson's letter has not been preserved in the archives of the Petersburg Academy. Its text is known only by the present copy and by the – nearly identical – publication in Nicolaus Fuß's *Lobrede* (Fuß 1786; cf. O. I/1, p. LXXXIV).
[14] Cf. E. 16: O. II/2, p. 370 (where, however, several misprints of the original edition have not been cleaned up). In his reply Goldbach maintains that the summation is "quite obvious" (cf. nº 174, note 4). In fact, the formula immediately results from an identity by Stirling that Euler had discussed with Goldbach in 1746 (cf. nº 108, note 12) by setting $t=\frac{1}{2}$ and $u=-\frac{n}{2}$.

174

Goldbach to Euler

Petersburg, (November 28th) December 9th, 1755

Sir,

First of all I congratulate you on the position of Honorary Academician at the Paris Academy of Sciences which you obtained,[1] and thank you for the copy of Mr. d'Argenson's letter which you sent me; however the best part – namely your answer, which I firmly believe to be very well written and worthy of the approval of the Forty – is missing.[2] Also it gives me great satisfaction that your eldest son received the prize of our local Academy of Science;[3] I do not at all doubt that this shall happen many more times if he takes the trouble to enter his papers for that purpose.

For the remarkable theorems that you communicated to me, I convey my dutiful thanks, and even though I have but little hope of ever being able to consider them as they should merit, I am yet very pleased that you still continue to make such beautiful discoveries, Sir. For my part, nothing special occurred to me since my last letter. With respect to the series

$$1 - \frac{n}{3} + \frac{n\,(n-2)}{3\cdot 5} - \frac{n\,(n-2)\,(n-4)}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots = \frac{1}{n+1},$$

I actually cannot recall having seen it before, but its sum is quite obvious;[4] those series whose denominators equal 0 in certain cases, so the sum of the series can become infinitely large, are of a different nature.

The books from Berlin have already arrived here, though only in small number; but up to now I have not yet received the invoice. Please be so kind as to have Mr. Spener informed that otherwise I should not have failed to pay it promptly.[5]

For the rest I remain, with a dutiful recommendation to all your family, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Dec. 9th (n. st.), 1755.

Theorem: If $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$, where P and Q are rational, then also

$$a^2 + ((2e+1)\,b - P - Q)^2 = M^2 + eN$$

with rational M and N.[6]

[1] Cf. n° 173, note 11.

[2] Euler's reply to d'Argenson has not been retrieved; Euler states he did not keep a copy (cf. n° 178, note 5).

[3] The first scientific contribution to be published under Johann Albrecht Euler's name, *Disquisitio de causa electricitatis*, had been awarded the prize of the Petersburg Academy in a public ceremony on September 6th, 1755; it was later published along with two other papers by Frisi and Béraud. In his letter to Müller from October 7th (R 1734: JW 1, p. 92), Euler

candidly admits that he had handed his thoughts on the subject over to Johann Albrecht for elaborating because he did not know whether he would be allowed to compete himself.

[4] Cf. nº 173, note 14.

[5] Cf. nº 173, note 1.

[6] In the formula above, Goldbach twice omitted the letter e, as he states in his postscript nº 175. However, the discussion that follows in nº 176–178 shows that the revised version is still not true and needs another modification.

175
Goldbach to Euler
[Petersburg], December (2nd) 13th, 1755

PS to the letter from Dec. 9th:

I think it necessary to inform you without delay of a slip of the pen concerning the theorem that I recently sent, Sir, as in fact this should read: If $a^2+b^2=P^2+eQ^2$, where P and Q are rational, then also

$$a^2+((2e+1)\,b-eP-eQ)^2=M^2+eN^2$$

with rational M and N.[1]

Dec. 13th, 1755.

In Mr. Etienne de Bourdeaux's bookstore at Berlin, a copy of the *Clef du Cabinet des Princes* in 100 octavo volumes is available.[2] You should oblige me, Sir, by having your manservant enquire how much these books cost and whether they are already bound.

[1] Cf. nº 174, note 6. On the lower half of the sheet, Euler pencilled some hard-to-read calculating notes in order to check the revised version of Goldbach's statement. They lead to the numerical instances

$$\begin{aligned} 9^2+4^2&=7^2+3\cdot 4^2 &\quad\rightarrow\quad 106&=M^2+3N^2\\ 1^2+3^2&=2^2+6\cdot 1^2 &\quad\rightarrow\quad 442&=M^2+6N^2\\ 1^2+4^2&=3^2+2\cdot 2^2 &\quad\rightarrow\quad 101&=M^2+2N^2, \end{aligned}$$

none of which has an integer solution; in his reply nº 176, Euler will use two of these to show that Goldbach's statement needs another modification.

[2] *La Clef du Cabinet des Princes de l'Europe* was a political monthly that had been published since 1704, originally by the journalist Claude Jordan and the printer André Chevalier at Luxembourg. Six instalments made up a volume: so tome 100 had been completed in June 1754.

176
Euler to Goldbach
Berlin, January 3rd, 1756

Sir,

at the beginning of this new year, I first of all convey my most cordial wish for your constant well-being and most humbly commend both myself and my family to your lasting goodwill. At the same time I also give you my most obliged thanks for the favourable interest which you kindly take in our state, and have the pleasure of reporting to you, Sir, that at the beginning of this year His Royal Majesty graciously awarded your godson, our eldest son, a yearly salary of 200 Imperial thalers.[1]

For a long time now I have had so many other obligations that I could not think of number-theoretical theorems of the kind which I had the honour to propose to you last time. Most of my time is taken by the applied parts of mathematics, where the more one deals with, the more is left to be investigated.[2] My head being filled with so many different matters may well be the reason that I cannot see my way towards the theorem which you communicated and afterwards corrected, but perhaps you forgot to add another material condition.[3]

The theorem was this: If $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$, then also

$$a^2 + ((2e+1)\,b - eP - eQ)^2 = M^2 + eN^2.$$

As I could not understand on what this is based, I decided to explore its correctness by examples.

I. When $1^2 + 4^2 = 17 = 3^2 + 2 \cdot 2^2$, one has $a = 1$, $b = 4$, $P = 3$, $Q = 2$ and $e = 2$; so one should have to have

$$1^2 + (5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2)^2 = 1^2 + 10^2 = 101 = M^2 + 2N^2,$$

which is impossible.

II. When $9^2 + 4^2 = 97 = 7^2 + 3 \cdot 4^2$, one has $a = 9$; $b = 4$; $P = 7$; $Q = 4$ and $e = 3$; thus one should have to have

$$9^2 + (7 \cdot 4 - 3 \cdot 7 - 3 \cdot 4)^2 = 9^2 + 5^2 = 106 = M^2 + 3N^2,$$

which is also impossible.[4]

Since, actually, I cannot discover a single example which is valid, I conclude from this that a certain condition on the numbers a, b, P and Q must have been omitted, which I cannot however find out.

I had Mr. Spener informed that you are asking for the invoice for the books he sent you; if – as I let him know – I receive it before closing this letter, I shall enclose it.[5] Otherwise, since he did not have all the books you ordered, I shall in the future pass such commissions on to Mr. Neaulme, who is much more active and can procure anything. Regarding the book *La Clef du Cabinet des Princes* I enclose here Mr. de Bourdeaux's answer.[6] In case it should be already sold before your decision arrives, Mr. Neaulme took it upon himself also to supply the same.

I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, January 3rd, 1756.

[1] Johann Albrecht Euler had been proposed by Maupertuis as an ordinary member of the Berlin Academy on November 28th and formally elected in the assembly of December 5th, 1754 (see Winter 1957, p. 207–208). See also the short biographies of Euler's sons in Kopelevich 1957, in particular p. 29.
[2] In the early 1750s, Euler had indeed worked on a lot of applied and technological problems involving – among many other things – the optimal design of telescopes, saws, turbines, cogwheels and water pumps.
[3] Cf. nº 174, note 6, and nº 175, note 1.
[4] See Goldbach's reply nº 177, note 4.
[5] Cf. nº 174, note 5.
[6] Cf. nº 175, note 2. The enclosure by Bourdeaux has not been preserved.

177
Goldbach to Euler
Petersburg, January (13th) 24th, 1756

Sir,

much as I regret having given you some trouble by my theorem that was incorrectly copied down, it yet gives me quite as much pleasure that you thought it worthy to be examined;[1] indeed, if you had made no reply to it, I certainly should not have thought any more about it. However, after inspecting it again at your instigation, I at once noticed that it can be rendered infinitely more general, and the verse which I quoted on another occasion is again appropriate: "*Si non errasset fecerat ille minus*" ("If he had not erred he should have done less").[2] It ought to read: If $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$, where P and Q are rational numbers, then one shall also be able to make

$$a^2 + (b + 2em\,(mb - mP - Q))^2 = M^2 + eN^2,$$

where M and N are rational, whenever a rational number is assumed for m.[3]

In the first example that you cited, Sir,[4] where $a = 1$, $b = 4$, $P = 3$, $Q = 2$ and $e = 2$, one has $1^2 + 4^2 = 3^2 + 2 \cdot 2^2$, therefore also

$$1^2 + \left(4 + 4m^2 - 8m\right)^2$$

or[5]

$$1^2 + 2^2\,(m-1)^4 = M^2 + 2N^2,$$

which cannot reasonably be doubted; in the second example, where $a = 9$, $b = 4$, $P = 7$, $Q = 4$, $e = 3$ or $9^2 + 4^2 = 7^2 + 3 \cdot 4^2$, one has

$$9^2 + \left(4 - 24m - 18m^2\right)^2 = M^2 + 3N^2,$$

which also is a certain truth. Now whenever $a^2 + (b + 2em\,(mb - mP - Q))^2$ is a prime number, it can have the form $M^2 + eN^2$ even if $a^2 + b^2$ is no prime.

I acknowledge with due thanks the effort that you kindly made in enquiring after the *Clé du Cabinet* at Mr. de Bourdeaux's;[6] acting on this, I send you the enclosed order of payment for 45 Imperial thalers, humbly asking you to have the books, once they have been packed and sealed at Mr. de Bourdeaux's, stored at your house, without taking any trouble until they can be dispatched; in fact, I plan to have them sent here next spring, along with some other books. Mr. Poggenpohl has already given instructions at Berlin to have Mr. Spener paid, which will have been done before this letter arrives.[7] I most gratefully accept the suggestion to have books from Berlin sent by Mr. Neaulme, but I do not know if he also has German books in his store or will endeavour to obtain them.

For your kind New Year's wish I am most obliged to you, Sir. May God let you cover the year which has already begun and many following years in all imaginable well-being, together with your wife and all your family. I was most pleased to learn that my godson has already got hold of a real salary;[8] this is a good start, and in this he is fortunately imitating you, Sir, as I think you were engaged by the Petersburg Academy of Science at nearly the same age.[9] Recently I also learnt Master Johann Albrecht had already received a prize from the Paris Academy;[10] I hope to have this news confirmed by yourself, Sir, but even if it should be incorrect, it shall presumably be verified soon and for many times to come.

In my last letter I asked for your answer to Mr. d'Argenson's letter,[11] as I presumed this had been written with Mr. de Maupertuis' critique and approval and should be a nice piece of work in itself; therefore I again strongly ask you for it. For the rest I remain very respectfully, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Jan. 24th (n. st.), 1756.

[1] Cf. n° 174, note 6, and n° 175, note 1.

[2] Goldbach had already used this quotation from Martial in his letter n° 59 written in 1742.

[3] With a reference sign after this formula, Euler noted in the lower margin of fol. 169r the following calculations, which lead up to his approving reply in n° 178:

$$\begin{aligned} M &= P + 2em\,(mb - mP - Q) \\ N &= 2mb - 2mP - Q, \end{aligned}$$

nam (for)

$MM + eNN$

$$\begin{aligned} & PP + 4emP\,(mb - mP - Q) + 4eemm\,(mb - mP - Q)^2 \\ & 4e\,(mb - mP)^2 + 4e\,(mb - mP)\,(mb - mP - Q) + e\,(mb - mP - Q)^2 \\ = \; & PP + eQQ + 4ebm\,(mb - mP - Q) + 4eemm\,(mb - mP - Q)^2 \,. \end{aligned}$$

[4] Cf. nº 176, note 4.
[5] The equation that follows should have 4^2 instead of the mistaken 2^2 of the original.
[6] Cf. nº 175, note 2, and nº 176, note 6.
[7] Cf. nº 174, note 5.
[8] Cf. nº 176, note 1.
[9] Leonhard Euler had been engaged by the Petersburg Academy in 1726, when he was not yet quite 20, whereas Johann Albrecht was elected to the Berlin Academy in December 1755, shortly after his 21st birthday.
[10] This is not true: see Euler's reply nº 178, note 2.
[11] Cf. nº 174, note 2.

178
Euler to Goldbach
Berlin, February 10th, 1756

Sir,

La Clef du Cabinet des Princes was still available;[1] by now I have this work, which consists of 100 volumes, in safekeeping at my house; each 10 volumes are bound together, and I do not see how they could easily be sealed, unless I have a special chest made for them. However, as you plan to order some more books to go together with them, a special chest will probably not be necessary; so I shall keep them until then as safely as if they were sealed.

Mr. Neaulme does indeed not have many German books, but is able to procure everything; he seems to be more active than others and cheap besides this, but further than this I cannot vouch for him.

For the most gracious interest which you take in our condition, Sir, and your kind wishes in this respect, I convey my dutiful thanks. Our Johann Albert has not yet received a prize at the Paris Academy.[2] The name of the person who received last year's prize was not immediately made public; people just knew he was a youngster, which might possibly have caused the report that was given to you. However, since then I have been sent the prize paper itself; its author is named as "Mr. Chauchot, under-shipwright", but he is said to have died soon afterwards.[3] The question had been: *To diminish as far as possible the rolling and pitching motions of a Ship* and so forth. However, as the paper just mentioned did not give complete satisfaction, the very same question has again been proposed for next year, and now we are indeed working on it.[4] I have not kept a copy of my letter of thanks to His Excellency Count d'Argenson any more than for any of my letters; in fact it turned out very plainly, and it would therefore have been impossible to improve it a lot. I was not at all pleased with it and therefore did not want to keep it as a souvenir.[5]

Your theorem, Sir, that if $a^2 + b^2 = P^2 + eQ^2$, then also

$$a^2 + (b + 2em\,(mb - mP - Q))^2 = M^2 + eN^2,$$

is entirely correct[6] and very remarkable for allowing a solution of the following problem:

Any two squares a^2 and b^2 whose sum is a number of the form P^2+eQ^2 being given, determine infinitely many other squares that can be substituted for b^2 so that the sum which results by adding them to the first one, a^2, is also a number of the form P^2+eQ^2.

So here the first square, a^2, is maintained, and instead of the second one, b^2, infinitely many other values are indicated in such a way that the sum is always contained in the form P^2+eQ^2. Even more generally the problem could be proposed thus:

A sum of two squares a^2+b^2 which is a number of the form P^2+eQ^2 being given, determine infinitely many other sums of two squares x^2+y^2 that are contained in the same form.

For this I discovered the following solution: When $a^2+b^2=P^2+eQ^2$, assign the following values to the numbers x and y:

$$\begin{aligned} x &= a\left(t^2+ev^2+r^2-s^2\right)+2r\left(bs-Pt-eQv\right), \\ y &= b\left(t^2+ev^2-r^2+s^2\right)+2s\left(ar-Pt-eQv\right), \end{aligned}$$

where the letters r, s, t, v can actually be assumed to be arbitrary numbers.

For then one shall have $x^2+y^2=M^2+eN^2$ in any case; indeed,

$$M=P\left(r^2+s^2+t^2-ev^2\right)+2t\left(eQv-ar-bs\right)$$

and

$$N=Q\left(r^2+s^2-t^2+ev^2\right)+2v\left(Pt-ar-bs\right).$$

In this manner not just infinitely many, but even all possible values of x and y are determined.

In this problem it is assumed that one instance where $a^2+b^2=P^2+eQ^2$ is already known, in order to determine all the rest from it; however, not even this is necessary, but an arbitrary number e being proposed, one can immediately indicate all the possible sums of two squares which are at the same time contained in the form P^2+eQ^2. Indeed, starting from $a=ex^2-y^2+z^2$ and $b=2yz$, one at once has $a^2+b^2=\left(ex^2-y^2-z^2\right)^2+e\left(2xz\right)^2$. Since now x, y and z can be assumed at will, this solution extends to all possible cases and thus appears to have more than a little advantage over the preceding one.[7]

All of us recommend ourselves to your constant goodwill, and I have the honour to remain for all my life with due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Feb. 10th, 1756.

[1] Cf. nº 177, note 6.
[2] Cf. nº 177, note 10.
[3] Simon-Pierre Chauchot from Brest, the author of the prize-winning paper *Sur les mouvemens de Roulis & de Tangage des Navires*, “one of the most skilled mathematicians of our days”,

had indeed died of smallpox at the age of 23, on June 4th, 1755, aboard a French war ship sailing to Lisbon. This information – hitherto missing in the relevant databases – has been retrieved from a footnote to a poem on inoculation published by a friend of Chauchot's, A.A.H. Poinsinet "le jeune", the following year.

[4] Euler finally won half the prize of the Paris Academy, when the question was reproposed again for 1759, with E. 415; Johann Albrecht's collaboration is not mentioned there.

[5] Cf. nº 174, note 2, and nº 177, note 11.

[6] Cf. nº 177, note 3.

[7] Dividing $a^2 = eQ^2 - b^2 + P^2$ by a^2, one has $1 = er^2 - s^2 + t^2$; geometrically, this can be interpreted as a quadric and then parametrised using the lines through $(r, s, t) = (0, 0, 1)$. This easily yields Euler's formulae. His own reasoning was probably closer to that he had earlier used in nº 167.

179
Goldbach to Euler
Petersburg, March (12th) 23rd, 1756

Sir,

I am taking the liberty of sending you again a small list of books,[1] asking you to have them procured by the bookseller you shall choose; in the meantime I humbly thank you, Sir, for the trouble that you already took with the *Clé du Cabinet*,[2] and I should ardently wish to be able to do some favours for you also on my part. Mr. Spener's first invoice and his letter from Sept. 27th, 1755, were delivered to me no earlier than on March 2nd, 1756, when the receipt for the money paid in accordance with the second invoice had already arrived;[3] so I do not think it worth the trouble by now to have it investigated where the letter was held up for such a long time.

The equation

$$a^2 + b^2 = \left(ex^2 - y^2 - z^2\right)^2 + e\,(2xz)^2\,,$$

which you cited, Sir, is already known by our earlier correspondence, a circumstance which may perhaps have slipped your mind.[4] Moreover I also observed another "whim of nature" that belongs to this topic: indeed, if $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$, then one shall also have

$$1 + 4e\left(fg + ef^2y^2x^2\right) = (P - 2efyx)^2 + e\,(Q - x)^2\,,$$

setting $x = \dfrac{4fPy + 2Q}{4efy^2 + 1}$;[5] thus whenever $e\left(g + efy^2x^2\right)$ is a square number (where one assumes the said value of x), $P^2 + eQ^2$ can be turned into the form $M^2 + fN^2$, where M and N are rational, for one shall have $M = P - 2efyx$ and $N = Q - x$.

I was pleased to learn that you have bought a country estate and are to make frequent excursions there;[6] this will be very useful not only for distraction – as the

German Jesuits are wont to say – but also for maintaining your health; I therefore wish to have much pleasant news of your further well-being. I remain with special respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, March 23rd (n. st.), 1756.

[1] The enclosed order list has not been preserved.
[2] Cf. n° 175, note 2, and n° 178, note 1.
[3] Cf. n° 174, note 5, and n° 176, note 5.
[4] See the final paragraph of n° 178. Goldbach is right: Euler had already stated the transformation formula in n° 169.
[5] There is a mistake that Goldbach corrects by his PS n° 180.
[6] This estate was situated on the Spree at the village of Lietzow near Charlottenburg, about 6 km west of Euler's town house, in what is today part of the city. Euler had bought it for 6000 thalers in 1753, in order to grow his own food for his large household and accommodate his mother and his children with their tutor (see his letter R 2311 to Schumacher, August 14th, 1753: JW 2, p. 318).

180
Goldbach to Euler
Petersburg, March (16th) 27th, 1756

PS. to my letter from March 23rd, 1756.

It seems that mistakes due to excessive haste are becoming ever more common in my letters to you; in the last one it should again have read $x = 4fPy + 2Q$ instead of $x = \dfrac{4fPy + 2Q}{4efy^2 + 1}$, which I ask you to please correct without taking offence. For the rest, perhaps the following argument will contribute to the proof that a prime number of the form $1 + 4efg$ can be transformed into $P^2 + eQ^2$:

If for rational e, f, g one can make $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$ so that P and Q are rational, then one can also make

$$1 + 4efg = M^2 + fN^2 = R^2 + gS^2$$

so that M, N, R, S are rational (because in the number $1 + 4efg$ the numbers e, f, and g can be interchanged by their nature).

But then, since for any prime number $1 + 4efg = a^2 + b^2$ the former is true (as one can set $e = 1$, $P = a$, $Q = b$), so is the latter.[1]

On the address of this letter it shall read, as on the former ones, "postage-free to Berlin". I just hope that my letters are actually delivered to you according to this instruction, Sir; otherwise please send me a short note about it.[2] St. Petersburg, March 27th, 1756.

[1] On this paragraph, Euler noted in the margin some calculations that lead up to his cautioning remark in the reply n° 181:

$1 + 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 661$
$= 25^2 + 6^2 = 19^2 + 3 \cdot 10^2$
$= 16^2 + 5 \cdot 9^2 = 11^2 + 15 \cdot 6^2$
$= 23^2 + 33 \cdot 2^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{15}{2}\right)^2$
$= 7^2 + 17 \cdot 6^2 = 21^2 + 55 \cdot 2^2$
$1 + 4 \cdot 11 \cdot 2 = 89 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 11\left(\frac{5}{2}\right)^2.$

[2] See Euler's reply at the end of n° 181.

181
Euler to Goldbach
Berlin, April 17th, 1756

Sir,

Mr. Spener has undertaken to procure the books you requested and to have them bound according to your instructions; he also promised to dispatch them, and the *Clef du Cabinet* as well, to Lübeck some time soon. As there were so many German books among them, Mr. Neaulme might have been able to obtain but few of them, whereas Mr. Spener received after the last consignment some of those which you had requested last time, Sir, and which are again mentioned in the present list.[1]

It is entirely correct that, if $1 + 4efg = P^2 + eQ^2$, then one also has

$$(P - 2efyx)^2 + e\,(Q - x)^2 = 1 + 4ef\left(g + efy^2x^2\right)$$

by setting $x = 4fPy + 2Q$; thus it is also true that, whenever $e\left(g + efy^2x^2\right)$ is a square, this form can be changed into $M^2 + fN^2$. However, nothing much can be inferred from this: for since e, f, g are usually relatively prime numbers, the factors e and $g + efy^2x^2$ are relatively prime, so their product cannot be a square unless one is prepared to admit fractional numbers for y and x, but then one should get tangled up in even greater difficulties. Let, for example, $e = 2$, $f = 5$ and $g = 1$, so $1 + 4efg = 41 = 3^2 + 2 \cdot 4^2$; therefore $P = 3$ and $Q = 4$. Now take $x = 4fPy + 2Q = 60y + 8$, then it is indeed true that

$$1 + 40\left(1 + 10y^2x^2\right) = (3 - 20yx)^2 + 2\,(4 - x)^2\,.$$

So the question should be whether $e\left(g + efy^2x^2\right) = 2\left(1 + 10y^2x^2\right)$ can be a square, but this is impossible as long as x and y are assumed to be whole numbers. On the other hand, if one were also to admit fractions and to substitute for x its value $60y + 8$, one should have $yx = 60y^2 + 8y$, consequently $y^2x^2 = 3600y^4 + 960y^3 + 64y^2$, and so one should arrive at the question whether the formula $72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$ can yield a square. However, even if this could be discovered by a great effort, I do not see what one should have gained. Meanwhile it is certain that this formula can never yield a square even in fractional numbers: for let us, even before substituting for x its value, set yx equal to m;

then $2+20m^2=\square$. Further, let $m=\frac{n}{4}$, then $2+\frac{5}{4}n^2=\square$ or $5n^2+8=\square$, which is manifestly impossible.

The argument which you proffered, Sir, that, when $1+4efg=P^2+eQ^2$, one must also have

$$1+4efg=M^2+fN^2=R^2+gS^2,$$

since there is no reason why such a resolution should take place for one of the factors e, f, g rather than for the others, should pass for an excellent proof in metaphysics, where people are used to be content with demonstrations that are not nearly so conclusive; but in mathematics arguments of this kind always look suspect to me. You actually generalise this proposition to all rational numbers altogether, Sir; in this case I think it to be true, if only $1+4efg$ is a prime number – a necessary condition that is all the same not present in your argument, and neither is it clear why it should be added. But without this condition the proposition is false, for $1+4\cdot1\cdot5$ is of the form $P^2+5\cdot Q^2$, and yet $1+4\cdot1\cdot5=M^2+1\cdot N^2$ is impossible. After this, even if one could find the means of incorporating the condition that $1+4efg$ must be a prime number into the proof, I still do not see any reason why the proposition should not also be true if not just rational numbers, but also integers are assumed for P, Q, M, N, R, S; in fact, if the reduction $1+4efg=P^2+eQ^2$ takes place in integers, the indicated proof does not contain any reason why the other reductions should not also take place in integers. However, in this case the proposition is no longer true, as the following example shows:[2] Let $e=3$, $f=5$, $g=11$, then $1+4efg=661$ (which is a prime number). Now one indeed has $661=19^2+3\cdot10^2$ and also $661=16^2+5\cdot9^2$, but the third resolution $661=R^2+11\cdot S^2$ cannot hold in whole numbers in any way. In fractions, however, it is possible, since $661=\left(\frac{13}{2}\right)^2+11\left(\frac{15}{2}\right)^2$; by this it is clearly evident that in arguments of that kind the greatest circumspection must be applied. I experienced this often enough myself on occasion of the proofs I gave for some theorems of Fermat's. Thus, as an example, it was very easy to prove that, if two sums of two squares are multiplied into one another, the product must likewise be a sum of two squares, since

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac\pm bd)^2+(ad\mp bc)^2\,.$$

Now who should not conclude from this that, whenever a sum of two squares can be divided by another sum of two squares, the quotient must also be a sum of two squares? The matter is indeed true, but the argument just mentioned is incorrect; for if it were right, then this should also have to be right: The product of two even numbers is always even; so if an even number is divisible by another even number, the quotient is also even; but this is manifestly false.

Besides most obediently recommending all my family, I have the honour to remain with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, April 17th, 1756.

Your last letters, Sir, were delivered to me entirely free of charge.[3] Although I do not lack distractions in town, I nonetheless often go to my estate to call on my mother.[4]

[1] Cf. nº 170, note 5, nº 175, note 2, and nº 179, notes 1 and 2.
[2] See Euler's calculation in nº 180, note 1.
[3] Cf. nº 180, note 2.
[4] Cf. nº 179, note 6.

182
Goldbach to Euler
Petersburg, May (7th) 18th, 1756

Sir,

first of all, I humbly ask you not to take it amiss that I am again enclosing a little note to Mr. Spener.[1]

With respect to the equation $1 + efg = P^2 + eQ^2 = M^2 + fN^2 = \ldots$, I quite agree with your opinion, Sir, in so far as the nature of the numbers P, Q, M, etc. – whether they are to be integers, fractional or surd numbers – is not determined, although the integers e, f, and g are interchangeable.[2] By the way, the fact that the large number $72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$ cannot be a square follows immediately by considering it as an instance of the rule $4n + 2 \neq \square$.

On the other hand I confess that I do not yet quite understand why, for the equation $1 + 4ef = P^2 + eQ^2$ to be true, you require that $1 + 4ef$ be a prime number if P and Q are to be rational; in fact, the case where $f = e + k^2 - 1$ by itself already offers innumerable examples that non-prime numbers can also have this property; thus, e. g., setting $e = k = 3$, one gets $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11 = 5^2 + 3 \cdot 6^2$.

I think the following theorem is susceptible of proof: Let $p = a^2 + b^2$ and let $1+mQ^2$ be a sum of two squares, then one also has $p = a^2+b^2 = P^2+\big(x^2 - mp\big)\, Q^2$ in such a way that, if the rest of the numbers is rational, x is also rational.[3]

With this, I remain with great respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, May 18th (n. st.), 1756.

[1] This enclosure – probably another book order – has not been preserved.
[2] Cf. nº 181, note 2.
[3] See Euler's reply nº 183, note 3.

183
Euler to Goldbach
Berlin, June 11th, 1756

Sir,

I gave your enclosed note to Mr. Spener right away,[1] but at the same time saw to my greatest displeasure that the chest containing the books you had requested before had still not been dispatched;[2] for this he blamed the bookbinder, who according to him had delayed him for such a long time, and also claimed to have just yet received some books that had to be sent along. However, when I hinted to him that another chest should have to be sent later, he made me a holy promise that this one should be sent to Lübeck by the first cartload; it contains *La Clef du Cabinet*, which I was utterly convinced had been dispatched from here a long time ago.

That the large number $72\,000y^4 + 19\,200y^3 + 1280y^2 + 2$ cannot be a square follows from the formula $4n + 2 \neq \square$ only in the case where y is a whole number; but as far as I recall, y also comprised fractional numbers, and in that case a special proof is indeed required. One just needs to consider the formula $8x^2 + 2$, which can be a square in infinite ways if x is also allowed to be a fraction, e. g., $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{7}{2}$, etc.; so it has to be proved separately that the same does not occur for the above expression.

The reason why, for the equation $1+4ef = P^2+eQ^2$ to be true, I require that $1 + 4ef$ should be a prime number, is that, when $1 + 4ef$ is not a prime, cases occur where $1 + 4ef$ cannot equal the form $P^2 + eQ^2$; let, for example, $e = 1$, $f = 5$, then $1 + 4ef = 21$ will certainly not equal $P^2 + Q^2$. Meanwhile I readily concede that $1 + 4ef = P^2 + eQ^2$ is true in infinitely many instances even when $1 + 4ef$ is not a prime. However, if just a single instance to the contrary could be adduced, this should be sufficient to destroy the truth of the proposition. On the other hand, once the condition that $1 + 4ef$ must be a prime is added, no instance to the contrary can be adduced – viz., if one does not forbid P and Q to be fractions – and therefore I believe the proposition to be true, notwithstanding that I cannot prove it. Yet, if the condition that $1+4ef$ equals a prime number is omitted, then one can safely assert that the proposition $1+4ef = P^2+eQ^2$ is not true, since indicating a single instance to the contrary is sufficient to overturn it.

Again, if one allows only whole numbers for P and Q, stipulating at the same time the condition that $1 + 4ef$ must be a prime number, then the equation $1 + 4ef = P^2 + eQ^2$ can certainly not be proved in general, since I can adduce infinitely many instances to the contrary. In fact, the very example that you cited, Sir, namely $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11 = 133 = 5^2 + 3 \cdot 6^2$ – despite the fact that 133 is not a prime – offers an exception, since $1 + 4 \cdot 3 \cdot 11$ does not equal $P^2 + 11Q^2$, which however should have to be the case if the proposition were generally true.

The theorem which you stated, Sir,[3] that, if $p = a^2 + b^2$ and $1 + mQ^2$ is a sum of two squares, then one will also have $p = a^2 + b^2 = P^2 + \left(x^2 - mp\right) Q^2$, is not only provable, but one can also exhibit in general the values of P and x

which satisfy this equation. For letting $1 + mQ^2 = r^2 + s^2$, take $P = ar - bs$ and $x = \dfrac{as + br}{Q}$, then evidently $a^2 + b^2 = P^2 + \left(x^2 - mp\right) Q^2$. For, as one has

$$\begin{aligned} P^2 &= a^2r^2 - 2abrs + b^2s^2 \\ x^2Q^2 &= a^2s^2 + 2abrs + b^2r^2 \\ -mpQ^2 &= -ma^2Q^2 - mb^2Q^2 \\ \hline \end{aligned}$$

because of $p = a^2 + b^2$, it follows that

$$P^2 + \left(x^2 - mp\right) Q^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(r^2 + s^2\right) - m\left(a^2 + b^2\right) Q^2 = a^2 + b^2,$$

since $r^2 + s^2 = 1 + mQ^2$ by hypothesis.

With this I have the honour of remaining with all due respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, June 11th, 1756.

[1] Cf. nº 182, note 1.
[2] Cf. nº 181, note 1.
[3] Cf. nº 182, note 3.

184
Euler to Goldbach
Berlin, April 26th, 1757

Sir,

under the present circumstances, when I must see myself deprived of the honour of your correspondence since a long time ago,[1] I should have had reservations about importuning you with my letters, if it had not felt irresponsible to me to omit this welcome opportunity of proving my dutiful reverence to you. Professor Aepinus, who desires to have the honour of handing this letter over to you, not only is my very good friend, but also has, besides his thorough erudition, such merits as to give me the assurance that his acquaintance shall not be unwelcome to you; this is why I dare recommend him most warmly to you, Sir.[2]

My son, who is so fortunate as to revere you as his godfather, likewise ventures on this occasion to express his most humble respect to you and to recommend himself most obediently to your goodwill and favour, a licence which for my part I also beg you not to take amiss.[3]

Recently the memory of a problem that was once submitted to me gave me the occasion for a nice investigation, upon which Analysis might otherwise appear to have no influence. The problem was: run through all 64 squares on a chessboard with a knight in such a way that it enters none of them more than once.[4] For this goal, markers were laid out on all the squares, which were taken away once the knight had alighted on them. Additionally it was required that one should start on some given square. Indeed it was this last condition that seemed to me to render the problem most difficult; for I had soon identified some routes, in which, however, the starting point had to be left up to me. On the other hand, I saw that this difficulty should also be eliminated if the route were returning into itself, so that the knight could jump from the last square to the first one again. After some trials which I did on this, I finally discovered a sure method for finding, without any trial, as many routes of this kind as one wishes (the number of all possible routes is not infinite, though). One of these is presented in the adjoining figure. The knight in fact jumps according to the order of the numbers. Since the last square 64 is a knight jump away from n° 1, this route is returning into itself.

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Here the additional property has been contrived that the difference of the numbers in opposite squares always equals 32.

All my family asks to be most humbly recommended to you, and I have the honour to remain with due reverence for all my lifetime, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, April 26th, 1757.

[1] Euler alludes to the Third Silesian War, which had been unleashed by the Prussians' invasion of Saxony in August 1756. Since Russia was allied with Saxony, Austria and France, the postal service between Berlin and Petersburg was restricted (though not entirely interrupted); Euler's correspondence with Goldbach – after all a civil servant in the Russian Foreign Office who dealt with coded communication – broke down for more than five years, except for this single occasion when a letter could be entrusted to a personal messenger.

[2] Aepinus had been director of the Berlin Observatory since 1755 and had lived at Euler's house during that time. In October 1756 he was elected – on Euler's recommendation – to the chair of physics at the Petersburg Academy, where he attended his first meeting on May 12th (23rd), 1757.

[3] Johann Albrecht Euler's letter to Goldbach from April 20th, 1757, which was sent with the present one, is reproduced here as n° 184[a].

[4] The earliest known references to the "Knight's Tour" problem in India and Iraq date back to the 9th century AD. It resurfaced in Europe in the early 18th century, when solutions by Montmort, de Moivre and de Mairan were published in the 1725 edition of Ozanam's *Recreations Mathematiques*. Euler may have learned of the problem from Louis Bertrand, a young

mathematician from Geneva who stayed with him at Berlin from 1752 to 1756 (see the introduction to the Euler-Bertrand correspondence, to be published in O. IVA/7); in his paper on the subject, E. 309, which was presented to the Berlin Academy in March 1758 but printed only in 1766, Euler states that Bertrand suggested "a particular idea" for its solution. This paper also presents solutions for other square, rectangular and cross-shaped chessboards; these had been investigated and sketched – probably in the mid-1750s – in Euler's notebook *Adversaria mathematica* VI (PFARAN, f. 136, op. 1, n. 134, p. 461–478, 482.)
See Sesiano 2012, 2014.

184a
Johann Albrecht Euler to Goldbach[1]
Berlin, April 20th, 1757

Sir,

the particularly kind and favourable disposition which you have always evinced towards all our family makes me so bold as to present these lines to you and assure you of my most humble respect; it is indeed true that it should have been my duty to do so a long time ago, but since I had already neglected it once, I did not dare to observe it lately: for although I have at all times been certain of your particular favour, Sir, my awe of you has always been quite as great; and moreover my fear to have offended you rendered me so shy that I did not dare to be so bold as to present a letter to you. However, the great confidence in your kindly attitude, Sir, which I have always felt, has now vanquished my shyness, and my great fear to make my bad behaviour even worse by persevering in it, finally brought me to the resolution to display at this nice opportunity by the present few lines addressed to you, Sir, how highly I regard you and how much I regret not having made this declaration earlier, as I ought to have done.

The carrier of this letter, Professor Aepinus, one of the best friends I have here in Berlin, is presently travelling to Petersburg;[2] he has kindly offered to take some letters to Petersburg in order to have an opportunity to call on you, Sir: this circumstance appeared to me sufficient to excuse the liberty I am taking in writing to you and trying to make up for my shameful omission to do so. I am comforting myself by the sweet hope that you shall kindly forgive my former negligence and receive the present letter as well as I could only wish for my happiness.

I shall account myself most fortunate if you graciously accept this small sign of my dutiful reverence; and I make so bold as to beg most humbly for your goodwill and favourable disposition, remaining for all my life with the most dutiful respect,

Sir, your most humble and obedient servant

Johann Albrecht Euler

Berlin, April 20th, 1757.

[1] This letter of Johann Albrecht's to his godfather was enclosed with Leonhard Euler's missive n° 184 to Goldbach of April 26th, 1757, and sent to Petersburg with F.U.Th. Aepinus. Cf. n° 184, note 3.
[2] Cf. n° 184, note 2.

185
Euler to Goldbach
Berlin, June 29th, 1762

Sir and most kind patron,

after the violent thunderstorm, which made it quite impossible for me to convey my dutiful reverence to you by writing,[1] I did not dare to discharge my most urgent duty to do so at once because of my utter ignorance of your condition; so I had asked Professor Müller to give me the necessary information.[2] For this reason my joy was all the more vivid when the day before yesterday I was as fortunate as to receive your very kind letter,[3] Sir, and I can express in words neither my satisfaction at your being well nor the feelings of gratitude for your ongoing, most uncommonly benevolent attitude towards myself and my family. I am especially deeply moved by the gracious thought that you were so kind as to award to my eldest son, and he is also quite besides himself with delight. After he was most graciously granted a position at our Academy by His Royal Majesty, he got married several years ago to our satisfaction, and as his income is still very small because of the troubles of war, he is living with us, together with his wife, and we have the pleasure of having lived to see a lovely little granddaughter.[4] Up to this moment, Divine Providence has reigned so graciously and wonderfully over us, despite some grief, that we put our firm confidence in it also for what is to come. My second son, who was also born when we were still in Petersburg, has most assiduously devoted himself to Medicine and is presently at Halle, where I brought him a year ago; he plans to obtain his doctorate next autumn.[5] I have the consolation that his professors cannot do enough to praise his application and his good manners. My youngest son, who was born here in 1743, applied himself to a military career and is now a lieutenant in the Artillery,[6] where one is uncommonly satisfied with him. Besides these, we also have two daughters[7] and are living here together most contentedly, by the grace of God, although everyone here complains bitterly about the hard times we had to endure; I also had the misfortune that my country estate at Charlottenburg was completely pillaged when our town was in Russian hands. General Chernyshëv, who had called on me there before that time, at once sent me a letter of exemption, but this arrived too late. I have not yet given up hope that the loss I suffered shall be compensated, as I was given the most gracious assurances both by the Lord Hetman and His Lordship the Grand Chancellor. By the Academy I was advised also to report the matter to our Ambassador, Baron von Goltz, but the present circumstances do not yet seem to me to be the most favourable for this.[8] However, our grief is far outweighed by our fervent joy for the most miraculous and divine deliverance of our dearest King, and our churches resound all the time with the most heartfelt praise for His gloriously reigning Majesty of the Russian Empire, whom the Almighty may shower with all imaginable bounties! [9]

I am firmly confident of your gracious affection, Sir; so you shall not grow impatient with the long-winded telling of my circumstances, but rather shall further bestow upon us your highly valued benevolence, to which I urgently and most humbly recommend both myself and all my family. May the Almighty God keep you forever in constant health and all true well-being, Sir, and let you sense in everything His invigorating and abundant blessing!

I have the honour to be with the most perfect respect, Sir, your most obedient and obliged servant

L. Euler

Berlin, June 29th, 1762.

[1] Euler refers to the war (cf. nº 184, note 1) which had by then nearly run its seven-year course, culminating for the inhabitants of Berlin in the Russian occupation in October 1760. By summer 1762 the tide had again turned: after Tsarina Elizabeth's death in December 1761 and Peter III's accession to the Russian throne, Prussia was able to negotiate advantageous peace treaties with Russia and Sweden and strike back against the Austrians in Silesia.

[2] Euler, who had had no news of Goldbach for a long time, asked Müller in his letter R 1831 of June 15th: "Was macht denn unser alter und verehrungswürdiger Gönner, der H. Etatsrath v. Goldbach? Der leydige Krieg hat unsere Correspondenz gäntzlich unterbrochen, und ich weiss nicht, ob ich mich unterstehen darf, wiedrum an denselben zu schreiben, da ich nicht einmal weiss, ob derselbe noch am Leben ist." ("How fares our venerable old patron, State Councillor von Goldbach? The miserable war has entirely interrupted our correspondence, and I do not know if I may venture to write to him again, since I am not even sure whether he is still alive": JW 1, p. 193). Müller replied on August 23rd (September 3rd) that he had told Goldbach of Euler's enquiry when visiting with him and that Goldbach had already answered directly (R 1835: *ibid.*, p.199).

[3] Strangely, this letter of Goldbach's seems to be lost.

[4] On April 27th, 1760, Johann Albrecht had married Anna Sophie Charlotte Hagemeister, the 25-year-old daughter of a Prussian Court Councillor, and on October 10th, 1761, their daughter Katharina Pauline Franziska Sophie, Leonhard's first grandchild, was born.

[5] Karl Johann indeed received his doctoral degree in medicine from Halle in 1762.

[6] Christoph's service in the Prussian army was actually to give his father a lot of trouble when he decided to return to Petersburg, since Frederick II at first refused to give the yound officer permission to leave.

[7] Both daughters got married after the family's return to Petersburg, Charlotte (born in 1744) in 1766 (see infra nº 189, note 3) and Katharina Helene (born in 1741) in 1777.

[8] Euler's request for compensation of the property lost at Charlottenburg in October 1760 by the Russian occupation troops' pillaging is a recurring subject of his letters to Russia in the subsequent years. As a prominent corresponding member of the Russian Academy, Euler could count – even in times of war – on highly-placed patrons, among them the commander of the occupying army, Z.G. Chernyshëv, K.G. Razumovskiĭ, the *hetman* (commander-in-chief) of the Ukrainian Cossacks, who had been President of the Petersburg Academy since 1746, as well as M.I. Vorontsov, Tsarina Elizabeth's Chancellor since 1748. See, e. g., Euler's description of the incident in a letter to G.F. Müller written only a few days after the event, on October (7th) 18th, 1760 (R 1806: JW 1, p. 161–162), his appeal to Razumovskiĭ from the

same date, and his letter of thanks from May (17th) 28th, 1763 for Razumovskiĭ's successful intervention with the Tsarina (R 2057–58: JW 2, p. 431–433).

[9] Peter III did not thrive on Euler's blessings: he was deposed and murdered just a few weeks later, probably at his wife's behest.

186
Euler to Goldbach
Berlin, September 25th, 1762

Sir,

it is Professor Müller who is to blame for my daring to write to you again, Sir, since this last happened several months ago, immediately after I received your most honoured letter. He informs me that you have already replied to me;[1] however, as I have not received any letter from you since then, the thought occurs to me that his report might refer to your first letter and that consequently my most obedient letter might not even have arrived; although this does not appear likely to me, since even during the most violent troubles no letter of mine has yet been lost, it should distress me all the more if this fate had struck the very letter in which I have again been able, after a quite unbearably long time, to show my invariable and most perfect devotion to you, Sir. Furthermore Prof. Müller also apologises to me for forgetting to report to me at the time that you have been promoted to the dignity of a Privy Councillor;[2] thus it is only now that this is affecting me with the most vivid joy, and I most obediently ask you, Sir, not to disdain my all too late but most cordial felicitation. The Almighty God may let you most fully enjoy the advantages and distinctions linked with this in perfect health and all satisfaction up to the highest age!

Besides myself, all my family asks to be most obediently recommended to you, Sir; my eldest son in particular expresses his most profound veneration. I have the honour to remain for all my life with the most perfect respect, Sir, your most obedient and obliged servant

L. Euler

Berlin, Sept. 25th, 1762.

Theorem: If one has any number of unequal numbers a, b, c, d, ... and forms from them the following fractions:

$$\frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\,\dots},\ \frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\,(b-d)\,\dots},$$
$$\frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\,(c-d)\,\dots},\ \frac{d^n}{(d-a)\,(d-b)\,(d-c)\,\dots},$$

then the sum of these always equals 0, as long as the exponent n (which must be understood to be an integer) is smaller than the number of factors in the single denominators. On the other hand, when it equals that number, the sum equals 1.[3]

Example: Let the proposed numbers be 10, 9, 7, 4, 2; then

$$\frac{10^n}{1\cdot 3\cdot 6\cdot 8}-\frac{9^n}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 7}+\frac{7^n}{3\cdot 2\cdot 3\cdot 5}-\frac{4^n}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}+\frac{2^n}{8\cdot 7\cdot 5\cdot 2}=0$$

if $n<4$; but for $n=4$ the sum equals 1. Let $n=0$, then obviously

$$\frac{1}{144}-\frac{1}{70}+\frac{1}{90}-\frac{1}{180}+\frac{1}{560}=0.$$

In the general case, by reducing the fractions to a common denominator, one has

$$35\cdot 10^n-72\cdot 9^n+56\cdot 7^n-28\cdot 4^n+9\cdot 2^n=0,$$

as long as $n<4$.

This theorem appears to be more than a little curious; however, it seems to me that you may have been so kind as to communicate something similar to me a long time ago.[4]

[1] Indeed Müller writes in his letter of August 23rd (September 3rd; *loc. cit.* n° 185, note 2) that Goldbach has already answered Euler's enquiry directly; however, it seems likely this refers to the letter Euler had received in June (cf. n° 185, note 3).

[2] "Dass E. H. das Avancement des H. Geheimen Raths v. Goldbach nicht zu rechter Zeit erfahren haben, ist ein Fehler meiner Vergessenheit." ("It is owing to my forgetfulness that you did not learn at the right time that Mr. von Goldbach has been promoted to the rank of Privy Councillor."): R 1835, *loc. cit.* n° 185, note 2.

[3] This algebraic identity and its proof were first published in vol. II of the *Institutiones calculi integralis* (E. 366), § 1169 (for an analysis, cf. Sandifer 2007c); a fuller version was printed posthumously as E. 794.

[4] No trace of such a communication has been preserved in the earlier correspondence.

187

Goldbach to Euler

Petersburg, October (8th) 19th, 1762

Sir, and especially most honoured Director,

your last two letters have been correctly delivered to me here on July 15th and Oct. 11th (new style).[1] I give you my dutiful thanks, both for the kind congratulation which you conveyed to me and for the beautiful theorem you communicated; I am, however, at this moment quite unable to consider this as it deserves.

Recently, leafing through some tomes of the Hamburg Magazine, I was extraordinarily pleased to observe there the great praise which you so justly receive in several places.[2] I congratulate your son from all my heart on his second victorious paper at Petersburg;[3] asking you to recommend me to all your family, I remain, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Oct. 19th (n. st.), 1762.

Turn over.

PS. I have observed that the equation $a^2+b^2=P^2+eQ^2$ is always satisfied by defining $P=\dfrac{b^2-a^2}{b}$, $e=3b^2-a^2$, $Q=\dfrac{\pm a}{b}$; from this innumerable such values for the sum a^2+b^2 can be formed.[4]

[1] Thus both n° 185 and n° 186 took about sixteen days to arrive at Petersburg.

[2] One of the texts Goldbach alludes to may well be the anonymous review (probably by the editor A.G. Kästner) of E. 121 and E. 156 in *Hamburgisches Magazin* for 1751 which ends: "[Euler] hat nach seiner bekannten außerordentlichen Stärke in solchen Untersuchungen allen Kennern unstreitig hinlänglich Genügen gethan, da es fast ausgemacht ist, daß sich außer ihm niemand leicht an so schwere Fragen wagen würde." ("In keeping with his well-known extraordinary strength in this kind of investigation, [Euler] has indisputably satisfied all experts, since it is almost a foregone conclusion that nobody else would easily dare to tackle such hard problems.")

[3] Johann Albrecht had just won – along with Clairaut – the 1762 prize of the Petersburg Academy with his paper A 7, *Meditationes de Perturbatione motus Cometarum ab attractione Planetarum orta*.

[4] Cf. Euler's reply n° 188, note 1.

188

Euler to Goldbach

Berlin, November 9th, 1762

Sir,

the question, which you wanted to touch on,[1] of what numbers are contained at the same time in each of the formulae a^2+b^2 and p^2+eq^2, is not only of the greatest importance in the theory of numbers, but also presents particular difficulties which render it highly remarkable, particularly when more than two formulae are prescribed.[2] If just two are given, and if one is looking for all those numbers N which are simultaneously contained in the two formulae a^2+mb^2 and c^2+nd^2, where m and n are given numbers,[3] I find

$$N=\left(mp^2+nq^2+r^2+mns^2\right)^2-4mn\,(pq-rs)^2\,;$$

for by this,

$$\begin{aligned} N &= \left(mp^2-nq^2-r^2+mns^2\right)^2+m\,(2pr+2nqs)^2 \\ &= \left(mp^2-nq^2+r^2-mns^2\right)^2+n\,(2qr+2mps)^2\,. \end{aligned}$$

If, on the other hand, more than two formulae of this kind are prescribed in which the numbers N are to be comprised, the succour of algebra ceases almost entirely; and it is therefore all the more remarkable that in this case questions of that kind can be solved in a completely different manner, for which, however, the proof is yet missing. Thus if, for example, numbers are requested which are simultaneously contained in the formulae a^2+b^2, c^2+2d^2, e^2+3f^2, and g^2+5h^2, one may just take the number that can be divided by the given numbers 1, 2, 3, 5; in the present case this is 30. Then, whenever $4 \cdot 30x + 1 = 120x + 1$ is a prime number, one has a number for N, and multiplying two or more such prime numbers together likewise yields numbers for N. Therefore the prime numbers $120x + 1$ are the following: 241, 601, 1201, 1321, 1801, etc.; the first of these is

$$241 = 15^2 + 4^2 = 13^2 + 2 \cdot 6^2 = 7^2 + 3 \cdot 8^2 = 14^2 + 5 \cdot 3^2,$$

where it must especially be noted that this property applies only for the prime numbers contained in the formula $120x + 1$. Moreover, since you showed, Sir, that a sum of two squares $a^2 + b^2$ is also contained in the form $P^2 + eQ^2$ when $e = 3b^2 - a^2$ or $3a^2 - b^2$, and even more generally when $e = (2\alpha + 1)\, b^2 - \alpha^2 a^2$, some very nice illustrations of the above properties can be inferred: thus, for example, a number such as $a^2 + nb^2$ is simultaneously also contained in the form $P^2 + \big((2\alpha + n)\, a^2 - \alpha^2 b^2\big)\, Q^2$, where, however, it can happen that P and Q must be fractions. Let, e. g., $a = 7$, $n = 3$, $b = 8$, and the number $a^2 + nb^2 = 241$; then this is also contained in the form $P^2 + eQ^2$, taking

$$e = (2\alpha + 3)\ 49 - 64\alpha^2 = 147 + 98\alpha - 64\alpha^2 = 147 + 49\beta - 16\beta^2$$

(setting $2\alpha = \beta$). Therefore 147, 82, 181, 150, 87, 180, -15, or (dividing by a square) 3, 5, 6, 82, 87, 181 are such numbers for e, where it is very remarkable that the number 241 is also contained in the form $P^2 + 82Q^2$, which cannot be discerned by the above rule, for here one has $P = \frac{81}{7}$ and $Q = \frac{8}{7}$.

The proof of the theorem on numbers which I recently had the honour of mentioning to you,[4] Sir, is also quite peculiar. I consider the fraction $\dfrac{x^n}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,\ldots}$; it is known that this can be resolved into the simple fractions $\dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c} + \ldots$, where A, B, C become constant numbers whenever the exponent n is smaller than the number of factors in the denominator. But now I determine the numerators A, B, C, etc. in the following way: In order to find A , I multiply everything by $x - a$; this yields

$$A = \frac{x^n}{(x-b)\,(x-c)\,\ldots} - \frac{B\,(x-a)}{x-b} - \frac{C\,(x-a)}{x-c} - \ldots,$$

and since I know that A does not depend on x, the same value for A must always result if I assume x to be whatever I like. Setting therefore $x = a$, I arrive at $A = \dfrac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\,\ldots}$; in the same way, $B = \dfrac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\,\ldots}$, $C = \dfrac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\,\ldots}$. Thus in general one has

$$\frac{x^n}{(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,\ldots} = \frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\cdots(x-a)} + \frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\cdots(x-b)} + \frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\cdots(x-c)} + \ldots,$$

and, transferring those last fractions to the other side,

$$\frac{a^n}{(a-b)\,(a-c)\,(a-d)\,\cdots\,(a-x)}+\frac{b^n}{(b-a)\,(b-c)\,(b-d)\cdots\,(b-x)}$$
$$+\frac{c^n}{(c-a)\,(c-b)\,(c-d)\,\cdots\,(c-x)}+\ldots=0.$$

All my house and particularly my eldest son, who also received the Munich prize these last days,[5] ask to be most obediently recommended to you, Sir, and I remain with the most profound respect, Sir, your most obedient servant

L. Euler

Berlin, Nov. 9th, 1762.

[1] Cf. nº 187, note 4.

[2] Integers represented by several principal quadratic forms are simultaneous norms from certain quadratic extensions; by taking norms from the compositum of these fields it is easy to generalise Euler's formulae to any number of forms.
Characterising the primes $p \equiv 1 \bmod f$ represented by forms $x^2 - ny^2$ for some $n \mid f$ is a lot deeper and is connected with the problem of whether the prime ideals above p are principal in the quadratic number fields $\mathbb{Q}(\sqrt{n})$.

[3] In modern language, the problem is characterising rational numbers which are simultaneous norms from the quadratic extensions $\mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ and $\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$. The set of these norms contains the subset of norms from the compositum $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-m}, \sqrt{-n})$; taking the partial norms of an element $r + p\sqrt{-m} + q\sqrt{-n} + s\sqrt{mn}$ down to the three quadratic subfields of K yields the expressions of N given by Euler.
Jacobi (1839) used this point of view for investigating the field of eighth roots of unity.

[4] Cf. nº 186, note 3.

[5] Johann Albrecht won the 1762 prize of the recently founded Bavarian Academy of Sciences with his paper A 19 on the dynamics of the Moon's orbital motion.

188a
Johann Albrecht Euler to Goldbach[1]
Berlin, November 9th, 1762

Sir,

the kind memory by which you honoured me in your flattering letter of June 7th of the current year[2] so emboldens me that I dare to recommend myself to you again in writing.

You have always taken such an affectionate interest in all that in the least degree regards me and my family, Sir, that I do not doubt you will not take it amiss but rather regard it as keeping my duty if I briefly report here on the few changes that I have undergone since Councillor Aepinus' departure for Petersburg.[3]

The third year has already begun since I am living contentedly and happily in the holy state of matrimony with the eldest daughter of the local Court Councillor

Hagemeister, and this marriage has hitherto been blessed with one little daughter which bountiful heaven has given to us for our great joy.[4] Together with this small family I am living in my parents' house and waiting for the long-desired peace and even more for an employment which shall help me to my independence.

For the meantime I enjoy the good opportunity to expand my little ability more and more under my father's guidance. Besides those papers which I produce for presentation in the assemblies of the local Academy, I constantly try to work on the prize questions which the diverse academies of science propose to the erudite world, and with my father's help I have succeeded several times in nabbing a prize. Just recently I have got the welcome news that the Munich Academy conferred upon me this year's prize, which they had promised to the person who would best determine the relation between the average movement of the Moon, its average distance from the Earth, and the forces acting on the Moon.[5] This prize consists of a gold medal of 50 ducats, and I hope to receive this towards the end of the New Year's fair.

My wife recommends herself, along with our child, to your benevolence, Sir, and I remain with true reverence, Sir, your most obedient servant

J. Albrecht Euler

Berlin, 9th of Winter Month, 1762.

[1] This letter was probably sent along with Leonhard Euler's missive n° 188 to Goldbach of the same date.

[2] Apparently no letters from Goldbach to Johann Albrecht Euler have been preserved.

[3] Aepinus had delivered the Eulers' letters n° 184 and n° 184ª in 1757.

[4] Johann Albrecht and Anna Sophie Charlotte Hagemeister had been married in Berlin on April 27th, 1760. Their first daughter Katharina Pauline Franziska Sophie was born on October 18th, 1761.

[5] Johann Albrecht had already won prizes at the Göttingen Royal Society in 1754, at Petersburg in 1755 and 1762 and at Berlin in 1760. The paper with which he won the 1762 prize of the recently founded Bavarian Academy of Sciences, designated in the Eneström Index by A 19, was printed only in 1767.

189
Euler to Goldbach
Berlin, October 1st, 1763

Sir and kind patron,

I was most chagrined to learn – both by your own silence and by young Mr. Stähelin's reports[1] – of your sickly and even bedridden state; but when today I had the honour of speaking with His High Excellency the Count Grand Chancellor for more than an hour,[2] you were the main topic, Sir, and His Excellency told me that you had been able to say goodbye to him in person. His Excellency also instructed me explicitly to write to you this very day, and, besides giving you the news of his fortunate arrival here, to assure you of his constant and most sincere friendship; I was also ordered to beg you most urgently to take better care of your health, which is so very dear to us. Indeed you could yourself contribute much more to its preservation than you actually do remaining locked up in your chamber most of the time, whereas more frequent excursions and a change of air should certainly yield the most marvellous effect. You may easily understand that I am most urgently repeating this same request from the bottom of my heart, since the news that you are again entirely well should affect me with the most inexpressible joy.

In my own house everything is, thank God, faring well; these days I promised my youngest daughter in marriage to a very wealthy Dutch nobleman called Baron von Delen. He is an officer among the local *Gens d'armes* and recently returned from a trip to the Netherlands, on which he had taken along my second son, who is a doctor of medicine, in order to acquaint him with all his family.[3]

Here the impression has still not vanished that the Berlin Academy is to be transformed into an *Académie Française*; however much I dread another change of residence, in that case I should have to decide on it,[4] and nothing about this should give me a more heartfelt pleasure than being able to see you again, Sir.

All my family and my eldest son in particular ask to be most obediently recommended to your constant goodwill and favour, and I have the honour to be with the most profound respect, Sir, your most humble and obedient servant

L. Euler

Berlin, Oct. 1st, 1763.

[1] Euler probably refers to Peter von Stählin, the son of a colleague at the Petersburg Academy, who was just then embarking on a diplomatic career. It is not known in what way Stählin's information about Goldbach reached him.

[2] Count M.I. Vorontsov had been a favourite of Elizabeth I, who made him Vice Chancellor in 1744 and Imperial Chancellor after Bestuzhev-Ryumin's fall in 1759. After Catherine II's accession he was deprived of power, resigned and left Russia in 1763 together with his wife, who had been Elizabeth's first lady of the court. From Berlin, the Vorontsovs went on to Vienna and to Italy (see n° 190 and n° 194).

[3] Cf. n° 185, note 7. On van Delen's and Karl Euler's trip to the Netherlands, see also Leonhard's letter R 2648 to Teplov (JW 2, p. 435). As King Frederick withheld his approval for the young officer's marriage (see R 690: O. IVA/6, p. 384), van Delen and Charlotte Euler got married only after the family's return to Petersburg, on August 16th, 1766.

[4] On the conflict with Frederick's designs for the "Frenchification" of the Berlin Academy and Euler's plans for a possible return to Petersburg, see JW 1 (in particular p. 218–238), JW 2 (in particular p. 433–435) and J.A. von Segner's letters R 2543–2571, to be published in O. IVA/8.

190

Euler to Goldbach

Berlin, October 11th, 1763

Sir and most kind patron,

His High Excellency the Count Grand Chancellor, on departing from here, again instructed me to write to you and to assure you of his constant and most sincere friendship, and Her Serene Highness the Grand Chancellor's wife on her part also most urgently ordered me to pass this message on. I cannot do enough to praise the great favour by which Their Excellencies honoured me here; indeed I was invited to dine there every day, and when, the day before yesterday at noon, Prince Dolgorukiĭ gave a farewell meal for them after the church service, the Grand Chancellor had explicitly invited me and then took his farewell from me in the most gracious manner. Several times the conversation turned upon you, Sir, and on all these occasions His High Excellency the Count witnessed His quite special goodwill and friendship towards you, always complaining, however, about your sickly state and most cordially desiring to hear soon the welcome news of your recovery. His Excellency expects to be still at Vienna when I shall have got an answer from you to my last letter, and I have been instructed to pass this news immediately on, later also to Italy, where His Excellency plans to stay at Florence until next Easter and then to go on to Naples.[1]

I perform this commission which has been graciously entrusted to me with all the greater joy since these assurances will affect you with a very special pleasure, Sir, and I wish from my innermost heart that a salutary influence on your health may also be effected by it.

Recently, when Mr. d'Alembert stayed here for some time and was showered by His Majesty the King with the greatest proofs of His bounty, I also had the opportunity to meet him in person, after our correspondence had been interrupted for a long time because of some scholarly disputes which I did not want to enter into. However, our friendship has now been reestablished in the most perfect manner, and people cannot do enough to describe to me with what great praise he constantly spoke about me to His Royal Majesty. Rumours assert all the same that he is going to return here next May and take up the Presidency of our Academy.[2]

All my family most obediently recommends itself to your constant goodwill and favour, Sir, and I remain with the most profound respect, Sir, your most humble servant

L. Euler

Berlin, Oct. 11th, 1763.

[1] Cf. nº 189, note 2.

[2] The relationship between Euler and d'Alembert has been described in detail by the editors of O. IVA/5 (in particular p. 12–34). From its start in the mid-1740s it had been fraught with scientific differences and priority disputes. After a rather vicious letter d'Alembert wrote in September 1751 (*ibid.*, p. 311–316), their contact had been interrupted for nearly twelve

years. Now, on the occasion of d'Alembert's visit to Potsdam and Berlin in summer 1763, the two men had met in person for the first time, arriving at a climate of mutual respect. D'Alembert, who had never wanted to give up his independence for the presidency at the Berlin Academy, now even tried to convince King Frederick that Euler was the best qualified person for the office. In 1766, when Euler was on the point of leaving Berlin, d'Alembert again intervened on both sides to engineer better conditions for his staying; only when Euler was established in Petersburg again did d'Alembert back Lagrange for the presidency that had by then been vacant for more than seven years.

191
Goldbach to Euler
Petersburg, October (7th) 18th, 1763

Sir,

I do not want to bother you by reporting about my weakness, which is very natural at my age that has now risen to more than $73\frac{1}{2}$ years. It affects me with uncommon joy that His Excellency the Grand Chancellor happily arrived at Berlin and was so kind as to converse with you for over an hour;[1] I have had cause to boast of His Excellency's special goodwill towards me almost without interruption for these past 20 years.

On the occasion of the advantageous engagement of your daughter,[2] I congratulate you and your wife, and also your son and all your family, from all my heart; I remain, sincerely wishing you every further satisfaction, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Oct. 18th (n. st.), 1763.

[1] Cf. nº 189, note 2.
[2] Cf. nº 189, note 3.

192
Goldbach to Euler
Petersburg, October (16th) 27th, 1763

Sir,

to your letter from Oct. 1st I have replied on the 18th; now the second one from the 11th gives me the opportunity of sending the enclosed letter to the Grand Chancellor, by which His Excellency shall perceive how diligent you have been in performing the commission he entrusted to you.

Please convey my dutiful recommendation to all your family, particularly to your eldest son; wishing to all of you further happy progress, I remain with particular respect, Sir, your most devoted servant Goldbach.

St. Petersburg, Oct. 27th (n. st.), 1763.

193

EULER TO GOLDBACH

Berlin, November 15th, 1763

Sir and most esteemed patron,

as soon as I received your first most honoured letter, I did not fail – as I had been instructed – to report on your condition to His High Excellency the Count Grand Chancellor, regretting from all my heart that your approaching old age is fraught with so much discomfort. However, as His High Excellency is most justified in asserting, you could yourself greatly contribute to its improvement if you should just decide to treat yourself to more exercise and to enjoy the open air more often. I daresay you understand this perfectly by yourself; but as I take your well-being so much to heart, I dare beg you most urgently, Sir, to apply all possible means to your recovery, besides wishing you every divine blessing from my innermost soul.

Today I shall hand over your letter addressed to His High Excellency the Count Grand Chancellor to Prince Dolgorukiĭ for further delivery, since now it will have to go to Italy via Vienna.[1]

The theorem that you communicated in your first letter,[2] Sir, affected me with the most vivid joy, since I am convinced I may infer from it that your mind has been particularly lively and cheerful. I examined it most assiduously and finally found it can be proved very easily in the following manner:

If $P^2 + 2eQ^2$ is a square, set $P^2 + 2eQ^2 = R^2$; adding P^2 on both sides, one has $2P^2 + 2eQ^2 = R^2 + P^2$, and dividing by 2,

$$P^2 + eQ^2 = \frac{1}{2}\left(R^2 + P^2\right) = \left(\frac{R+P}{2}\right)^2 + \left(\frac{R-P}{2}\right)^2,$$

so $P^2 + eQ^2$ is a sum of two squares, QED.

All of us are conveying our most humble thanks for your kind congratulation on our youngest daughter's upcoming marriage; since the bridegroom is still young and a cornet in the *Gens d'armes*, its execution must be suspended for some time until a royal dispensation can be obtained.[3] My eldest son asks to be most humbly recommended to you, Sir. Besides his little daughter, he now also has a son, who by now is more than a year of age;[4] he has been definitely promised a good salary, whereas up to now he had no more than 200 thalers; and based on this hope, from Christmas he is renting an apartment, whereas up to now he still lived with us.[5] My second son has found employment as a doctor in the French army with a salary of 200 thalers. Myself, I have been honoured by the local French community, who elected me as an Elder of its Church and member of the Parish Council;[6] however it is very doubtful whether I am going to enjoy this honour for long. Until next Easter, Mr. von Haller has to declare himself whether he wants to take up again his position as President of the Göttingen Academy; if he does not, I shall probably be forced to plan a very great change.[7]

All my house asks to be most humbly recommended to your constant goodwill and favour, and I have the honour to be with the most dutiful respect for all my life, Sir, your most humble and obedient servant

L. Euler

Berlin, Nov. 15th, 1763.

[1] Cf. nº 189, note 2, and nº 190, note 1.

[2] This probably refers to Goldbach's lost letter from June 1762 (cf. nº 185, note 3, and nº 186, note 1). Apparently he had claimed there that if $P^2 + 2eQ^2 = R^2$, then $P^2 + eQ^2 = a^2 + b^2$, which Euler now proves.

[3] Cf. nº 189, note 3.

[4] Leonhard's first grandson, Johann Leonhard Rudolf Euler, had been born on Dec. 12th, 1762.

[5] On December 22nd, the directors of the Berlin Academy submitted a petition to the king, asserting that several deceased members' pensions had not been reallocated and consequently ten of the younger academicians drew no salary at all. In fact, Johann Albrecht Euler had received 200 thalers since January 1756 (cf. nº 176, note 1), and the Academy had asked for another 200 thalers in recognition of his work as an astronomer as early as September 1760 (cf. Winter 1957, p. 260). For once Euler's confidence was justified: the king decided to award four new pensions, among them 400 thalers to "Eller[!] fils" (Harnack 1900, vol. 1, p. 488.)

[6] The local reformed parish at the Friedrichstadt church, mainly peopled by Huguenot refugees with French origins, had been a central part of Euler's everyday environment from his arrival in Berlin; its members and ministers played an important role in his personal circle. That he took his charges in its parish council, the *consistoire*, very seriously is attested by its minister and historiographer Jean-Pierre Erman, who recalled much later, on the occasion of another member's decease: "His commitment called to mind the one I have seen for many years [...] in our immortal fellow member Mr. Euler, whose useful service as an Elder of our church is still present in my memory" ("Son zèle put rappeler celui que j'ai vu pendant plusieurs années [...] à notre immortel confrère M. Euler, dont les services utiles en qualités d'ancien d'église sont encore présens à mon souvenir": Erman 1799, p. 68).

[7] Albrecht von Haller had left the Hanoverian University of Göttingen for his native city of Berne in 1753. In the following decades he steadfastly refused all attempts to lure him back to Göttingen, retaining however the presidency of the local *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften*: in fact he held on to it until his death in 1777.
As we know from J.A. von Segner's letters to Euler, the Hanoverian State Minister Münchhausen had written to Euler to sound out whether he would consider taking Haller's place at Göttingen: "It is said that Mr. von Haller is returning to Göttingen, and I suspect that they were engaged in negotiations with him; however, these must have fallen through [...] It almost seems his Excellency Mr. von Münchhausen is now trying to enhance his university's lustre in another way" ("Man hat gesagt H. v. Haller käme wieder nach Gottingen, und ich glaube fast daß man mit ihm in Tractaten gestanden, aber es müssen sich diese zerschlagen haben [...] Es scheinet fast daß des H. v. Munchhausen Excellence seine Universität auf eine andre arth in Lustre setzen wolle": R 2553, September 24th, 1763, to be published in O. IVA/8). As the present letter to Goldbach shows, Euler, who had probably met Münchhausen at Berlin, was seriously considering this option (among several other possibilities – see nº 189, note 4).

194

Euler to Goldbach

Berlin, December 17th, 1763

Sir and most esteemed patron,

it is again at His High Excellency the Count Grand Chancellor's behest that I concede to myself the honour of writing to you, Sir; when, by way of Vienna, he happily arrived at Venice, he graciously wrote to me from there the following letter which I take the liberty of copying:[1]

> "Venice, Nov. 24th, 1763.
>
> Sir,
>
> When I arrived here last Sunday, I found your letter from the 5th of this month.[2] I am very much flattered by the feelings towards me which you declare in it, and it will always be a real satisfaction for me to give you some proofs of my own. The same attitude links me to Mr. von Goldbach, to whom I ask you to give my compliments with respect to what you are telling me about his literary work, which his advanced age does not prevent him from doing successfully. I have the honour to be respectfully, Sir, your very humble and very obedient servant
>
> Count Michael Vorontsov."

There is nothing in this respect that I desire more ardently, Sir, than that you may receive this compliment in a good state of health and live in a fully satisfying manner, entirely freed from your former complaints!

Already some months ago I have quite completed my book on Integral Calculus, on which I worked for many years, and Haude's bookstore here is willing to publish it soon.[3] The rumour of it had drawn here a young man from Switzerland, who in his eagerness to learn asked for nothing but the permission to copy this book by hand; after doing this he returned home. The most wonderful thing is that this man was a furrier by profession.[4]

If it had been possible to defer this letter just for one mail day, I might have been able to give you some news about the new establishment of the Berlin Academy; in fact, young Mr. Bernoulli who was summoned here some time ago – a son of the Johann Bernoulli who had been in Petersburg – received the assurance that on His Royal Majesty's arrival around the middle of this month, everything is to be settled at the Academy.[5] My eldest son, who up to now has no more than 200 thalers, particularly expects this most eagerly.[6] Both he and all my family ask to be most humbly recommended to you, and I have the honour to remain with all due respect, Sir, your altogether most obedient servant

L. Euler

Berlin, Dec. 17th, 1763.

Please be so kind as to accept my most cordial felicitation for the upcoming new year.

[1] The original of this letter of Vorontsov's has not been retrieved.
[2] This letter of Euler's has apparently not been preserved.
[3] Euler's three-volume *Institutiones Calculi Integralis* (E. 342, 366, 385) were actually published only after his return to Petersburg in 1768/70, at the press of the Petersburg Academy.
[4] The visitor's name was Christoph Jetzler; his manuscript copy of the *Calculus Integralis* has been preserved in the Schaffhausen City Library. Our late colleague Emil A. Fellmann devoted a study (Fellmann 2003) to this episode.
[5] Johann III Bernoulli – the eldest son of Johann II, whom Goldbach had met at Petersburg in 1732/33 – was made an ordinary member of the Berlin Academy on January 5th, 1764, at the age of 19, by a direct order from King Frederick who had appointed himself as acting President for the time until d'Alembert could be convinced to take up the presidency. Later Bernoulli served as Royal Astronomer, Director of the Berlin Observatory and of the Academy's Class of Mathematics.
[6] Cf. n° 193, note 5.

195
Goldbach to Euler
Petersburg, (December 30th, 1763) January 10th, 1764

Sir,

with every year that goes by, I am reading and writing less, but I cannot omit to convey to you my dutiful thanks for the welcome news that you communicated to me in your last two letters. I congratulate your two sons on the salaries which they have already obtained,[1] wish for their speedy augmentation and remain, besides most humbly recommending myself to all your family, with special consideration your most obliged servant Goldbach.

God may bestow on you, Sir, a happy and pleasant new year.

St. Petersburg, Jan. 10th, 1764 (n. st.).

Turn over.

If in the formula P^2+eQ^2 one has $e = k^2 - \big(a^2 + b^2\big)$, where k is a rational number, the entire formula can be brought to yield the sum of two squares $a^2 + b^2$; indeed, one may take $P = \dfrac{a^2 + b^2 - ak}{a - k}$, $Q = \dfrac{b}{a - k}$.[2]

[1] Cf. n° 193, in particular note 5.
[2] Cf. n° 188, note 2.
After this paragraph, Euler noted on Goldbach's letter some calculations that lead up to the generalised version of Goldbach's formula he will indicate in his reply n° 195:

$$P^2 + eQ^2 = aa + bb$$

$$P = a + bbx \qquad Q = by \qquad 2ax + bbxx + eyy = 1$$

$$e = \frac{1 - 2ax - bbxx}{yy} = \frac{1}{xx} - \frac{2a}{x} - bb$$

$$y = x \qquad x = \frac{1}{k} \qquad e = kk - 2ak - bb$$

$$y = \frac{1}{z} \qquad e = zz - 2axzz - bbxxzz$$

$$P^2 + k^2Q^2 - (aa + bb)\,Q^2 = aa + bb$$

$$xz = v \qquad e = zz - 2avz - bbvv$$

$$[mm \mp n]$$

$$P^2 + mk^2Q^2 - (aa + mbb)\,Q^2 = m\,(aa + mbb)\,RR.$$

The hardly decipherable expression set here in brackets may represent an attempt that Euler abandoned.

196
Euler to Goldbach[1]
Berlin, March 17th, 1764

Sir,

since you are reading and writing less and less as time goes by, it is proper that I first of all most humbly ask your forgiveness for presuming anyway to write to you. I should, however, neglect my most important duty if I did not from time to time take the opportunity of assuring you of my most perfect respect and most obediently recommending myself and all my family to your continuing favour. Moreover I firmly trust the Divine compassion that you have recovered from your former weakness and shall, with the approach of the good season, again come to enjoy a perfect health, which hope I pray the Almighty God may mercifully fulfil!

It is a great comfort to me that your observations on the formula

$$P^2 + eQ^2 = a^2 + b^2$$

bear witness to the still extraordinary brightness of your mind, Sir;[2] it is all the more remarkable that this equality takes place whenever $e = k^2 - \left(a^2 + b^2\right)$, since commonly people do not strive for theorems of this kind. Indeed, some very beautiful properties of numbers can be elucidated in this way: if, for example, one assumes, even more generally, $e = mk^2 - m\left(a^2 + mb^2\right)$, in the same manner the numbers P and Q can also be determined in such a way that $P^2 + eQ^2$ becomes equal to the formula $a^2 + mb^2$ or to $c^2\left(a^2 + mb^2\right)$: indeed, setting

$$P^2 + \left(mk^2 - m\left(a^2 + mb^2\right)\right)Q^2 = c^2\left(a^2 + mb^2\right),$$

one has

$$P^2 + mk^2Q^2 = \left(a^2 + mb^2\right)\left(c^2 + mQ^2\right) = (ac \pm mbQ)^2 + m\,(aQ \mp bc)^2\,;$$

consequently one can define $P = ac \pm mbQ$ and $kQ = aQ \mp bc$. From this one gets $Q = \pm \dfrac{bc}{a-k}$ and $P = ac + \dfrac{mb^2c}{a-k}$, and the case that you considered, Sir, arises by setting $c = 1$ and $m = 1$.

We have now here the skilful Mr. Lambert, who is establishing the new Academy at Munich for the Elector of Bavaria.[3] This man does not only excel in all the sciences, but also has got very far in Analysis: he communicated to me a series which astonished me, since it is of an entirely different nature than all those that have hitherto been considered. If m and n are arbitrary numbers and a any quantity whatsoever, the series is as follows:

$$\begin{aligned} z \;=\; & 1 + \frac{a}{n} + \frac{2m-n+1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{3m-n+1}{2} \cdot \frac{3m-2n+1}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ & + \frac{4m-n+1}{2} \cdot \frac{4m-2n+1}{3} \cdot \frac{4m-3n+1}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} \\ & + \frac{5m-n+1}{2} \cdot \frac{5m-2n+1}{3} \cdot \frac{5m-3n+1}{4} \cdot \frac{5m-4n+1}{5} \cdot \frac{a^5}{n^5} + \ldots \end{aligned}$$

No series of this kind have ever occurred to me, and I should not know how to set about investigating their sums. It is therefore all the more wonderful that the sum or the value of z can even be indicated algebraically; for, as Mr. Lambert discovered, the equation $z^n = az^m + 1$ yields the true value of that sum z. It is also remarkable that every power of z can be expressed by a similar series; for one has

$$\begin{aligned} z^\lambda \;=\; & 1 + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{a}{n} + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+2m-n}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+3m-n}{2} \cdot \frac{\lambda+3m-2n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ & + \frac{\lambda}{1} \cdot \frac{\lambda+4m-n}{2} \cdot \frac{\lambda+4m-2n}{3} \cdot \frac{\lambda+4m-3n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} + \ldots \end{aligned}$$

Now setting, at first, $\lambda = n$, one has

$$z^n = 1 + a + \frac{2m}{2} \cdot \frac{a^2}{n} + \frac{3m}{2} \cdot \frac{3m-n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^2} + \frac{4m}{2} \cdot \frac{4m-n}{3} \cdot \frac{4m-2n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^3} + \ldots$$

If one then sets $\lambda = m$, one has

$$\begin{aligned} z^m \;=\; & 1 + \frac{m}{1} \cdot \frac{a}{n} + \frac{m}{1} \cdot \frac{3m-n}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{m}{1} \cdot \frac{4m-n}{2} \cdot \frac{4m-2n}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} \\ & + \frac{m}{1} \cdot \frac{5m-n}{2} \cdot \frac{5m-2n}{3} \cdot \frac{5m-3n}{4} \cdot \frac{a^4}{n^4} + \ldots, \end{aligned}$$

and from this it evidently follows that $z^n = az^m + 1$. Thus this discovery is, in my opinion, of the greatest importance.[4]

All my family asks to be most obediently recommended to your constant favour, and I have the honour to be with the most profound respect, Sir, your most obedient and obliged servant

L. Euler

Berlin, March 17th, 1764.

[1] Either this last letter Euler wrote to Goldbach did not reach its addressee, or Goldbach – who died after a long period of illness on November 20th (December 1st), 1764 – was already too weak to file or answer it. It has been preserved in a file belonging to G.F. Müller, then Secretary of the Petersburg Academy.
The letters Müller wrote to Euler in December 1764, describing Goldbach's last days, his death, his funeral and the dispositions taken about his estate, have been published in JW 1, p. 253–258.

[2] Cf. the postscript to n° 195 and Euler's notes written on Goldbach's letter (n° 195, note 2).

[3] In 1758, Lambert, who lived at Augsburg at the time, had agreed to advise the Bavarian Elector Maximilian III Joseph on the establishment of his planned Academy, the later Bavarian Academy of Science. He became a foreign member and honorary professor in 1759, but the close collaboration originally envisaged soon failed. At the suggestion of his friend Johann Georg Sulzer and to Euler's great satisfaction (see also JW 1, p. 245), he came to Berlin in February 1764 and (despite King Frederick's reservations about his unconventional personality traits) was appointed ordinary member of the Berlin Academy in January 1765.

[4] This first example of what came to be called a Lambert series had been published in the Basel journal *Acta Helvetica* (Lambert 1758), p. 152–156. Series of this kind were later studied by Euler in E. 406, E. 532, E. 631 and E. 632.

Indices

Synoptic Table of the Correspondence

The table that follows indicates in its columns:

- the chronological sequence number (n°) within the Euler-Goldbach correspondence; except for n° 57 and 58, this agrees with the numbering in the Yushkevich-Winter edition (*Euler-Goldbach* 1965)
- the number (R) in the *Repertorium* of the Euler correspondence (O. IVA/1, p. 134–166)
- the version (V): "p" indicates a partially preserved original, "c" a copy, "pc" a partial copy, "d" a draft; nothing is indicated for autograph originals preserved in their entirety
- the author (A) of the letter (E for Leonhard Euler, G for Christian Goldbach, JA for Johann Albrecht Euler)
- the date in the format YYYY MM DD c, where c indicates the calendar used ("j" for Julian "old style", "g" for Gregorian "new style"), when this is indicated in the original letter or can be determined unambiguously. Dates determined from external sources are marked "e", "TP" stands for *terminus post quem*, "TA" for *terminus ante quem*
- the place (pl) where a letter was written ("Pb" for Petersburg, "Mo" for Moscow, "Be" for Berlin), when this is indicated in the original letter
- the (principal) language(s) (lg: "F" for French, "G" for German, "L" for latin)
- the archive where the manuscript (ms) is kept, the files and the folio numbers (fol., comprising "r" for *recto*, "v" for *verso*). The archives and files (shelfmarks) are designated as follows:

M_3	Moscow, Russian State Archive (RGADA), f. 181, n. 1413, č. III (letters to Goldbach, 1729–1741)
M_4	Moscow, Russian State Archive (RGADA), f. 181, n. 1413, č. IV (letters to Goldbach, 1742–1750)
M_5	Moscow, Russian State Archive (RGADA), f. 181, n. 1413, č. V (letters to Goldbach, 1751–1763)
M'_3	Moscow, Russian State Archive (RGADA), f. 181, n. 1415, č. III (Goldbach's copybook, 1729–1743)
M'_4	Moscow, Russian State Archive (RGADA), f. 181, n. 1415, č. IV (Goldbach's copybook, 1743–1749)
P	Petersburg, Archive of the Russian Academy of Science (PFARAN), f. 136, op. 2, n. 8 (Goldbach's letters to Euler, 1729–1764)
P′	Petersburg, Archive of the Russian Academy of Science (PFARAN), f. 136, op. 2, n. 171
P″	Petersburg, Archive of the Russian Academy of Science (PFARAN), f. 21, op. 3, n. 321 (letters to G.F. Müller)

- the sequential number and page numbers in the Fuß edition (F) (*Correspondance*, t. I, 1843)
- the page numbers in the Yushkevich-Winter edition (JW: *Euler-Goldbach* 1965)

n°	R	V	A	date	pl	lg	ms	fol.	F	p.	JW p.
1	715		E	1729 10 13	Pb	L	M_3	44r–45v	1	3–7	19–21
2	716		G	1729 12 01	Mo	L	P	2r–3r	2	8–10	23–24
		c					M'_3	8v–10r			
3	717	d	E	1730 01 06	Pb	L	P	6r–7v			
				1730 01 08			M_3	69r–72r	3	11–18	25–28
4	718	c	G	1730 05 22	Mo	L	M'_3	20v–21v	4	19–20	29–30
5	719		E	1730 06 04	Pb	L	M_3	86r–87r	5	21–24	30–32

nº	R	V	A	date	pl	lg	ms	fol.	F	p.	JW p.
6	720		G	1730 06 26 g	Mo	L	P	8r–9r	6	25–27	33
		c					M_3'	26r–27r			
7	721		E	1730 06 25	Pb	L	M_3	88r–89v	7	28–31	34–35
8	722		G	1730 07 31 g	Mo	L	P	10r–11r	8	32–34	37–38
		c					M_3'	30v–31v			
9	723		E	1730 08 10	Pb	L	M_3	99r–100v	9	35–39	39–40
10	724		G	1730 10 09	Mo	L	P	12r–13r	10	40–43	41–43
		pc					M_3'	33v–34v			
11	725		E	1730 10 17	Pb	L	M_3	111r–112r	11	44–47	43–45
12	726		G	1730 11 06 g	Mo	L	P	14r	12	48–49	47
		c					M_3'	35v			
13	727		E	1730 11 09 j	Pb	L	M_3	113r–114r	13	50–53	47–49
14	728		G	1731 11 29 g	Mo	L	P	15rv	14	54–55	49–50
		c					M_3'	38rv			
15	729		E	1731 11 25	Pb	L	M_3	126r–127v	15	56–60	50–53
16	730		G	1731 12 17 g	Mo	L	P	16r	16	61	54
		c					M_3'	39r			
17	731		E	1732 01 03	Pb	L	M_3	130r–131r	17	62–64	54–55
18	732		G	1732 01 26 g	Mo	L	P	17rv	18	65–66	55–56
		pc					M_3'	40r			
19	733		E	1732 01 31	Pb	L	M_3	132r–133v	19	67–71	56–59
20	734		E	1732 01 31 TP		L	M_3	178rv	20	72–73	59–60
21	735		E	1735 03 28 TA		L	P'	1			60–61
22	736		G	1735 10 12	Pb	L	P	18r	21	74	61
23	737	c	G	1736 02		L	M_3'	42v–43r	22	75–76	62
24	738		E	1737 07 23		L	M_3	180rv	23	77–79	62–63
25	739		G	1738 10 11 g		L	P	19r	24	80	64
26	740		G	1739 11 07 g		L	P	21r	25	81	66
27	741		E	1739 11 23 e		L	M_3	209r–210r	26	82–85	68–70
28	742		G	1739 11 24 j		L	P	23rv	27	86–88	71–72
		pc		1739 12 05 g			M_3'	48v–49r			
29	743		E	1739 11 26		L	M_3	213r–214r	28	89–92	73–75
30	744		E	1739 12 e		L	M_3	211r–212r	29	93–96	76–78
31	745		G	1739 12 09		L	P	25r	30	97–98	78
32	746		E	1739 12 09		L	M_3	215r–216r	31	99–101	79–80
33	747		G	1740 03 03 g		F	P	27r			80
34	748		E	1740 08 21		G	M_3	226r	32	102	81
35	749		G	1740 08 21		G	P	29rv	33	103	81
36	750		E	1741 04 18		G	M_3	251r			82
37	751		G	1741 06 18 g		G	P	31r			82
38	752		E	1741 08 01	Be	G	M_3	255r–256v			82–84
39	753		G	1741 08 19 g	Pb	G	P	33r–34r	34	104	84–85
40	754		E	1741 09 09	Be	G	M_3	259r–260v	35	105–107	85–87
41	755		E	1741 09 16	Be	G	M_3	261rv			88–89
42	756		G	1741 11 07 g	Pb	G	P	35r–36r	36	108–109	89–90
43	757		E	1741 12 09	Be	G	M_3	267r–268v	37	110–111	90–91
44	758		E	1742 02 03	Be	G	M_4	5r			92
45	759		G	1742 02 13 g	Pb	G	P	37r–38v	38	112–113	93
		pc					M_3'	53r			
46	760		G	1742 02 24 g	Pb	G	P	39rv			94
47	761		E	1742 03 06	Be	G/L	M_4	6r–7v	39	114–117	94–96
48	762		E	1742 03 13	Be	G	M_4	8r–9v	40	118–120	97–99

n°	R	V	A	date	pl	lg	ms	fol.	F	p.	JW p.
49	763	c	G	1742 04 12		G	M_3'	56v–57v	41	121–122	99–100
50	764		E	1742 05 08	Be	G	M_4	14r–15r	42	123–124	100–102
51	765		G	1742 06 07 g	Mo	G/L	P	43r–45v	43	125–129	103–105
		pc					M_3'	58v–61r			
52	766		E	1742 06 30	Be	G	M_4	22r–25r	44	130–136	107–111
53	767		G	1742 07 30 g	Mo	G/L	P	46r–49r	45	137–143	112–115
		pc					M_3'	61r–64r			
54	768		E	1742 08 28	Be	G/L	M_4	26r–29v	46	144–153	116–120
55	769		G	1742 10 01 g	Mo	G	P	50r–53v, 140r	47	154–159	122–124
		pc					M_3'	64v–68r			
56	770		E	1742 10 27	Be	G	M_4	31r–34r	48	160–168	125–129
57	771		G	1742 12 06	Mo	G/L	P	56r–58r	50	172–175	132–134
		pc					M_3'	69r–70r			
58	772		E	1742 12 15	Be	G	M_4	37r–38v	49	169–171	130–131
59	773		G	1742 12 24	Mo	G	P	54r–55r	51	176–177	134–135
		pc					M_3'	70r–71r			
60	774		E	1743 01 05	Be	G/L	M_4	41r–43v	52	178–187	135–140
61	775		E	1743 01 19	Be	G/L	M_4	44r–45v	53	188–192	140–142
62	776		G	1743 02 05	Pb	G	P	61r–64v	54	193–197	143–145
		pc		1743 02 02			M_3'	71r–74r			
63	777		G	1743 02 12		G	P	59rv	55	198–199	146
		c		1743 02			M_3'	74rv			
64	778		E	1743 02 26	Be	G	M_4	48r–50v	56	200–208	147–152
65	779		G	1743 03 23	Pb	G/L	P	65r–66v	57	209–212	152–154
		pc					M_4'	2r–4v			
66	780		E	1743 04 09	Be	G/L	M_4	53r–57v	58	213–224	154–161
67	781		G	1743 05 04	Pb	G	P	67r–68v	59	225–226	162
		pc					M_4'	5r–6r			
68	782		E	1743 05 21	Be	G/L	M_4	60r–61v	60	227–231	163–165
69	783		G	1743 06 22 g	Pb	G	P	69r–71r	61	232–236	166–168
		pc					M_4'	6v–9v			
70	784		E	1743 07 09	Be	G/L	M_4	66r–70v	62	237–245	168–173
71	785		G	1743 07 30 g	Pb	G	P	72r–75v	63	246–250	174–176
		pc					M_4'	12r–15v			
72	786		E	1743 08 24	Be	G/L	M_4	74r–76v	64	251–254	177–179
73	787		G	1743 09 28	Pb	G	P	76r–77v	65	255–257	180–182
		pc					M_4'	18v–20r			
74	788		E	1743 10 15	Be	G/L	M_4	81r–84v	66	258–265	182–187
75	789		G	1743 12	Pb	G	P	78r–79v	67	266–267	188–189
		pc		1743 12 14			M_4'	20r–21r			
76	790		E	1744 01 21	Be	G/L	M_4	88r–89r	68	268–270	189–190
77	791		G	1744 03 12 g	Mo	G	P	80r–81r	69	271–272	191–192
		pc					M_4'	21v–22r			
78	792		E	1744 04 25	Be	G	M_4	93r–94r	70	273–275	192–193
79	793		G	1744 06 01 g	Mo	G	P	82r–83r	71	276–277	194–195
		pc					M_4'	22r			
80	794		E	1744 07 04	Be	G/L	M_4	95r–98v	72	278–293	195–200
81	795		G	1744 07 16 g	Mo	G	P	84r–85r	73	294	201–202
82	796		G	1744 08 17	Mo	G	P	86r–87r	74	295–296	202–203
		pc					M_4'	23v–24r			
83	797		E	1744 09 19	Be	G	M_4	105r–106v	75	297–301	203–206

nº	R	V	A	date	pl	lg	ms	fol.	F	p.	JW p.
84	798		G	1744 10 01 j	Mo	G	P	88r–89v	76	302–304	206–207
		pc		1744 10 12			M'_4	24v–25r			
85	799		E	1744 11 17	Be	G	M_4	107r–108v	77	305–307	207–208
86	800		G	1745 01 26 g	Pb	G/L	P	90r–91v	78	308–310	209–210
		pc					M'_4	25v–27v			
87	801		E	1745 02 16	Be	G/L	M_4	111r–112v	79	311–314	211–212
88	802		G	1745 05 29 g	Pb	G	P	92rv	80	315–316	213–214
		pc					M'_4	27v–28v			
89	803		E	1745 06 19	Be	G/L	M_4	117r–118v	81	317–320	214–216
90	804		G	1745 07 g	Pb	G	P	93r–94v	82	321–322	217–218
91	805		E	1745 08 07	Be	G	M_4	119r–121v	83	323–328	218–221
92	806		G			G/L	P	4r–5r	84	329–331	222–223
		pc		1745 09 25	Pb		M'_4	31v–32v			
93	807		E	1745 10 23	Be	G	M_4	137r–138r	85	332–334	224–225
94	808		G	1745 11 09	Pb	G	P	95r–96r	86	335–337	225–227
		pc					M'_4	33r–34v			
95	809		G	1745 11 12 g		G	P	98r			227
		pc					M'_4	35r			
96	810		E	1745 11 30	Be	G/L	M_4	143r–144v	87	338–341	227–229
97	811		G	1745 12 28	Pb	G	P	99r–100r, 97r	88	355–357	238–239
		pc					M'_4	35r–36v			
98	812		E	1746 01 25	Be	G	M_4	145r–147r, 145$^{\mathrm{a}}$r	89	358–362	239–241
99	813		E	1746 02 05	Be	G	M_4	148rv	91	363–364	242
100	814		G	1746 02 26 g	Pb	G	P	101r	90	365	243
101	815		G	1746 03 12 g	Pb	G/L	P	103r–104v	92	366–367	243–244
		pc					M'_4	40rv			
102	816		E	1746 04 05	Be	G/L	M_4	160r–162r	93	368–372	244–246
103	817		G	1746 05 03	Pb	G	P	105r	94	373–374	247
		pc					M'_4	43r			
104	818		G	1746 05 21 g	Pb	G/L	P	106rv		374–375	247–248
		c					M'_4	43v–44r			
105	819		E	1746 05 28	Be	G	M_4	171r–172r	95	376–378	249–251
106	820		E	1746 06 14	Be	G/L	M_4	173r–174v	96	379–383	251–253
107	821		G	1746 07 05	Pb	G	P	107r–108v	97	384–387	254–255
		pc					M'_4	44r–45r			
108	822		E	1746 07 26	Be	G	M_4	181r–182v	98	388–393	256–258
109	823		G	1746 08 27 g	Pb	G	P	109r–110r	99	394–396	259–260
		pc					M'_4	45v			
110	824		E	1746 09 20	Be	G	M_4	183r–184v	100	397–400	260–262
111	825		G	1746 10 25	Pb	G	P	111rv	101	401–402	263
		pc					M'_4	49r			
112	826		E	1746 11 29	Be	G	M_4	187r–188r	102	403–406	263–265
113	827		E	1747 04 01	Be	G	M_4	199r–200v	103	407–410	266–268
114	828		G	1747 04 15	Pb	G	P	112r–113v	104	411–412	269
115	829		E	1747 05 06	Be	G/L	M_4	208r–209v	105	413–420	270–273
116	830	p	G	1747 06 02 g	Pb	G	P	114r	106	422	274
		pc					M'_4	49v–50r		421–422	274
117	831		E	1747 07 04	Be	G	M_4	201r–203v	107	423–428	274–277
118	832		G	1747 08 12 g	Pb	G	P	115rv	108	429–430	277–278
		pc					M'_4	50r			

nº	R	V	A	date	pl	lg	ms	fol.	F	p.	JW p.
119	833		E	1747 09 02	Be	G	M_4	213r–214r	109	431–433	278–279
120	834		G	1747 09 30	Pb	G	P	116r–117r	110	434–436	280–281
		pc					M'_4	50v–51v			
121	835		E	1747 10 24	Be	G	M_4	215r–216r	111	437–440	281–283
122	836		G	1747 11 11	Pb	G	P	118r			283
123	837		E	1747 12 14	Be	G	M_4	217rv			284
124	838		G	1748 01 27	Pb	G	P	119r–120r	112	441–442	284–285
125	839		E	1748 02 13	Be	G	M_4	219r–220v	113	443–446	285–287
126	840		G	1748 04 06 g	Pb	G	P	121r–122r	114	447–449	287–288
		pc					M'_4	52r–53r			
127	841		E	1748 05 04	Be	G/L	M_4	223r–224v, 223ªr	115	450–455	288–291
128	842		G	1748 06 08 g	Pb	G/L	P	123r–124v	116	456–457	292–293
		pc					M'_4	53rv			
129	843		E	1748 06 25	Be	G/L	M_4	227r–230v	117	458–466	293–298
130	844		G	1748 07 13	Pb	G/L	P	125r–126v	118	467–470	299–300
		pc					M'_4	53v–54r			
131	845		E	1748 08 06	Be	G	M_4	231r–232v	119	471–474	300–302
132	846		G	1748 09 07 g	Pb	G/L	P	127r–128r	120	475–477	302–303
		pc					M'_4	54v–55v			
133	847		E	1748 10 12	Be	G	M_4	238r–239v	121	478–482	303–305
134	848		G	1749 02 10 g	Mo	G/L	P	129rv	122	483–484	305–306
		pc					M'_4	56v–57r			
135	849		E	1749 03 04	Be	G	M_4	242r–243v, 245r	123	485–489	306–308
136	850		G	1749 03 27 g	Mo	G	P	131r–132r	124	490–491	308–309
		pc					M'_4	58v			
137	851		G	1749 04 01		G	P	133r		491–492	309
		c					M'_4	59r			
138	852		E	1749 04 12	Be	G/L	M_4	244rv, 246rv	125	493–497	310–311
139	853		E	1749 04 15	Be	G	M_4	247r–250v	126	498–501	312–314
140	854		G	1749 06 16 g	Mo	G	P	135r–136r	127	502–504	314–315
		pc					M'_4	59v–60r			
141	855		E	1749 07 26	Be	G/L	M_4	257r–258v	128	505–510	315–317
142	856		G	1750 03 24 g	Pb	G	P	137r–138v	129	511–514	318–319
143	857		E	1750 04 14	Be	G	M_4	260r–261v			319–320
144	858		E	1750 06 09	Be	G/L	M_4	262r–264v	130	515–524	321–325
145	859		G	1750 07 18	Pb	G/L	P	139rv, 141r	131	525–526	326–327
146	860		E	1750 08 15	Be	G	M_4	265r–266v	132	527–529	327–328
147	861		E	1750 08 17	Be	G/L	M_4	267r–268r	133	530–533	329–330
148	862		G	1750 10 03 g		G	P	142r–143r	134	534–535	331
149	863		E	1750 11 14	Be	G/L	M_4	269r–270v	135	536–539	332–333
150	864		G	1751 06 15 g		G	P	144rv	136	540–541	334
151	865		E	1751 07 03	Be	G	M_5	52r–53v	137	542–545	334–337
152	866		G	1751 07 17	Pb	G	P	145r	138	546	337–338
153	867		G	1751 08 03	Pb	G	P	147r–148r	139	547–548	338
154	868		E	1751 09 04	Be	G	M_5	95r–96r	140	549–552	339–340
155	869		G	1751 10 16 g	Pb	G/L	P	149r–150r	141	553–555	340–342
156	870		E	1751 12 04	Be	G	M_5	97r–98v	142	556–560	342–344
157	871		G	1752 05 09	Pb	G/L	P	153r–155v	143	561–563	344–345
158	872		E	1752 05 30	Be	G/L	M_5	108r–109v	144	564–568	346–348
159	873		E	1752 06 03	Be	G/L	M_5	99rv	145	569–571	348–349

n°	R	V	A	date	pl	lg	ms	fol.	F	p.	JW p.
160	874		G	1752 06/07 e		G	P	40r–42r	146	572–575	350–351
161	875		E	1752 08 05	Be	G	M_5	104r–105v	147	576–581	351–354
162	876		G	1752 10 07	Pb	G/L	P	156r–157v	148	582–585	355–356
163	877		E	1752 10 28	Be	G	M_5	102r–103v	149	586–591	357–359
164	878		G	1752 11 18	Pb	G	P	158r–159v	150	592–594	360–361
165	879		E	1752 12 16	Be	G/L	M_5	106r–107v	151	595–600	362–364
166	880		G	1753 03 12	Mo	G	P	151r–152v	152	601–603	365–366
167	881		E	1753 04 03	Be	G/L	M_5	110r–111v	153	604–609	367–370
168	882		G	1753 06 28 g	Mo	G	P	160r–161v	154	610–613	370–372
169	883		E	1753 08 04	Be	G	M_5	112r–113v	155	614–618	372–374
170	884		G	1755 04 26 g	Pb	G	P	162r–163r	156	619–620	376
171	885		E	1755 05 17	Be	G	M_5	117r–118v	157	621–623	377–378
172	886		G	1755 08 05	Pb	G	P	164r–165r	158	624–626	379–380
173	887		E	1755 08 23	Be	G/L	M_5	114r–116v	159	627–633	380–383
174	888		G	1755 12 09 g	Pb	G/L	P	166r–167r	160	634–635	383–384
175	889		G	1755 12 13		G	P	168r			384
176	890		E	1756 01 03	Be	G	M_5	123rv	161	636–637	385–386
177	891		G	1756 01 24 g	Pb	G	P	169r–170r	162	638–639	386–387
178	892		E	1756 02 10	Be	G/L	M_5	124r–125r	163	640–642	387–389
179	893		G	1756 03 23 g	Pb	G	P	171r–172r	164	643	389
180	894		G	1756 03 27	Pb	G/L	P	173r		644	390
181	895		E	1756 04 17	Be	G	M_5	119r–120v	165	645–648	390–391
182	896		G	1756 05 18 g	Pb	G/L	P	174rv	166	649–650	392
183	897		E	1756 06 11	Be	G	M_5	121r–122r	167	651–653	392–393
184	898		E	1757 04 26	Be	G	M_5	126r–127r	168	654–655	393–394
184[a]			JA	1757 04 20	Be	G	M_5	128r–129r			
185	899		E	1762 06 29	Be	G	M_5	130r–131r	169	656–658	394–395
186	900		E	1762 09 25	Be	G/L	M_5	132r–133r	170	659–660	396
187	901		G	1762 10 19 g	Pb	G	P	175r, 176r	171	661–662	397
188	902		E	1762 11 09	Be	G	M_5	135r–136r	172	663–666	397–399
188[a]			JA	1762 11 09	Be	G	M_5	137r–138r			
189	903		E	1763 10 01	Be	G	M_5	139r–140r	173	667	399
190	904		E	1763 10 11	Be	G	M_5	141rv	174	668	400
191	905		G	1763 10 18 g	Pb	G	P	178rv			400–401
192	906		G	1763 10 27 g	Pb	G	P	177r			401
193	907		E	1763 11 15	Be	G	M_5	142r–143r	175	669–670	401–402
194	908		E	1763 12 17	Be	G	M_5	144rv	176	671–672	402–403
195	909		G	1764 01 10 g	Pb	G/L	P	179r, 180r	177	673	403
196	910		E	1764 03 17	Be	G	P''	112r–113r			404–405

Leonhard Euler's Works

The list that follows comprises all those of Leonhard Euler's works that are mentioned (by title or by implicit reference) in the Euler-Goldbach letters, in the introduction or in the editorial notes of this volume. All references to page numbers 99–580 point to mentions in the text of Euler's and Goldbach's original letters.
The entries are ordered according to their Eneström numbers "E. xxx", as published in Eneström's index in 1910/13 (see the Bibliography). A few additional entries which were missing in that index have been added at the end of the present list, ordered by their year of publication.
Each index entry comprises the title of the work (long titles were sometimes shortened) and the bibliographic data of its first publication. For books, the publisher's name and place of publication are indicated; for papers published in journals, the (abbreviated) name of the journal, the series, volume and pages are given. The volume and page numbers where the work can be found in Euler's *Opera Omnia* follow.

E. 65 *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Bousquet: Lausannae et Genevae, 1744 – O. I/24: 262, 298, 305, 788, 791, 831, 838, 841, 1053, 1064

E. 66 *Theoria motuum planetarum et cometarum. Continens methodum facilem ex aliquot observationibus orbitas cum planetarum tum cometarum determinandi. Una cum calculo, quo cometae, qui annis 1680 et 1681, itemque ejus, qui nuper est visus, motus verus investigatur*, Haude: Berolini, [1744] – O. II/28, p. 105–251: 72, 73, 298, 305, 306, 352, 353, 827, 831, 838, 841, 891, 893

E. 67 [anonymous] *Beantwortung verschiedener Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Würckung der Cometen*, Haude: Berlin, 1744 – O. II/31, p. 125–150: 72, 73, 353, 354, 430, 827, 892, 893, 975–977

E. 68 [anonymous] *Fortgesetzte Beantwortung der Fragen über die Beschaffenheit, Bewegung und Würckung der Cometen*, Haude: Berlin, 1744 – O. II/31, p. 151–194: 73, 353, 354, 841, 892, 893, 977, 980

E. 71 *De fractionibus continuis Dissertatio*: CP IX, 1737 (1744), p. 98–137 – O. I/14, p. 187–216: 54, 56, 61, 62, 270, 636, 644, 798, 802

E. 72 *Variae observationes circa series infinitas*: CP IX, 1737 (1744), p. 160–188 – O. I/14, p. 217–244: 23, 50, 288, 656, 663, 819, 822, 915, 1070

E. 73 *Solutio problematis geometrici circa lunulas a circulis formatas*: CP IX, 1737 (1744), p. 207–221 – O. I/26, p. 1–14: 67, 618

E. 74 *De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi*: CP IX, 1737 (1744), p. 222–236 – O. I/14, p. 245–259: 591, 785, 840

E. 75 *Solutio problematis, in Nov [orum] Actorum Erud[itorum] Mense Novembri A. 1743 propositi*: NAE Junii 1744, p. 315–336 – O. I/27, p. 29–49: 68, 298, 299, 827, 831, 832

E. 76 *Novae et correctae tabulae ad loca Lunae computanda*, Michaelis: Berolini, 1745: 336, 874, 876

E. 78 [anonymous] *Dissertation sur la meilleure construction du cabestan*: Prix Paris 1741 (1745), p. 29–87 [*Recueil* V] – O. II/20, p. 36–82: 528, 914, 1084, 1085

E. 79 [anonymous] *Problema geometricum, propositum publice ab Anonymo Geometra*: NAE Septembris 1745, p. 523 – O. I/27, p. 50: 66, 68, 323, 344, 425, 857, 860, 863, 883, 969

E. 80 *Opuscula varii argumenti*, Haude & Spener: Berolini, 1746: 380, 841, 922, 925, 941

E. 81 [anonymous] *Gedancken von den Elementen der Cörper, in welchen das Lehr-Gebäude von den einfachen Dingen und Monaden geprüfet, und das wahre Wesen der Cörper entdecket wird*, Haude & Spener: Berlin, 1746 – O. III/2, p. 347–366: 71, 941

E. 82 *De la force de percussion et de sa veritable mesure*: Mém. Berlin 1745 (1746), p. 21–53 – O. II/8, p. 27–53: 305, 838, 841

E. 83 *Sur quelques proprietés des Sections Coniques, qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes*: Mém. Berlin 1745 (1746), p. 71–98 – O. I/27, p. 51–73: 853

E. 85 *Solutio Problematis Catoptrici, in his Actis A. 1745 Mense Septembri P. I pag. 523 propositi*: NAE Aprilis 1746, p. 230–233 – O. I/27, p. 74–77: 857, 907

E. 87 *Tabulae astronomicae Solis & Lunae*: *Opuscula* I (E. 80), p. 137–168 – O. II/23, p. 1–10: 336, 396, 874, 876, 939

E. 88 *Nova theoria lucis et colorum*: *Opuscula* I (E. 80), p. 169–244 [abstract: Mém. Berlin 1745 (1746), Histoire, p. 17–24] – O. III/5, p. 1–45: 305, 838, 841

E. 90 *Enodatio quaestionis utrum materiae facultas cogitandi tribui possit necne? ex principiis mechanicis petita*: *Opuscula* I (E. 80), p. 277–286 – O. III/2, p. 367–372: 395, 938, 941

E. 388 *Vollständige Anleitung zur Algebra*, Zweyter Theil: *Von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytic*, St. Petersburg, 1770 – O. I/1, p. 209–498: 42, 53, 612, 617, 618, 999, 1049, 1085, 1093, 1099

E. 406 *Observationes circa radices aequationum*: NCP XV, 1770 (1771), p. 51–74 – O. I/6, p. 263–286: 726, 1138

E. 415 *Examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties d'un vaisseau dans le roulis & dans le tangage. Ou recherches sur la diminution de ces mouvemens*: Prix Paris 1759 (47 pp.), *Recueil* VIII (1771) – O. II/21, p. 1–30: 1112

E. 417 *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, Tome troisieme, Saint Pétersbourg, 1772 – O. III/12, p. 53–265 [see also E. 343, E. 344]: 69

E. 418 *Theoria motuum Lunae, nova methodo pertractata ...*, Typis Academiae Imperialis Scientiarum: Petropoli, 1772 – O. II/22: 72

E. 421 *Evolutio formulae integralis* $\int x^{f-1}\,dx\,(l\,x)^{\frac{m}{n}}$ *integratione a valore* $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extensa*: NCP XVI, 1771 (1772), p. 91–139 – O. I/17, p. 316–357: 35, 586, 681

E. 423 *Considerationes cyclometricae*: NCP XVI, 1771 (1772), p. 160–170 – O. I/28, p. 205–214: 67, 619

E. 428 *De perturbatione motus Terrae ab actione Veneris oriunda*: NCP XVI, 1771 (1772), p. 426–467 – O. II/26 (to be published): 1093

E. 445 *Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata*: NAE Maji 1773, p. 193–212 – AP 1777.2 (1780), p. 48–69 [E. 445a] – O. I/3, p. 218–238: 604

E. 449 *Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia*: NCP XVIII, 1773 (1774), p. 85–135 – O. I/3, p. 240–281: 38, 956, 1053, 1077

E. 461 *Extrait d'une Lettre de M. Euler le Pere a M. Bernoulli, concernant le Mémoire imprimé parmi ceux de 1771 ...*: Nouv. Mém. Berlin 1772 (1774), *Histoire*, p. 35–36 – O. I/3, p. 335-337: 46, 822, 1067, 1071

E. 462 *De valore formulae integralis* $\int \dfrac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n}\,dz$ *casu quo post integrationem ponitur* $z = 1$: NCP XIX, 1774 (1775), p. 3–29 – O. I/17, p. 358–383: 713

E. 477 *Meditationes circa singulare serierum genus*: NCP XX, 1775 (1776), p. 140–186 – O. I/15, p. 217–267: 748, 758

E. 532 *De serie Lambertina, plurimisque eius insignibus proprietatibus*: AP 1779.2 (1783), p. 29–51 – O. I/6, p. 350–369: 1138

E. 541 *Evolutio producti infiniti* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ [*etc.*] *in seriem simplicem*: AP 1780.1 (1783), p. 47–55 – O. I/3, p. 472–479: 51, 823, 1018

E. 542 *De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium*: AP 1780.1 (1783), p. 56–75 – O. I/3, p. 480–496: 658, 823

E. 552 *Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos*: *Opuscula analytica* I, Petropoli 1783, p. 64–84 – O. I/3, p. 497–512: 726

E. 556 *De criteriis aequationis* $fxx + gyy = hz^2$ *utrum ea resolutionem admittat nec ne?*: *Opuscula analytica* I, Petropoli 1783, p. 211–241 – O. I/4, p. 1–24: 40, 726, 1080, 1092

E. 559 *Nova subsidia pro resolutione formulae* $axx + 1 = yy$: *Opuscula analytica* I, Petropoli 1783, p. 310–328 – O. I/4, p. 76–90: 617, 1092

E. 565 *De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet*: AP 1780.2 (1784), p. 31–37 – O. I/15, p. 522–527: 41, 56, 587

E. 566 *De inductione ad plenam certitudinem evehenda*: AP 1780.2 (1784), p. 38–48 – O. I/4, p. 116–124: 936, 1078

E. 575 *De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt*: AP 1781.1 (1784), p. 74–111 – O. I/15, p. 528–568: 35

E. 584 *De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis*: AP 1781.2 (1785), p. 76–89 – O. I/15, p. 604–620: 35, 784

E. 586 *Considerationes super theoremate Fermatiano de resolutione numerorum in numeros polygonales*: *Opuscula analytica* II, Petropoli 1785, p. 3–15 – O. I/4, p. 125–135: 41, 962, 1018

E. 591 *De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda*: *Opuscula analytica* II, Petropoli 1785, p. 91–101 – O. I/4, p. 136–145: 591

E. 594 *Methodus inveniendi formulas integrales, quae certis casibus datam inter se teneant rationem, ubi simul methodus traditur fractiones continuas summandi*: *Opuscula analytica* II, Petropoli 1785, p. 178–216 – O. I/18, p. 209–243: 62

E. 595 *Summatio fractionis continuae, cuius indices progressionem arithmeticam constituunt, dum numeratores omnes sunt unitates, ubi simul resolutio aequationis Riccatianae per huiusmodi fractiones docetur*: *Opuscula analytica* II, Petropoli 1785, p. 217–239 – O. I/23, p. 174–194: 62, 636

E. 596 *De summa seriei ex numeris primis formatae* $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}-\frac{1}{31}$ *etc. ubi numeri primi formae* $4n-1$ *habent signum positivum, formae autem* $4n+1$ *signum negativum*: *Opuscula analytica* II, Petropoli 1785, p. 240–256 – O. I/4, p. 146–162: 1069, 1070

E. 610 *Novae demonstrationes circa divisores numerorum formae* $xx + nyy$: NAP 1, 1783 (1787), p. 47–74 – O. I/4, p. 197–220: 726

E. 613 *Dilucidationes in capita postrema Calculi mei Differentialis de functionibus inexplicabilibus*: *Institutiones calculi differentialis*, Ticini [= Pavia] 1787 [E. 212[1]], p. 705–732 – Mém. Acad. Imp. Sci. S[t]. Pétersbourg IV (1813), p.88–119 – O. I/16.1, p. 1–33: 61

E. 616 *De transformatione seriei divergentis* $1 - mx + m(m+n)x^2 - m(m+n)(m+2n)x^3 + m(m+n)(m+2n)(m+3n)x^4$ *etc. in fractionem continuam*: NAP 2, 1784 (1788), p. 36–45 – O. I/16.1, p. 34–46: 871

E. 631 *Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaevis earum potestates exprimi possunt*: NAP 4, 1786 (1789), p. 55–73 – O. I/6, p. 384–404: 1138

E. 632 *De innumeris generibus serierum maxime memorabilium, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae sed etiam quaecumque earum potestates exprimi possunt*: NAP 4, 1786 (1789), p. 74–95 – O. I/6, p. 405–424: 1138

E. 643 *Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem*: NAP 6, 1788 (1790), p. 16–24 – O. I/6, p. 425–433: 840

E. 652 *De termino generali serierum hypergeometricarum*: NAP 7, 1789 (1793), p. 42–82 – O. I/16.1, p. 139–162: 35, 585, 586

E. 663 *Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur*: NAP 8, 1790 (1794), p. 32–68 – O. I/16.1, p. 193–234: 35

E. 670 *De resolutione formulae integralis* $\int x^{m-1}\,dx\,(\Delta + x^n)^\lambda$ *in seriem semper convergentem. Ubi simul plura insignia artificia circa serierum summationem explicantur*: *Institutionum Calculi Integralis Volumen quartum*, Petropoli 1794, p. 60–77 – O. I/19, p. 110–128: 915

E. 685 *Exercitatio analytica; ubi imprimis seriei maxime generalis summatio traditur*: NAP 9, 1791 (1795), p. 41–53 – O. I/16.1, p. 266–281: 915

E. 686 *Dilucidationes super formulis, quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimi solent, ubi simul ingentes difficultates diluuntur*: NAP 9, 1791 (1795), p. 54–80 – O. I/16.1, p. 282–310: 914

E. 705 *Investigatio quarundam serierum, quae ad rationem peripheriae circuli ad diametrum vero proxime definiendam maxime sunt accommodatae*: NAP 11, 1793 (1798), p. 133–149 – O. I/16.2, p. 1–20: 785

E. 709 *De evolutione potestatis polynomialis cuiuscunque* $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + etc.)^n$: NAP 12, 1794 (1801), p. 47–57 – O. I/16.2, p. 28–40: 35

E. 715 *De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi nec ne?*: NAP 13, 1795/96 (1802), p. 14–44 – O. I/4, p. 303–328: 19

E. 716 *Resolutio formulae Diophanteae* $ab(maa+nbb) = cd(mcc+ndd)$ *per numeros rationales*: NAP 13, 1795/96 (1802), p. 45–63 – O. I/4, p. 329–351: 1093

E. 722 *Disquitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis* $(1 + x + xx)^n$: NAP 14, 1797/98 (1805), p. 75–110 – O. I/16.2, p. 56–103: 35

E. 726 *Demonstratio insignis theorematis numerici circa uncias potestatum binomialium*: NAP 15, 1799/1802 (1806), p. 33–43 – O. I/16.2, p. 104–116: 35

E. 736 *De summatione serierum in hac forma contentarum* $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{[16]} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} + etc.$: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 3, 1809/10 (1811), p. 26–42 – O. I/16.2, p. 117–138: 726

E. 739 *Regula facilis problemata Diophantea per numeros integros expedite resolvendi*: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 4, 1811 (1813), p. 3–17 – O. I/4, p. 406–417: 611, 617

E. 746 *Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales investigandi*: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 5, 1812 (1815), p. 45–56 – O. I/16.2, p. 200–213: 52

E. 747 *De seriebus memorabilibus quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimere licet*: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 5, 1812 (1815), p. 57–72 – O. I/16.2, p. 214–231: 35

E. 750 *Commentatio in fractionem continuam, qua illustris La Grange potestates binomiales expressit*: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 6, 1813/14 (1818), p. 3–11 – O. I/16.2, p. 232–240: 62

E. 751 *Analysis facilis aequationem Riccatianam per fractionem continuam resolvendi*: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 6, 1813/14 (1818), p. 12–29 – O. I/23, p. 414–430: 636

E. 768 *De unciis potestatum binomii earumque interpolatione*: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 9, 1819/20 (1824), p. 57–76 – O. I/16.2, p. 241–266: 35

E. 776 *Dilucidationes circa binas summas duorum biquadratorum inter se aequales*: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 11 (1830), p. 49–57 – O. I/5, p. 135–145: 1093

E. 778 *Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi*: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 11 (1830), p. 69–91 – O. I/5, p. 157–181: 618

E. 787 *Solutio Problematis In Actis Lips. M. . . . A. 1745 propositi*: *Correspondance* (1843), t. I, p. 341–354 – *Euler-Goldbach* (1965), p. 230–237 [this is the draft of E. 106 sent to Goldbach on November 30th, 1745: cf. *supra* n° 96, note 3]: 341, 863, 879, 882

E. 792 *Tractatus de numerorum doctrina Capita XVI*: *Commentationes arithmeticae collectae*, t. II, Petropoli, 1849, p. 503–575 – O. I/5, p. 182–283: 39, 636, 755, 1067, 1097

E. 794 *Theorema arithmeticum ejusque demonstratio*: *Commentationes arithmeticae collectae*, t. II, Petropoli, 1849, p. 588–592 – O. I/6, p. 486–493: 1124

E. 798 *De numeris amicabilibus*: *Commentationes arithmeticae collectae*, t. II, Petropoli, 1849, p. 627–636 – O. I/5, p. 353–365: 39, 1067, 1072

E. 806 *Fragmenta arithmetica ex Adversariis mathematicis depromta*: *Opera Postuma*, t. I, Petropoli, 1862, p. 157–266: 999

E. 807 *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*: *Opera Postuma*, t. I, Petropoli, 1862, p. 269–281 – O. I/19, p. 417–438: 587

E. 819 *Continuatio Fragmentorum ex Adversariis mathematicis depromtorum*: *Opera Postuma*, t. I, Petropoli, 1862, p. 487–518 – O. I/16.2, p. 312–320: 742, 1070

E. 828 *Dissertation sur le mouvement des corps enfermés dans un tube droit, mobile autour d'un axe fixe*: *Opera Postuma*, t. II, Petropoli, 1862, p. 85–113 – O. II/7, p. 266–307: 280, 810, 812

E. 830 *Recensio litterarum a Cl. D. Bernoullio Basilea die 26 Oct. 1735 ad me datarum, una cum annotationibus meis*: *Opera Postuma*, t. II, Petropoli, 1862, p. 125–128 – O. II/11, p. 373–377: 647, 648

E. 853 *Meditatio in experimenta explosione tormentorum nuper instituta*: *Opera Postuma*, t. II, Petropoli, 1862, p. 800–804 – O. II/14, p. 468–477: 635

E. 854 *Différentes piéces sur les Monades*: *Opera Postuma*, t. II, Petropoli, 1862, p. 805–813 – O. III/2, p. 416–425: 941, 942

E. 855 *Principia pro motu sanguinis per arterias determinando*: *Opera Postuma*, t. II, Petropoli, 1862, p. 814–823 – O. II/16, p. 178–196: 725

1743 [anonymous] *De causa gravitatis*: Miscellanea Berolinensia VII (1743), p. 360–370 – O. II/31, p. 373–378: 70, 712, 831

1747 [anonymous] *Vollständiger Astronomischer Calender ... auf das Jahr nach Christi Geburt MDCCXLVIII ...*, [Berlin 1747]: 432, 434, 436, 977, 979, 980, 982, 984

1748 [anonymous] [*Tabulae astronomicae*]: *Calendarium ad annum Christi MDCCXLIX*, pro meridiano Berolinensi, [Berlin 1748], fol. L1–M4: 436, 979, 983

Bibliography

The bibliography that follows lists all works – both source texts and secondary literature – cited (by title or by implicit reference) in the Euler-Goldbach letters, in the introduction or in the editorial notes of this volume. All references to page numbers 99–580 point to mentions in the text of Euler's and Goldbach's original letters.
Each index entry comprises the author, the year of publication and the title of the work; long titles were sometimes shortened. For books, the publisher's name and the place of publication are indicated; for papers published in journals, the (abbreviated) name of the journal, series, volume and pages are given. Data missing or incorrectly given on the original title pages, translations of Russian titles and the English names of places (when hard to identify) have been supplied in brackets. In some cases, editions of Collected Works or reprints easier to access than the original publications have been indicated.
At the end of the bibliography, a number of anonymous and collective publications that appeared without an author's name have been added, ordered alphabetically by their title.

Abel, Niels Henrik

1823 *Oplösning af et Par Opgaver ved Hjelp af bestemt Integraler*: Magazin for naturvidenskaberne 1 (1823), p. 55–68 (reprinted as *Solution de quelques problémes à l'aide d'intégrales définies* in Abel 1881, p. 11–27): 48

1881 *Œuvres complètes de N.H. Abel*, Nouvelle édition (ed. L. Sylow, S. Lie), Gröndahl: Christiania [Oslo], 1881 [reprint: Johnson: New York, 1965]: 727

Achard, Antoine

1746 [summary] *De la Liberté*: Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin 1745 (1746), p. 91–93: 701

1762 *Sermon prononcé dans l'Eglise Françoise du Werder à l'occasion de la paix entre la Prusse et la Russie*, Decker: Berlin, 1762: 701

1774 *Sermons*, par Monsieur Achard, Pasteur de l'Église Françoise de Berlin ..., T. 1–2, Decker: Berlin, 1774: 701, 1059

Aigner, Martin; Ziegler, Günter M.

2010 *Proofs from THE BOOK*, Fourth Edition, Springer: Berlin (etc.), 2010: 50

d'Alembert, Jean le Rond

1747 *Reflexions sur la Cause Generale des Vents.* Piéce qui a remporté le Prix proposé par l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres de Prusse pour l'Année MDCCXLVI ... à laquelle on a joint les Pieçes qui ont concouru, Haude & Spener: Berlin, 1747: 357, 362, 896, 897, 902

1748 *Recherches sur le calcul intégral*: Mém. Berlin 1746 (1748), p. 182–224: 56, 746

Alling, Norman Larrabee

1981 *Real Elliptic Curves* (North-Holland Mathematics Studies, 54), North-Holland: Amsterdam, 1981: 1054

Allouche, Jean-Paul; Mendès France, Michel

2008 *Euler, Pisot, Prouhet-Thue-Morse, Wallis and the duplication of sines*: Monatshefte für Mathematik 155 (2008), p. 301–315: 897

Allouche, Jean-Paul; Shallit, Jeffrey

1999 *The Ubiquitous Prouhet-Thue-Morse Sequence*: *Sequences and their applications*, Proceedings SETA '98 (ed. C. Ding et al.), Springer: New York, 1999, p. 1–16: 897

Altmann, Alexander

1973 *Moses Mendelssohn. A biographical study*, Routledge & Kegan Paul: London, 1973: 842

Anbouba, Adel

1979 *Un Traité d'Abū Jafar [al-Khazin] sur les triangles rectangles numériques*: J. History Arabic Science 3 (1979), p. 134–178: 857

Andrews, George E.

1983 *Euler's pentagonal number theorem*: Mathematics Magazine 56 (1983), p. 279–284: 1018

Anisimov, Evgeniĭ Viktorovich

1995 *Empress Elizabeth. Her Reign and Her Russia 1741–1761* (trad. J.T. Alexander), Academic International Press: Gulf Breeze (FL), 1995: 11

Apéry, Roger

1979 *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*: Astérisque 61 (1979), p. 11–13: 587, 755

Aubry, Léon

1912 *Solution de quelques questions d'analyse indéterminée*: Sphinx-Œdipe 7 (1912), p. 81–84: 822, 962, 1047

Ayoub, Raymond George

1984 *The Lemniscate and Fagnano's Contributions to Elliptic Integrals*: Arch. Hist. Exact Sci. 29 (1984), p. 131–149: 1054

Bachet de Méziriac, Claude Gaspard

1621 *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri sex, et de numeris multangulis Liber unus.* Nunc primum Graece & Latine editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati, Auctore Claudio Gaspare Bacheto, Drouart: Lutetiae Parisiorum [Paris], 1621: 604, 1085

Bain, Robert Nisbet

1899 *The daughter of Peter the Great. A history of Russian diplomacy and of the Russian court under the Empress Elizabeth Petrovna 1741–1762*, Constable: Westminster, 1899: 11

Baltus, Christopher

2008 *Euler: continued fractions and divergent series (and Nicholas Bernoulli)*: Proceedings of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics 21 (2008), p. 11–23: 66

Barbeau, Edward Joseph; Leah, Philip Joseph

1976 *Euler's 1760 paper on divergent series*: Hist. Math. 3 (1976), p. 141–160: 871

Baron, Margaret Eleanor

1969 *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon Press: Oxford (etc.), 1969 [reprint: Dover: New York, 1987]: 55, 605

Bashmakova, Izabella Grigor'evna

1957 *О доказательстве основной теоремы алгебры* [*On the proof of the Fundamental Theorem of Algebra*]: Istoriko-Matematicheskie issledovaniya X (1957), p. 257–304: 772

Bechler, Zev

1975 *'A Less Agreeable Matter': The Disagreeable Case of Newton and Achromatic Refraction*: British Journal for the History of Science 8 (1975), p. 101–126: 985

Béguelin, Nicolas de

1776 *Démonstration du Théoreme de Bachet, et Analyse des nombres en triangulaires & en quarrés*: Nouv. Mém. Berlin 1774 (1776), p. 313–369: 625

Bell, Jordan

2010 *A summary of Euler's work on the pentagonal number theorem*: Arch. Hist. Exact Sci. 64 (2010), p. 301–373: 51, 59, 60, 823, 928, 930, 1018

Berkhan, Carl August Wilhelm

1856 *Lehrbuch der unbestimmten Analytik für höhere Lehranstalten*, 2. Abtheilung: *Die Auflösung der diophantischen Gleichungen zweiten Grades*, Schmidt: Halle, 1856: 43

Bernoulli, Daniel

1724 St. 4, *Exercitationes quaedam mathematicae*, Lovisa: Venetiis, 1724 – Dan. B. *Werke* 1, p. 297–362: 17, 63, 123, 618, 620, 635

1725 St. 7, *Solutio Problematis Riccatiani* ...: AE Octobris 1725, p. 473–475 – Dan. B. *Werke* 1, p. 349–351: 63

1732 St. 16, *Observationes de seriebus quae formantur ex additione vel subtractione quacunque terminorum se mutuo consequentium* ...: CP III, 1728 (1732), p. 85–100 – Dan. B. *Werke* 2, p. 49–64: 617, 644

1742 [St. 33a], *Traité sur le Flux et le Reflux de la Mer*: I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (ed. Th. Le Seur / F. Jacquier), t. III, Barrillot: Genevae, 1742, p. 133–246: 842

1747 St. 74, *Recherches physiques et matematiques sur la Theorie des vents reglés*: J. d'Alembert, *Reflexions sur la Cause Generale des Vents.* Piéce qui a remporté le prix proposé par l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres pour l'Année MDCCXLVI ... A laquelle on a joint les Pieçes qui ont concouru, Haude & Spener: Berlin, 1747, p. 137–176 – Dan. B. *Werke* 5, p. 509–535: 897

1748 St. 39, *Memoire sur la maniere de construire les Boussoles d'inclinaison* ...: Prix Paris 1743 (1748), p. 1–61 [*Recueil* V] – Dan. B. *Werke* 7, p. 67–111: 712, 791

1769 St. 44, *Mémoire sur la nature et la cause des courans* ...: Prix Paris 1749/51 (108 pp.), *Recueil* VII (1769) – Dan. B. *Werke* 5, p. 535–611: 1006

Bernoulli, Daniel; Bernoulli, Johann II

1748 St. 41, *Nouveaux Principes de Méchanique et de Physique, tendans à expliquer la Nature & les Propriétés de l'Aiman*: Prix Paris V, 1746 (1748), p. 115–144 [*Recueil* V] – Dan. B. *Werke* 7, p. 113–135: 712

Bernoulli, Jacob (I)

1688 Op. XXXIV, *Positiones Mathematicae de Rationibus et Proportionibus*, Genath: Basileae 1688 – *Werke* 4, p. 35–44: 14

1689 Op. XXXV, *Positiones Arithmeticae de Seriebus Infinitis, earumque Summa finita*, von Mechel: Basileae 1689 – *Werke* 4, p. 45–64: 36, 588, 655

1692 Op. LIV, *Positionum Arithmeticarum de Seriebus Infinitis, earumque Summa finita Pars Altera*, von Mechel: Basileae 1692 – *Werke* 4, p. 65–83: 48

1696 Op. LXX, *Constructio generalis omnium Curvarum transcendentium ope simplicioris Tractoriae & Logarithmicae*: AE Junii 1696, p. 261–263 – *Werke* 5, p. 148–150: 648

1713 *Ars Conjectandi, Opus Posthumum*, Impensis Thurnisiorum Fratrum: Basileae 1713 – *Werke* 3, p. 107–286: 14, 49, 654, 784

1744 *Opera* (ed. G. Cramer), T. I–II, Cramer & Philibert: Genevae, 1744: 78, 306, 322, 626, 839, 841, 860

1993 *Der Briefwechsel von Jacob Bernoulli* (ed. A. Weil et al.), Birkhäuser: Basel, 1993: 635

1999 *Die Werke von Jakob Bernoulli*, Bd. 5: *Differentialgeometrie* (ed. A. Weil et al.), Birkhäuser: Basel (etc.), 1999: 626

Bernoulli, Jacob (I); Bernoulli, Johann I

1991 *Die Streitschriften von Jacob und Johann Bernoulli: Variationsrechnung* (ed. H.H. Goldstine et al.), Birkhäuser: Basel (etc.), 1991: 626

Bernoulli, Johann I (see also Leibniz)

1694 Op. XX, *Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus*: AE Novembris 1694, p. 435–437 – Jacob and Johann I Bernoulli, *Streitschriften* (ed. H.H. Goldstine), Birkhäuser: Basel, 1991, p. 205–206: 635

1698 Op. L, *Theorema universale Rectificationi Linearum curvarum inserviens* ...: AE Octobris 1698, p. 462–466 – Joh. I B. *Opera* I, p. 249–253: 1053

1704 Op. LXX, *Solution d'un Problême Concernant le calcul intégral ...*: Mém. Paris 1702 (1704), p. 289–297 – Joh. I B. *Opera* I, p. 393–400: 630

1712 Op. LXXXIX, *Angulorum arcuumque Sectio indefinita per Formulam universalem expressa sine serierum auxilio ...*: AE Junii 1712, p. 274–277; AE Julii 1712, p. 329–330 – Joh. I B. *Opera* I, p. 511–514: 687

1728 Op. CXXXVI, *De integrationibus aequationum differentialium ...*: CP I, 1726 (1728), p. 167–184 – Joh. I B. *Opera* III, p. 108–124: 626

1742 *Johannis Bernoulli ... Opera Omnia, tam antea sparsim edita, quam hactenus inedita* (ed. G. Cramer), Bousquet: Lausannae et Genevae, 1742: 78, 222, 248, 262, 322, 635, 743, 745, 771, 788, 860, 863

1744 Op. CLXXXVI, *Dissertatio Hydraulica de Motu Aquarum ...*: CP IX, 1737 (1744), p. 3–44; CP X, 1738 (1747), p. 207–260 – Joh. I B. *Opera* IV, p. 387–484: 173, 175, 682, 683

Bernoulli, Nicolaus II

1720 *Exercitatio Geometrica de Trajectoriis Orthogonalibus ...*: AE Maji 1720, p. 223–237; AE Suppl. VII (1721), p. 303–326; 337–353 – (as Op. CXVI) Joh. I B. *Opera* II, p. 423–472: 635

1728 *Analysis aequationum quarundam differentialium*: CP I, 1726 (1728), p. 198–207: 63

Bernoulli, René

1983 *Leonhard Eulers Augenkrankheiten*: *Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk*, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt (ed. J.J. Burckhardt et al.), Birkhäuser: Basel, 1983, p. 471–487: 22, 671

Betts, Joseph

1744 *A Letter from the Rev. Mr. Joseph Betts ... to Martin Folkes, Esq. ... containing Observations on the late Comet ... with the Elements for computing Its Motions*: Phil. Trans. vol. XLIII (1744), no. 474, p. 91–100: 980

Binet, Jacques Philippe Marie

1839a *Réflexions sur le Problème de déterminer le nombre de manières dont une figure rectiligne peut être partagée en triangles au moyen de ses diagonales*: Journal de mathématiques pures et appliquées I/4 (1839), p. 79–90: 1040

1839b *Mémoire sur les intégrales définies eulériennes et sur leur application à la théorie des suites, ainsi qu'à l'évaluation des fonctions de grands nombres*: Journal de l'École Polytechnique 16 (1839), p. 123–343: 600

Bittanti, Sergio

1996 *History and Prehistory of the Riccati Equation*: Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control (1996), vol. 2, p. 1599–1604: 639

Blaschke, Wilhelm Johann Eugen

1959 *Euler und die Kinematik*: *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlungen* (ed. K. Schröder), Akademie-Verlag: Berlin, 1959, p. 35–41: 962

Bongo, Pietro (Bungus, Petrus)

1591 *Numerorum mysteria*, C. Ventura: Bergomi [Bergamo], 1591 [and several other editions]: 170, 172, 519, 521, 524, 677, 678, 1066, 1073–1075, 1079

Borel, Émile

1928 *Leçons sur les séries divergentes*, 2e édition, Gauthier-Villars: Paris, 1928: 870

Borwein, Jonathan M.; Bradley, David M.

2006 *Thirty-two Goldbach variations*: International J. Number Theory 2 (2006), p. 65–103: 748

Borwein, Peter B.

1991 *On the irrationality of* $\sum 1/(q^n + r)$: J. Number Theory 37 (1991), p. 253–259: 60

Bos, Henk Jan Maarten

1988 *Tractional Motion and the Legitimation of Transcendental Curves*: Centaurus 31 (1988), p. 9–62: 648

Bottazzini, Umberto

1996 *Introduction to the Mathematical Writings from Daniel Bernoulli's Youth*: *Die Werke von Daniel Bernoulli*, vol. 1, Birkhäuser: Basel, 1996, p. 129–194: 16, 17, 63, 67, 618, 636

Bouguer, Pierre

1735 *Sur de nouvelles courbes ausquelles on peut donner le nom de Lignes de poursuite*: Mém. Paris 1732 (1735), p. 1–14: 648

1736 *Sur les lignes courbes qui sont propres à former les Voutes en Dome*: Mém. Paris 1734 (1736), p. 149–166: 314, 850

1746 *Traité du Navire, de sa construction et de ses mouvemens ...*, Jombert: Paris, 1746: 78, 381, 430, 433, 922, 925, 975, 976, 978

1749 *La figure de la Terre: déterminée par les Observations de Messieurs Bouguer, & de la Condamine, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du Roy au Pérou, pour observer aux environs de l'Equateur ...*, Jombert: Paris, 1749: 511, 1063, 1064

Bouhours, Dominique

1692 *Suite des Remarques nouvelles sur la Langue Françoise*, Josse: Paris, 1692: 508, 1049, 1058, 1059

Bradley, Robert E.

2007 *Euler, D'Alembert and the Logarithm Function*: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy* (ed. R.E. Bradley, C.E. Sandifer), Elsevier: Amsterdam (etc.), 2007, p. 255–277: 587

Breidert, Wolfgang

1983 *Leonhard Euler und die Philosophie*: *Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk*, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt (ed. J.J. Burckhardt et al.), Birkhäuser: Basel, 1983, p. 447–457: 941

Breitfuss, Ludwig Gottlieb (Leonid)

1939 *Early maps of North-Eastern Asia and of the Lands around the North Pacific. Controversy between G.F. Müller and N. Delisle*: Imago Mundi III (1939), p. 87–99: 1092

Brent, Charles

1741 *The Compendious Astronomer: Containing New and Correct Tables for Computing in a concise Manner the Places of the Luminaries*, Hodges: London, 1741: 925

Brezinski, Claude

1991 *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer: Berlin, 1991: 55, 591, 644

Briggs, Henry

1620 *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio ...*, Vincent: Lugduni [Lyon], 1620: 106, 108, 600

1624 *Arithmetica Logarithmica sive logarithmorum chiliades triginta ...*, Jones: Londini, 1624: 594, 597, 600

Bronisch, Johannes

2010 *Der Mäzen der Aufklärung. Ernst Christoph von Manteuffel und das Netzwerk des Wolffianismus*, de Gruyter: Berlin (etc.), 2010: 942

Brouncker, William

1668 *The Squaring of the Hyperbola, by an infinite series of Rational Numbers ...*: Phil. Trans. vol. III (1668), no. 34, p. 645–649: 588

Brunet, Pierre

1938 *Étude historique sur le principe de la moindre action*, Hermann: Paris, 1938: 1064

Buffon, Georges-Louis Leclerc Comte de

1752 *Invention de Miroirs ardens, pour brusler à une grande distance*: Mém. Ac. Sci. Paris 1747 (1752), p. 82–101: 937

Büsching, Anton Friedrich

1783 *Beyträge zu der Lebensgeschichte denkwürdiger Personen, insonderheit gelehrter Männer*, Erster, ... Fünfter Theil, Curt: Halle, 1783–1787: 12

Cajori, Florian

1928 *A History of Mathematical Notations*, vol. I–II, Open Court: Chicago, 1928/29: 93, 635, 730, 829

Calcut, Jack S.

2009 *Gaussian Integers and Arctangent Identities for π*: American Mathematical Monthly 116 (2009), p. 515–530: 943

Cantor, Moritz Benedikt

1880 *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, Bd. I–IV, Teubner: Leipzig, 1880–1908 [and several later editions]: 635

Caracciolo, Giovanni Battista

1740 *De lineis curvis Liber*, Carotti: Pisis, 1740: 193, 707, 712

Cassini, Jacques (II)

1740 *Tables astronomiques du Soleil, de la Lune, des Planetes, des Étoiles fixes, et des Satellites de Jupiter et de Saturne; avec l'Explication & l'Usage de ces mêmes Tables*, Imprimerie Royale: Paris, 1740: 381, 436, 922, 925, 983, 984

Catalan, Eugène Charles

1839 *Solution nouvelle de cette question: Un polygone étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?*: Journal de mathématiques pures et appliquées I/4 (1839), p. 91–94: 1040

Cataldi, Pietro Antonio

1603 *Trattato de' numeri perfetti*, Rossi: Bologna, 1603: 604, 1072

Cauchy, Augustin-Louis

1815 *Démonstration du théorème général de Fermat sur les nombres polygonaux*: Mém. Sci. Math. Phys. Inst. France I.14 (1813-15), p. 177–220 – Œuvres, vol. II.6, p. 320–353: 39, 1026

Chauchot, Simon-Pierre

1755 *Sur les mouvemens de Roulis & de Tangage des Navires.* Piece qui a remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences, Martin / Guerin (etc.): Paris, 1755: 550, 551, 1110, 1111

Chebyshëv, Pafnutiĭ L'vovich

1852 *Sur la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée*: Journal de mathématiques pures et appliquées I/17 (1852), p. 341–365 – *Œuvres de P.L. Tchébychef*, vol. I, St.-Petersburg 1899, p. 29–48: 1070

1853 *Sur l'intégration des différentielles irrationnelles*: Journal de mathématiques pures et appliquées I/18 (1853), p. 87–111 – *Œuvres de P.L. Tchébychef*, vol. I, St.-Petersburg 1899, p. 147–168: 630

1889 *Theorie der Congruenzen (Elemente der Zahlentheorie)*, translated by H. Schapira, Mayer & Müller: Berlin, 1889 [Russian original 1849, reprint of the 2nd German edition (1902): Chelsea: New York, 1972]: 726

Chen Jingrun

1973 *On the representation of a large even number as the sum of a prime and the product of at most two primes*: Scientia Sinica 16 (1973), p. 157–176: 47, 706

Clairaut, Alexis Claude

1736 *Solution de plusieurs Problemes où il s'agit de trouver des Courbes dont la proprieté consiste dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une Equation donnée*: Mém. Paris 1734 (1736), p. 196–215: 314, 316, 850, 852

1743 *Theorie de la Figure de la Terre, tirée des Principes de l'Hydrostatique*, David Fils: Paris, 1743: 78, 300, 305, 833, 838

Clausen, Thomas

1833 *Schreiben des Herrn Th. Clausen an Herrn Dr. Olbers*: Astronomische Nachrichten 10 (1833), col. 345–348: 977

Cohn, Henry

2006 *A Short Proof of the Simple Continued Fraction Expansion of* e: Amer. Math. Monthly 113 (2006), p. 57–62: 62

Colebrooke, Henry Thomas

1817 *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhascara*, Murray: London, 1817: 857

Condillac, Étienne Bonnot de

1980 *Les Monades* (ed. L.L. Bongie), Voltaire Foundation: Oxford, 1980: 942

Conrad, Keith

2003 *Hardy-Littlewood Constants*: *Mathematical properties of sequences and other combinatorial structures* (ed. Jong-Seon No et al.) (International Series in Engineering and Computer Science, 726), Kluwer: Boston (etc.), 2003, p. 133–154: 1071

2005 *Partial Euler Products on the Critical Line*: Canadian J. Math. 57 (2005), p. 267–297: 656, 1064

Cordonnier, Hyacinthe

1732 *Le Chef d'Œuvre d'un Inconu*, Poëme heureusement découvert & mis au jour, avec des Remarques savantes & recherchées, Par M. le Docteur Chrisostome Matanasius. Sixieme edition, Revûe, corrigée, augmentée, & diminuée, Husson: La Haye [The Hague], 1732: 212, 729, 731

Cornell, Gary et al. (eds.)

1997 *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*, Springer: New York, 1997: 956

Cotes, Roger

1714 *Logometria*: Phil. Trans. vol. XXIX (1714–1716), no. 338, p. 5–45: 56, 644

1722 *Harmonia Mensurarum, sive Analysis & Synthesis per Rationum & Angulorum Mensuras promotae ...* (ed. R. Smith), Cantabrigiae [Cambridge], 1722: 687

Craig, John

1718 *De calculo fluentium Libri duo*, Pearson: Londini, 1718: 67, 618

Cretney, Rosanna

2014 *The origins of Euler's early work on continued fractions*: Historia Mathematica 41 (2014), p. 139–156: 16

Crocker, Roger Clement

1971 *On the sum of a prime and of two powers of two*: Pacific J. Math. 36 (1971), p. 103–107: 1077

Curtze, (Ernst Ludwig Wilhelm) Maximilian

1899 *Eine Studienreise. Rechenschaftsbericht über seine ... Forschungen zur Geschichte der Geometrie im Mittelalter*: Centralblatt für Bibliothekswesen XVI (1899), p. 257–306: 604

Dandelin, Germinal Pierre

1826 *Recherches sur la résolution des équations numériques*: Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles 3 (1826), p. 7–71: 644

Daviet de Foncenex, Pierre-Marie-François

1759 *Réflexions sur les quantités imaginaires*: Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis I (1759), *Dissertationes*, p. 113–146: 746

Dedekind, Richard

1877 *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 83 (1877), p. 265–292 – *Gesammelte mathematische Werke* (ed. R. Fricke et al.), Bd. 1, Vieweg: Braunschweig, 1930, p. 174–201: 51

Degen, Carl Ferdinand

1822 *Adumbratio demonstrationis theorematis arithmetici maxime universalis*: Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg VIII, 1817/18 (1822), p. 207–219: 962

Dehn, Max; Hellinger, Ernst David

1943 *Certain mathematical achievements of James Gregory*: Amer. Math. Monthly 50 (1943), p. 149–163: 629

Delisle, Joseph-Nicolas

1752 *Explication de la carte des nouvelles decouvertes au Nord de la Mer du Sud*, Desaint & Saillant: Paris, 1752: 1091

Desboves, Adolphe Honoré

1855 *Sur un théorème de Legendre et son application à la recherche de limites qui comprennent entre elles des nombres premiers*: Nouvelles annales de mathématiques I/14 (1855), p. 281–295: 1078

Descartes, René

1637 *La Geometrie*: *Discours de la Methode ...*, Maire: Leyde, 1637, p. 297–413: 56, 746

1657 *Lettres de M.^{r} Descartes* (ed. C. Clerselier), t. I–III, Angot: Paris, 1657–1667: 624

1859 *Œuvres inédites de Descartes* (ed. L.-A. Foucher de Careil), Durand: Paris, 1859–1860: 1030

1897 *Œuvres de Descartes* (ed. Ch. Adam, P. Tannery), Cerf: Paris, 1897–1913: 46, 705, 1030

Deschamps, Jean

1743 *Cours abrégé de la philosophie Wolffienne, en forme de lettres*, Tome Premier: Qui contient la Logique, l'Ontologie & la Cosmologie, Arkstée & Merkus: Amsterdam / Leipzig, 1743 [reprint Olms: Hildesheim (etc.), 1991]: 299, 304, 832, 837, 841

Dickson, Leonard Eugene

1919 *History of the theory of numbers*, vol. 1: *Divisibility and primality*; vol. 2: *Diophantine analysis*, vol. 3: *Quadratic and higher forms*, Carnegie Institution: Washington, 1919; 1920; 1923 [reprints: Chelsea: New York, 1966; Dover: New York, 2005]: 42, 592, 604, 611, 625, 1085

1927 *Integers represented by positive ternary quadratic forms*: Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927), p. 63–70: 964

1930 *Studies in the Theory of Numbers*, University of Chicago Press: Chicago, 1930 [reprint: Chelsea: New York, 1957]: 702

Diophantussee Bachet; Heath

Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune

1827 *De formis linearibus, in quibus continentur divisores primi quarumdam formularum graduum superiorum, Commentatio*, quam ad veniam docendi ab amplissimo Philosophorum ordine in Regia Universitate Litterarum Vratislaviensi impetrandam conscripsit Gustavus Lejeune Dirichlet, Philosophiae Doctor, Kupfer: Vratislaviae [Wrocław] [1827] – *Werke* I, p. 47–62: 1097

1828 *Mémoire sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 3 (1828), p. 354–375 – *Werke* I, p. 21–46: 1093

1838 *Über die Bestimmung asymptotischer Gesetze in der Zahlentheorie*: Bericht über die Verhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 1838, p. 13–15 – *Werke* I, p. 351–356: 60

1839 *Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält*: Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1837 (1839), Mathematische Abhandlungen, p. 45–81 – *Werke* I, p. 313–342: 1064

1842 *Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen*: Bericht über die Verhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 1842, p. 93–95 – *Werke* I, p. 633–638: 43

1846 *Zur Theorie der complexen Einheiten*: Bericht über die Verhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften 1846, p. 103–107 – *Werke* I, p. 639–644: 43

Döring, Detlef

2006 *Der aufgeklärte Jude als aufgeklärter Deutscher. Aron Salomon Gumpertz, ein jüdischer "Liebhaber der Weißheit", in Korrespondenz mit Johann Christoph Gottsched*: *Bausteine einer jüdischen Geschichte der Universität Leipzig* (Leipziger Beiträge zur Jüdischen Geschichte und Kultur, IV), Universitätsverlag: Leipzig, 2006, p. 451–482: 842

Du Châtelet, Gabrielle Emilie

1740 *Institutions de Physique*, Prault: Paris, 1740: 701

1742 *Institutions Physiques*, Nouvelle Edition, corrigée & augmentée, La Compagnie: Amsterdam, 1742: 78, 187, 191, 699, 701, 704, 706

Dutka, Jacques

1991 *The Early History of the Factorial Function*: Arch. Hist. Exact Sci. 43 (1991), p. 225–249: 841

1996 *On the summation of some divergent series of Euler and the zeta function*: Arch. Hist. Exact Sci. 50 (1996), p. 187–200: 667, 870

Du Tour, Étienne-François

1748 *Essai sur l'Aiman ...*: Prix Paris 1744/46 (1748), p. 49–114 [*Recueil* V]: 712, 909

Edwards, Harold Mortimer

1974 *Riemann's Zeta Function* (Pure and Applied Mathematics, 58), Academic Press: New York / London, 1974 [reprint: Dover: New York, 2001]: 52

1983 *Euler and Quadratic Reciprocity*: Mathematics Magazine 56 (1983), p. 285–291: 45, 726

Elkies, Noam D.

1988 *On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$*: Mathematics of Computation 51 (1988), p. 825–835: 1093

2009 *On the areas of rational triangles, or How did Euler (and how can we) solve $xyz(x + y + z) = a$?*, Lecture at CIRM, December 2009: http://math.harvard.edu/elkies/euler-09m.pdf: 44, 999

Ellenberg, Jordan S.

2004 *$\mathbb{Q}$-curves and Galois representations*: *Modular Curves and Abelian Varieties* (ed. J.E. Cremona et al.) (Progress in Mathematics; 224), Birkhäuser: Basel, 2004, p. 93–103: 943

Encke, Johann Franz

1841 *Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 22 (1841), p. 193–248: 644

Eneström, Gustaf Hjalmar

1902 *Über den Ursprung der Benennung "Pellsche Gleichung"*: Bibliotheca Mathematica III/3 (1902), p. 204–207: 617

1910 *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband IV (1910), Teubner: Leipzig, 1910/13: 87, 95, 712, 882, 1128

"engelbrekt" (MathOverflow username)

2010 *Integral expression for* $\zeta(2)$: MathOverflow # 14381 (Feb. 6th, 2010): 773

Engelsman, Steven Boudewijn

1984 *Families of Curves and the Origins of Partial Differentiation*, North-Holland: Amsterdam (etc.), 1984: 635

Enneper, Alfred

1876 *Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte*. Academische Vorträge, Nebert: Halle a/S., 1876: 1054

Erdős, Pál

1948 *On arithmetical properties of Lambert series*: J. Indian Math. Soc. (N. S.) 12 (1948), p. 63–66: 60

1950 *On integers of the form* $2^k + p$ *and some related problems*: Summa Brasiliensis Mathematicae 2 (1950), p. 113–123: 1077

Erman, Jean-Pierre

1799 *Éloge de Monsieur Schultz*: Mém. Berlin, 1794/95 (1799), Partie *Histoire*, p. 55–70: 1133

Etienne, Robertsee Gesner, Johann Matthias

Euler, Johann Albrecht

1755 A. 1, *Disquisitio de causa physica electricitatis* ab Academia Scientiarum Imperiali Petropolitana praemio coronata ..., una cum aliis duabus dissertationibus de eodem argumento, Sumtibus Academiae Scientiarum: Petropoli [Petersburg], [1755] – *Leonhardi Euleri Opera Omnia* III/10, p. 61–77: 1105

1762 A. 7, *Meditationes de Perturbatione motus Cometarum ab attractione Planetarum orta*. Dissertatio ab Academia Scientiarum Petropolitana praemio affecta d. XXIII Septembris 1762, Typis Academiae Scientiarum: Petropoli [Petersburg], 1762 – *Leonhardi Euleri Opera Omnia* II/25, p. 210–245: 565, 1124, 1125

1767 A. 19, *Beantwortung über die Preisfrage: In was für einer Verhältniß sowohl die mittlere Bewegung des Monds, als auch seine mittlere Entfernung von der Erde mit den Kräften stehen, welche auf den Mond wirken?*: Abhandlungen der Churfürstlich-baierischen Akademie der Wissenschaften 4 (1767), p. 231–270 – *Leonhardi Euleri Opera Omnia* II/24, p. 3–33: 1127, 1128

Euler, Leonhardsee the separate index of *Leonhard Euler's Works*

Faber, Georg

1935 *Übersicht über die Bände 14, 15, 16, 16* der ersten Serie*: *Leonhardi Euleri Opera Omnia* I/16.2 (*Commentationes analyticae ad theoriam serierum infinitarum pertinentes*), p. VII–CXII: 49, 52, 654, 772, 841, 915

Fagnano dei Toschi, Giulio Carlo

1716 *Teorema da cui si deduce una nuova misura degli Archi Elittici, Iperbolici, e Cicloidali*: Giornale de' Letterati d'Italia XXVI (1716), p. 266–279 – *Produzioni Matematiche*, Gavelli: Pesaro, 1750, t. II, p. 336–342: 1054

1750 *Produzioni Matematiche*, Gavelli: Pesaro, 1750: 1053, 1054

Fauquembergue, Élie

1898 [*Réponse à la question nº 74*]: L'Intermédiaire des mathématiciens 5 (1898), p. 33: 1093

1899 [*Réponse à la question nº 1372*]: L'Intermédiaire des mathématiciens 6 (1899), p. 95–96: 1104

Federico, Pasquale Joseph

1982 *Descartes on Polyhedra: A Study of the "De solidorum elementis"* (Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences, 4), Springer: New York (etc.), 1982: 1030

Felbick, Lutz

2012 *Lorenz Christoph Mizler de Kolof – Schüler Bachs und pythagoreischer "Apostel der Wolffischen Philosophie"* (Schriften der Hochschule für Musik und Theater "Felix Mendelssohn Bartholdy" Leipzig, 5), Olms: Hildesheim (etc.), 2012: 930

Fellmann, Emil Alfred

1995 *Leonhard Euler* (rororo monographien, 387), Rowohlt: Reinbek bei Hamburg, 1995 [English translation by E. and W. Gautschi: Birkhäuser: Basel (etc.), 2007]: 24, 72, 78, 686

2003 *Christoph Jetzler und Leonhard Euler*: N. T. M. 11 (2003), p. 145–154: 1135

Ferguson, Johan Jacob

1667 *Labyrinthus Algebrae*, verdeeld in vijf Deelen . . . , Tongerlo: 's Gravenhage, 1667: 212, 218, 729, 731, 737

Fermat, Pierre de

1670 *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum commentariis C.G. Bacheti et observationibus Domini Petri de Fermat Senatoris Tolosani* (ed. S. de Fermat), Bosc: Tolosae [Toulouse], 1670: 39, 411, 418, 534, 611, 625, 807, 955, 962, 963, 1088, 1091

1679 *Varia Opera Mathematica* (ed. S. de Fermat), Pech: Tolosae [Toulouse], 1679: 37, 39, 113, 592, 603, 611, 624, 694

1891 *Œuvres de Fermat* (ed. P. Tannery, Ch. Henry), t. I–IV, Gauthier-Villars: Paris, 1891–1912: 37, 40, 44, 54, 58, 592, 610, 611, 694, 811, 1023, 1072, 1085

Ferraro, Giovanni

1998 *Some Aspects of Euler's Theory of Series: Inexplicable Functions and the Euler-Maclaurin Summation Formula*: Historia Mathematica 25 (1998), p. 290–317: 52, 791

2000 *Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler*: Historia Mathematica 27 (2000), p. 107–132: 863

2008 *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s* (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences), Springer: New York, 2008: 52, 58, 870

Fibonaccisee Leonardo da Pisa

Fleckenstein, Joachim Otto

1957 *Vorwort des Herausgebers*: *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, vol. II/5, p. VII–LI: 1064

Foncenexsee Daviet de Foncenex

Fourier, Joseph

1822 *Théorie analytique de la chaleur*, Didot: Paris, 1822: 600

Fowler, David Herbert

1987 *The mathematics of Plato's Academy: a new reconstruction*, Clarendon Press: Oxford, 1987: 644

1992 *Newton, Cotes, and* $\sqrt{\sqrt{2}}$: *An Investigation of Difficult Things: Essays on Newton and the History of Exact Sciences* (ed. P.M. Harman, A.E. Shapiro), Cambridge University Press: Cambridge, 1992, p. 355–368: 56, 644

Franklin, Fabian

1881 *Sur le développement du produit infini* $(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\,(1-x^4)\ldots$: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 92 (1881), p. 448–450: 1018

Frederick (Friedrich) II

1846 *Œuvres de Frédéric le Grand* (ed. J.D.E. Preuß), t. I–XXX, Decker: Berlin, 1846–1856: 680, 1092

Frei, Günther

1979 *On the development of the genus of quadratic forms*: Annales des sciences mathématiques du Québec III (1979), p. 5–62: 1080

Frénicle de Bessy, Bernard

1676 *Traité des triangles rectangles en nombres: dans lequel plusieurs belles propriétés de ces triangles sont démontrées par de nouveaux principes*, Michallet: Paris, 1676: 37, 39, 1093

Friedlander, John Benjamin; Iwaniec, Henryk

1998 *The polynomial* X^2+Y^4 *captures its primes*: Annals of Math. 148 (1998), p. 945–1040: 1071

Frobenius, Ferdinand Georg

1912 *Über quadratische Formen, die viele Primzahlen darstellen.* Unter Benutzung einer Mitteilung des Herrn Dr. R. Remak: Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Classe 1912, II, p. 966–980 – *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, Springer: Berlin / New York 1968, p. 573–587: 46, 822

Fuss, Nicolaus

1786 *Lobrede auf Herrn Leonhard Euler*, in der Versammlung der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg den 23. Octob. 1783 vorgelesen, Schweighauser: Basel, 1786 – Euler, *Opera Omnia* I/1, p. XLIII–XCV: 22, 78, 671, 1104

Fuss, Paul Heinrich (ed.)

1843 *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII*ème *siècle, précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler, tant imprimés qu'inédits*, T. I–II, [Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences]: Saint-Pétersbourg, 1843 [this is quoted in the present volume as Fuß, *Correspondance*]: 3, 15, 19, 20, 23, 55, 58, 63, 85, 86, 585, 586, 588, 591, 592, 612, 614, 618, 622, 626, 628, 632, 636, 644, 655, 666, 687, 741, 744, 784, 785, 795, 822, 873, 882, 1070, 1080, 1081

Fuss, Paul Heinrich; Fuss, Nicolaus II (eds.)

1849 *Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae collectae*, T. I–II, Academia Imperialis Scientiarum: Petropoli [Petersburg], 1849: 85

1862 *Leonhardi Euleri Opera postuma mathematica et physica*, T. I–II, Eggers [etc.]: Petropoli [Petersburg], 1862: 85

Gauss, Carl Friedrich

1799 *Demonstratio nova Theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, quam pro obtinendis summis in Philosophia honoribus inclito Philosophorum Ordini Academiae Iuliae Carolinae exhibuit Carolus Fridericus Gauss, Fleckeisen: Helmstadii [Helmstedt], 1799 – *Werke* III (ed. Königliche Gesellschaft zu Göttingen), 1866, p. 1–30 [reprint: Olms: Hildesheim, 1973]: 746

1801 *Disquisitiones Arithmeticae*, Fleischer: Lipsiae [Leipzig], 1801 [German translation: see Gauss 1889]: 38, 43, 601, 726, 855, 1018, 1053, 1097

1811 *Summatio quarumdam serierum singularium*: Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores I, 1808–1811 (1811), Classis Mathematica, p. 1–40 – *Werke* II (ed. Königliche Gesellschaft zu Göttingen), 1863, p. 9–46 [reprint: Olms: Hildesheim, 1973]: 51

1813 *Disquisitiones generales circa seriem infinitam ..., Pars Prima*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores II, 1811–1813 (1813), Classis Mathematica, p. 1–46 (1813) – *Werke* III (ed. Königliche Gesellschaft zu Göttingen), 1866, p. 123–162 [reprint: Olms: Hildesheim, 1973]: 586

1815 [Announcement of *Demonstratio nova altera ...*]: Göttingische gelehrte Anzeigen 1815, 204. Stück (23. December), p. 2017–2019[!] – *Werke* III (ed. Königliche Gesellschaft zu Göttingen), 1866, p. 105–107 [reprint: Olms: Hildesheim, 1973]: 746

1816 *Demonstratio nova altera Theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Societati Regiae tradita 1815, Dec. 7*: Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores III, 1814–1815 (1816), Classis Mathematica, p. 107–134 – *Werke* III (ed. Königliche Gesellschaft zu Göttingen), 1866, p. 31–56 [reprint: Olms: Hildesheim, 1973]: 746

1863 *Neue Theorie der Zerlegung der Cuben* [*Nachlass: Zur Theorie der complexen Zahlen, I*]: *Werke* II (ed. Königliche Gesellschaft zu Göttingen), 1863, p. 387–391: 1093

1889 *Untersuchungen über höhere Arithmetik* (trad. H. Maser), Springer: Berlin, 1889 [and several reprints]: 713, 726

1900 *Werke* VIII (ed. Königliche Gesellschaft zu Göttingen): *Arithmetik und Algebra: Nachträge zu Band 1–3*, Dieterich: Göttingen, 1900 [reprint: Olms: Hildesheim, 1981]: 52

2005 *Mathematisches Tagebuch 1796–1814* (Ostwalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften; 256), 5., vollständig überarbeitete Auflage (ed. H. Wußing, O. Neumann, K.-R. Biermann), Deutsch: Frankfurt/Main, 2005: 38, 66

Gautschi, Walter

2008 *On Euler's attempt to compute logarithms by interpolation*: J. Computational and Applied Math. 219 (2008), p. 408–415: 59

Geissler, Rolf

1996 *Antoine Achard (1696–1772), ein Prediger und Philosoph in Berlin*: *Schweizer im Berlin des 18. Jahrhunderts* (ed. M. Fontius, H. Holzhey), Akademie-Verlag: Berlin, 1996, p. 125–136: 691

Genocchi, Angelo

1853 *Démonstration d'un théorème d'Euler*: Nouvelles annales de mathématiques I/12 (1853), p. 235–236: 701

Gerhardt, Carl Immanuel

1899 *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, Mayer & Müller: Berlin 1899 [reprint: Olms: Hildesheim, 1962]: 746

Gesner, Johann Matthias

1743 *Carminum Libri III* (ed. J.L. Uhl), Korn: Vratislaviae [Wrocław], 1743: 910

1749 *Novus linguae et eruditionis Romanae thesaurus, post Ro*[*berti*] *Stephani et aliorum nuper etiam in Anglia eruditissimorum hominum curas digestus, locupletatus, emendatus ...*, Fritsch / Breitkopf: Lipsiae [Leipzig], 1749: 212, 218, 730, 732, 737

Gilain, Christian

1991 *Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral*: Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), p. 91–136: 56, 746

Gill, Charles

1836 *The Mathematical Miscellany*, vol. I, The Institute at Flushing, Long Island: New-York, 1836: 1085

Girard, Albert

1629 *Invention nouvelle en l'Algebre, Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science*, Blaeuw: Amsterdam, 1629: 56, 726, 746

Goldbach, Christian

1717a *Temperamentum Musicum universale*: AE Martii 1717, p. 114–115: 13

1717b *In obitum G.G. Leibnitii*: Neue Zeitungen von Gelehrten Sachen 1717, Nr. IX (30. Januar), p. 70 – Nouvelles Litteraires (La Haye), t. VI, Premiere Partie (Juillet–Septembre 1717), p. 111–112: 5

1717c *Excerpta ex litteris C. G. ad *** Regiomonte datis*: AE Suppl. VI (1717), p. 471–472: 13, 15, 123, 620, 621

1720 *Specimen methodi ad summas serierum*: AE Januarii 1720, p. 27–31: 13, 55, 588, 787

1724 *Demonstratio theorematis Fermatiani, nullum numerum triangularem praeter* 1 *esse quadratoquadratum*: AE Suppl. VIII (1724), p. 483–484: 13, 42, 46, 592, 607, 611, 612

1728a *De casibus quibus integrari potest aequatio differentialis* $ax^m dx + byx^p dx + cy^2 dx = dy$ *observationes quaedam*: CP I, 1726 (1728), p. 185–197: 13, 16, 63

1728b *Methodus integrandi aequationem differentialem* $ay\,dx + bx^n\,dx + cx^{nx-1}\,dx + ex^{n-2}\,dx +$ *etc.* $= dy$, *ubi n sit numerus integer positivus*: CP I, 1726 (1728), p. 207–209: 13, 16

1729a *De transformatione serierum*: CP II, 1727 (1729), p. 30–34: 13

1729b *De divisione curvarum in partes quotcunque quarum subtensae sint in data progressione*: CP II, 1727 (1729), p. 174–179: 13

1732 *De terminis generalibus serierum*: CP III, 1728 (1732), p. 164–173: 13, 19, 58, 585, 873, 1081

1738 *Criteria quaedam aequationum quarum nulla radix rationalis est*: CP VI, 1732/33 (1738), p. 98–102: 13, 21

Goldenbaum, Ursula

2004 *Das Publikum als Garant der Freiheit der Gelehrtenrepublik.* Die öffentliche Debatte über den *Jugement de L'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres sur une Lettre prétendue de M. de Leibnitz* 1752–1753: U. Goldenbaum (et al.), *Appell an das Publikum. Die öffentliche Debatte in der deutschen Aufklärung, 1687–1796*, Akademie-Verlag: Berlin, 2004, Teil 2, p. 509–651: 1064

Goldstein, Catherine

1995 *Un théorème de Fermat et ses lecteurs* (Histoires de science), Presses Universitaires de Vincennes: Saint-Denis, 1995: 38

Golubev, Vasiliĭ Antonovich

1956 *Généralisations du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers*: Mathesis 65 (1956), p. 186–190: 1071

Gould, Rupert Thomas

1928 *Oddities: A Book of Unexplained Facts*, Allan: London, 1928: 938

Gowing, Ronald

1983 *Roger Cotes – Natural Philosopher*, Cambridge University Press: Cambridge, 1983: 56, 644, 687

Gräffe, Carl Heinrich

1837 *Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen*, als Beantwortung einer von der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aufgestellten Preisfrage, Schulthess: Zürich, 1837: 644

Graham, Ronald Louis; Pollak, Henry Otto

1970 *Note on a nonlinear recurrence related to* $\sqrt{2}$: Math. Magazine 43 (1970), p. 143–145: 882

Grandi, Guido

1739 *Instituzioni meccaniche*, Tartini / Franchi: Firenze, 1739: 193, 707, 712

1740 *Instituzioni di aritmetica pratica*, Tartini / Franchi: Firenze, 1740: 193, 707, 712

1741 *Instituzioni geometriche*, Tartini / Franchi: Firenze, 1741: 193, 707, 712

Granville, Andrew J.; Soundararajan, Kannan

1998 *A binary additive problem of Erdős and the order of* 2 *mod* p^2: Ramanujan Journal 2 (1998), p. 283–298: 1077

Grégoire de Saint-Vincent

1647 *Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni Decem libris comprehensum*, Meurs: Antverpiae, 1647: 55, 118, 591, 605, 613, 614

Gregory, James

1667 *Vera Circuli & Hyperbolae Quadratura ...*, de' Cadorini: Patavii [Padua], 1667: 629

Guicciardini, Niccolò

2013 *Calandrini, Le Seur and Jacquier: editing Newton's Principia in Geneva and Rome*: 24th International Congress of History of Science, Technology and Medicine, Manchester, 2013 (to be published): 812

Guy, Richard Kenneth

2004 *Unsolved problems in number theory* (Problem books in mathematics), 3rd ed., Springer: New York (etc.), 2004: 706, 1071, 1077, 1093

Halley, Edmond

1694 *Methodus Nova Accurata & facilis inveniendi Radices Aequationum quarumcunque generaliter, sine praevia Reductione*: Phil. Trans. vol. XVIII (1694), no. 210, p. 136–148: 644

1749 *Tabulae Astronomicae*. Accedunt De Usu Tabularum Praecepta, Innys: Londini, 1749: 925

Hardy, Godfrey Harold

1909 *A note on the continuity or discontinuity of a function defined by an infinite product*: Proceedings of the London Mathematical Society II.7 (1909), p. 40–48 – *Collected Papers*, vol. VI, Clarendon Press: Oxford, 1974, p. 263–271: 1064

1949 *Divergent Series*, Clarendon Press: Oxford, 1949: 870

Hardy, Godfrey Harold; Littlewood, John Edensor

1923 *Some problems of 'Partitio Numerorum', III: On the expression of a number as a sum of primes*: Acta Mathematica 44 (1923), p. 1–70: 47, 1070, 1074

Hardy, Godfrey Harold; Wright, Edward Maitland

2008 *An introduction to the theory of numbers*, 6th ed. (revised by D.R. Heath-Brown and J.H. Silverman), Oxford University Press: Oxford, 2008: 1018

Harnack, Adolf

1900 *Geschichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Bd. 1–3, Reichsdruckerei: Berlin, 1900: 24, 812, 829, 889, 1133

Hasse, Helmut

1923 *Über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 152 (1923), p. 129–148: 702

1930 *Ein Summierungsverfahren für die Riemannsche* ζ*-Reihe*: Mathematische Zeitschrift 32 (1930), p. 458–464 – Mathematische Abhandlungen (ed. H.W. Leopoldt, P. Roquette), de Gruyter: Berlin / New York, 1975, Bd. III, p. 447–453: 58

Havil, Julian

2012 *The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count On*, Princeton University Press: Princeton (NJ), 2012: 16, 62

Heath, Sir Thomas Little

1885 *Diophantos of Alexandria: A study in the history of Greek algebra*, Cambridge University Press: Cambridge, 1885 [reprint: Dover: New York, 1964]: 44, 857, 1085

Hecke, Erich

1923 *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Akademische Verlags-Gesellschaft: Leipzig 1923 [and several other editions and reprints]: 64

Hermann, Jacob

1717 *Schediasma de Trajectoriis datae Seriei Curvis ad angulos rectos occurrentibus ...*: AE Augusti 1717, p. 348–352: 1095

1728a *Geminus Modus directus dividendi Semicirculum in data ratione: quibus Keplerianum Problema de inveniendis Planetarum Locis ad datum quodvis tempus, solutum exhibetur*: CP I, 1726 (1728), p. 142–148: 622

1728b *De Calculo Integrali*: CP I, 1726 (1728), p. 149–167: 626

Hermite, Charles

1853 *Sur la théorie des formes quadratiques. Second Mémoire*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 47 (1853), p. 343–368 – *Œuvres de Charles Hermite* (ed. E. Picard), t. I, Gauthier-Villars: Paris, 1905, p. 234–263: 936

Herrmann, Ernst Adolf

1872 *Russland unter Peter dem Großen nach den handschriftlichen Berichten Johann Gotthilf Vockerodt's und Otto Pleyer's*, Duncker & Humblot: Leipzig, 1872: 673

Hevelius, Johannes

1668 *Cometographia, totam naturam cometarum ... nec non motum eorum ... exhibens: in qua universa insuper phaenomena quaestionesque de Cometis omnes rationibus evidentibus ... demonstrantur*, Reiniger: Gedani [Gdańsk], 1668: 305, 838, 841

Hodges, Laurent

1993 *A lesser-known Goldbach conjecture*: Mathematics Magazine 66 (1993), p. 45–47: 1074, 1081

Hofmann, Joseph Ehrenfried

1942 *Das Opus Geometricum des Gregorius a S. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz*: Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Math.-naturw. Klasse, 1941, Nr. 13 (1942): 605

1959 *Um Eulers frühe Reihenstudien*: *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlungen* (ed. K. Schröder), Akademie-Verlag: Berlin, 1959, p. 139–204: 52, 58, 772

Houzel, Christian

1978 *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*: *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900* (ed. J. Dieudonné), Hermann: Paris, 1978, vol. II, p. 1–113 – [reprinted in:] Ch. Houzel, *La géométrie algébrique: Recherches historiques* (Collection Sciences dans l'Histoire), Blanchard: Paris, 2003, p. 81–190: 1054

2004 *The Work of Niels Henrik Abel*: *The Legacy of Niels Henrik Abel. The Abel Bicentennial, Oslo, 2002* (ed. O.A. Laudal, R. Piene), Springer: Berlin (etc.), 2004, p. 21–177: 64

Howald-Haller, Mario

1996 *Introduction to Daniel Bernoulli's Astronomical Problem of the Three Altitudes*: *Die Werke von Daniel Bernoulli*, vol. 1, Birkhäuser: Basel, 1996, p. 381–441: 18

Hurwitz, Adolf

1898 *Über die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln*: Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1898, p. 309–316: 962

1919 *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Springer: Berlin, 1919: 962

Huygens, Christiaan

1888 *Œuvres complètes* publiées par la Société Hollandaise des Sciences, 22 vols., Nijhoff: La Haye [The Hague], 1888–1950: 44, 605

IWANIEC, HENRYK (see also FRIEDLANDER)

1978 *Almost-Primes Represented by Quadratic Polynomials*: Inventiones Mathematicae 47 (1978), p. 171–188: 1071

JACOBI, CARL GUSTAV JACOB

1829 *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Borntraeger: Regiomonti [Königsberg], 1829 – *Gesammelte Werke* (ed. C.W. Borchardt), Bd. I, Reimer: Berlin, 1881, p. 49–239: 41, 1018

1835a *Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 13 (1835), p. 340–352 – *Gesammelte Werke* (ed. K. Weierstrass), Bd. III, Reimer: Berlin, 1884, p. 271–284: 644

1835b *De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 13 (1835), p. 353–355 – *Gesammelte Werke* (ed. K. Weierstrass), Bd. II, Reimer: Berlin, 1882, p. 51–55: 618

1839 *Über die complexen Primzahlen, welche in der Theorie der Reste der* 5^{ten}*,* 8^{ten} *und* 12^{ten} *Potenzen zu betrachten sind*: Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1839, p. 86–91 – *Gesammelte Werke* (ed. K. Weierstrass), Bd. VI, Reimer: Berlin, 1891, p. 275–280: 1127

1881 *Correspondance mathématique avec Legendre*: *Gesammelte Werke* (ed. C.W. Borchardt), Bd. I, Reimer: Berlin, 1881, p. 385–461: 963

JACQUIER, FRANÇOISsee NEWTON 1739

JARDINE, RICHARD (DICK)

2010 *The Origins of Integrating Factors*: *Mathematical Time Capsules* (ed. D. Jardine, A. Shell-Gellasch), Mathematical Association of America: Washington (DC), 2010, p. 209–214: 635

JEWITT, DAVID

2006 *Comet D/1819 W1 (Blanpain): Not Dead Yet*: Astronomical Journal 131 (2006), p. 2327–2331: 977

JONES, WILLIAM

1706 *Synopsis Palmariorum Matheseos: or, A new Introduction to the Mathematics: Containing the Principles of Arithmetic & Geometry Demonstrated, in a Short and Easie Method* ..., Matthews: London, 1706: 35, 587, 785, 903

JORDAN, CLAUDE (ed.)

1704 *La Clef du Cabinet des Princes d'Europe ou recuëil historique & politique sur les matieres du tems*, [Chevalier]: [Luxembourg], 1704–1773: 546, 548–550, 552, 554, 558, 1106, 1107, 1109, 1110, 1112, 1114, 1117

JUSTI, JOHANN HEINRICH GOTTLOB

1748 *Untersuchung der Lehre von den Monaden und einfachen Dingen, worinnen der Ungrund derselben gezeiget wird.* Dissertation qui a remporté le prix proposé par l'Academie Royale des Sciences et Belles Lettres sur le Systeme des Monades, avec les Pieces qui ont concouru, Haude & Spener: Berlin, 1748: 71, 396, 939, 941, 942

KALTSCHMIED, CARL FRIEDRICH

1747 *Dissertationem de distinctione inter foetum animatum et non animatum ex medicina forensi eliminanda ... contra Eruditorum dubia defendet*, Schill: Ienae, 1747: 399, 943

KAMKE, ERICH

1956 *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, 3. Auflage (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, 7), Geest & Portig: Leipzig, 1956: 63

Kepler, Johannes

1609 *Astronomia nova αἰτιολόγητος seu physica coelestis, tradita Commentariis de motibus stellae Martis*, [Vögelin]: [Heidelberg], 1609: 67, 622

Khovanskiĭ, Alekseĭ Nikolaevich

1963 *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*, translated by Peter Wynn (Library of applied analysis and computational mathematics), Noordhoff: Groningen, 1963: 639

Khrushchev, Sergey V.

2006 *On Euler's differential methods for continued fractions*: Electronic Transactions on Numerical Analysis 25 (2006), p. 178–200: 62, 639

Kiselëv, Andreĭ Alekseevich; Matvievskaya, Galina Pavlovna

1965 *Неопубликованные записи Эйлера по partitio numerorum* [*Euler's unpublished notes on 'partitio numerorum'*]: Istoriko-Matematicheskie issledovaniya XVI (1965), p. 145–180: 823

Knopp, Konrad

1923 *Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen*: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 32 (1923), p. 43–67: 870

Knutzen, Martin

1738 *Specimen novae seu emendatioris theoriae magneticae . . .* [unpublished manuscript]: PFARAN, f. 1, op. 3, n. 1, fol. 93–97: 815

1744 *Vernünftige Gedanken von den Cometen, darinnen deren Natur und Beschaffenheit nebst der Art und Ursachen ihrer Bewegung untersucht und vorgestellet, auch zugleich eine kurze Beschreibung von dem merkwürdigen Cometen deß jetztlauffenden Jahres mitgetheilt wird*, Hartung: Königsberg, 1744: 299, 304, 832, 833, 837, 841

1747 *Elementa Philosophiae rationalis seu Logicae cum generalis tum specialioris, mathematica methodo in usum auditorum suorum demonstrata*, Hartung: Regiomonti [Königsberg] et Lipsiae [Leipzig], 1747 [reprint: Olms: Hildesheim, 1991]: 388, 393, 930, 935

Koelink, Erik; Van Assche, Walter

2009 *Leonhard Euler and a q-analogue of the logarithm*: Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), p. 1663–1676: 60

Kolb, Peter

1719 *Caput Bonae Spei Hodiernum, das ist: Vollständige Beschreibung Des Africanischen Vorgebürges der Guten Hofnung . . .*, Monath: Nürnberg, 1719: 179, 689, 691

Kollerstrom, Nicholas

1992 *Thomas Simpson and 'Newton's method of approximation': an enduring myth*: British J. Hist. Science 25 (1992), p. 347–354: 644

Konen, Heinrich Mathias

1901 *Geschichte der Gleichung* $t^2 - Du^2 = 1$, Hirzel: Leipzig, 1901: 617

König, Johann Samuel

1751 *De universali principio aequilibrii & motus, in Vi viva reperto, deque nexu inter Vim vivam & Actionem, utriusque Minimo, Dissertatio*: NAE Martii 1751, p. 125–135; 144; 162–176 [reprinted in O. II/5, p. 303–324]: 71

1752 *Appel au public, du jugement de l'Académie Royale de Berlin, sur un fragment de Lettre de Mr. de Leibnitz, cité par Mr. Koenig*, Luzac: Leide, 1752: 72, 694

Kontsevich, Maxim; Zagier, Don

2001 *Periods*: *Mathematics Unlimited – 2001 and Beyond* (ed. B. Engquist, W. Schmid), Springer: Berlin (etc.), 2001, p. 771–808: 587

Kopelevich, Yudif' Khaimovna

1957 *Материалы к биографии Леонарда Эйлера* [*Documents for the biography of Leonhard Euler*]: Istoriko-Matematicheskie issledovaniya X (1957), p. 9–66: 1108

1983 *Euler und die Petersburger Akademie der Wissenschaften*: *Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk*, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt (ed. J.J. Burckhardt et al.), Birkhäuser: Basel, 1983, p. 373–383: 21

Körber, Christian Albrecht

1741 *Responsio ad Viri Doctissimi Io. Andr. Segneri ... Crisin Perpetuam in duo capita Geometriae Illustris Wolffii*, Renger: Halae Magdeburgicae, 1741: 686

Kortholt, Sebastian (ed.)

1734 *Viri Illustris Godefridi Guil. Leibnitii Epistolae Ad Diversos ...*, vol. I–IV, Breitkopf: Lipsiae [Leipzig], 1734–1742: 4

Koser, Reinhold (ed.)

1898 *Briefwechsel Friedrichs des Großen mit Grumbkow und Maupertuis (1731–1759)* (hrsg. von R. Koser) (Publicationen aus den K. Preußischen Staatsarchiven, Bd. 72), Hirzel: Leipzig, 1898: 871

Kotel'nikov, Semën Kirillovich

1766 *Demonstratio seriei* $\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdot 18\cdot 22\cdots(4n-10)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdots(n-1)}$ *exhibitae in Recensione VI. Tomi VII. Commentariorum ...*: NCP X, 1764 (1766), p. 199–204: 69, 1040

Krafft, Georg Wolfgang

1750 *Demonstrationes duorum theorematum geometricorum*: NCP I (1747/48), 1750, p. 131–136: 68, 956

Kramp, Christian

1808 *Élémens d'arithmétique universelle*, Thiriart: Cologne, 1808: 35, 586

Krasotkina, Tat'yana Arkad'evna

1957 *Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга* [*The correspondence between Leonhard Euler and James Stirling*]: Istoriko-Matematicheskie issledovaniya X (1957), p. 117–158: 654

Krausz, Tamás

1999 *A note on equal values of polygonal numbers*: Publicationes Mathematicae Debrecen 54 (1999), p. 321–325: 1085

Kronecker, Leopold

1876 *Bemerkungen zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes*: Monatsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1875 (1876), p. 267–274 – *Leopold Kronecker's Werke* (ed. K. Hensel), Bd. II, Teubner: Leipzig, 1897, p. 1–10: 726

Kronk, Gary W.

1999 *Cometography.* A Catalog of Comets, vol. 1: Ancient–1799, Cambridge University Press: Cambridge, 1999: 697, 773, 827, 977

Krüger, Johann Gottlob

1746 *Gedancken von der Algebra, nebst den Primzahlen von 1 biß 1000000*, Lüderwald: Halle im Magdeburgischen, 1746: 1071

Ku, Yu Hsiu

1972 *Solution of the Riccati equation by continued fractions*: Journal of the Franklin Institute 293 (1972), p. 59–65: 639

Kühn, Heinrich

1735 *Meditationes de natura quantitatum privativarum et imaginariarum recte explicanda* [unpublished manuscript]: PFARAN, razr. 1, op. 6, n. 38/4, fol. 1–14: 848

1741 *Meditations sur l'Origine des Fontaines, l'Eau des Puits, et autres Problêmes qui ont du rapport à ce Sujet*. Ouvrage qui a remporté le Prix, au Jugement de l'Academie Royale des belles Lettres, Sciences & Arts, Brun: Bordeaux, 1741: 276, 279, 805, 810, 811

1743a [review of:] *Meditations sur l'Origine des Fontaines, &c. hoc est, Meditationes de Origine Fontium ...*: NAE Junii 1743, p. 314–322: 276, 805

1743b [notice on:] *Meditations sur l'Origine des Fontaines ...*: Neue Zeitungen von Gelehrten Sachen 1743, p. 472: 276, 805

1753 *Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis*: NCP III (1750/51), 1753, p. 170–223: 848

Kulmus, Johann Adam

1726 *Neues Inventum Steganographicum oder geheime Schreibart*: *Sammlung von Natur- und Medicin- wie auch hierzu gehörigen Kunst- und Literatur-Geschichten so sich von 1717–26 in Schlesien und anderen Orten begeben*, 1724 (1726), p. 552–555; 652–656: 11, 276, 280, 805, 807, 810

Kummer, Ernst Eduard

1848 *Über die Vierecke, deren Seiten und Diagonalen rational sind*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 37 (1848), p. 1–20 – Collected Papers (ed. A. Weil), vol. I, Springer: Berlin (etc.), 1975, p. 253–273: 618

Kuz'min, Rodion Osievich

1938 *О трансцендентных числах Гольдбаха* [*On Goldbach's transcendental numbers*]: Trudy Leningradskogo Industrial'nogo Instituta 5 (1938), p. 28–32: 785

Labrousse, A.

1933 *Théorème de Fagnano et applications*: Revue de mathématiques spéciales 44 (1933), p. 1–6, 33–37, 57–60: 1054

La Croze, Mathurin Veyssière de

1742 *Thesaurus epistolicus Lacrozianus* (ed. J.L. Uhl), t. I–III, Gleditsch: Lipsiae [Leipzig] 1742/46: 327, 333, 336, 352–354, 374, 376, 865, 870, 874, 891–893, 915, 918

Lagarias, Jeffrey Clark

2013 *Euler's constant: Euler's work and modern developments*: Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 50 (2013), p. 527–628: 791

Lagny, Thomas Fantet de

1707 *Sur une Proposition de Geometrie elementaire*: Mém. Paris 1706 (1707), p. 319–333: 68, 956

1721 *Memoire Sur la Quadrature du Cercle, & sur la mesure de tout Arc, tout Secteur, & tout Segment donné*: Mém. Paris 1719 (1721), p. 135–145: 55, 118, 591, 613, 614, 742, 785

Lagrange, Joseph-Louis (de)

1769a *Solution d'un problème d'arithmétique*: Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin pour les années 1766–1769 (= Miscellanea Taurinensia, T. IV), 1769, p. 41–97 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. I, Gauthier-Villars: Paris, 1867, p. 671–731: 1053

1769b *Sur la solution des problemes indéterminés du second degré*: Mem. Acad. Sci. Berlin 23, 1767 (1769), p. 165–310 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. II, Gauthier-Villars: Paris, 1868, p. 377–535: 1053

1772 *Démonstration d'un théoreme d'Arithmétique*: Nouv. Mém. Berlin 1770 (1772), p. 123–133 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. III, Gauthier-Villars: Paris, 1869, p. 189–201: 604

1774 *Sur la forme des racines imaginaires des équations*: Nouv. Mém. Berlin 1772 (1774), p. 222–258 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. III, Gauthier-Villars: Paris, 1869, p. 477–516: 746

1775 *Recherches d'Arithmétique*: Nouv. Mém. Berlin 1773 (1775), p. 265–312; 1775 (1777), p. 323–356 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. III, Gauthier-Villars: Paris, 1869, p. 695–758; 759–795: 46, 1053, 1097

1776 *Sur les intégrales particulieres des équations différentielles*: Nouv. Mém. Berlin 1774 (1776), p. 198–275 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. IV, Gauthier-Villars: Paris, 1869, p. 5–108: 1026

1779a *Sur quelques problemes de l'analyse de Diophante*: Nouv. Mém. Berlin 1776 (1779), p. 140–154 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. IV, Gauthier-Villars: Paris, 1869, p. 377–398: 612

1779b *Sur l'usage des fractions continues dans le Calcul intégral*: Nouv. Mém. Berlin 1776 (1779), p. 236–258 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. IV, Gauthier-Villars: Paris, 1869, p. 301–332: 636

1808 *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Nouvelle édition, Courcier: Paris, 1808 – *Œuvres* (ed. J.-A. Serret), t. VIII, Gauthier-Villars: Paris, 1879, p. 11–367: 644

Lakatos, Imre

1963 *Proofs and Refutations*: British Journal for the History of Science 14 (1963/4), p. 1–25; 120–139; 221–245, 296–342: 68

1976 *Proofs and Refutations: the Logic of Mathematical Discovery* (ed. J. Worrall, E. Zahar), Cambridge University Press: Cambridge, 1976: 68

Lambert, Anne-Thérèse de Marguenat de Courcelles

1727 *Avis d'une Mere à son Fils et à sa Fille*, Ganeau: Paris, 1727: 406, 950, 951

1729 *Gedancken von der Aufferziehung und einem tugendhafften Leben: in zweyen Schreiben an ihren Sohn und ihre Tochter entworffen* (trad. G.Ch. Wolff), Breitkopf: Leipzig, 1729: 406, 950, 951

Lambert, Johann Heinrich

1758 *Observationes variae in mathesin puram*: Acta Helvetica physico-mathematico-anatomico-botanico-medica III (1758), p. 128–168 – *Opera mathematica* (ed. A. Speiser), vol. I, Orell Füssli: Turici [Zurich], 1946, p. 16–51: 1138

1768 *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités circulaires et logarithmiques*: Mém. Berlin 1761 (1768), p. 265–322 – *Opera mathematica* (ed. A. Speiser), vol. II, Orell Füssli: Turici [Zurich], 1948, p. 112–159: 55, 62, 591

1771 *Anlage zur Architectonic, oder Theorie des Einfachen und des Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntniß*, 2 vols, Hartknoch: Riga, 1771 [reprinted as *Philosophische Schriften*, vol. 3–4: Olms: Hildesheim, 1965]: 60, 65

Lamé, Gabriel

1838 *Extrait d'une lettre de M. Lamé à M. Liouville sur cette question: Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales?*: Journal de mathématiques pures et appliquées I/3 (1838), p. 505–507: 1040

Landau, Edmund

1903 *Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke*: Archiv für Mathematik und Physik III/4 (1903), p. 1–6: 619

1905 *Über einen Satz von Tschebyschef*: Mathematische Annalen 61 (1905), p. 527–550 – *Collected Works*, vol. 2, Thales: Essen, 1986, p. 206–229: 1064

1906 *Euler und die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion*: Bibliotheca Mathematica III/7 (1906), p. 69–79: 49

1909 *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. I–II, Teubner: Leipzig / Berlin, 1909 [reprint: Chelsea: Bronx (NY), 1974]: 1064

LANDER, LEON J.; PARKIN, THOMAS R.

1966 *Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers*: Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), p. 1079: 1093

LANGE, ERNST

1713 *Die CL Psalmen, Auf die Bey den Evangelischen Gemeinen uebliche Melodeyen Nach der heutigen Poesie in Deutsche Reime gebracht ...*, von Beughem: Dantzig, 1713 [and several later editions]: 241, 762, 765

LAPLACE, PIERRE SIMON DE

1812 *Leçons de mathématiques données à l'École Normale, en 1795*: Journal de l'École Polytechnique, t. II (1812), p. 1–278 – *Œuvres complètes*, t. XIV, Gauthier-Villars: Paris, 1912, p. 10–177: 746

LAUDAL, OLAV ARNFINN; PIENE, RAGNI

2004 *The Legacy of Niels Henrik Abel. The Abel Bicentennial, Oslo, 2002* (ed. O.A. Laudal, R. Piene), Springer: Berlin (etc.), 2004, p. 21–177: 1054

LAUSCH, HANS

1991 *A.S. Gumpertz und die Académie Royale des sciences et belles-lettres in Berlin. Zum Auftakt zur Euler-Dollondschen Achromasie-Kontroverse*: Bulletin des Leo Baeck-Instituts 88 (1991), p. 11–26: 842

1992 *Abraham Wolff "Rechenmeister". Ein bedeutender Jude der Aufklärungszeit*: Aschkenas. Zeitschrift für Geschichte und Kultur der Juden 2 (1992), p. 227–237: 1093

LEADBETTER, CHARLES

1727 *Astronomy: Or, the True System of the Planets Demonstrated*, Wilcox / Heath: London, 1727: 925

1728 *A Compleat System of Astronomy*, In Two Volumes, Wilcox: London, 1728: 925

1729 *Astronomy of the Satellites of the Earth, Jupiter and Saturn*: Grounded upon Sir Isaac Newton's Theory of the Earth's Satellite, Wilcox: London, 1729: 925

1731 *A Treatise of Eclipses of the Sun and Moon*, For Thirty-Five Years, commencing *Anno* 1715, ending 1749, Second Edition, Wilcox: London, 1731: 925

1735 *Uranoscopia; or, The contemplation of the heavens*. Being a demonstration of the equation of time, Wilcox: London, 1735: 925

LEBESGUE, VICTOR-AMÉDÉE

1854 *Arithmologie. Théorème sur une équation du second degré*: Nouvelles annales de mathématiques I/13 (1854), p. 412–413: 701

LEEUWENHOEK, ANTONI PHILIPS VAN

1719 *Epistolae ad Societatem Regiam Anglicam ... Seu Continuatio mirandorum Arcanorum Naturae detectorum* (= *Opera omnia seu Arcana Naturae ope exactissimorum microscopiorum detecta*, t. IV), Langerak: Lugduni Batavorum [Leiden], 1719: 74, 731

LEGENDRE, ADRIEN-MARIE

1794 *Éléments de géométrie, avec des notes*, Didot: Paris, An II – 1794: 1030

1811 *Exercices de calcul integral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, Courcier: Paris, 1811: 35, 586, 727

1830 *Théorie des nombres*. Troisième édition, T. I–II, Didot: Paris, 1830: 625, 1070

LE GENTIL, GUILLAUME JOSEPH HYACINTHE JEAN-BAPTISTE

1748 *Grandeur de l'Eclipse que l'on attend à Berlin le 25 Juillet prochain 1748, calculée sur les nouvelles Tables construites selon les Elemens de M. Newton*: Memoires pour l'Histoire des Sciences & des beaux Arts ("Journal de Trévoux") VIII, Juillet 1748, p. 1517–1520: 979

Leibniz, Gottfried Wilhelm

1682 *De vera proportione Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeribus rationalibus*: AE Februarii 1682, p. 41–46: 614

1702 *Specimen novum Analyseos pro Scientia Infiniti, circa Summas & Quadraturas*: AE Maji 1702, p. 210–219: 630, 746

1703 *Continuatio Analyseos Quadraturarum Rationalium ...*: AE Januarii 1703, p. 19–26: 630

1853 *Quadraturae irrationalium simplicium*: *Leibnizens mathematische Schriften* (ed. C.I. Gerhardt), Bd. V, p. 366–377: 626

Leibniz, Gottfried Wilhelm; Bernoulli, Johann I

1745 *Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum*, Bousquet: Lausannae et Genevae, 1745: 78, 322, 860, 863

Lemmermeyer, Franz

2000 *Reciprocity Laws. From Euler to Eisenstein* (Springer Monographs in Mathematics), Springer: Berlin (etc.), 2000: 726

2007 *The Development of the Principal Genus Theorem*: *The Shaping of Arithmetic after C.F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae* (ed. C. Goldstein et al.), Springer: Berlin (etc.), 2007, p. 539–561: 45, 822, 1080

2010 *Euler, Goldbach, and "Fermat's Theorem"*: Elemente der Mathematik 65 (2010), p. 144–153: 38, 42, 604, 1006

Le Monnier, Pierre-Charles

1746 *Institutions astronomiques, ou Leçons élémentaires d'Astronomie, pour servir d'introduction à la Physique Céleste, & à la Science des Longitudes.* Avec de nouvelles Tables d'Équation corrigées, et particulierement les Tables du Soleil, de la Lune & des Satellites; précedées d'un Essai sur l'Histoire de l'Astronomie Moderne, Guérin: Paris, 1746: 78, 381, 922, 925, 979, 984

Leonardo da Pisa (Fibonacci)

1856 *Liber quadratorum*: *Opuscoli di Leonardo Pisano* (ed. B. Boncompagni). Seconda edizione, Cellini: Firenze, 1856, p. 55–122: 857

1987 *The Book of Squares.* An Annotated Translation into Modern English by L.E. Sigler, Academic Press: Boston (etc.), 1987: 857

Le Seursee Newton 1739

Leuneschloss, Johann

1646 *Thesaurus mathematum reseratus per algebram novam tam speciebus quam numeris declaratam et demonstratam*, Cribellius: Patavii [Padua], 1646: 170, 172, 174, 677, 679, 683

1658 *Mille De Quantitate Paradoxa Sive Admiranda*, Wyngaerden: Heidelbergae, 1658: 70, 174, 176, 514, 517, 518, 521, 524, 683, 684, 1066, 1067, 1069, 1073–1075, 1079

L'Hôpital, Guillaume François Antoine

1716 *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Seconde edition, Montalant: Paris, 1716: 925

Lichtenbaum, Stephen

1973 *Values of zeta-functions, étale cohomology, and algebraic K-theory*: *Algebraic K-theory* (ed. H. Bass), vol. 2 (Lecture notes in mathematics, 342), Berlin: Springer, 1973, p. 489–501: 656

Linnik, Yuriĭ Vladimirovich

1960 *Все большие числа – суммы простого и двух квадратов (О проблеме Гарди-Литтльвуда)* [*All large numbers are sums of a prime and two squares (A problem of Hardy and Littlewood)*]: Matematicheskiĭ Sbornik 52 (94) (1960), p. 661–700; 53 (95)

(1961), p. 3–38 – American Mathematical Society Translations, Series 2, vol. 37 (1964): *Twenty-Two Papers on Algebra, Number Theory and Differential Geometry* (ed. M.S. Calenko et al.), p. 157–240: 1074

Liouville, Joseph

1841 *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati*: Journal de mathématiques pures et appliquées I/6 (1841), p. 1–13: 63, 636

1851 *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*: Journal de mathématiques pures et appliquées I/16 (1851), p. 133–142: 785

1862 *Théorème concernant les nombres triangulaires*: Journal de mathématiques pures et appliquées II/7 (1862), p. 407–408: 957

1863 *Nouveaux théorèmes concernant les nombres triangulaires*: Journal de mathématiques pures et appliquées II/8 (1863), p. 73–84: 957

Lipstorp, Daniel

1653 *Specimina Philosophiae Cartesianae*, Elsevier: Lugduni Batavorum [Leiden], 1653: 118, 613, 614

Liu, Ming-Chit; Wang, Tian-Ze

2002 *On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture*: Acta Arithmetica 105 (2002), p. 133–175: 706

Ljunggren, Wilhelm

1942 *Zur Theorie der Gleichung* $x^2+1 = Dy^4$: Avhandlinger utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, Mat.-Naturv. Klasse 5 (1942), p. 1–27: 943

Lobachevskiĭ, Nikolaĭ Ivanovich

1834 *Алгебра или вычисленїе конечныхъ* [*Algebra or calculus of finites*], Univ. Tip.: Kazan', 1834 – *Полное собрание сочинений* (ed. V.F. Kagan et al.), t. 4, Gos. Izd. tekh.-teoret. lit.: Moskva (etc.), 1948: 644

Lobwasser, Ambrosius

1573 *Der Psalter dess Königlichen Propheten Davids.* In deutsche reymen verstendiglich und deutlich gebracht . . . , Steinman: Leipzig, 1573 [and many later editions]: 222, 743, 745

Lorey, Wilhelm

1934 *Eine Lücke in Leonhard Eulers Beweis, daß eine ganze rationale Funktion einer Veränderlichen nicht nur Primzahlen darstellen kann*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 170 (1934), p. 129–132: 815

Lowitz, Georg Moritz

1748 *Kurze Erklärung über zwey Astronomische Karten von der Sonnen- oder Erd-Finsternis den 25. Julius 1748 . . .*, Homann: Nürnberg, 1748: 73, 419–421, 429, 432, 434, 963–965, 968, 974, 977, 980

Lucas, Dianne Smith

1973 *Numbers common to two polygonal sequences*: The Fibonacci Quarterly 11 (1973), p. 78–84: 1085

Lucas, Édouard

1875 *Question 1180* [on square stacks of cannonballs]: Nouvelles annales de mathématiques II/14 (1875), p. 336: 618

1878 *Sur l'analyse indéterminée du troisième degré et sur la question 802 (Sylvester)*: Nouvelles annales de mathématiques II/17 (1878), p. 507–514: 999

Luneschlossee Leuneschloss

MAANEN, JAN VAN

1990 *Korrespondenten von G. W. Leibniz, 11. Johan Jacob Ferguson*: Studia Leibnitiana 22 (1990), p. 203–216: 731

MACHINsee TWEDDLE

MACKENZIE QUIN, QUIN

1750 *A Method to Multiply or Divide Any Number of Figures by a like or a less number, so expeditely, that any Fifty Figures may either be Multiplied or Divided by any Fifty Figures, all in one Line, in Five Minutes Time.* Invented by Quin Mackenzie–Quin, Esq. at the Eighth Year of his Age. Printed for the Author, London 1750: 1009

MACLAURIN, COLIN

1742a *A Treatise of Fluxions.* In Two Books, Ruddimans: Edinburgh, 1742: 52, 280, 811

1742b *De causa physica fluxus et refluxus maris*: I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (ed. Th. Le Seur / F. Jacquier), t. III, Barrillot: Genevae, 1742, p. 247–282: 842

MAHNKE, DIETRICH

1912 *Leibniz auf der Suche nach einer allgemeinen Primzahlgleichung*: Bibliotheca Mathematica III/13 (1912/13), p. 29–61: 604

MANFREDI, GABRIELE

1707 *De constructione aequationum differentialium primi gradus*, Pisarri: Bononiae [Bologna], 1707: 63

MANGOLDT, HANS KARL FRIEDRICH VON

1897 *Beweis der Gleichung* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$: Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1897, Zweiter Halbband, p. 835–852: 656

MAOR, ELI

1994 *e: the Story of a Number*, Princeton University Press: Princeton (NJ), 1994: 635

MASER, HERMANNsee GAUSS 1889

MASSA ESTEVE, MARIA ROSA; DELSHAMS, AMADEU

2009 *Euler's Beta integral in Pietro Mengoli's works*: Arch. Hist. Exact Sci. 63 (2009), p. 325–356: 681

MAT(H)ANASIUSsee CORDONNIER

MATTHIAS, WILHELM HEINRICH

1812 *Darstellung des Postwesens in den Königlich Preußischen Staaten*, Dieterici: Berlin, 1812: 30

MATTMÜLLER, MARTIN

1999 *La lemniscate, les intégrales elliptiques et les débuts d'une théorie d'intégration algorithmique*: *Die Werke von Jacob Bernoulli*, Bd. 5, Birkhäuser: Basel, 1999, p. 359–365: 626

2008 *The First Modern Mathematician? Euler's Influence on the Development of Scientific Style*: *Леонард Эйлер к 300-летию со дня рождения*[*Leonhard Euler: 300th Anniversary*] (ed. V.N. Vasil'ev et al.), Nestor-Istoriya: Sankt-Peterburg, 2008, p. 37–49: 35, 586, 587, 686, 785

MATVIEVSKAYA, GALINA PAVLOVNA

1960 *О неопубликованных рукописях Леонарда Эйлера по диофантову анализу* [*On the unpublished manuscripts of Leonhard Euler on Diophantine analysis*]: Istoriko-Matematicheskie issledovaniya XIII (1960), p. 107–186: 701, 702, 705, 852, 1085

MATVIEVSKAYA, GALINA PAVLOVNA; OZHIGOVA, ELENA PETROVNA

1983 *Leonhard Eulers handschriftlicher Nachlass zur Zahlentheorie*: *Leonhard Euler 1707–1783. Beiträge zu Leben und Werk*, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt (ed. J.J. Burckhardt et al.), Birkhäuser: Basel, 1983, p. 151–160: 958

MAUPERTUIS, PIERRE LOUIS MOREAU DE

1735 *Sur les courbes de poursuite*: Mém. Paris 1732 (1735), p. 15–16: 648

1748 *Les Loix du Mouvement et du Repos déduites d'un Principe Metaphysique*: Mém. Berlin 1746 (1748), p. 267–294: 71, 512, 1059, 1063

MAYER, FRIEDRICH CHRISTOPH

1732 *Propositiones cyclometricae aliquot*: CP III, 1728 (1732), p. 53–62: 617

MENDELSSOHN, MOSES

1843 *Gesammelte Schriften* (ed. G.B. Mendelssohn), vol. 1–7, Brockhaus: Leipzig, 1843–1845: 842

MENGOLI, PIETRO

1650 *Novae Quadraturae Arithmeticae, seu De Additione Fractionum*, Monti: Bononiae [Bologna], 1650: 48, 55, 588

1659 *Geometriae speciosae Elementa ...*, Ferroni: Bononiae [Bologna], 1659: 588, 785

MERCATOR, NICOLAUS

1668 *Logarithmo-technia: sive Methodus construendi Logarithmos Nova, accurata, & facilis*, Godbid: Londini, 1668: 588

MERSENNE, MARIN

1644 *Cogitata Physico Mathematica.* In quibus tam naturae quam artis effectus admirandi certissimis demonstrationibus explicantur, Bertier: Parisiis, 1644: 514, 518, 519, 1066, 1067, 1072, 1073

1932 *Correspondance du P. Marin Mersenne* (ed. C. de Waard et al.), t. I–XVII, Centre National de la Recherche Scientifique: Paris, 1932–1988: 624

MERTENS, FRANZ

1874a *Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 77 (1874), p. 290–338: 660

1874b *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Über die Verteilung der Primzahlen*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 78 (1874), p. 46–62: 1064, 1070

MIGNOTTE, MAURICE; STEFANESCU, DORU

2003 *Linear recurrent sequences and polynomial roots*: Journal of Symbolic Computing 35 (2003), p. 637–649: 644

MIKHAĬLOV, GLEB KONSTANTINOVICH

1959 *Notizen über die unveröffentlichten Manuskripte von Leonhard Euler*: *Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen* (ed. K. Schröder), Akademie-Verlag: Berlin 1959, p. 256–279: 17, 686

MILLERAN, RENÉ

1744 *Le nouveau Secretaire de la Cour, ou Lettres Familieres sur toute sorte de sujets ...*, L'Honoré & Chatelain: Amsterdam, 1744: 478, 479, 1027

MIZLER (VON KOLOF), LORENZ CHRISTOPH

1741 [review:] *Tentamen novae theoriae musicae. Das ist: Versuch einer neuen theoretischen Music, aus untrüglichen Gründen der Harmonie deutlich vorgetragen von Leonhard Euler ...*: Zuverlässige Nachrichten von dem gegenwärtigen Zustande, Veränderung und Wachsthum der Wissenschaften, Zwey und zwanzigster Theil (= vol. II, n° 10) (1741), p. 722–751: 930

1746 [review and partial translation:] *Tentamen novae theoriae musicae ..., Das ist, Versuch einer neuen Theorie der Musik ...*: *Musikalische Bibliothek, oder Gründliche Nachricht nebst unpartheyischem Urtheil von alten und neuen musikalischen Schrifften und Büchern ...*, III.1 (1746), p. 61–136; III.2 (1746), p. 305–346; III.3 (1747), p. 539–558; IV.I (1754), p. 69–103: 388, 393, 930, 935

Möbius, August Ferdinand

1832 *Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 9 (1832), p. 105–123: 660

Moivre, Abraham de

1707 *Aequationum quarundam Potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, & superiorum, ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar Regularum pro Cubicis quae vocantur Cardani, Resolutio Analytica*: Phil. Trans. vol. XXV (1706–1707), no. 309, p. 2368–2371: 1078

1730 *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis . . .* , Tonson & Watts: Londini, 1730: 841

Mordukhaĭ-Boltovskoĭ, Dmitriĭ Dmitrievich

1926 *Об интегрировании в конечном виде дифференциальных биномов в случае иррациональных показателей* [*On the integration in finite terms of differential binomials in the case of irrational exponents*]: Известия физико-математического общества при Казанском университете [Communications of the Department of Physics and Mathematics of Kazan University] III.1 (1926), p. 14–25: 630

Müller, Gerhard Andreas

1741 *Problema physico-mathematicum, Eruditis propositum, cujus solutio omnem in eventum promissa . . . , veram assignare causam gravitatis corporum . . .* : NAE Augusti 1741, p. 474–475: 829

1743 *Untersuchung der wahren Ursache von Neutons allgemeiner Schwere, wie auch der bewegenden Kräffte der Körper*, Hofmann: Weimar, 1743: 296, 297, 829, 830

1748 *Unpartheyische Critik der Leibnitzischen Monadologie, wie auch der vorher bestimmten Harmonie der Seele und des Leibes . . .* , Ritter: Jena, 1748: 831

Müller, Gerhard Friedrich

1753a [anonymous] *Lettre d'un Officier de la Marine Russienne à un Seigneur de la Cour concernant la Carte des nouvelles découvertes au Nord de la Mer du Sud, et le Mémoire qui y sert d'explication, publié par M. de L'Isle à Paris en 1752*, traduit de l'original russe, Haude et Spener: Berlin, 1753 – Nouvelle Bibliothèque Germanique XIII, Juillet–Septembre 1753, p. 46–87: 532, 1088, 1089, 1091, 1092

1753b [anonymous] *Schreiben eines russischen Officiers von der Flotte an einen Herrn des Hofes, die Charte der neuen Entdeckungen gegen Norden des Süder-Meeres, und die Abhandlung, die zur Erläuterung derselben dient, betreffend: Welche beyde von dem Herrn von L'Isle im Jahre 1752 zu Paris heraus gegeben worden sind.* Aus dem Russischen in das Französische gebracht und hernach in das Deutsche übersetzt von Joh. Victor Krause, Haude & Spener: Berlin, 1753: 1091, 1092

1754 [anonymous] *A Letter from a Russian Sea-Officer, to a Person of Distinction at the Court of St. Petersburgh: containing His Remarks upon Mr. de l'Isle's Chart and Memoir, relative to the New Discoveries Northward and Eastward from Kamtschatka. Together with some Observations on that Letter, By Arthur Dobbs, Esq., Governor of North-Carolina, To which is added, Mr. de l'Isle's Explanatory Memoir on his Chart Published at Paris, and now Translated from the original French*, Linde: London, 1754: 1092

Mumenthaler, Rudolf

1996 *Im Paradies der Gelehrten. Schweizer Wissenschaftler im Zarenreich (1725–1917)*, Rohr: Zürich, 1996: 18

Murty, Maruti Ram Pedaprolu; Saradha, N.

2007 *Transcendental values of the digamma function*: Journal of Number Theory 125 (2007), p. 298–318: 787

Nagel, Fritz; Verdun, Andreas (eds.)

2005 *"Geschickte Leute, die was praestiren können . . . ". Gelehrte aus Basel an der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften des 18. Jahrhunderts* (Deutsch-russische Beziehungen in Medizin und Naturwissenschaften, 11), Shaker: Aachen, 2005: 7

NAHIN, PAUL J.

2007 *Chases and Escapes. The Mathematics of Pursuit and Evasion*, Princeton University Press: Princeton (NJ), 2007: 648

NAPIER, JOHN

1614 *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio ...*, Hart: Edinburgi, 1614: 106, 594, 595

NATHANSON, MELVYN BERNARD

1987 *A Short Proof of Cauchy's Polygonal Number Theorem*: Proc. Amer. Math. Soc. 99 (1987), p. 22–24: 1026

NETTO, EUGEN

1901 *Lehrbuch der Combinatorik* (Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften, VII), Teubner: Leipzig, 1901: 1040

NEUMANN, HANNS-PETER

2009 *Zwischen Materialismus und Idealismus – Gottfried Ploucquet und die Monadologie*: *Der Monadenbegriff zwischen Spätrenaissance und Aufklärung* (ed. H.-P. Neumann), de Gruyter: Berlin / New York 2009, p. 203–270: 942

2010 *"Den Monaden das Garaus machen". Leonhard Euler und die "Monadisten"*: *Mathesis & Graphé. Leonhard Euler und die Entfaltung der Wissenssysteme* (ed. H. Bredekamp, W. Velminski), Akademie-Verlag: Berlin, 2010, p. 121–155: 71, 942

2013 *Monaden im Diskurs. Monas, Monaden, Monadologien (1600 bis 1770)* (Studia Leibnitiana – Supplementa, 37), Steiner: Stuttgart, 2013: 942

NEWTON, ISAAC

1687 *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Streater: Londini, 1687: 14

1699 *Epistola ... posterior, ad D. Oldenburgium, Octob. 24, 1676, cum D. Leibnizio communicanda*: Wallis, *Operum Mathematicorum Volumen tertium* (1699), p. 634–645 – [version edited by Newton]: *Mathematical Papers* (ed. D.T. Whiteside), vol. IV, Cambridge University Press: Cambridge, 1971, p. 618–633: 58, 667

1704 *Opticks: or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light*, Smith / Walford: London, 1704 [and many later editions and translations]: 985

1707 *Arithmetica Universalis; sive De Compositione et Resolutione Arithmetica Liber ...*, Typis Academicis: Cantabrigiae [Cambridge] / Tooke: Londini, 1707 [and several later editions]: 216, 735, 738

1711 *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias ...*, Pearson: Londini, 1711: 625, 644

1713 *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Editio Secunda Auctior et Emendatior, [Crowfield]: Cantabrigiae [Cambridge], 1713: 14

1736 *The Method of Fluxions and Infinite Series ...* (ed. J. Colson), Woodfall: London, 1736: 644, 785

1739 *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Perpetuis Commentariis illustrata communi studio PP. Thomae Le Seur & Francisci Jacquier ..., 3 vols., Barrillot: Genevae, 1739/40/42: 78, 170, 280, 306, 322, 677, 811, 812, 839, 842, 860

1740 *La Methode des Fluxions, et des suites infinies* (trad. G.L. de Buffon), de Bure: Paris, 1740: 307, 310, 785, 843, 845

1744a *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*: *Opuscula mathematica, philosophica et philologica* (ed. J. Castillon), t. I, Bousquet: Lausannae & Genevae, 1744, p. 31–199: 785, 848

1744b *Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica*. Collegit partimque Latine vertit ac recensuit Joh. Castillioneus, t. I–III, Bousquet: Lausannae & Genevae, 1744: 78, 306, 310, 839, 842, 845, 848

NORRIE, ROBERT

1911 *On the algebraical solution of indeterminate cubic equations*, Part II [on *quartic* equations]: University of St. Andrews Five Hundredth Anniversary Memorial Volume of Scientific Papers Contributed by Members of the University (ed. W.C. M'Intosh et al.), St. Andrews University: [Edinburgh], 1911, p. 59–92: 1093

O'CONNOR, JOHN J.; ROBERTSON, EDMUND F.

2006 *Christian Goldbach*: *MacTutor History of Mathematics Archive* (`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Goldbach.html`, accessed Oct. 21st, 2013): 3

OECHLITZ, CHRISTIAN FRIEDRICH

1746 *Solutio Problematis Optico-Analytici ...*: NAE Martii 1746, p. 134–137: 857, 882

1747 *Analysis Solutionis suae Problematis Catoptrico-Analytici ...*: NAE Aprilis 1747, p. 225–236; NAE Octobris 1747, p. 601–617: 425, 857, 882, 969, 973

ORESME, NICOLE

1961 *Quaestiones super geometriam Euclidis, ca. 1350* (ed. H.L.L. Busard), Brill: Leiden, 1961: 588

ORFFYREUS (BESSLER, JOHANN ERNST ELIAS)

1719 [anonymous] *Das Triumphirende Perpetuum Mobile Orffyreanum*, Cassel, 1719: 938

OWEN, JOHN

1606 *Epigrammatum Libri tres*, Secunda editio, Windet: Londini, 1606 [and many other editions]: 705

OZANAM, JACQUES

1680 *Demonstration de ce Theoreme: Que la Somme ou la difference de deux Quarré-Quarrez ne peut estre un Quarré-Quarré ...*: Journal des Sçavans 1680 (20. May), p. 142–143: 592

1725 *Recreations Mathematiques et Physiques ...*, Nouvelle edition, revûë, corrigée & augmentée, t. I–IV, Jombert: Paris, 1725: 1119

PANAITOPOL, LAURENŢIU

2005 *On the Representation of Natural Numbers as Sums of Squares*: Amer. Math. Monthly 112 (2005), p. 168–171: 964

PERRON, OSKAR

1913 *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Teubner: Leipzig / Berlin, 1913: 58

PETERSON, MARK A.

1997 *The Geometry of Piero della Francesca*: Math. Intelligencer 19 (1997), p. 33–40: 1030

PETRIE, BRUCE J.

2009 *Euler, Lambert, and the irrationality of e and π*: Proceedings of the Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics 22 (2009), p. 104–119: 55

PETROV, ANATOLIĬ NIKOLAEVICH

1958 *Памятные эйлеровские места в Ленинграде* (*Leonhard Euler – Denkwürdige Stätten in Leningrad*): *Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии Наук СССР* (*Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstags Leonhard Eulers der Akademie der Wissenschaften der UdSSR vorgelegten Abhandlungen*) (ed. M.A. Lavrent'ev et al.), Isdatel'stvo Akademii Nauk SSSR: Moskva, 1958, p. 597–604: 676

PFAFF, CHRISTOPH HEINRICH

1809 *Ueber die strengen Winter vorzüglich des achtzehnten Jahrhunderts .... Ein Beytrag zur meteorologischen Geschichte der Erde*, Academische Buchhandlung: Kiel, 1809: 991

PHILIDOR, FRANÇOIS-ANDRÉ DANICAN

1749 *L'Analyze des Echecs: Contenant une Nouvelle Methode pour apprendre en peu de Tems à se Perfectioner dans ce Noble Jeu*, Londres, 1749: 485, 1034, 1035

PICUTTI, ETTORE

1989 *Pour l'histoire des sept premiers nombres parfaits*: Historia Mathematica 16 (1989), p. 123–136: 604

PIEPER, HERBERT

1993 *On Euler's Contributions to the Four-Squares Theorem*: Historia Mathematica 20 (1993), p. 12–18: 604

PIERO DELLA FRANCESCA

1916 *L'opera "De corporibus regularibus" di Pietro Franceschi detto Della Francesca, usurpata da fra Luca Pacioli* (ed. G. Mancini): Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze morali, storiche, e filologiche V/14 (1916), p. 446–580: 1030

1995 *Libellus de quinque corporibus regularibus* (ed. C. Grayson et al.), Giunti: Firenze [Florence], 1995: 1030

PLANA, GIOVANNI (JEAN)

1863 *Mémoire sur la théorie des nombres*: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino, Ser. II, t. 20 (1863), p. 113–150: 1066

POINCARÉ, HENRI

1901 *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*: Journal de mathématiques pures et appliquées V/7 (1901), p. 161–233 – Œuvres T.V (ed. A. Châtelet), Gauthier-Villars: Paris, 1950, p. 483–548: 618

POINSINET, ANTOINE ALEXANDRE HENRI

1756 *L'inoculation*, Poëme. A Monseigneur le Duc d'Orleans, Paris, 1756: 1112

POISSON, SIMÉON-DENIS

1827 *Mémoire sur le calcul numérique des Intégrales définies*: Mém. Ac. Sci. Inst. France VI, 1823 (1827), p. 571–602: 52

POLDAUF, SUSANNA

2001 *Philidor. Eine einzigartige Verbindung von Schach und Musik*, Exzelsior: Berlin, 2001: 842, 1035

POLENI, GIOVANNI

1739 *Exercitationes Vitruvianae Primae* [*Secundae / Tertiae*], Manfrè: Patavii [Padua], 1739/41: 193, 707, 712

1741 *Institutionum philosophiae mechanicae experimentalis specimen.* Praelectio habita ... V. Kal. Decemb. 1740, cum novum Theatrum pro Experimentali Philosophia in Patavino Gymnasio dedicaretur, Typis Seminarii: Patavii [Padua], 1741: 193, 707, 712

PONTEDERA, GIULIO

1740 *Antiquitatum Latinarum Graecarumque enarrationes atque emendationes ...*, Manfrè: Patavii [Padua], 1740: 193, 707, 712

POSTNIKOV, MIKHAIL MIKHAĬLOVICH

2000 *The Problem of Squarable Lunes* (trad. A. Shenitzer): Amer. Math. Monthly 107 (2000), p. 645–651: 619

PRÉMONTVAL, ANDRÉ-PIERRE LE GUAY DE

1751 *La monogamie, ou l'unité dans le mariage.* Ouvrage dans le quel on entreprend d'établir contre le préjugé commun, l'exacte & parfaite conformité des trois loix, de la nature, de Moïse & de Jesus-Christ sur ce sujet, t. I–III, Van Cleef: La Haye [The Hague], 1751/52: 502, 507, 1052, 1053, 1057

Prouhet, Eugène

1851 *Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres* (Extrait): Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences I/33 (23 août 1851), p. 225: 897

Pulte, Helmut

1989 *Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Kraftkonzeptionen der rationalen Mechanik.* Eine Untersuchung zur Grundlegungsproblematik bei Leonhard Euler, Pierre Louis Moreau de Maupertuis und Joseph Louis Lagrange (Studia Leibnitiana, Sonderheft 19), Steiner: Stuttgart, 1989: 1064

Quinsee Mackenzie Quin

Rabinowitsch, Georg

1913 *Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern*: Journal für die reine und angewandte Mathematik 142 (1913), p. 153–164: 822

Rajagopal, Cadambathur Tiruvenkatacharlu; Rangachari, Malliyam Satakopacharya

1986 *On medieval Kerala mathematics*: Arch. Hist. Exact Sci. 35 (1986), p. 91–99: 785

Ramaré, Olivier

1995 *On Šnirelman's constant*: Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, IV/22 (1995), p. 645–706: 47

Ramasubramanian, K.V.

2011 *The Notion of Proof in Indian Science*: *Scientific Literature in Sanskrit* (ed. S.R. Sarma, G. Wojtilla), Papers of the 13th World Sanskrit Conference; 1, Motilal Banarsidass: Delhi, 2011: 55, 591

Raphson, Joseph

1690 *Analysis Aequationum Universalis seu Ad Aequationes Algebraicas Resolvendas Methodus Generalis, et Expedita . . .*, Swalle: Londini, 1690: 644

Rashed, Roshdi

1989 *Ibn al-Haytham et les nombres parfaits*: Historia Mathematica 16 (1989), p. 343–352: 1071

Recasens Gallart, Eduard

1994 *J. Zaragoza's Centrum Minimum, an Early Version of Barycentric Geometry*: Arch. Hist. Exact Sci. 46 (1993/94), p. 285–320: 956

2008 *Sobre un dels treballs d'Euler en geometria clàssica: l'E 135*: Quaderns d'Història de l'Enginyeria IX (2008), p. 205–218: 956

Reinke, Edgar Carl

1962 *Classical Cryptography*: The Classical Journal 58 (1962), p. 113–121: 842

Remmert, Reinhold

1990 *The Fundamental Theorem of Algebra*: *Numbers* (ed. H.-D. Ebbinghaus et al.; Graduate Texts in Mathematics: 123), Springer: Berlin, 1990, p. 97–122: 746

Rexrode, Doyle Daniel

1966 *I.M. Vinogradov's representation of Goldbach's problem for odd integers*, M. Sc. Thesis, Texas Technological College, 1966: 47

Ribenboim, Paulo

1995 *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Springer: New York (etc.), [1995] [updated reprint of the 1979 edition]: 956

Riccati, Jacopo Francesco

1722 *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*: AE Suppl. T. VIII (1724), Sect. II [actually published in autumn 1722], p. 66–73: 635

Richardson, Samuel

1740 *Pamela: or, Virtue Rewarded.* In a Series of Familiar Letters from a Beautiful Young Damsel, to her Parents, Rivington & Osborn: London, 1741 [*recte* 1740]: 962

1743 *Pamela oder die belohnte Tugend.* Aus der sechsten vermehrten Englischen Auflage in das Deutsche übersetzt und mit Kupfern gezieret, Theil 1–4, Schuster: Leipzig, 1743: 414, 958, 962

Richelet, César-Pierre

1735 *Dictionnaire de la langue françoise, ancienne et moderne ....* Nouvelle Edition corrigée & augmentée, Brandmuller: Basle, 1735: 276, 805, 807

1739 *Dictionaire de Rimes, dans un nouvel ordre ....* Nouvelle Edition, Delaulne: Paris, 1739: 307, 322, 843, 860

Richeson, David Scott

2008 *Euler's Gem. The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press: Princeton (NJ) / Oxford, 2008: 68, 1030

Riemann, Bernhard

1860 *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*: Monatsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1859 (1860), p. 671–680 – *Gesammelte mathematische Werke* (ed. H. Weber, R. Dedekind), Teubner: Leipzig, 1876, p. 136–144: 48, 49

1867 *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* Aus dem Nachlass des Verfassers mitgetheilt durch R. Dedekind. [Riemann's habilitation lecture, Göttingen 1854]: Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (1867), p. 86–132 – [separately published:] Dieterich: Göttingen, 1867 – *Gesammelte mathematische Werke* (ed. H. Weber, R. Dedekind), Teubner: Leipzig, 1876, p. 213–251: 1059

Rodrigues, Olinde

1838 *Sur le nombre de manières de décomposer un polygone en triangles au moyen de diagonales*: Journal de mathématiques pures et appliquées I/3 (1838), p. 547–548: 1040

Romanov, Nikolaĭ Pavlovich

1934 *Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie*: Math. Ann. 109 (1934), p. 668–678: 1077

Roth, Peter

1608 *Arithmetica Philosophica, oder schöne newe wolgegründte Uberauß Künstliche Rechnung der Coß oder Algebrae ...*, Lantzenberger: Nürnberg, 1608: 746

Rothenberg, Siegfried

1908 *Geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei variablen Größen* (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen XX.3), Teubner: Leipzig / Berlin, 1908: 1026

Rudolffsee Stifel

Saalschütz, Louis

1907 *Zur Geschichte der Waringschen Formel*: Archiv der Mathematik und Physik III/12 (1907), p. 205–207: 726

1908 *Zur Geschichte der Relationen zwischen Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung und ihrer Koeffizienten*: Bibliotheca Mathematica III/9 (1908/09), p. 65–70: 726

Sandifer, Charles Edward

2007a *Some Facets of Euler's Work on Series*: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy* (Studies in the History and Philosophy of Mathematics, 5; ed. R.E. Bradley, C.E. Sandifer), Elsevier: Amsterdam (etc.), 2007, p. 279–302: 772

2007b *The Early Mathematics of Leonhard Euler* (The MAA Tercentenary Euler Celebration, 1), Mathematical Association of America: Washington (DC), 2007: 52, 648

2007c *How Euler Did It* (The MAA Tercentenary Euler Celebration, 3), Mathematical Association of America: Washington (DC), 2007: 68, 69, 1124

Saouter, Yannick

1998 *Checking the odd Goldbach conjecture up to* 10^{20}: Mathematics of Computation 67 (1998), p. 863–866: 706

Schaffer, Simon

1995 *The Show That Never Ends: Perpetual Motion in the Early Eighteenth Century*: British Journal for the History of Science 28 (1995), p. 157–189: 938

Schierscher, Georg

1997 *Verfolgungsprobleme*: Der Mathematikunterricht 43/3 (1997), p. 49–78: 648

Schmalenbach, Herman

1921 *Leibniz*, Drei Masken Verlag: München 1921: 841

Schooten, Frans van

1657 *Exercitationum mathematicarum Libri quinque*, Elsevir: Lugd[uni] Batav[orum] [Leiden], 1657: 165, 672

Schuppener, Georg

1994 *Geschichte der Zeta-Funktion von Oresme bis Poisson* (Deutsche Hochschulschriften, 533), Hänsel-Hohenhausen Verlag der Deutschen Hochschulschriften: Egelsbach (etc.), 1994: 48, 52

Schuster, Wolfgang

1997 *Quadratische Identitäten bei Polygonen*: Aequationes mathematicae 54 (1997), p. 117–143: 956

Scriba, Christoph Joachim

1987 *On the So-called "Classical Problems" in the History of Mathematics*: *History in Mathematics Education.* Proceedings of a Workshop held at the University of Toronto, Canada, July–August 1983 (ed. I. Grattan-Guinness), Belin: Paris, 1987, p. 74–99: 67, 619

1988 *Welche Kreismonde sind elementar quadrierbar? Die 2400-jährige Geschichte eines Problems bis zur endgültigen Lösung in den Jahren 1933/1947*: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 11 (1988), p. 517–539: 67, 619

Segner, Johann Andreas (von)

1740 *Specimen Logicae universaliter demonstratae*, Croeker: Ienae, 1740: 393, 935, 936

1741a *Ad Lectiones Philosophiae naturalis experimentalis publicas Invitatio*, Vandenhoeck: Gottingae, 1741: 686

1741b *Defensio adversus Censuram Berolinensem: Probationis loco est Crisis Perpetua in duo capita Geometriae Illustris Wolfii*, Gottingae, [1741]: 686

1761 *Enumeratio modorum, quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula*: NCP VII, 1758/59 (1761), p. 203–209: 69, 1040

Sesiano, Jacques

2012 *Solution du problème du cavalier par Euler*: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles 93 (2012), p. 47–65: 69, 1120

2014 *Euler et le parcours du cavalier*, Presses polytechniques et universitaires romandes: Lausanne, 2014 (to appear): 69, 1120

Shanks, Daniel

1958 *Two theorems of Gauss*: Pacific Journal of Mathematics 8 (1958), p. 609–612: 51

Sharpsee Sherwin

Shchukina, Evgeniya Semyonovna

1962 *Медальерное искусство в России XVIII века* [*Russian medallic art in the 18th century*], Izdatel'stvo Ermitazha: Leningrad, 1962: 730

Sherwin, Henry (ed.)

1706 *Mathematical Tables, Contrived after a most Comprehensive Method*. By Mr. Briggs, Dr. Wallis, Mr. Halley, Mr. Abr. Sharp, Mount & Page: London, 1706 [and many later editions]: 742

Shnirel'man, Lev Genrikhovich

1930 *Об аддитивных свойствах чисел* [*On the additive properties of numbers*]: *Известия Донского Политехнического Института в Новочеркасске* [*Proceedings of the Don Polytechnic Institute in Novocherkassk*] XIV (1930), p. 3–27 – *Успехи математических наук* [*Russian Mathematical Surveys*] 1939, n° 6, p. 9–25: 47

Siegel, Carl Ludwig

1929 *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*: Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Phys.-math. Klasse, 1929, Nr. 1 – *Gesammelte Abhandlungen* (ed. K. Chandrasekharan, H. Maaß), vol. I, Springer: Berlin (etc.), 1966, p. 209–266: 62

Sierpiński, Wacław Franciszek

1961 *Sur les nombres impairs admettant une seule décomposition en une somme de deux carrés de nombres naturels premiers entre eux*: Elemente der Mathematik XVI (1961), p. 27–30: 857

Simpson, Thomas

1740 *Essays on several Curious and Useful Subjects, in Speculative and Mix'd Mathematicks*, Nourse: London, 1740: 644

Sinisalo, Matti K.

1993 *Checking the Goldbach conjecture up to* $4 \cdot 10^{11}$: Mathematics of Computation 61 (1993), p. 931–934: 706

Smirnov, Vladimir Ivanovich (ed.)

1963 *Леонард Эйлер. Письма к ученым* [*Leonhard Euler. Letters to scientists*], Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR: Moskva / Leningrad, 1963: 41, 50, 701, 811, 823, 848, 962

Smith, Henry John Stephen

1894 *Report on the theory of numbers*, Part I–VI: *Collected Mathematical Papers* (ed. J.W.L. Glaisher), vol. I, Clarendon Press: Oxford, 1894, p. 38–364 [reprint: Chelsea: Bronx (NY), 1965]: 726

Spearman, Blair K.; Williams, Kenneth S.

1996 *On solvable quintics* X^5+aX+b *and* X^5+aX^2+b: Rocky Mountain J. Math. 26 (1996), p. 753–772: 1078

Speziali, Pierre

1953 *Le logogriphe d'Euler*: "Stultifera navis" (Bulletin de la Société suisse des bibliophiles) 10 (1953), p. 6–9: 842

Spiess, Otto

1945 *Die Summe der reziproken Quadratzahlen*: Festschrift Andreas Speiser, Orell Füssli: Zürich, 1945, p. 66–86: 655, 727

Spreng, Johann Jacob

1741 *Neue Ubersetzung der Psalmen Davids, auf die gewöhnlichen Singweisen gerichtet . . .*, von Mechel: Basel, 1741: 78, 222, 241, 743, 745, 765

STEDALL, JACQUELINE ANNE

2004 *The Arithmetic of Infinitesimals: John Wallis 1656* (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences), Springer: New York, 2004: 585

STEPHANUS (ETIENNE, ROBERT)see GESNER, JOHANN MATTHIAS

STERN, MORITZ ABRAHAM

1856 *Sur une assertion de Goldbach relative aux nombres impairs*: Nouvelles annales de mathématiques I/15 (1856), p. 23–24: 1074, 1081

STEVIN, SIMON

1625 *L'Arithmetique de Simon Stevin de Bruges ...* (ed. A. Girard), Elzevier: Leide, 1625: 610

STIELTJES, THOMAS JAN

1887 *Table des valeurs des sommes* $S_k = \sum_1^\infty n^{-k}$: Acta Mathematica 10 (1887), p. 299–302 – *Œuvres complètes*, t. II, Noordhoff: Groningen, 1918, p. 100–103: 776

STIFEL, MICHAEL

1544 *Arithmetica integra*, Petreius: Norimbergae [Nuremberg], 1544: 590

1553 *Die Coss Christoffs Rudolffs ....* Durch Michael Stifel Gebessert und sehr gemehret, Alexander Lutomyslensis [Aujezdecki]: Königsberg, 1553 [*recte* 1554]: 176, 684, 686

STIRLING, JAMES

1730 *Methodus Differentialis: sive Tractatus de Summatione et Interpolatione Serierum Infinitarum*, Bowyer: Londini, 1730: 58, 656, 841, 915

STONE, EDMUND

1735 *Analise des infiniment petits, comprenant le calcul integral dans toute son étenduë ... Servant de suite aux infiniment petits de M. le Marquis de l'Hôpital.* Traduit en François par M. Rondet, Gandouin / Giffart: Paris, 1735: 925

STØRMER, (FREDRIK) CARL

1894 *Solution complète en nombres entiers* m, n, x, y *et* k *de l'équation:* $m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$: Skrifter udgivne af Videnskabsselskabet i Christiania 1895 [*recte* 1894], Mathematisk-naturvidenskabelik Klasse, no. 11, p. 1–21: 943

1899 *Solution complète en nombres entiers de l'équation* $m \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$: Bull. Soc. Math. France XXVII (1899), p. 160–170: 943

SUN, ZHI-WEI

2007 *Mixed sums of squares and triangular numbers*: Acta Arithmetica 127 (2007), p. 103–113: 957

TAO, TERENCE CHI-SHEN

2010 *The Euler-Maclaurin formula, Bernoulli numbers, the zeta function, and real-variable analytic continuation*: terrytao.wordpress.com/2010/04/10: 870

2014 *Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes*: Mathematics of Computation 83 (2014), p. 997–1038: 47

TAYLOR, BROOK

1715 *Methodus Incrementorum Directa & Inversa*, Innys: Londini, 1715: 644

TENT, MARGARET B.W.

2009 *Leonhard Euler and the Bernoullis. Mathematicians from Basel*, Peters: Natick (Mass.), 2009: 12

TROPFKE, JOHANNES

1930 *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter*, 3. Auflage, Bd. I–IV, de Gruyter: Berlin / Leipzig, 1930–1940: 53, 635

TWEDDLE, IAN

1991 *John Machin and Robert Simson on Inverse-tangent Series for* π: Arch. Hist. Exact Sci. 42 (1991), p. 1–14: 785

2003 *James Stirling's Methodus Differentialis. An Annotated Translation of Stirling's Text* (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences), Springer: London (etc.), 2003: 915

UHL, JOHANN LUDWIG (see also LA CROZE)

1758 *Sylloge nova epistolarum varii argumenti*, Liber I, Felsecker: Norimbergae [Nuremberg], 1758: 910

USPENSKY, JAMES VICTOR; HEASLET, MAXWELL ALFRED

1939 *Elementary number theory*, McGraw-Hill: New York (etc.), 1939: 928

VACCA, GIOVANNI

1894 *Intorno alla prima dimostrazione di un teorema di Fermat*: Bibliotheca Mathematica II/8 (1894), p. 46–48: 694

VALENTIN, GEORG HERMANN

1906 *Leonard*[!] *Eulers Wohnhaus in Berlin*: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 15 (1906), p. 270–271: 676

VARADARAJAN, VEERAVALLI S.

2006 *Euler Through Time: A New Look at Old Themes*, American Mathematical Society: Providence (Rhode Island), 2006: 52, 654, 713, 772

VAUGELAS, CLAUDE FAVRE DE

1647 *Remarques sur la langue françoise utiles à ceux qui veulent bien parler et bien escrire*, Camusat / Le Petit: Paris, 1647 [and many later editions]: 249, 774, 776

VEGA, GEORG VON

1795 *Détermination de la demi-circonférence d'un cercle, dont le diamètre est* = 1*, exprimée en* 140 *figures décimales*: NAP IX, 1791 (1795), p. 41–44: 742

VENKOV, BORIS ALEKSEEVICH

1922 *Об арифметике кватернионов* [*On the arithmetic of quaternions*]: Izvestiya Rossiĭskoĭ Akademii Nauk VI/16 (1922), p. 205–220, 221–246; *ibid.* VII/2 (1929), p. 489–504, 535–562, 607–622: 962

1928 *О числе классов бинарных квадратичных форм отрицательных определителей* [*On the number of classes of quadratic forms of negative determinant*]: Izvestiya Rossiĭskoĭ Akademii Nauk VII/1 (1928), p. 375–392; 455–480: 962

VERDUN, ANDREAS

2010 *"Astronomica" im Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Daniel Bernoulli*: *Gottfried Kirch (1639–1710) und die Berliner Astronomie im 18. Jahrhundert* (ed. J. Hamel) (Acta Historica Astronomiae, 41), Harri Deutsch: Frankfurt/Main, 2010, p. 169–199: 941

2011 *Die (Wieder-)Entdeckung von Eulers Mondtafeln*: NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin 19 (2011), p. 271–297: 73, 876, 979

2013 *Leonhard Euler's early lunar theories 1725–1752*: Archive for History of Exact Sciences 67 (2013), p. 235–303; 477–551 [pt. 3 to follow in 2014]: 73, 980

2014 *Entwicklung, Anwendung und Standardisierung mathematischer Methoden und physikalischer Prinzipien in Leonhard Eulers Arbeiten zur Himmelsmechanik* (Mathematik im Kontext), Springer: Berlin (etc.), 2014: 72

VIÈTE, FRANÇOIS

1593 *Zeteticorum Libri Quinque*, [Tours: Mettayer], 1593 – *Opera Mathematica* (ed. F. van Schooten), Elzevir: Lugduni Batavorum [Leiden], 1646, p. 42–81: 857

1631 *Ad Logisticen Speciosam, Notae priores*: *In artem analyticem isagoge ...* (ed. J. de Beaugrand), Baudry: Parisiis, 1631 – *Opera Mathematica* (ed. F. van Schooten), Elzevir: Lugduni Batavorum [Leiden], 1646, p. 13–41: 857

Vinogradov, Ivan Matveevich

1937 *Новый метод в аналитической теории чисел* [*A new method in the analytical theory of numbers*]: Trudy Mat. Inst. Steklov 10 (1937), p. 5–122: 47, 706

Vlacq, Adriaen

1628 *Arithmetica Logarithmica, Sive Logarithmorum Chiliades Centum, una Cum Canone Triangulorum* .... Hos Numeros primus invenit Iohannes Neperus Baro Merchistonii ..., eorumque ortum & usum illustravit Henricus Briggius. Editio secunda aucta per Adrianum Vlacq Goudanum, Rammaseyn: Goudae, 1628: 106, 108, 594, 597, 600, 635

Voltaire (Arouet), François Marie

1752 *Diatribe du Docteur Akakia Médecin du Pape* ..., Rome, 1753 [*recte* Leiden, 1752]: 72

Waff, Craig Beale

1995 *Clairaut and the motion of the lunar apse: The inverse-square law undergoes a test*: *The General History of Astronomy*, vol. 2, Pt. B (ed. R. Taton, C. Wilson), Cambridge University Press: Cambridge (MA) (etc.), 1995, p. 35–46: 73

Wagon, Stan

1990 *Editor's Corner: The Euclidean Algorithm Strikes Again*: Amer. Math. Monthly 97 (1990), p. 125–129: 802

Wagstaff, Samuel Standfield (Jr)

1983 *Divisors of Mersenne numbers*: Mathematics of Computation 40 (1983), p. 385–397: 636

Waitz, Jacob Sigismund

1745 *Abhandlung von der Electricität und deren Ursachen*, welche von der Königl. Academie der Wissenschaften in Berlin den Preiß erhalten hat, Haude: Berlin, 1745: 331, 868, 871

Wallenius, Martin Johan

1766 *Dissertatio gradualis, lunulas quasdam circulares quadrabiles exhibens* ..., Frenckell: Aboae [øAbo / Turku], 1766: 67, 619

Wallis, John

1656 *Arithmetica Infinitorum*, Lichfield: Oxonii [Oxford], 1656: 55, 58, 585, 591, 625, 644, 1023

1658 *Commercium Epistolicum, de quaestionibus quibusdam Mathematicis nuper habitum*, Lichfield: Oxonii [Oxford], 1658: 37, 39, 53, 592

1685 *A Treatise of Algebra, both Historical and Practical* ..., Playford: London, 1685: 54, 590, 591, 625, 644

1693 *De Algebra Tractatus; Historicus & Practicus*: *Opera Mathematica*, vol. II, E Theatro Sheldoniano: Oxoniae [Oxford], 1693: 37, 42, 120, 590, 611, 615, 617, 625

1699 *Operum Mathematicorum Volumen tertium*, E Theatro Sheldoniano: Oxoniae [Oxford], 1699: 198, 203, 592, 714, 718, 720

Wang, Yuan

2002 *The Goldbach conjecture*, 2nd edition (Series in Pure Mathematics; 4), World Scientific: Singapore, 2002: 706

Waring, Edward

1762 *Miscellanea analytica, de aequationibus algebraicis, et curvarum proprietatibus*, Bentham: Cantabrigiae [Cambridge], 1762: 726

1770 *Meditationes Algebraicae*, Archdeacon: Cantabrigiae [Cambridge], 1770: 46

Waschkies, Hans-Joachim

1987 *Physik und Physikotheologie des jungen Kant* (Bochumer Studien zur Philosophie, 8), Grüner: Amsterdam, 1987: 841

Watson, George Neville

1918 *The problem of the square pyramid*: Messenger of mathematics 48 (1918), p. 1–22: 618

Weil, André

1984 *Number Theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser: Boston (etc.), 1984: 39, 610, 612, 822, 855, 962, 1047, 1054

Weil, Françoise

1991 *Les libraires parisiens et le Dictionnaire de Trévoux*: *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie* 10 (1991), p. 155–158: 732, 771

Werrett, Simon

2010a *Fireworks. Pyrotechnic Arts and Sciences in European History*, University of Chicago Press: Chicago / London, 2010: 10

2010b *The Schumacher Affair: Reconfiguring Academic Expertise across Dynasties in Eighteenth-Century Russia*: Osiris 25 (*Expertise and the Early Modern State*) (2010), p. 104–126: 680, 812

Wertheim, Gustav

1897 *Die Schlussaufgabe in Diophants Schrift über Polygonalzahlen*: Zeitschrift für Mathematik und Physik 42 (1897), Historisch-litterarische Abtheilung, p. 121–126: 1085

White, Homer S.

2007 *The Geometry of Leonhard Euler*: *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy* (ed. R.E. Bradley, C.E. Sandifer), Elsevier: Amsterdam (etc.), 2007, p. 303–321: 68, 858

Williams, Hugh C.

1998 *Édouard Lucas and Primality Testing* (Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts; 22), Wiley-Interscience: New York, 1998: 636

Winsheim, Christian Nikolaus (von)

1751 *De numeris perfectis*: NCP II, 1749 (1751), p. 68–99: 514, 518, 521, 1066, 1071, 1073, 1075

Winter, Eduard (ed.)

1957 *Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766. Dokumente für das Wirken Leonhard Eulers in Berlin*, herausgegeben und eingeleitet von Eduard Winter, Akademie-Verlag: Berlin, 1957: 24, 1108, 1133

Wolff, Abraham Josephsee Lausch

Wolff, Christian (von)

1710 *Anfangs-Gründe aller mathematischen Wissenschafften*, Theil 1–4, Renger: Halle im Magdeburgischen, 1710: 84

1713 *Elementa Matheseos universae*, T. I–II, Renger: Halae Magdeburgicae, 1713–15: 84, 591, 604

1730 *Elementa Matheseos universae*, T. I–V. Editio nova priori multo auctior et correctior, Renger: Halae Magdeburgicae, 1730–41: 176, 685, 686

1734 *Vollständiges Mathematisches Lexicon . . .*, Gleditsch: Leipzig, 1734: 84

1742 *Elementa Matheseos universae*, T. I. Editio novissima, multo auctior et correctior, Renger: Halae Magdeburgicae, 1742: 686

Wright, Edward

1618 *A description of the admirable table of logarithmes . . .*, Waterson: London, 1618: 106, 594, 595, 635

Wyman, Myra F.; Wyman, Bostwick F.

1985 *An Essay on Continued Fractions*. Leonhard Euler. Translated by Myra F. Wyman and Bostwick F. Wyman: Mathematical Systems Theory 18 (1985), p. 295–328: 56

Yushkevich (Juškevič), Adol'f Pavlovich (et al.)

1957 *Жизнь и математическое творчество Леонарда Эйлера* [*Leonhard Euler's life and mathematical work*]: *Успехи математических наук* [Progress of the mathematical sciences] 4 (1957), p. 3–28: 675

1968 *Л. Эйлер и Ж.-Н. Делиль в их переписке, 1735–1765* [*L. Euler et J.N. Delisle dans leur correspondance, 1735–1765*]: *Русско-французские научные связи* [*Relations scientifiques russo-françaises*], Nauka: Leningrad, 1968, p. 119–279: 697, 979, 980, 984

Yushkevich (Juškevič), Adol'f Pavlovich; Kopelevich (Kopelevič), Yudif' Khaimovna

1983 *Христиан Гольдбах* [*Christian Goldbach*] 1690–1764, Nauka: Moskva, 1983: 3, 5

1988 *La correspondance de Leibniz avec Goldbach*: Studia Leibnitiana XX/2 (1988), p. 175–189: 4

1994 *Christian Goldbach 1690–1764*. Aus dem Russischen übersetzt von Annerose und Walter Purkert (Vita Mathematica, 8), Birkhäuser: Basel, 1994: 3, 13, 15, 16, 23, 78, 698, 885, 1006, 1070

Yushkevich (Juškevič), Adol'f Pavlovich; Winter, Eduard

1959 *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers*, Teil I: *Der Briefwechsel L. Eulers mit G.F. Müller, 1735–1767*, herausgegeben und eingeleitet von A.P. Juškevič und E. Winter unter Mitwirkung von P. Hoffmann (Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas, Band III, Teil I), Akademie-Verlag: Berlin, 1959 [this is quoted in the present volume as JW 1]: 12, 24, 28, 81, 87, 701, 985, 1095, 1105, 1122, 1124, 1129, 1138

1961 *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers*, Teil 2: *Der Briefwechsel L. Eulers mit Nartov, Razumovskij, Schumacher, Teplov und der Petersburger Akademie, 1730–1763*, herausgegeben und eingeleitet von A.P. Juškevič und E. Winter unter Mitwirkung von P. Hoffmann und Ju.Ch. Kopelevič (Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas, Band III, Teil 2), Akademie-Verlag: Berlin, 1961 [this is quoted in the present volume as JW 2]: 77, 87, 88, 676, 686, 697, 701, 725, 739, 745, 802, 812, 848, 920, 951, 963, 973, 976, 979, 980, 1006, 1023, 1048, 1091, 1095, 1097, 1113, 1123, 1129

1965 *Leonhard Euler und Christian Goldbach. Briefwechsel 1729–1764*, herausgegeben und eingeleitet von A.P. Juškevič und E. Winter, zum Druck vorbereitet von P. Hoffmann, T.N. Klado und Ju.Ch. Kopelevič (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Philosophie, Geschichte, Staats-, Rechts- und Wirtschaftswissenschaften, Jg. 1965, Nr. 1), Akademie-Verlag: Berlin, 1965 [this is quoted in the present volume as *Euler-Goldbach* (1965)]: IX, 23, 46, 87, 646, 647, 741, 744, 795, 882, 1080

1976 *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers*, Teil 3: *Wissenschaftliche und wissenschaftsorganisatorische Korrespondenzen, 1726–1776*, herausgegeben und eingeleitet von A.P. Juškevič und E. Winter; zum Druck vorbereitet von P. Hoffmann, T.N. Klado †, Ju.Ch. Kopelevič (Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas, Band III, Teil 3), Akademie-Verlag: Berlin, 1976 [this is quoted in the present volume as JW 3]: 27, 87, 676, 686, 694, 697, 772, 785, 920, 925, 1066

Zacharias, Heinrich Wilhelm Max

1914 *Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung*: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III/1 B 9, Teubner: Leipzig, 1914–1932, p. 859–1172: 956

Zagier, Don Bernard

1981 *Zetafunktionen und quadratische Körper. Eine Einführung in die höhere Zahlentheorie*, Springer: Berlin (etc.), 1981: 656

Zaragoza, Bernardo José

1674 *Geometria Magna in Minimis* in tres Partes divisa, Calvo: Toleti [Toledo], 1674: 68, 956

Zedlitz-Neukirch, Leopold von

1836 *Neues preußisches Adels-Lexicon oder genealogische und diplomatische Nachrichten ...* (ed. L. v. Zedlitz-Neukirch), Bd. 1–5, Reichenbach: Leipzig, 1836–1843: 739

Anonymous and collective publications

Académie Française

1704 *Observations de l'Academie Françoise sur les Remarques de M. de Vaugelas*, Coignard: Paris, 1704: 508, 1058, 1059

Adres-Calender

1742 *Adres-Calender der Königlich-Preußischen Haupt- und Residentz-Stadt Berlin ...*, Unger: Berlin, 1742: 676

Atlas Russicus

1745 *Atlas Russicus: mappa una generali et undeviginti specialibus vastissimum Imperium Russicum cum adiacentibus regionibus secundum leges geographicas et recentissimas observationes delineatum exhibens*, cura et opera Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, Typis Academiae Imperialis Scientiarum: Petropoli [Petersburg], 1745: 671

Berlinische Nachrichten von Staats- und gelehrten Sachen

1744a *Berlin, vom 25. Januarii* [report on the first General Assembly of the Royal Academy of Sciences]: Berlinische Nachrichten von Staats- und gelehrten Sachen 1744, No. XI (25. Januar), p. [1–2]: 829

1744b *Gelehrte Sachen. Berlin* [report on the constitution of the Royal Academy of Sciences]: Berlinische Nachrichten von Staats- und gelehrten Sachen 1744, No. XLIX (23. April), p. [3–4]: 832

Berlinische Privilegirte Zeitung

1750 *Von gelehrten Sachen* [report on Philidor's visit]: Berlinische Privilegirte Zeitung 1750, 43. Stück (9. April), p. 4: 1031, 1035

Braunschweigische Anzeigen

1749a *Aufgabe: Wie steht auf das kürzeste zu berechnen ...*: Braunschweigische Anzeigen 5 (1749), 50. Stück (21. Junius), col. 1011–1012: 458, 460, 462, 1005, 1006, 1008, 1010

1749b *Beantwortete Aufgaben, VI*: Braunschweigische Anzeigen 5 (1749), 65. Stück (13. August), col. 1319: 462, 1006, 1010

1749c *Beantwortete Aufgabe*: Braunschweigische Anzeigen 5 (1749), 70. Stück (30. August), col. 1417–1419: 1006

Dictionnaire historique (ed. L. Moréri et al.)

1740 *Le grand dictionnaire historique ou le mélange curieux de l'histoire sacrée et profane ...*, commencé en 1674 par M.re Louis Moréri ..., Nouvelle edition de Bâle en François, corrigée & considérablement augmentée, 6 vols., Brandmuller: Basle, 1740: 259, 273, 772, 783, 801

"Dictionnaire de Trévoux"

1732 ["Dictionnaire de Trévoux", i. e.] *Dictionnaire universel françois & latin ...*, Nouvelle [3ème] édition corrigée, 5 vols., Gandouin / Giffard: Paris, 1732: 192, 707, 712, 732

1734 ["Dictionnaire de Trévoux", i. e.] *Dictionnaire universel françois & latin ...*, Nouvelle édition corrigée, 5 vols., Antoine: Nancy, 1734: 732

1740 ["Dictionnaire de Trévoux", i. e.] *Dictionnaire universel françois & latin ...*, Nouvelle édition corrigée, 6 vols., Antoine: Nancy, 1740: 191, 192, 212, 219, 704, 706, 707, 730–732, 738, 771

1743 ["Dictionnaire de Trévoux", i. e.] *Dictionnaire universel françois & latin ...*, Nouvelle [4ème] édition, 6 vols., Delaulne: Paris, 1743: 222, 322, 742, 744, 772, 859

Dictionary of Scientific Biography

1970 *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C.C. Gillispie), vol. I–XVIII, Scribner: New York, 1970–1990: 3

Gazette d'Amsterdam (ed. L. Tronchin Dubreuil)

1749 *M.^{r} Quin Mackenzie Quin ...* [advertisement]: Gazette d'Amsterdam, n° LXII du Mardi 5 Août 1749, p. [4]: 460, 462, 1008–1010

Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen

1743 *Quadratzahlen, welche einfachen Zahlen in zwo derselben getheilet werden können*: Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen 1743, 24. Stück (25. Martii), p. 216: 276, 804, 806

1747 [advertisement of Mizler's *Musikalische Bibliothek*, vol. III.1/2]: Göttingische Zeitungen von gelehrten Sachen 1747, 22. Stück (16. Martii), p. 174–176: 388, 393, 930, 935

Hamburgische Berichte von den neuesten Gelehrten Sachen

1744 [review of Knutzen, *Vernünftige Gedanken von den Cometen*]: Hamburgische Berichte von den neuesten Gelehrten Sachen 13 (1744), Nr. XXIX (14. April), p. 245–248: 299, 304, 832, 833, 837

Hamburgisches Magazin

1751 *Coniectura Physica circa Propagationem Soni ac Luminis, una cum aliis Dissertationibus analyticis Auctore Leonh. Eulero* [anonymous review of E. 121 and E. 156]: Hamburgisches Magazin 8 (1751), p. 271–287: 565, 1124, 1125

Ladies' Diary

1828 *Question 1468*: The Ladies' Diary for the year of Our Lord 1828 (ed. H. Beighton), p. 35–36: 1085

Materialy dlya istorii Akademii Nauk

1885 *Матеріалы для исторіи Императорской Академіи Наукъ* [*Materials for the history of the Imperial Academy of Science*], t. I–X, Akademia Nauk: Sanktpeterburg, 1885–1900: 3, 10, 23, 94, 670, 671, 676, 701, 745, 772, 812

Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg

1830 *Commentationes Cel. L. Euleri* [E. 772–E. 785]: Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg 11 (1830): 85

Mercure de France

1752 *Nouvelles de la Cour, de Paris, &c.*: Mercure de France, Juin 1752, *Premier Volume*, p. 177–187: 507, 1058, 1059

Neue Zeitungen von gelehrten Sachen

1741 [review of Newton, *Principia* (ed. Le Seur / Jacquier), t. II]: Neue Zeitungen von gelehrten Sachen 1741, N. LVII (17. July), p. 505–507: 170, 677

1744 [review of Clairaut, *Theorie de la Figure de la Terre*]: Neue Zeitungen von gelehrten Sachen 1744, N. XXXVI (4. May), p. 316–318: 300, 833

Neuer Büchersaal

1746 [review of:] *Gerhard Andreä Müllers ... Untersuchung der wahren Ursache von Neutons allgemeiner Schwere ...*: Neuer Büchersaal der schönen Wissenschaften und freyen Künste III.4 (July 1746), p. 314–328: 829

1747 [review of:] *Elementa Philosophiae Rationalis seu Logicae ... in usum Auditorum suorum demonstrata a Martino Knuzen*[!]: Neuer Büchersaal der schönen Wissenschaften und freyen Künste IV.3 (March 1747), p. 231–243: 930

Nova Acta Eruditorum

1743 [anonymous] *Problema, ad quod evolvendum Geometrae invitantur*: NAE 1743, p. 659–660: 67, 294, 295, 297, 827, 828, 830

1751 [review of:] *Introductio in Analysin Infinitorum, Autore Leonhardo Eulero* ...: NAE Aprilis 1751, p. 222–235: 976

Palaty Sanktpeterburgskoĭ Akademii Nauk

1741 *Палаты Санктпетербургской Императорской Академіи Наукъ, Библиотеки и Кунсткамеры ...* / *Gebäude der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, nebst der Bibliothec u. Kunst-Kammer ...* (ed. J.D. Schumacher), Akademiya Nauk: Sanktpeterburg, 1741: 171, 174, 678, 680, 683

Philosophical Transactions of the Royal Society

1669 [review of:] *Labyrinthus Algebrae, Auth. Joh. Jac. Ferguson*: Phil. Trans. vol. IV (1669), no. 49, p. 996–999: 212, 729, 731

Protokoly Akademii Nauk

1897 *Протоколы засѣданій конференціи Императорской Академіи Наукъ съ 1725 по 1803 года* [*Procès-Verbaux des Séances de l'Académie Impériale des Sciences depuis sa fondation jusqu'à 1803*], t. I–IV, Akademiya Nauk: S.-Peterburg, 1897–1911: 21, 22, 617, 653, 655, 658, 671, 675, 682, 725, 1009

Rukopisnye materialy L. Eĭlera

1962 *Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии Наук СССР* / *Manuscripta Euleriana Archivi Academiae Scientiarum URSS* (ed. Yu.Kh. Kopelevich et al.), t. I–II, Akademia Nauk: Moskva / Leningrad, 1962–65: 82, 840

Systematic Subject Index

The index that follows tries to help the reader searching the Euler-Goldbach correspondence for those places where some specific topic (such as, e.g., the Goldbach conjecture, the sighting of comets, the Berlin Academy's prize competition or the birth of Euler's children) is mentioned. The topics are ordered systematically: mathematics (the central theme of the correspondence) in the first place, then all other sciences, the correspondents' professional activities and finally their personal lives. Many entries are subdivided into sections and subsections at up to four levels. An attempt has been made to arrange the individual entries in an order representing dependences and connections; however, quite different "mind-maps" could obviously be conceived.
References are given – in the form "I x.y" – to the individual Sections of the Introduction and – in the form "n° xx" – to the letters identified by their running numbers, which appear in the column headings both of the original texts and the translations.

Name Index

The name index that follows lists all persons appearing (by name or by implicit reference) in the Euler-Goldbach letters, in the preface, in the introduction or in the editorial notes of this volume. All references with page numbers 99–580 point to mentions in the text of Euler's and Goldbach's original letters.
The index entries for living persons are restricted to their full names; for universally well-known persons and for those recently deceased, only the years of birth and death are added. For all others, some additional biographical indications, taken from standard reference works, are given; the editors particularly tried to give as much reliable information as possible about those lesser-known persons from the 18th century who were connected in some way to Euler and Goldbach, their life and their scientific interests.

List of Abbreviations

The following list comprises both the abbreviations frequently employed in the original text of the Euler-Goldbach letters and those used in the editorial commentary – except for conventional abbreviations such as "vol." that can be found in any dictionary. Some (non-mathematical) signs occurring in the letters have been added at the end.

AE	*Acta Eruditorum*, Lipsiae [Leipzig] 1682–1731
AP	*Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Petropoli 1777 (1778)–1782 (1786)
č.	chast' [часть] (part) [used in shelfmarks]
CLLE	*Catalogus Librorum Leonhardi Euleri*: database established from the inventory of Euler's private library in his *Notebook VI* (Bernoulli-Euler-Zentrum, Basel)
Cop.	*Copeken* (copecks)
CP	*Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Petropoli 1726 (1728)–1743 (1751)
Correspondance	*Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^{ème} siéle* [see Bibliography, entry Fuß, P.H. 1843]
D.	*Dominus* (Mr.)
d.	*die* (on the day)
E. xxx	item numbered E xxx in Eneström's *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers* [see Bibliography, entry Eneström 1910]
Ew. HEdgeb., E. H.	Euer HochEdelgebohr(n)en (formal address – literally: Your Most Highly born (person))
f.	fond [фонд] (collection) [used in shelfmarks]
fl.	*florini* (guilders)
fol.	*folio* (sheet)
H. / H.^{n}	Herr(n) (Mr.)
HH.	Herren (Mssrs.)
JW 1, 2, 3	*Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers* [see Bibliography, entries Yushkevich / Winter 1959, 1961, 1976]
Mém. Berlin	*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin 1745 (1746)–1769 (1771)
Mém. Paris	*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris 1699 (1702)–1790 (1797)
n.	nomer [номер] (number) [used in shelfmarks]
NAE	*Nova Acta Eruditorum*, Lipsiae [Leipzig] 1732–1776
NAP	*Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Petropoli 1783–1802 (1806)
NCP	*Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Petropoli 1747/48 (1750)–1775 (1776)
Nouv. Mém. Berlin	*Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin 1770 (1772)–1786 (1788)

O. x / yy	*Leonhardi Euleri Opera omnia*, Lipsiae [Leipzig]; Turici [Zurich]; Basileae [Basel], 1911– [*Series* x in Roman numerals / volume yy in Arabic numerals]
QED, *Q. E. D.*	*Quod Erat Demonstrandum* (which was to be proved)
PFARAN	*Sankt-Peterburgskiĭ filial Arkhiva Rossiĭskoĭ Akademii Nauk* (Archive of the Russian Academy of Sciences, Petersburg Branch)
Phil. Trans.	*Philosophical Transactions of the Royal Society*, London 1665–
Prix Paris	*Pieces qui ont remporté le Prix de l'Académie Royale des Sciences* [and *Recueil des Pieces* ...], Paris 1721–1777
r	*recto*
R xxxx	letter numbered xxxx in the *Repertorium* of Leonhard Euler's correspondence (O. IVA/1)
R., *Rub.*	*Rubel* (roubles)
RGADA	*Rossiĭskiĭ gosudarstvennyĭ arkhiv drevnikh aktov* (Russian State Archive for Old Files), Moscow
Rthl.	Reichsthaler
rv	*recto* and *verso*
St. xx	item numbered xx in H. Straub's list of Daniel Bernoulli's works in the *Dictionary of Scientific Biography* [also reproduced in *Die Werke von Daniel Bernoulli*]
Thlr., thl.	thaler
v	*verso*
♃	*Jupiter*
☿	*Mercurius*, *dies Mercurii* (Wednesday)
♄	*Saturnus*, *dies Saturni* (Saturday)
☉	*Sol* (Sun)
*	born
†	died
·/·	*verte* (turn over)